整函数空间上微分算子的频繁超循环序列

´L. Bernal Gonzalez、M.C. Calderon-Moreno 与 J.A. Prado-Bassas

Abstract. 本文给出一个判据，用以获得复平面上整函数空间中卷积算子序列的频繁超循环性。该判据要求这些算子的生成函数在某个适当的环域上不取零值，并且在该环域的边界上，序列每一项的模在某种意义下受其前面各项或后面各项控制。

arXiv:2602.19343v1 [math.CV] 22 Feb 2026

1. Introduction.

超循环性是泛函分析中的一个课题，近四十年来已得到充分研究。它所关注的是寻找这样的向量：其在某个算子或算子序列作用下的轨道在承载空间中稠密。关于这一主题的背景，读者可参阅综述 [16] 以及著作 [2, 17]。从这一观点来看，一类值得研究的有趣算子是复平面上整函数空间中的微分算子 $\mathbb{C}$。在本文中，我们将考虑一个微分算子序列，并在一组合理假设下研究其频繁超循环性——一种更强形式的超循环性，见下文。

我们先明确相关术语。设 X, Y 是两个线性拓扑空间（在许多情况下，$X = Y$），$T_n : X \to Y (n \in \mathbb{N})$ 是一列连续线性映射，并且 $x_0 \in X$。若其在（T_n）作用下的轨道$\{T_n x_0 : n \in \mathbb{N}\}$ 在 Y 中稠密，则称 x_0 对于（T_n）是超循环的 或普适的 。若族（T_n）含有一个超循环向量，则称其为超循环的 。显然，若序列（T_n）是超循环的，则 Y 必须是可分的。若 $T : X \to X$ 是 X 上的算子（= 连续线性自映射），则若向量 $x \in X$ 对于 T 是超循环的，称其为 T 的超循环向量 ；这意味着它对于 T 的迭代序列（T^n）是超循环的，即 $T^n = T \circ T \circ \cdots \circ T$（$n$ 次）。若存在 T 的超循环向量，则称算子 T 是超循环的 。

本文特别关注定义在 Fr´echet 空间 $H(\mathbb{C})$ 上的微分算子；该空间由所有整函数构成，并赋予紧集上一致收敛拓扑。若整函数 $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 满足存在正常数 A 和 B ，使得 $|\Phi(z)| \leq Ae^{B|z|}$ $(z \in \mathbb{C})$，则称其为指数型。此类函数记为 $\mathcal{E}$。容易看出（例如参见[13, 3]），若 Φ 是上述指数型整函数，则级数

2020 数学主题分类。30D15, 30K15, 47A16, 47B91。关键词和短语。微分算子、整函数、算子的超循环序列、频繁超循环性、Borel 变换。

$\Phi(D) = \sum_{n=0} a_n D^n$ 在 $H(\mathbb{C})$ 上定义了一个算子，其作用方式如下

y:

$$(\Phi(D)f)(z) = \sum_{n=0} a_n f^{(n)}(z) \quad \text{for all} \quad z \in \mathbb{C}.$$

因此，在后述条件下，$\Phi(D)$ 定义了一个（一般而言为无限阶的）常系数线性微分算子。[15] 中证明，$H(\mathbb{C})$ 上的算子 L 与每一个平移算子 τ_a ($\tau_a f := f(\cdot + a)$ $a \in \mathbb{C}$) 可交换，当且仅当 L与导数算子 D 可交换，并且当且仅当对某个整函数 $\Phi \in \mathcal{E}$ 有 $L = \Phi(D)$。Godefroy 和 Shapiro 在 [15] 中证明了 $H(\mathbb{C})$ 上每一个与平移可交换的非标量算子的超循环性。这些算子也称为卷积算子。特别地，通过选取 $\Phi(z) = e^{az}$ 与 $\Phi(z) = z$，可以重新得到每一个非平凡平移算子以及导数算子的超循环性，它们分别已由 Birkhoff [7] 和 MacLane [19] 得到。据我们所知，卷积算子序列（不必是单个算子的迭代）的超循环性首次在 [5]中得到分析。

