arXiv:2602.19391v1 [math.CO] 22 Feb 2026

普通空间中的骨架扭棱多面体 I

Egon Schulte *东北大学 波士顿，马萨诸塞州，美国，02115

and

Tom´aˇs Sk´acel

东北大学

波士顿，马萨诸塞州 , USA, 02115

2026年2月24日

谨以此文纪念我们的朋友、同事和老师 *Chris King*。

摘要

骨架多面体是离散的连通结构，由作为面的有限（平面或扭斜）或无限（线性、平面或空间）多边形组成；每条边上有两个面，且每个顶点处都有一个圆形顶点图形。本文描述了扭棱构造的蓝图，并展示了该构造既可应用于普通空间中的正则骨架多面体，也可应用于手性骨架多面体。所得的扭棱骨架多面体是顶点传递的，并具有高度的局部对称性。本文从组合、拓扑和几何的角度描述其性质，并通过一些特别有趣的例子加以说明。我们考察该构造何时能够产生均匀骨架多面体，并讨论所生成结构列表的完备性。

关键词：均匀多面体、阿基米德立体、扭棱多面体、正则多面体、曲面上的图、Wythoff构造、截角。

2020年数学主题分类：主分类：51M20。次分类：52B15。

*由西蒙斯基金会第 420718 号资助

1 引言

普通欧几里得三维空间中的多面体研究历史悠久且多姿多彩，其根源可追溯至古希腊。数百年来，人们对多面体构成的认识不断演变，催生了新的高度对称结构类别，例如五种柏拉图立体、开普勒－庞索多面体、佩特里－考克斯特多面体和 Gr¨unbaum-德雷斯多面体（见 [3, 4, 9, 10, 12]）。上述不同类别的多面体体现了多面体概念的发展历程：从考察凸立体出发，进而采用拓扑和代数方法，将多面体视为曲面上的图加以分析，最终发展到较新的图论方法，着重研究三维空间中骨架图形的组合关联结构。

当 Gr¨unbaum 放宽了膜必须跨越多面体各面的限制，并允许扭斜甚至无限多边形作为面时（见 [12]），骨架多面体理论由此获得了重要推动。这种新方法催生了 Gr¨unbaum-Dress 多面体，使正多面体的数量增至 48 个。Gr¨unbaum [12]和 Dress [9, 10] 给出了正骨架多面体的枚举结果。后来，麦克马伦和舒尔特提出了一种更简洁的分类方法 [24, 25]，使这一分类工作受到更多关注。自然地，人们随后开始研究高度对称的非正骨架多面体，并对手性骨架多面体进行了分类[30, 31]。关于几何手性多面体的进一步研究，见佩利塞尔和魏斯 [29]。近来，人们还对若干旗轨道较少的骨架多面体类别进行了分类：坎宁安和佩利塞尔枚举了具有 3 个旗轨道的有限多面体 [6, 7], ，而佩利塞尔和威廉姆斯则对具有 2 个旗轨道的某些类型的多面体（手性多面体除外）进行了分类 [28] （另见休巴德 [16], 以及卡特勒和舒尔特 [8]的相关工作）。

本文及第二作者的姊妹篇 [37] （以及 [36]）旨在通过沿着舒尔特和威廉姆斯 [35] 以及 [40] 开创的研究路线，进一步深入理解普通欧几里得三维空间中的均匀骨架多面体。这些骨架多面体按定义具有顶点传递对称群和正多边形面，是阿基米德立体（以及棱柱和反棱柱）的骨架对应物。考克斯特、朗盖－希金斯和米勒在 [5], 中发表了一份全面清单，列出了具有平面（凸多边形或星形多边形）面的有限凸或非凸均匀多面体；但这份清单的完备性直到后来才由斯基林 [38] 和哈雷尔 [14] 分别独立证明。均匀骨架多面体尚未得到分类；事实上，甚至有限的均匀骨架多面体也尚未得到分类。

我们的方法利用 Wythoff构造的一种“骨架”变体（见 [4, 25]），从正多面体或手性多面体的对称群中由所有组合旋转（视为几何对称）构成的子群作用于初始点（初始顶点）所得到的轨道，生成高度局部对称的“扭棱”多面体，即经典扭棱多面体的骨架变体。该方法从 48 个正多面体以及 6 个手性多面体无穷族中生成大量新颖的扭棱多面体。这些新生成的对象往往是均匀骨架多面体，也就是说，除了具有传递顶点的对称群之外，它们还具有正多边形面。著名的例子包括扭棱立方体

和扭棱十二面体。我们的工作为不断扩充但尚不完整的均匀骨架多面体名单作出了重大贡献，并进一步补充了 [35, 40]的名单。

本文结构如下。第2节和第3节先回顾骨架多面体和抽象多面体的基本概念。第4节重新审视三维空间中骨架正多面体的分类。随后，第5节详细介绍主要构造，并探讨由此生成的结构在几何、组合和拓扑方面的性质。第6节研究一个关键问题——一个与扭棱型均匀多面体完备性证明相关的逆命题：扭棱型的哪些多面体$p.3.3.q.3$是正多面体或手性多面体的扭棱多面体？我们对此问题给出了有力的部分答案。最后，第7、8、9节展示由18种有限正多面体导出的均匀和非均匀扭棱多面体实例。配套论文 [37]对与全部48种正多面体相关的扭棱多面体进行了全面分析，并得出了大量新的均匀实例（另见 [36]）。由手性多面体导出的扭棱多面体尚未得到全面研究。

2 骨架多面体

本节简要概述 $\mathbb{E}^3$ 中的几何多面体，相关描述见 [12]和 [25, 第 7]章。我们将“几何”和“骨架”视为同义词交替使用。

粗略地说，几何多面体由一组顶点、边和面组成，它们以一种符合凸多面体组合结构的方式相互连接。几何多面体的顶点就是空间中的一个点。几何多面体的一条边记作 $\{u, v\}$，是两个互异顶点 u 与 v之间的闭线段。几何多面体的一个面是有限多边形或无限多边形，我们将在下文定义。

普通欧几里得空间 $\mathbb{E}^3$ 中的一个有限多边形，或简称 n边形，(v_1，v_2，……，v_n)，是由互异点 v_1，……，v_n以及线段 $\{v_i, v_{i+1}\}$（其中$i = 1$，……，$n-1$）和 $\{v_n, v_1\}$构成的图形。类似地，一个无限多边形，或无限多边形，由一列无限个互异点（……，v_{-2}，v_{-1}，v_0，v_1，v_2，……）以及线段 $\{v_i, v_{i+1}\}$（对每个 i而言）组成，其中每个紧子集 $\mathbb{E}^3$ 至多与有限条线段相交。无论哪种情形，这些点都是多边形的顶点，线段则是多边形的边。

我们说，若一个多边形的对称群在该多边形的旗上传递地作用，则该多边形是从几何上看正则 的。所谓多边形的旗 ，是指由一个顶点与一条关联边组成的二元集合。平面正多边形包括常见的正则凸多边形和星形多边形，以及正之字形多边形和线性无限多边形。空间中的非平面正多边形包括有限的扭斜（棱柱形或反棱柱形）正多边形和螺旋正多边形。关于正多边形的更多内容，见 [4, 12]。

$\mathbb{E}^3$ 中的一般多边形当然可能比正多边形复杂得多。然而，除了三角形以及某些四边形和五边形之外，本文中的所有多边形都是正多边形。

一个几何（或骨架）多面体，或简称多面体（若上下文清楚）， P in$\mathbb{E}^3$ 由一组互异点（称为顶点）、一组线段（称为边）以及一组多边形（称为面）组成，并满足以下性质：

（a）由 P的顶点和边定义的图（称为 P的边图）是连通的。

(b) P 在 P 的每个顶点处的顶点图形都是连通的。 P 在顶点 v 处的顶点图形 是指这样一个图：其顶点是P的边图中与 v 相邻的顶点，其边是线段 $\{u, w\}$；其中， $\{u, v\}$ 和 $\{v, w\}$ 是 P同一个面的相邻边。

(c) P 的每条边恰好包含在 P的两个面中。

(d) P 是离散的，这意味着 $\mathbb{E}^3$ 的每个紧子集只与 P的有限多个面相交。

如果 P 是一个几何多面体，那么 P 的所有顶点、边和面构成一个偏序集，其偏序由关联关系诱导。这是一个抽象多面体（若加入适当的秩为 -1 和 3 的“不适当”元素），并且通常是一个格。

几何多面体 P 的一个旗 是一个包含 P的一个顶点、一条边和一个面的三元素集合，且它们彼此关联。若 P 的两个旗恰好有一个元素不同，我们称它们相邻 。

如果一个几何多面体 P 在 $\mathbb{E}^3$ 中（从几何上看）是正则的，那么其对称群$G(P)$在 P 的各个旗上具有传递性。因此，若 P是正则的，则 $G(P)$分别在 P的顶点、边和面上具有传递性。此外， P 的面和顶点图形必须是正多边形。 P 的面可以是有限形式（凸、星形或扭斜），也可以是无限形式（之字形或螺旋形）。线性无限多边形不会作为几何正则多面体的面出现。若 P 的面是 p边形，而顶点图形是 q边形（允许 $p = \infty$），则称 P 的类型为 $\{p, q\}$；注意，根据上述离散性条件 (d)， q 是有限的。

设 P 是一个（几何）正则多面体，并令 $\Phi := \{F_0, F_1, F_2\}$ 为P的一个基旗。那么， $G(P)$由特定生成元 r_0、 r_1、 r_2 生成（相对于 Φ而言），其中r_j 是 P 的唯一对称变换：它固定 Φ 的所有元素，但在 $j = 0$时固定顶点，在 $j = 1$时固定边，或在 $j = 2$时固定面。这些生成元满足具有三个节点的弦式考克斯特图所对应的标准考克斯特型关系，

$$r_0^2 = r_1^2 = r_2^2 = (r_0 r_1)^p = (r_1 r_2)^q = (r_0 r_2)^2 = 1, \tag{1}$$

其中， $\{p, q\}$ 是 P 的类型（当 $p = \infty$ 时，相应的关系被省略）；一般而言，还存在其他独立的关系。由于生成元 r_j 是对合等距变换，它们必须是关于点、直线或平面的反射。注意，以一种自然的方式， Φ 中面 F_2 的对称群是 $\langle r_0, r_1\rangle$，而 F_0 处顶点图形的对称群是 $\langle r_1, r_2\rangle$。

我们定义 P的三个特殊对称性，

$$s_1 := r_0 r_1,\ s_2 := r_1 r_2,\ s_0 := r_0 r_2 = s_1 s_2,$$

并设

$$G^+(P) := \langle s_1, s_2\rangle.$$

然后注意到，（1）中的关系意味着

$$s_1^p = s_2^q = (s_1 s_2)^2 = 1.$$

我们将 $G(P)$ 的子群 $G^+(P)$ 称为 $G(P)$ 的 **组合旋转子群**，并注意到 $G^+(P)$ 在 $G(P)$ 中的指数至多为 2，且可由以下**特定组合旋转** 中的任意两个生成： s_1， s_2， s_0。生成元 s_1 依次遍历（或移过） F_2的顶点，而 s_2 依次遍历 F_0处顶点图形的顶点。不过，务必牢记，$G^+(P)$ 的元素，因此 s_1， s_2，未必是 $\mathbb{E}^3$ 的直接等距变换，即几何旋转、平移或螺旋旋转。若 $G^+(P)$ 在 $G(P)$ 中的指数为 2，我们就称P 为**直接正则** 。

若几何多面体 P 位于 $\mathbb{E}^3$ 中，且其对称群$G(P)$在旗上有两个轨道，使得相邻旗分别属于不同轨道，则称其为（从几何上看）**手性** 。从几何上看，手性多面体 P 的面和顶点图形都是正多边形，其对称群 $G(P)$ 分别在顶点、边和面上具有传递性。既有有限面多面体，也有无限面多面体。对称群 $G(P)$ 有一对生成元 S_1， S_2 （相对于基旗 Φ），其性质类似于正则多面体的组合旋转子群的生成元 s_1， s_2，但在此情形下，不存在与反射 r_j 相对应的对称变换。对于手性多面体，我们定义

$$G^+(P) := G(P)$$

并再次定义三个特殊对称变换，

$$s_1 := S_1,\ s_2 := S_2,\ s_0 := s_1 s_2 = S_1 S_2.$$

因此，手性多面体的对称群与其组合旋转子群 $G^+(P)$ 相同。将基旗改为 Φ 上的相邻旗，会得到 $G(P)$ 的新特定生成元；这些生成元在 $G(P)$ 中不与由 Φ 本身确定的生成元共轭，也就是说，S_1， S_2；两组生成元在某种意义上分别表示手性多面体的两种“对映异构”（镜像）形式，即左形式和右形式。 $\mathbb{E}^3$ 中的手性多面体已在 [30, 31] 中分类。

如果几何多面体 P 是**顶点传递**的，也就是说，其对称群 $G(P)$ 在 P 的顶点集上传递作用，那么我们可以将 P 的**顶点符号** 定义为一列数字，表示围绕 P 的每个顶点、按循环顺序排列的多边形面的顶点数，并允许 ∞。这个符号在循环置换和反转方向的意义下是唯一的。因此，顶点符号 $p.q.r.s$ 表示 P 的每个顶点周围依次有一个 p 边形、一个 q 边形、一个 r 边形和一个 s 边形。若一个顶点传递多面体的每个顶点周围按循环顺序（忽略反转方向）依次有一个 p 边形、两个三角形、一个 q 边形和另一个三角形，则称该多面体为**扭棱型**，或称其具有**扭棱型顶点符号**， $p.3.3.q.3$；我们允许 $p = 3$、 $q = 3$ 或 $p = q$ 的情况。