超循环性的一种更强形式是频繁超循环性。这一概念由 Bayart 和 Grivaux [1] 于2006年提出。拓扑向量空间 X上的算子 T 称为频繁超循环，如果存在向量 $x_0 \in X$（称为 T的频繁超循环向量），使得 $\underline{\text{dens}}\{n \in \mathbb{N} : \ T^n x_0 \in U\} > 0$对 X的任意非空开子集 U成立，其中 $\underline{\text{dens}}(A)$ 表示子集 $A \subset \mathbb{N}$的下密度，即

$$\underline{\text{dens}}(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\text{card}\,(A \cap \{1, 2, \ldots, n\})}{n}.$$

将迭代 T^n 替换为序列的第 n项 T_n，便得到算子的频繁超循环序列（T_n）这一概念，参见 [10]。作为 Godefroy–Shapiro 结果的更强版本，Bonilla 和 Grosse-Erdmann [9]于2006年证明，任意非标量微分算子 Φ（D）实际上都是频繁超循环的。

这篇短文旨在为整函数空间上卷积算子序列的频繁超循环性建立一个判据。该判据要求这些算子的生成函数在某个适当的环域内不为零，并且在环域边界上，序列中每一项的模在某种意义上受其前项或后项控制。我们将在第3节中完成这一工作，而第2节将用于建立一些关于超循环性、整函数的增长和博雷尔变换的辅助结果。

2. Preliminary results.

首先，我们回顾一下关于算子序列频繁超循环性的一个判据。下一个充分条件（定理 2.1）由 Bonilla 和 Grosse-Erdmann 建立，参见 [10] 和 [17, 第 9]。我们需要用到无条件收敛的概念。在 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 这个带有 F-范数 X 的 F-空间 $\|\cdot\|$ 中，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 称为无条件收敛，如果对于任意双射 $\pi : \ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ 都收敛。与无条件收敛等价的条件可见于 [21, 3.8.2 和第 153] 以及 [18, 3.3.8 和 3.3。9]其中一个将在定理 3.1的证明中使用，其表述如下：对于任意有界标量序列（α_n），级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ 收敛。

此外，如果给定 $\varepsilon > 0$，存在一个不依赖于 k 的 $N \in \mathbb{N}$，使得对于每个满足 $F \cap \{1, 2, \cdots, N\} = \varnothing$ 的有限集 $F \subset \mathbb{N}$ 以及每个 $k \in I$，都有$\left\| \sum_{n \in F} x_{n,\,k} \right\| < \varepsilon$，那么级数族 $\sum_{n=1}^{\infty} x_{n,\,k}$ $(k \in I \subset \mathbb{N})$ 在 k 上称为无条件一致收敛。

定理 2.1。设 X 是一个 F-空间，Y 是一个可分F空间，且 $T_n : X \to Y$ 是一列连续线性映射。假设存在 Y_0 的一个稠密子集 Y 以及映射 $S_n : Y_0 \to X$，使得对所有 $y \in Y_0$，以下条件成立：

(i) $\sum_{n=1}^{k} T_k S_{k-n} y$ 在 Y 中无条件收敛，并且关于 $k \in \mathbb{N}$ 一致。

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} T_k S_{k+n} y$ 在 Y 中无条件收敛，并且关于 $k \in \mathbb{N}$ 一致。(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} S_n y$ 无条件收敛于 Y。(iv) $T_n S_n y \to y$ 当 $n \to \infty$ 时。

则序列 (T_n) 是频繁超循环序列。

在条件 (i) 中，我们只有有限级数，但可以通过添加零项将其理解为无限级数。此外，约定 $S_0 =$ 是 Y_0 上的恒等算子。

现在，我们将注意力转向整函数的一种重要积分表示。回想一下，函数 $\Phi \in H(\mathbb{C})$ 的增长阶 定义为
$\rho(\Phi) := \limsup_{r \to \infty} \frac{\log \log M(r,\Phi)}{\log r}$，其中 $M(r, \Phi) := \max\{|f(z)| : |z| = r\}$(参见 [8])。若$\alpha \in [0, +\infty)$，则 α-型的 Φ 为 $\tau_\alpha(\Phi) := \limsup_{r \to \infty} \frac{\log M(r,\Phi)}{r^\alpha}$。 Φ的指数型为 $\tau(\Phi) := \tau_1(\Phi)$。于是，当且仅当 $\tau(\Phi) < +\infty$时， $\Phi \in \mathcal{E}$（即， Φ是指数型）。