通常，我们会在顶点传递多面体 P 的顶点符号中，编码其中多边形几何结构的附加信息。如果 $p > 3$ 是有限的，那么在 P 的顶点符号中，我们分别将正凸 p 边形、密度为 d 的正星形 p 边形或正扭斜 p 边形记作 p_c、 $\frac{p}{d}$ 或 $\underline{p}_s$。三角形都是凸的，因此不需要

在 p 上添加下标（当 $p = 3$ 时）。同样，如果 $p = \infty$，那么在 P 的顶点符号中，我们分别用 ∞_1、∞_2 或 ∞_b 表示正则线性无限边形、正则之字形，或以 b 边形为底的正则螺旋多边形。本文中，我们经常会在顶点符号中遇到三角形，包括正则和非正则三角形。

最后，我们讨论作为阿基米德立体骨架类比的几何多面体。它们既不是正多面体，也不是手性多面体，但仍具有高度对称性。若几何多面体 P in $\mathbb{E}^3$ 的面均为正多边形，且 P 的对称群在 P 的顶点集上传递作用，则称其为 均匀 。$\mathbb{E}^3$ 中的所有正多面体或手性多面体都是均匀的。

3 抽象多面体

本节简要回顾文献 [25] 中关于抽象多面体的基本概念和结果。从拓扑角度看，抽象多面体是曲面上的图（若它们局部有限）[1]。几何多面体通常被视为抽象多面体的实现。

抽象多面体是一个偏序集 $\mathcal{P}$，其秩函数严格单调，值域为 $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$。它的元素称为面。（与抽象多胞体的常见用法一样，本节中的“面”一词比上文几何语境中的含义更广；上文中它指“秩为 2 的面”。）秩为 j 的元素是 $\mathcal{P}$ 的 j-面。对于 $j = 0$，若其为 1 或 2，则 j-面也分别称为顶点、边和面。存在两个非正常面：最小面 F_{-1}（秩为 -1）和最大面 F_3（秩为 3）。$\mathcal{P}$ 的旗（极大全序子集）都包含一个顶点、一条边和一个面，此外还包含 F_{-1} 和 F_3（列出旗中的元素时通常省略它们）。此外，$\mathcal{P}$ 是强旗连通的，这意味着任意两个旗 Φ 和 Ψ 都可以通过一列旗 $\Phi = \Phi_0$、Φ_1、.....、$\Phi_k = \Psi$ 相连，其中 Φ_{i-1} 和 Φ_i 相邻（相差一个元素），且对每个 i，$\Phi \cap \Psi \subseteq \Phi_i$。最后，若 F 和 G 分别是一个 $(j-1)$- 面和一个 $(j+1)$- 面，且满足 $F < G$ 和 $0 \le j \le 2$，则恰有两个 j-面 H 满足 $F < H < G$。因此，对于 $0 \le j \le 2$，$\mathcal{P}$ 的每个旗 Φ 都恰与另一个旗相邻，该旗记为 Φ^j，称为 Φ 的 j-相邻旗，两者相差一个 j-面。

当 F 和 G 是具有 $F \le G$的抽象多面体的两个元素时，我们称 $G/F := \{H \mid F \le H \le G\}$ 为 $\mathcal{P}$的截面。我们通常将一个 j-面 F 与截面 F/F_{-1}视为相同。如果 F 是一个面，那么 F/F_{-1}（或简称为 F）同构于一个（有限）凸多边形或一个（无限）无限多边形的面格。对于 $\mathcal{P}$的顶点 F 处的顶点图形F_3/F，同样如此。

如果抽象多面体 $\mathcal{P}$ 的所有面都是某个 p边形的 p边形，且所有顶点图形都是某个 q边形的q边形，那么 $\mathcal{P}$ 称为类型 $\{p, q\}$；此处允许 $p = \infty$ 或 $q = \infty$。

若抽象多面体 $\mathcal{P}$ 的（组合）自同构群$\Gamma(\mathcal{P})$ 在 $\mathcal{P}$的各个旗上是传递的，则称 $\mathcal{P}$ 为正则抽象多面体。设 $\mathcal{P}$ 是一个正则抽象多面体，并令$\Phi := \{F_0, F_1, F_2\}$ 为 $\mathcal{P}$的一面基旗。那么，$\Gamma(\mathcal{P})$ 由特定生成元ρ_0、ρ_1和 ρ_2（相对于 Φ）生成，其中 ρ_j 是唯一一个固定 Φ的除 j面以外所有面的自同构（并将 Φ 映射到与其相邻的旗 Φ^j）。与几何正多面体一样

我们定义三个自同构,

$$\sigma_1 := \rho_0\rho_1,\ \sigma_2 := \rho_1\rho_2,\ \sigma_0 := \rho_0\rho_2,$$

称为 $\mathcal{P}$的特定旋转，并注意到其中任意两个都生成 $\Gamma(\mathcal{P})$的旋转子群 $\Gamma^+(\mathcal{P})$；该子群在 $\Gamma(\mathcal{P})$中的指数至多为 2。若抽象多面体 $\mathcal{P}$ 的指数为 2，我们称它为直接正则（或可定向正则）。注意，局部有限抽象正则多面体（其中 p、 q有限）是直接正则的，当且仅当它对应于可定向曲面 [1]上的正则地图。直接正则几何多面体也是直接正则抽象多面体。

$\Gamma(\mathcal{P})$的生成元 ρ_0、 ρ_1、 ρ_2 以及 $\Gamma^+(\mathcal{P})$的生成元 σ_1、 σ_2，分别具有与几何正多面体 P的 $G(P)$的生成元 r_0、 r_1、 r_2 以及 $G^+(P)$的生成元 s_1、 s_2 非常相似的性质，我们就不一一重述了。特别是， σ_1 会遍历（或移过） F_2的顶点，而 σ_2 会遍历（或移过） F_0处顶点图形的顶点。

若抽象多面体 $\mathcal{P}$ 是手性的，则 $\Gamma(\mathcal{P})$ 在旗上有两个轨道，使得相邻旗属于不同轨道。手性多面体的自同构群由一对σ_1、 σ_2 “旋转”生成，其性质与正多面体的组合旋转子群的生成元相似。注意，几何手性多面体的底层抽象多面体在组合意义上必定是手性或正则的。

若抽象多面体 $\mathcal{P}$ 是顶点传递的，则 $\Gamma(\mathcal{P})$ 在顶点上传递。这等价于说， $\mathcal{P}$ 是（组合意义上的）均匀多面体，即 $\mathcal{P}$ 是顶点传递的，且具有（组合意义上的）正则面。事实上，对于任何抽象多面体，后者显然成立。