根据马尔格朗日–埃伦普赖斯定理（参见 [3], [14] 或 [20]），任何非零微分算子 $\Phi(D)$ 都是满射，事实上，它还具有一个连续右逆。为了在主定理的证明中计算这样的逆算子，我们可以使用博雷尔变换这一工具。

A假设 $\Phi \in \mathcal{E}$。 Φ 的博雷尔变换是由级数给出的函数 s

$$(B\Phi)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! a_n}{z^{n+1}}, \tag{2.1}$$

在 $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$的条件下。由于 $\limsup_{n \to \infty} |\Phi^{(n)}(0)|^{1/n} = \tau$(见 [8, 第 11–12]页），（2.1）中的级数在 $\{z$ 上定义了一个解析函数：$|z| > \tau\}$。下一个命题通常称为波利亚表示，可见于 [8,第 73–74]页。

引理 2.2。设 Φ 是指数型整函数。那么，对于每个$R > \tau(\Phi)$ 以及每个 $z \in \mathbb{C}$，都有

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=R} e^{zt} \, (B\Phi)(t) \, dt.$$

3. Frequent hypercyclicity of sequences of differential operators.

现在，我们给出一个关于微分算子序列频繁超循环性的通用判据。这些算子作用于 $H(\mathbb{C})$，由满足适当条件的整函数生成。

对于任意 $R_1, R_2, \ldots, R_p \in (0, +\infty)$，我们用 $A(R_1, \ldots, R_p)$ 表示以原点为中心、由半径 R_i $(i = 1, \ldots, p)$ 所确定的闭环域，即

$$A(R_1, \ldots, R_p) = \{z \in \mathbb{C} : \rho \le |z| \le \sigma\},$$

其中 $\rho := \min\{R_1, \dots, R_p\}$， $\sigma := \max\{R_1, \dots, R_p\}$。

定理 3.1。设(Φ_n) 是一个整函数序列，且均为指数型。记 Φ_0 为常值函数1。假设存在正实数 $R_1, R_2, R_3, \alpha_{n,j} (n > j \geq 0)$ $\beta_{n,j}$ $(n > j \geq 1)$ 满足以下条件：

(a) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{n,j} < +\infty$ 且 $\sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{n=j+1}^{\infty} \beta_{n,j} < +\infty$。*(b)* 对所有 $t \in A(R_1, R_2, R_3)$ 及所有 $n \in \mathbb{N}$, $\Phi_n(t) \neq 0$。*(c)* 对所有 $t \in \{|z| = R_1\}$ 及所有 $n > j \geq 0$, $|\Phi_n(t)| \leq \alpha_{n,j}|\Phi_j(t)|$。*(d)* 对所有 $t \in \{|z| = R_2\}$ 及所有 $n > j \geq 1$, $|\Phi_j(t)| \leq \beta_{n,j}|\Phi_n(t)|$。*(e)* 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\min_{|t|=R_3} |\Phi_n(t)|}$ 收敛。

则微分算子序列 $(\Phi_n(D))$ 在 $H(\mathbb{C})$ 上是频繁超循环的。

证明。 我们应用定理 2.1 并采用如下角色设定：

$$X := H(\mathbb{C}) =: Y,\ Y_0 := \{\text{polynomials}\},\ T_n := \Phi_n(D)\ (n \in \mathbb{N}).$$

我们的目标是定义映射 $S_n : Y_0 \to X$， 使得上述定理中的四个条件 (i) 至 (iv) 均得到满足。

由于 $\tau(P) = 0$对每个多项式 P成立，由引理 2.2可知，对所有 $R > 0$我们有

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=R} e^{zt}\,(BP)(t)\,dt \quad \text{for all } z \in \mathbb{C} \text{ and all } P \in Y_0. \tag{3.1}$$