多面体的抽象理论通过实现的概念与几何理论紧密相连（见 [25, 第5] 章及麦克马伦 [22]）。本文研究的正则、手性或均匀多面体，都是按 [25, 22] 所述意义对底层抽象多面体的忠实实现。在这种情况下，几何对称群成为组合自同构群的一个子群，但通常只是一个真子群。对于几何正多面体，这两个群相同；而对于几何手性或均匀多面体，子群关系可能是真包含。例如，所有具有螺旋面的几何手性多面体在组合意义上都是正则的，且其对称群在自同构群 [29] 中的指数为 2。

从现在起，在不太可能引起混淆时，我们用“面”指“二维面”（面），主要是在讨论几何多面体时这样做。

4 几何正则多面体

本节将遵循 [25, 第 7E 章]（其记法和分类方案不同于 [9, 10, 12]）中的记法和分类方案，简要介绍正则（骨架）多面体。相似变换及分量缩放（若适用）意义下，共有 48 个正则多面体。它们可分为以下类别：有限正多面体、平面正多面体、混合正多面体和纯正多面体（非混合）。其中有 18 个有限正多面体、6 个平面正多面体、12 个混合正多面体和 12 个纯正多面体。（在 [9, 10, 12], 中，类别的划分与我们的略有不同，因此多面体的数量较少。）

在每个类别中，我们都可以选取一组“基多面体”，并通过某些运算 α得到该类别中的所有其他多面体。这些运算包括对偶 δ、佩特里对偶 π、刻面 φ_2、二分 η和倾斜 σ。当运算 α 作用于正多面体 P 并得到一个新的正多面体 P^α时， $G(P)$的特定生成元r_0， r_1， r_2 将按如下方式变换为 $G(P^\alpha)$的特定生成元:

$$\begin{array}{rrcl} \delta: & (r_0,r_1,r_2) & \mapsto & (r_2,r_1,r_0), \\ \pi: & (r_0,r_1,r_2) & \mapsto & (r_0r_2,r_1,r_2), \\ \varphi_2: & (r_0,r_1,r_2) & \mapsto & (r_0,r_1r_2r_1,r_2), \\ \eta: & (r_0,r_1,r_2) & \mapsto & (r_0r_1r_0,r_2,r_1), \\ \sigma: & (r_0,r_1,r_2) & \mapsto & (r_1,r_0r_2,(r_1r_2)^2). \end{array} \tag{2}$$

例如，有限正多面体这一族如下所示，摘自 [25]:

Tetrahedral Symmetry

$$\{3,3\} \overset{\pi}{\longleftrightarrow} \{4,3\}_3$$

Octahedral Symmetry

$$\{6,4\}_3 \overset{\pi}{\longleftrightarrow} \{3,4\} \overset{\delta}{\longleftrightarrow} \{4,3\} \overset{\pi}{\longleftrightarrow} \{6,3\}_4$$

Icosahedral Symmetry

$$\begin{array}{ccccccc} \{10,5\}_3 & \overset{\pi}{\longleftrightarrow} & \{3,5\} & \overset{\delta}{\longleftrightarrow} & \{5,3\} & \overset{\pi}{\longleftrightarrow} & \{10,3\}_5 \\ \updownarrow \varphi_2 & & \updownarrow \varphi_2 & & & & \\ \{6,\frac{5}{2}\} & \overset{\pi}{\longleftrightarrow} & \{5,\frac{5}{2}\} & \overset{\delta}{\longleftrightarrow} & \{\frac{5}{2},5\} & \overset{\pi}{\longleftrightarrow} & \{6,5\} \\ & & & & \updownarrow \varphi_2 & & \updownarrow \varphi_2 \\ \{\frac{10}{3},3\} & \overset{\pi}{\longleftrightarrow} & \{\frac{5}{2},3\} & \overset{\delta}{\longleftrightarrow} & \{3,\frac{5}{2}\} & \overset{\pi}{\longleftrightarrow} & \{\frac{10}{3},\frac{5}{2}\} \end{array}$$

可能的基多面体有四面体 $\{3,3\}$、立方体 $\{4,3\}$ 和二十面体$\{3,5\}$。所有其他有限正多面体（及其对称群）都可以通过对它们应用运算 δ、 π 和 φ_2 得到。

正多面体 P 的佩特里多边形 是沿边行进的一条路径，其中任意连续两条边（但不能是三条）都位于 P的同一个面内。若某个类型为 $\{p,q\}$ 的正多面体，其佩特里多边形的长度 r 完全决定了它的组合类型，则记作$\{p,q\}_r$ 。这解释了上面显示中的一些下标。类似地， P 的二孔 是沿边行进的一条路径：它从一个顶点离开时，沿着相对于进入该顶点的边数第二条边前进，并始终遵循同一方向（在某种局部定向下）。若某个类型为 $\{p,q\}$ 的正多面体，其二孔的长度 h 完全决定了它的组合类型，则记作 $\{p,q \mid h\}$ 。

对于正多面体 P，我们通常需要确定组合旋转子群$G^+(P)$在完整对称群 $G(P)$中的指数。我们知道该指数为 1 或 2。确定指数时，我们利用一个关于由对合生成的群的表示的著名事实，在正多面体的语境下，该事实可表述如下。设 P 是一个正

多面体，其对称群有如下形式的表示

$$G(P) = \langle r_0, r_1, r_2 \mid \mathcal{R} \rangle,$$

其中， $\mathcal{R}$ 是关系词的集合（即在 r_0, r_1, r_2 中，在 $G(P)$里等于单位元的词）。那么，当且仅当 $\mathcal{R}$ 只包含r_0, r_1, r_2中长度为偶数的词时， $G^+(P)$在 $G(P)$中的指数为 2。

考察 [25,第 7E 章], 中给出的正多面体对称群的表示，便可将正多面体分为两类：一类是$G^+(P)$在 $G(P)$中的指数为 2 的正多面体；另一类是 $G^+(P) = G(P)$的正多面体。第一类恰好是直接正多面体；在拓扑上，若其面有限，则它们是可定向曲面上的正则地图。第二类不是直接正则的；在拓扑上，若其面有限，则它们是不可定向曲面上的正则地图。我们采用 [25, 第 7E 章]中的记号，在定理 4.1 中总结这些结果。

定理 4.1.