设 $R \in [\rho, \sigma]$，其中 $\rho = \min\{R_1, R_2, R_3\}$ 且 $\sigma = \max\{R_1, R_2, R_3\}$。借助 (b)，只要 $|t| = R$，便有 $\Phi_n(t) \neq 0$ $(n \geq 1)$。然后我们通过下式定义 $S_n : Y_0 \to X$

$$(S_nP)(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=R} \frac{e^{zt}\,(BP)(t)}{\Phi_n(t)}\,dt \quad \text{for all } z \in \mathbb{C}. \tag{3.2}$$

注意，根据关于参数积分的熟知结果，最后一个公式定义了一个真正的整函数。此外，借助柯西积分定理与假设 (b)， S_n 在 (3.2) 中的定义不依赖于 R。特别地，我们可以取 $R = R_1$、 R_2、 R_3。

固定 $n \in \mathbb{N}$ 并令 $\Phi_n(z) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j z^j$。我们使用 (3.1)（其中 $R \in [\rho, \sigma]$）和 (3.2)。则对每个 $P \in Y_0$ 以及每个 $z \in \mathbb{C}$， 我们得到

$$\begin{aligned}
(T_nS_nP)(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} h_j (S_nP)^{(j)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h_j}{2\pi i} \oint_{|t|=R} t^j e^{zt} \frac{(BP)(t)}{\Phi_n(t)}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=R} \left(\sum_{j=0}^{\infty} h_j t^j \right) e^{zt} \frac{(BP)(t)}{\Phi_n(t)}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=R} e^{zt} (BP)(t)\,dt = P(z).
\end{aligned}$$

注意，为了在第三个等号处交换积分与求和，我们使用了 $\sum_{j=0}^{\infty} \oint_{|t|=R} \left| \frac{h_j}{2\pi i} t^j e^{zt} \frac{(Bf)(t)}{\Phi_n(t)} \right| dt < +\infty$，这很容易由$|h_j|^{1/j} \longrightarrow 0$推出，而后者成立是因为 Φ_n 是整函数。

总而言之，对于所有 $P \in Y_0$，我们得到 $T_n S_n P = P \to P$ （$n \to \infty$）。这就是定理 2.1中的（iv）。

我们来证明上述定理中的条件 (iii)。根据 (e)，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\min_{|t|=R_3} |\Phi_n(t)|} < +\infty.$$

固定一个标量有界序列 (c_n)。需要证明，对于每个多项式P，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n S_n P$在 $\mathbb{C}$中紧致收敛。显然，只需证明∞对于任意给定的 $K > 0$，都有 $\sum_{n=1} \sup_{|z|\le K} |(S_n P)(z)| < +\infty$。为此，注意到 (e) 意味着

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{|z|\le K} |(S_n P)(z)| &= \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{|z|\le K} \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=R_3} \frac{e^{zt}\,(BP)(t)}{\Phi_n(t)}\, dt \right| \\
&\le \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi R_3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{|z|\le K} \sup_{|t|=R_3} \left| \frac{e^{zt}\,(BP)(t)}{\Phi_n(t)} \right| \\
&\le R_3 \cdot e^{KR_3} \cdot \sup_{|t|=R_3} |(BP)(t)| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\min_{|t|=R_3} |\Phi_n(t)|} < +\infty,
\end{aligned}$$

由此即可得到所需结果。

现在，我们来证明定理 2.1 中的条件 (ii)。固定一个多项式 P以及一个有界标量序列 (c_n)。我们要证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n T_k S_{n+k} P$ 在 $\mathbb{C}$ 中一致紧致收敛。 $k \in \mathbb{N}$为此，只需证明，对于任意 $K > 0$，∞级数 $\sum_{n=1} \sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{|z|\le K} |(T_k S_{n+k})(z)|$ 收敛。采用与上文证明条件 (iv) 时类似的论证，可得

$$(T_k S_{n+k} P)(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=R_2} e^{zt} (BP)(t) \cdot \frac{\Phi_k(t)}{\Phi_{n+k}(t)}\, dt \quad \text{for all } z \in \mathbb{C}.$$