(a) 该*fi nite*正多面体具有指数 *2* 的组合旋转子群，它们是 *:*

$$\{3,3\},\ \{3,4\},\ \{4,3\},\ \{6,3\}_4,\ \{3,5\},\ \{5,3\},\ \{5,\tfrac{5}{2}\},\ \{\tfrac{5}{2},5\},\ \{3,\tfrac{5}{2}\},\ \{\tfrac{5}{2},3\}.$$

对于所有其他有限正多面体，该指数为 *1*。

(b) 平面 正则镶嵌具有指数 *2* 的组合旋转子群 e

$$\{4,4\},\ \{3,6\},\ \{6,3\},\ \{\infty,4\}_4,\ \{\infty,3\}_6.$$

对于其余的平面正则无限多面体 $\{\infty,6\}_3$，该指数为 *1*。

(c) 每个有界 正则无限多面体都具有指数 *2* 的组合旋转子群 *:*

$$\{4,4\}\#\{\},\ \ \{3,6\}\#\{\},\ \ \{6,3\}\#\{\},\ \ \{\infty,4\}_4\#\{\},\ \ \{\infty,3\}_6\#\{\},\ \ \{\infty,6\}_3\#\{\},$$

$$\{4,4\}\#\{\infty\},\ \{3,6\}\#\{\infty\},\ \{6,3\}\#\{\infty\},\ \{\infty,4\}_4\#\{\infty\},\ \{\infty,3\}_6\#\{\infty\},\ \{\infty,6\}_3\#\{\infty\}.$$

(d) 具有指数 *2* 组合旋转子群的纯正则无限面体为 *:*

$$\{4,6|4\},\ \{6,4|4\},\ \{6,6\}_4,\ \{4,6\}_6,\ \{6,4\}_6,$$

$$\{6,6|3\},\ \{\infty,4\}_{6,4},\ \{\infty,6\}_{4,4},\ \{\infty,3\}^{(a)},\ \{\infty,3\}^{(b)}.$$

对于其余的纯正则无限面体 $\{\infty,6\}_{6,\ 3}$ 和 $\{\infty,4\}_{\cdot,\ *3}$，指数为 *1*。

根据这些结果，可以作出以下有用的观察。

引理 4.2。 类型为 $\{p,q\}$ 的正则几何多面体 P 的彼得里对偶 P^π，当 p 为奇数时，不可能是直接正则的。因此，在这种情况下， $G^+(P^\pi) = G(P^\pi)$。

证明。由定理 4.1 可直接得出这一结论，但也可以如下直接证明。设 $G(P) = \langle r_0, r_1, r_2 \rangle$，使得 $G(P^\pi) = \langle r_0 r_2, r_1, r_2 \rangle = G(P)$。令 u_0, u_1, u_2 为 $G^+(P^\pi)$ 的三个生成元，其定义方式与 $G^+(P)$ 的 s_0, s_1, s_2 相同。于是 $u_1 = r_0 r_2 r_1, u_2 = r_1 r_2 = s_2, u_0 = u_1 u_2 = r_0$。现在，令 p 为奇数，设 $p = p = 2k+1$，其中 k 是某个正整数。由于 $G(P) = G(P^\pi) \geq G^+(P^\pi)$，只需证明 $G(P)$ 的生成元可由 $G^+(P^\pi)$ 的生成元得到。对于 r_0，这显然成立，因为 $r_0 = u_0$。对于 r_1，我们可以如下论证。由于

$$(r_0 r_1)^2 = r_0 r_1 r_2 r_2 r_0 r_1 = r_0 r_1 r_2 r_0 r_2 r_1 = u_0 u_2 u_0 u_2^{-1} = u_0 u_2 u_1$$

我们注意到

$$1 = (r_1 r_0)^p = r_1 (r_0 r_1)^{2k} r_0 = r_1 (u_0 u_2 u_1)^k u_0$$

因此 $r_1 \in \langle u_0, u_1, u_2 \rangle = G^+(P^\pi)$。对于 r_2，我们有

$$r_2 = r_0 (r_0 r_2 r_1) r_1 = u_0 u_1 r_1$$

并且 $r_2 \in G^+(P)$ 也成立。因此，若 p 为奇数，则 $G(P)$ 的所有生成元都属于 $G^+(P^\pi)$，所以 $G(P^\pi) = G^+(P^\pi)$。 □

我们经常需要为 $\mathbb{E}^3$ 中正多面体或手性多面体 P 的对称群的组合旋转子群寻找基本区域。回想一下，离散等距变换群 G 在 $\mathbb{E}^n$ 中的基本区域是 $\mathbb{E}^n$ 的一个开子集 D，满足

$$g(D) \cap D = \emptyset \quad (g \in G,\, g \neq 1)$$

and

$$\mathbb{E}^n = \bigcup_{g \in G} g(\mathrm{cl}(D)).$$

也就是说， D 的闭包 cl(D) 在 G 作用下的像铺砌三维空间。离散等距变换群允许以多种方式选取基本区域。为达到我们的目的，我们从一个不被 G 中任何非平凡元素固定的点 w 的轨道开始，并将 w [35] 的点轨道所定义的狄利克雷-沃罗诺伊镶嵌中， w 的开狄利克雷-沃罗诺伊区域选作基本区域 D。[36] 的附录包含用 Mathematica [44] 编写的代码，用于生成正多面体和手性多面体的对称群及组合旋转子群的基本区域。

5 骨架扭棱多面体

本节将为 n 维欧几里得空间 $\mathbb{E}^3$ 中的正则和手性骨架多面体定义扭棱构造，并讨论由此得到对象的几何、组合和拓扑结构。我们的构造基于 Wythoff构造，而从经典正凸多面体和星形多面体生成的结构通常会产生众所周知的凸扭棱多面体和星形扭棱多面体；这些经典扭棱多面体将在 [5]中讨论。因此，我们将这些由此得到的结构称为扭棱体。

设 P 是 n 维欧几里得空间 $\mathbb{E}^3$中的一个正则或手性多面体，并设 $\mathcal{P}$ 是 P的底层抽象多面体。回顾第 2 节中 $G^+(P)$的定义以及三个对称性s_1， s_2， s_0。更明确地说，如果 P是正则的，并且 r_0， r_1， r_2是 $G(P)$的生成元（与基旗 Φ相关联），那么

$$s_1 := r_0 r_1,\ s_2 := r_1 r_2,\ s_0 := s_1 s_2 = r_0 r_2.$$

另一方面，如果 P是手性的，且 S_1， S_2是 $G(P)$ 的生成元（与 P的基旗 Φ 相关联），那么

$$s_1 := S_1,\ s_2 := S_2,\ s_0 := s_1 s_2 = S_1 S_2.$$

无论哪种情况， $G(P)$ 的组合旋转子群 $G^+(P)$ 由 $G^+(P) :=\langle s_1,\ s_2\rangle$ 给出。现在，如果 P是正则的，那么 $G^+(P)$ 与 $\Gamma^+(\mathcal{P})$ 同构。然而，如果 P 是手性的，那么 $\mathcal{P}$ 要么是（组合地）正则的，要么是手性的，因此 $G^+(P) = G(P)$ 要么与 $\Gamma^+(\mathcal{P})$ 同构（如果 $\mathcal{P}$ 是正则的），要么与 $\Gamma(\mathcal{P})$ 同构（如果 $\mathcal{P}$ 是手性的）。

我们的构造从一个恰当选取的初始点 v 出发，将正则或手性多面体 P 的扭棱构造为 P 的组合旋转子群 $G^+(P)$ 下的一种轨道结构。当 v 选在 $\mathbb{E}^3$ 中 $G^+(P)$ 的某个基本区域的闭包内，且“接近” P的基旗时，所得多面体在某种意义上“接近”原多面体。在我们的情形中，我们以这样的方式选取 $G^+(P)$ 在 $i = 0$，1，2 中的一个基本区域：对于每个 s_i 的不动点集非空的情形，该基本区域都有一个边界点（通常有许多这样的点）被对称变换 s_i 固定。不过，扭棱构造也可更一般地应用于选在该基本区域之外的点 v，但在这种情况下，所得多面体的几何形状往往更难以直观呈现。