因此，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{\substack{|z|\le K \\ k\in\mathbb{N}}} |(T_k S_{n+k} P)(z)| &= \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{\substack{|z|\le K \\ k\in\mathbb{N}}} \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=R_2} e^{zt} (BP)(t) \cdot \frac{\Phi_k(t)}{\Phi_{n+k}(t)}\, dt \right| \\
&\le \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi R_2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{\substack{|z|\le K,\, |t|=R_2 \\ k\in\mathbb{N}}} \left| \frac{e^{zt}\,(BP)(t)\Phi_k(t)}{\Phi_{n+k}(t)} \right| \\
&\le R_2 \cdot e^{KR_2} \cdot \sup_{|t|=R_2} |(BP)(t)| \cdot \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{n+k,k} \\
&= R_2 \cdot e^{KR_2} \cdot \sup_{|t|=R_2} |(BP)(t)| \cdot \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=k+1}^{\infty} \beta_{n,k} < +\infty,
\end{aligned}$$

其中，第二个不等式用到了 (d)，随后利用 (a) 得出最后一个级数收敛。因此，条件 (ii) 得证。

最后，我们将证明定理2.1 中的条件（i）对我们的序列（T_n）成立。再次固定一个多项式 P 以及一个标量有界序列（c_n）。我们的目标是

证明 $\sum_{n=1}^{k} c_n T_k S_{k-n} P$ 在 $\mathbb{C}$ 上一致地 $k \in \mathbb{N}$紧致收敛。只需k证明，对每个 $K > 0$，扩展正数 $\sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=1} \sup_{|z|\le K} |\,(T_k S_{k-n})\ (z)\,|$ 是有限的。我们指出，约定 $S_0 =$ 单位算子与（3.2）是一致的，只要考虑到（3.1）以及以下事实 $\Phi_0 \equiv 1$。如同前面的部分，我们得到以下估计，其中使用了（c）和（a）的第一部分：

$$\begin{aligned}
\sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{k} \sup_{|z|\le K} |(T_k S_{k-n})(z)| &= \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{k} \sup_{|z|\le K} \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=R_1} e^{zt} (BP)(t) \cdot \frac{\Phi_k(t)}{\Phi_{k-n}(t)}\, dt \right| \\
&\le \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi R_1 \cdot \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{k} \sup_{\substack{|z|\le K \\ |t|=R_1}} \left| \frac{e^{zt}\,(BP)(t)\Phi_k(t)}{\Phi_{k-n}(t)} \right| \\
&\le R_1 \cdot e^{KR_1} \cdot \sup_{|t|=R_1} |(BP)(t)| \cdot \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{k} \beta_{k,k-n} \\
&= R_1 \cdot e^{KR_1} \cdot \sup_{|t|=R_1} |(BP)(t)| \cdot \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=0}^{k-1} \beta_{k,n} < +\infty.
\end{aligned}$$

因此，条件 (i) 得证，我们的定理也随之得证。 □

公平地说，乍看之下，前一定理中假设的条件 (a) 至 (e) 似乎是 特意 为应用定理 2.1而提出的。然而，我们将在下面的结果中看到，定理 3.1如何用于给出卷积算子频繁超循环序列的具体例子，且其成员并非单个算子的迭代。

定理 3.2。 设(c_n) 是一个由非零复数标量组成的序列，满足

$$\gamma := \liminf_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| > 0 \quad and \quad \delta := \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| < +\infty. \tag{3.3}$$

则有以下结论：

(i) 假设 $\Phi \in \mathcal{E}$是一个函数，存在 $R_1, R_2 \in (0, +\infty)$ 使得 $|\Phi(t)| < 1/\delta$ 在 $|t| = R_1$，$|\Phi(t)| > 1/\gamma$ 在 $|t| = R_2$，并且 $\Phi(t) \neq 0$ 对所有$t \in A(R_1, R_2)$成立。则微分算子序列 $(c_n \Phi(D)^n)$ 在 $H(\mathbb{C})$ 上频繁超循环。*(ii) T*

微分算子序列$(c_n D^n)$ 在 $H(\mathbb{C}$上是频繁超循环的).