假设已按所述方式选定了 $G^+(P)$ 的一个适当基本区域 D，并回想一下， D 是一个开集。粗略地说， D 的闭包通常会“分裂”为四个集合，我们也称之为区域（尽管其中三个不是开集）；其中三个区域由空间中分别在对称性 s_0、 s_1 或 s_2 作用下保持不变的点组成，第四个区域则由在 s_0、 s_1 和 s_2 作用下均会移动的空间点组成。第二个区域可能为空；例如，当 s_1 是螺旋平移时便会如此。请注意，若点 v 在对称性 s_0 、 s_1 和 s_2 中的两个作用下保持不变，那么它在第三个对称性的作用下也保持不变，因此也在 $G^+(P)$ 的作用下保持不变。只有当 $G^+(P)$ 有限时，这样的点 v 才存在；此时该点唯一，且就是 P 的中心。因此，除非 P 有限，否则前三个区域中的任意两个都没有公共点。一般而言，令 v 属于这四个区域之一（但 v 不是 s_0、 s_1、s_2 的公共不动点），便可分别得到四种组合结构不同的多面体或类多面体结构，即 P 的中位多面体、 P 的对偶多面体、多面体 P 本身，以及一个真正的扭棱。

请注意， D 本身中的点不会被 $G^+(P)$中的任何非平凡等距变换固定，因此 D位于第四区域。当 $v \in D$ 时，便是我们最感兴趣的情形，并且会产生真正的扭棱。

正如我们将看到的，真正的扭棱多面体更一般地由满足以下条件的点 $v \in \mathbb{E}^3$ 构成：

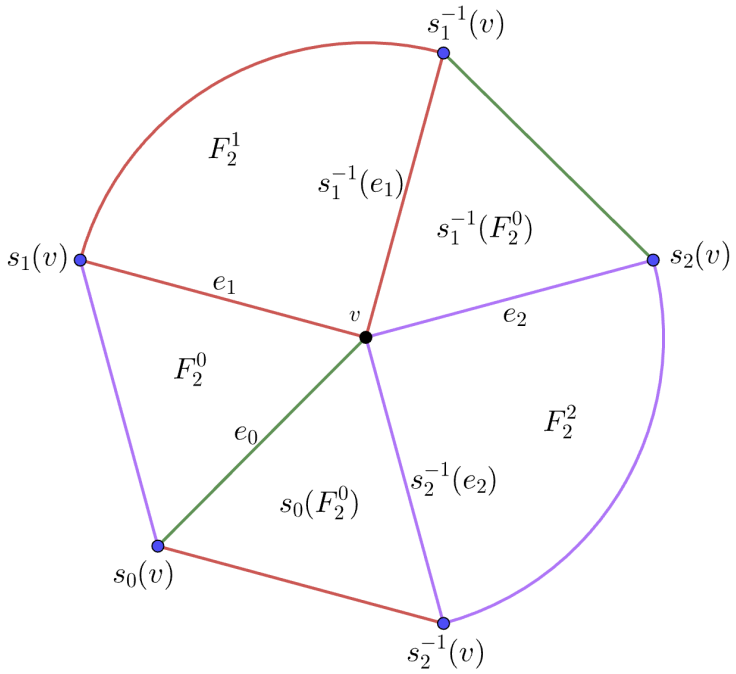
称为初始放置条件，

$$\mathrm{IPC}: \quad G_v^+(P) = \{1\}, \tag{3}$$

其中 $G_v^+(P)$ 表示 v 在 $G^+(P)$ 中的稳定子。这一点将在随后各节中阐明。注意，IPC 仅仅意味着 $G^+(P)$ 在 v 于 $G^+(P)$ 下的轨道上自由作用，也就是说，每当 $g \in G^+(P)$、$g \neq 1$ 时，$g(v) \neq v$。

5.1 扭棱 $S_P(v)$

我们现在着手构造 P 的扭棱，将其记为 $S_P(v)$。可以图1作为参考。



Fi图1： $S_P(v)$ 中与初始顶点 v 相邻的顶点、边和面

设 $v \in \mathbb{E}^3$；在实践中，我们常常选取 $v \in \mathrm{cl}(D)$。我们令 $F_0 := v$ 以及 $\mathcal{F}_0 := \{v\}$，并把 v 称为该扭棱的初始／基顶点。起初我们并不要求 v 满足 (3) 的初始放置条件。此外，按下式定义 v 的型集 $I_v \subseteq \{0,1,2\}$

$$I_v := \begin{cases} \{1,2\} & \text{if } s_0(v) = v \\ \{2\} & \text{if } s_1(v) = v \\ \{1\} & \text{if } s_2(v) = v \\ \{0,1,2\} & \text{if } s_i(v) \neq v \text{ for all } i \end{cases} \tag{4}$$

我们在此已提到，四种可能的型集 I_v 通常与 $S_P(v)$ 的四种可能结果相对应：P 的中位多面体、P 的对偶多面体、多面体 P 本身，以及真正的扭棱。注意，$I_v = \{0,1,2\}$ 若 v 满足 IPC。

接下来，将 $S_P(v)$ 的基边 定义为

$$F_1^i := \{v, s_i(v)\} \qquad (i \in I_v). \tag{5}$$

我们常把这些基边称为 $e_i := F_1^i$。将基边的集合记作

$$\mathcal{F}_1 := \{F_1^i : i \in I_v\}.$$

定义 $S_P(v)$ 的基面不那么直接。我们当然希望将

$$F_2^i := \{s(F_1^i) : s \in \langle s_i \rangle\} \qquad (i \in I_v \cap \{1, 2\}) \tag{6}$$

作为面。一般而言， F_2^1 将是一个与 P的基面组合等价的面，而 F_2^2将是一个与 P的基旗中基顶点周围的顶点图形组合等价的面。如果 $I_v \subseteq \{1, 2\}$，则不会有其他基面。然而，如果 $0 \in I_v$ （也就是说， v 在所有 s_0、 s_1、 s_2作用下移动），那么上述各面的像在$G^+(P)$作用下不足以闭合多面体。在这种情况下，我们以与众所周知的扭棱多面体（如扭棱立方体或扭棱十二面体）一致的方式闭合多面体，不过也可以有其他变化。如果 $0 \in I_v$，则定义

$$F_2^0 := \{F_1^0, F_1^1, s_1(F_1^2)\} = \{e_0, e_1, s_1(e_2)\}. \tag{7}$$

我们将在定理 5.1 中证明，这种选择足以使这一新结构闭合。接下来，将基面的集合记为

$$\mathcal{F}_2 := \{F_2^i : i \in I_v\}.$$

最后，将 $S_P(v)$ 的最大面定义为

$$F_3 := \{s(F) : s \in G^+(P),\ F \in \mathcal{F}_2\}$$

并设

$$\mathcal{F}_3 := \{F_3\}.$$

如果希望完全遵循形式化规范，并与抽象多面体的语言保持一致，那么我们必须将完整的扭棱定义为

$$S_P(v) := \{s(F) : s \in G^+(P),\ F \in \bigcup_{j=-1}^{3} \mathcal{F}_j\}, \tag{8}$$