证明。 注意，只需取 $\Phi(z) := z$, $R_1 = \frac{1}{2\delta}$ 和 $R_2 := \frac{2}{\gamma}$，即可由 (i) 推出 (ii)。因此，只需证明 (i)。

为此，考虑函数 $\Phi_n(z) := c_n \Phi^n(z)$（$n = 1, 2, \ldots$），使得 $\Phi_n(D) = c_n \Phi(D)^n$。由 (3.3)、$|\Phi|$ 的连续性以及 $|t| = R_i (i = 1, 2)$ 的紧性可知，存在 μ、$\nu > 0$，使得 $\mu > \delta$、$\nu < \gamma$、$|\Phi(t)| \le \frac{1}{\mu}$ 在 $|t| = R_1$ 上成立，且 $|\Phi(t)| \ge \frac{1}{\nu}$ 在 $|t| = R_2$ 上成立。固定 $\mu' \in (\delta, \mu)$ 与 $\nu' \in (\nu, \gamma)$。于是存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \ge n_0$ 都有 $\nu' < \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| < \mu'$。必要时，从

我们的算子序列中删去有限多项，即可不失一般性地假定 $n_0 = 1$。我们令$c_0 := 1$ 以及 $\Phi_0(z) := 1$。于是，对所有 $n > j \geq 0$ 以及所有 $t \in \{|z| = R_1\}$，我们有

$$|\Phi_n(t)| = |c_n \Phi^n(t)| = \left| \frac{c_n}{c_{n-1}} \cdot \frac{c_{n-1}}{c_{n-2}} \cdots \frac{c_{j+1}}{c_j} \cdot \Phi^{n-j}(t) \right| \cdot |c_j \cdot \Phi^j(t)| \leq \left(\frac{\mu'}{\mu} \right)^{n-j} |\Phi_j(t)|.$$

类似地，对所有 $n > j \geq 0$ 以及所有 $t \in \{|z| = R_2\}$，我们得到

$$|\Phi_n(t)| = |c_n \Phi^n(t)| = \left| \frac{c_n}{c_{n-1}} \cdot \frac{c_{n-1}}{c_{n-2}} \cdots \frac{c_{j+1}}{c_j} \cdot \Phi^{n-j}(t) \right| \cdot |c_j \cdot \Phi^j(t)| \geq \left(\frac{\nu'}{\nu} \right)^{n-j} |\Phi_j(t)|.$$

特别地，$\min_{|t|=R_3} |\Phi_n(t)| \geq \left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^n$，其中 $R_3 := R_2$。于是，对所有 $n \in \mathbb{N}$以及所有 $t \in A(R_1, R_2, R_3) = A(R_1, R_2)$，有 $\Phi_n(t) \neq 0$，这即定理 3.1中的(b)。此外，(e)成立，因为由于 $\nu' > \nu$，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\min_{|t|=R_3} |\Phi_n(t)|}$ 收敛。现在，令

$$\alpha_{n,j} := \left(\frac{\mu'}{\mu} \right)^{n-j} \quad \text{and} \quad \beta_{n,j} := \left(\frac{\nu}{\nu'} \right)^{n-j},$$

我们得到定理3.1中的(c)和(d)成立。

最后，我们将验证剩余条件(a)。考虑到 $\frac{\mu'}{\mu} < 1$ 与$\frac{\nu}{\nu'} < 1$，我们得到：

- $$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{n,j} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{\mu'}{\mu} \right)^{n-j} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\mu'}{\mu} \right)^{j} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\mu'}{\mu} \right)^{j} = \frac{\mu'}{\mu - \mu'} < +\infty.$$
- $$\sup_{j \in \mathbb{N}} \sum_{n=j+1}^{\infty} \beta_{n,j} = \sup_{j \in \mathbb{N}} \sum_{n=j+1}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\nu'} \right)^{n-j} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\nu'} \right)^{n} = \frac{\nu}{\nu' - \nu} < +\infty.$$