其中 $\mathcal{F}_{-1} := \{\emptyset\}$。换句话说，要找出 $S_P(v)$ 的所有顶点（0-面）、边（1-面）和面（2-面），只需考察基顶点、基边和基面的轨道在 $G^+(P)$ 作用下的像。我们分别用 $V(S_P(v))$、 $E(S_P(v))$ 和 $F(S_P(v))$ 表示 $S_P(v)$ 的顶点集、边集和面集。注意， $S_P(v)$ 是一个偏序集。更确切地说，若 $i \le j$ 和 g， $h \in G^+(P)$，则基 i-面 B_i 的像 $g(B_i)$ 与基 j-面 B_j 的像 $h(B_j)$ 相关联，当且仅当 $h^{-1}g(B_i)$ 是 B_j 的一个 i- 面（按通常意义理解）。

我们主要关注稳定子 $G^+(P)_v$ 在 $G^+(P)$ 中作用于 v 时为平凡群的情形。另一方面，当选择的 v 被某个 s_i 固定时， $S_P(v)$ 通常可由对多面体 P 施加一种著名的几何运算得到。当 $s_0(v) = v$ 时， $S_P(v)$ 通常是 P 的中位多面体；若 $s_1(v) = v$，则 $S_P(v)$ 几乎总是 P 的对偶多面体；若 $s_2(v) = v$，则 $S_P(v)$ 几乎总是其自身。若 $s_i(v) = v$，对于 $i = 0$，1，2，我们也用记号 $S_P^i(v)$ 代替 $S_P(v)$。从某种意义上说，$S_P^i(v)$ 是一种“退化的”扭棱。

我们将在第 5.4 节讨论抽象正多面体和正则地图的扭棱构造。

5.2 S_P（v）的多面体结构

本节将证明，根据上一节所述，由正多面体或手性多面体P构造的扭棱体 $S_P(v)$，若初始顶点v 满足 (3) 的 IPC，则确实是骨架多面体。定理 5.1 将给出证明。若 v 满足 IPC，则 $I_v = \{0, 1, 2\}$、 $G_v^+(P) = \{1\}$ 和 $G^+(P)$ 在扭棱体的顶点集上简单传递地作用。从几何上看，当 v 选自 $G^+(P)$的（开）基本区域 D 时，尤其能得到形态优美的扭棱体。

首先注意，若 P 是正多面体或手性多面体，则 s_0、 s_1、 s_2 是彼此不同的等距变换，并且当 $i \neq j$时满足条件 $\langle s_i \rangle \cap \langle s_j \rangle = \{1\}$ 。这一事实与 v的 IPC 一起，保证基边 e_0、 e_1、 e_2彼此不同，基面 F_2^0、 F_2^1、 F_2^2也彼此不同。特别地，我们可以说， F_2^1和 F_2^2仅在 v处相交， F_2^0和F_2^1仅在 e_1上相交，而 F_2^0和 F_2^2仅在 v处相交（如图1所示）。

接下来注意到， $S_P(v)$中的每条边和每个面都可以赋予唯一的类型， $i = 0$，1，2，因为该边或面分别是基边 e_i或基面 F_2^i在 $G^+(P)$作用下的像。换言之， $G^+(P)$有三个边轨道和三个面轨道，分别由三条基边和三个基面代表。我们有时将类型为 i 的边或面分别称为类型-i 边或类型-i 面。注意，由于顶点集上的简单传递性，类型的赋值是良定义的。事实上，举例来说，假设 $S_P(v)$的一条边 e 同时具有类型1和类型2。那么，存在$s, t \in G^+(P)$，使得 $e = s(e_1) = t(e_2)$，因而 $\{s(v)\ ss_1(v)\} = \{t(v)\ ts_2(v)\}$。这里，如果$s(v) = t(v)$，那么 $s = t$ ，因而 $e_1 = e_2$，这就产生矛盾。如果 $s(v) = ts_2(v)$，那么 $s = ts_2$，因而 $s_2 = t^{-1}s$；同理，我们还必须有 $s_1 = s^{-1}t = s_2^{-1}$，这是不可能的。既然已知每条边都有唯一的类型，我们就能轻易推出面也有相同的结论。例如，假设 $\mathcal{S}_P(v)$的一个面 F 同时具有类型1和类型2。那么，存在$s, t \in G^+(P)$，使得 $F = s(F_2^1) = t(F_2^2)$，因而 $t^{-1}s(F_2^1) = F_2^2$。但是，F_2^1只包含类型-1边，而F_2^2只包含类型-2边，所以F_2^2的边 $t^{-1}s(e_1)$必须同时具有类型1和类型2，这就产生矛盾。

注意，这使得我们可以为 $S_P(v)$ 的边和面指定着色。在我们的图中，类型 1 面/边用红色表示，类型 2 面/边用紫色表示，类型 0 面用绿色表示。

稳定　　给出的 $S_P(v)$ 在 $G^+(P)$ 中的基边 e_i 和基面 F_2^i 的.....为

$$G_{e_0}^+(P) = \langle s_0 \rangle,\ G_{e_1}^+(P) = G_{e_2}^+(P) = \{1\} \tag{9}$$

and

$$G^+_{F_2^0}(P) = \{1\},\ G^+_{F_2^1}(P) = \langle s_1\rangle,\ G^+_{F_2^2}(P) = \langle s_2\rangle, \tag{10}$$

分别如此。对于边，这很容易验证。例如，若 $g \in G^+(P)$ 固定 e_0，那么显然 $g(v) = v$ 或 $g(v) = s_0(v)$，因此 $g = 1$ 或 $g = s_0$。面 F_2^0 只有一条类型为 0 的边，即 e_0，所以若 g 固定 F_2^0，那么 g 固定 e_0，从而 $g = 1$ 或 $g = s_0$；然而，$s_0(F_2^0) \neq F_2^0$，所以 $g = 1$。若 $g \in G^+(P)$ 固定 F_2^1，那么 $g(v) = s_1^j(v)$，因此对某个 j，有 $g = s_1^j$。对于 F_2^2 的论证类似。

现在我们可以确立以下定理。

定理 5.1. 设 P 是类型为 $\{p, q\}$ 的正则或手性多面体，令 $v \in \mathbb{E}^3$，并假设v满足关于 $G^+(P)$ 的 ***IPC***。则 $S_P(v)$ 是一个几何多面体，$G^+(P)$ 在 $S_P(v)$上单顶点传递地作用，并且 $S_P(v)$ 属于扭棱型 $p.3.3.q.3$。