证明完成。 □

前述定理的(ii)部分给出了一族频繁超循环的有限阶微分算子序列。下面给出一个由无限阶微分算子构成的例子。考虑 $T_n := \log n \cdot \left(D + \frac{\mathcal{T}}{3}\right)^n (n \in \mathbb{N})$，其中 $\mathcal{T}$ 是 1-平移算子 $(\mathcal{T} f)(z) := f(z + 1)$。于是 $D + \frac{\mathcal{T}}{3} = \Phi(D)$，其中 $\Phi(z) := z + \frac{e^z}{9}$。此外，若 $c_n := \log n$，则在(3.3)的记号下有 $0 < 1 = \gamma = \delta < +\infty$。我们在圆 $\gamma_1 \equiv |z| = 1/2$ 和 $\gamma_2 \equiv |z| = 2$ 上应用 Rouché 定理（例如参见 [12, 第 125] 页）。我们有，z 的唯一零点是原点，而 $|e^z/9| < 2/9 < 1/2 = |z|$ 在 γ_1 上；另一方面，在 γ_2 中有 $|e^z/9| < 8/9 < 2 = |z|$ 在 γ_2 上成立。于是，Φ 在 $|z| \leq 1$ 中有唯一零点，并且对所有 $z \in A(1, 2)$，$\Phi(z) \neq 0$。此外，$|\Phi(t)| \leq |z| + |e^z/9| < 1/2 + 2/9 < 1 = 1/\delta$ 在 γ_1 上，而 $|\Phi(t)| \geq |z| - |e^z/9| > 2 - 8/9 > 1 = 1/\gamma$ 在 γ_2 上。因此，定理 3.2(i) 适用，从而得到 (T_n) 的频繁超循环性。

我们还给出一个频繁超循环序列 (T_n) 的例子，其中卷积算子并非形如 $(c_n \Phi(D)^n)$。若 $\mathcal{T}$再次表示 1-平移算子，我们定义 $T_n := 5^n D^n + 9^{-n} \mathcal{T}^n (n \in \mathbb{N})$。于是 $T_n = \Phi_n(D)$，其中 $\Phi_n(z) = 5^n z^n + 9^{-n} e^{nz}$。现在，应用 Rouché 定理于闭弧 $\gamma_1 \equiv |z| = 1/15$和 $\gamma_2 \equiv |z| = 1$，可得 $\Phi_n(t) \neq 0$ 对所有 $t \in A(1/15, 1)$ 均成立。令 $\Phi_0(z) := 1$。简单计算——详情留给感兴趣的读者——可得，对所有$t \in \{|z| = 1/15\}$ 及所有 $n > j \geq 0$，有 $|\Phi_n(t)| \leq 2^{j-n} |\Phi_j(t)|$；对所有 $t \in \{|z| = 1\}$ 及所有

$n > j \geq 0$。因此，选择$R_1 = 1/15$、 $R_2 = 1 = R_3$，定理 3.1 中的条件 (a) 至 (e) 均得到满足，因此 (T_n) 是频繁超循环的。

4. Final remarks and questions.

1. 假设 $\Phi \in \mathcal{E}$ 满足定理3.2(i) 中的假设。考虑到 $\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \leq \liminf_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} \leq \liminf_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$，自然会产生如下问题：

> 是否仅有 $0 < \liminf_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} < +\infty$ 就足以保证$(c_n\Phi(D))$的频繁超循环性？

这应与 [6] 中的定理 2.6 进行比较，该定理包含如下结论。假设以下性质至少有一项成立：

- $(|c_n|^{1/n})$不收敛到零，且 $\Phi(0) = 0$。
- $0 < \liminf_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} < +\infty$。

于是，序列$(c_n\Phi(D)^n)$在 $H(\mathbb{C})$上是超循环的。

2. 在 [4, 定理 4] 中证明了，序列(c_nD^n)在 $H(\mathbb{C})$上是超循环的，当且仅当序列$(n|c_n|^{1/n})$无界。显然，这不足以保证频繁超循环性，因为可能存在 $\{n|c_n|^{1/n} : n \in S\}$ 有界，而 S 是 $\mathbb{N}$ 的子集，且$\mathrm{dens}(\mathbb{N} \setminus S) = 0$。通过加强假设，我们提出以下问题：

> *If* $\lim_{n\to\infty} n|c_n|^{1/n} = \infty$, *is* (c_nD^n) *frequently hypercyclic?*

3. 关于形如$(c_n(\cdot)D^n)$的算子序列的若干超循环性判据可见 [11], ，其中这次 c_n是整函数。对频繁超循环性进行相应研究可能会很有意思。

References

[1] F. Bayart 和 S. Grivaux，频繁超循环算子，Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006年), no. 11, 5083–5117.[2] F. Bayart 和 E. Matheron，《线性算子动力学》，剑桥数学丛书，剑桥大学出版社，2009.[3] C.A. Berenstein 和 R. Gay，复分析与调和分析专题，施普林格，纽约，1995.[4] L. Bernal–Gonz´alez，导数算子与反导数算子及复域的大小，Ann. Polon. Math. 59 (1994), 267–274.[5] L. Bernal-Gonz´alez，微分算子与反微分算子的超循环序列，J. Ap- prox. Theory 96 (1999), 323–337.[6] L. Bernal-Gonz´alez 和 J.A. Prado-Tendero，微分算子序列：指数函数、超循环性与等度连续性，Ann. Polon. Math. 77 (2001), no. 2, 169–187.[7]G.D. Birkhoff，《整函数初等定理的证明》，巴黎科学院报告 189 (1929), 473–475.[8] R.P. Boas，整函数，学术出版社，纽约，1954.[9] A. Bonilla 和 K.-G. Grosse-Erdmann，关于 Godefroy 和 Shapiro 的一个定理，积分方程与算子理论 156 (2006年), 151–152.[10] A. Bonilla 和 K.-G. Grosse-Erdmann，频繁超循环算子与向量，遍历理论与动力系统 27 (2007), 383–404。勘误，遍历理论与动力系统 29 (2009), 1993–1994。

[11] M.C. Calder´ón–Moreno，导数算子与具有全纯系数的反导数算子的普适性，Ann. Polon. Math. **77** (2001), 197–207.[12] J.B. Conway，《单复变函数 *I*》，第 2 版，施普林格，纽约，1978. [13] D.G. Dickson，具有常系数的线性差分－微分方程与无限阶微分方程解的级数展开，美国数学会回忆录 **23**，普罗维登斯，罗得岛州，1957.[14] L. Ehrenpreis，均值周期函数 *I*，Amer. J. Math. **77**(1955), 293–328.[15]G. Godefroy 和 J.H. Shapiro，具有稠密不变循环向量流形的算子，J. Funct. Anal. **98** (1991), 229–269.[16] K.G. Grosse-Erdmann，普适族与超循环算子，Bull. Amer. Math. Soc. **36**(1999), 345–381.[17] K.-G. Grosse-Erdmann 和 A. Peris，《线性混沌》，施普林格，伦敦，2011.[18] P.K. Kamthan 和 M. Gupta，序列空间与级数，Marcel Dekker，纽约，1981.[19] G. R. MacLane，导数序列与正规族，J. Analyse Math. **2** (1952), 72–87.[20] B.Malgrange，偏微分方程与卷积方程解的存在性与逼近 ´´´，Ann. Inst. Fourier (格勒诺布尔) **6** (1955/1956), 271–355.[21] S. Rolewicz，度量线性空间，第 2 版，D. Reidel Publishing Co.，多德雷赫特，1985。

(L. Bernal-Gonz´alez)
Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
Instituto de Matemáticas Antonio de Castro Brzezicki
Universidad de SevillaAvenida Reina Mercedes s/n,
41012-Sevilla (Spain).电子邮箱地址：lbernal@us.es

(M.C. Calder´on-Moreno)
Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
Instituto de Matemáticas Antonio de Castro Brzezicki
Universidad de SevillaAvenida Reina Mercedes s/n,
41012-Sevilla (Spain).电子邮箱地址：mccm@us.es

(J.A. Prado-Bassas)Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
Instituto de Matemáticas Antonio de Castro Brzezicki
Universidad de SevillaAvenida Reina Mercedes s/n,
41012-Sevilla (Spain).电子邮箱地址：bassas@us.es