证明。首先注意，$S_P(v)$ 的面确实是多边形。由于每个面都是某个基面的像，只需对此说明基面 F_2^1、F_2^2 和 F_2^0 即可。后者是一个三角形，因此无须证明。对于 F_2^1，我们可以如下论证。由于 $s_1^i(e_1) = \{s_1^i(v)\ s_1^{i+1}(v)\}$，循环 $v, s_1(v)\ s_1^2(v) \ldots, s_1^{-1}(v)\ v$经过 F_2^1 的所有顶点和边；若 p 有限（也就是说，s_1 的阶有限），它便确定一个有限多边形。若 $p = \infty$，那么双向无限路径 $\ldots, s_1^{-3}(v)s_1^{-2}(v)\, s_1^{-1}(v)\ v, s_1(v)\ s_1^2(v)\ s_1^3(v) \ldots$ 就能解决问题。对（有限）基面 F_2^2 的论证类似。

接下来，我们证明 $S_P(v)$ 的边图是连通的。显然，只需证明对于任意顶点 $w \in S_P(v)$，基顶点 v 与 w 之间存在一条边路径。根据构造，对于某个 $g \in G^+(P)$，有 $w = g(v)$。如果 $g = 1$，则无需证明。

如果 $g \neq 1$，那么我们可以写成 $g = t_1 t_2 \ldots t_k$，其中每个 t_j 都是 s_1、s_1^{-1}、s_2 或 s_2^{-1} 之一（只有在无限面时才需要逆元），然后对 k 使用归纳法。如果 $k = 1$，那么 g 是 s_1、s_1^{-1}、s_2 或 s_2^{-1} 之一，并且 $g(v)$ 通过一条边与 v 相连，即分别为 $e_1 := F_1^1$、$s_1^{-1}(e_1)$、$e_2 := F_1^2$ 或 $s_2^{-1}(e_2)$。（注意，未使用 $e_0 := F_1^0$。）因此，对于 $k = 1$，结论成立。

现在假设 $k > 1$，并且对于 $G^+(P)$ 中所有可表示为上述形式且因子少于 k 的元素，结论都成立。令 $g = t_1 t_2 \ldots t_k$ 与前面相同，并设 $h := t_1 t_2 \ldots t_{k-1}$。根据归纳假设，$v$ 可以通过 $S_P(v)$ 中的一条边路径与 $h(v)$ 相连。现在，由于 v 可以通过一条边与 $t_k(v)$ 相连，$h(v)$ 也可以通过一条边与 $h(t_k(v)) = g(v)$ 相连。因此，将连接 $h(v)$ 和 $g(v)$ 的边接到从 v 到 $h(v)$ 的边路径上，便得到一条从 v 到 $g(v)$ 的边路径。（注意，这一过程没有使用 $S_P(v)$ 中任何在 $G^+(P)$ 作用下由 e_0 像得到的边。我们的论证还表明，连接 v 和 $g(v)$ 至多需要 k 条边，但若同时使用 0 型边，通常所需边数会更少。）因此，$S_P(v)$ 是连通的。

接下来，我们证明 $S_P(v)$ 的顶点图形是连通的。根据 $S_P(v)$ 的顶点传递性，只需考察 v 处的顶点图形。首先注意，恰有五条边包含 v。事实上，假设构造得出第六条边，记作e，它包含 v。那么 e 就是 e_1、e_2 或 e_0 在某个 $g \in G^+(P)$ 下的像。由于 $g \neq 1$，我们不可能有 $g(v) = v$，因此分别有 $g(s_1(v)) = v$、$g(s_2(v)) = v$ 或 $g(s_0(v)) = v$，从而得到 $g = s_1^{-1}$、$g = s_2^{-1}$ 或 $g = s_0^{-1}$。无论哪种情况，都会导出矛盾。接下来的论证将表明，顶点度确实为 5。

现在，为了证明顶点图形是连通的，我们将依次遍历所有包含 v 的面，如下所示：

- $F_2^1 = \{e_1, s_1(e_1), s_1^2(e_1), ..., s_1^{-1}(e_1)\}$ if $p < \infty$, or
  $F_2^1 = \{\ldots, s_1^{-2}(e_1), s_1^{-1}(e_1), e_1, s_1(e_1), s_1^2(e_1), \ldots\}$ if $p = \infty$.
- $F_2^0 = \{e_1, s_1(e_2), e_0\}$
- $s_0(F_2^0) = \{s_0(e_1), s_2^{-1}(e_2), e_0\}$
- $F_2^2 = \{e_2, s_2(e_2), ..., s_2^{-1}(e_2)\}$
- $s_2 s_0(F_2^0) = s_1^{-1}(F_2^0) = \{s_1^{-1}(e_1), e_2, s_1^{-1}(e_0)\}$

从上到下阅读此列表并循环回到开头，可以看到每对相邻的面都共享一条包含 v 的边。这表明 v 处的顶点图形是一个五边形。

接下来需要说明， $S_P(v)$ 的每条边都位于两个面内。显然，只需考虑基边 e_1, e_2, e_0。先来看 e_0。由于 e_0 只作为类型 0 的面的边出现，每个包含 e_0 的面 F 都满足：对于某个 $s \in G^+(P)$，有 $F = s(F_2^0)$。但是，由于 $F_2^0 = \{e_0, e_1, s_1(e_2)\}$，在 s 下能够映射到 e_0 的边只能是类型 0 的边。于是 $s(e_0) = e_0$，这意味着 $s = 1$ 或 $s = s_0$。因此，包含 e_0 的面至多有两个。接着，考虑 e_1。如果 e_1 位于面 F 内，那么 F 的类型可能是 0 或 1。如果 F 的类型是 0，那么对于某个 $s \in G^+(P)$，有 $F = s(F_2^0)$。但如上所述， F_2^0 中类型为 1 的边必须映射到 e_1，因此根据 (9)， $s = 1$ 且 $F = F_2^0$。如果 F 的类型是 1，那么$F = s(F_2^1)$，从而对于某个 k， $ss_1^k(e_1) = e_1$。再由 (9)， $ss_1^k = 1$，因此$s \in \langle s_1 \rangle$ 且 $F = F_2^1$。因此， e_1 位于两个面内。对 e_2 也可作类似论证。

因此， $S_P(v)$ 是一个几何多面体。其余结论由构造可知。

□

请注意，用于证明 $S_P(v)$ 连通的归纳论证可以导出一种算法，使我们能够在 $S_P(v)$ 中找到任意两个顶点之间的边路径。

注 1. 通常，如果 v 不满足 (3) 的 IPC，那么 $S_P(v)$ 仍然是一个几何多面体。不过，也有罕见的情形，尤其是当 $G^+(P)$ 在 $G(P)$ 中的指数为 1 时，一条边可能属于两个以上的面。

在定理 5.1 的情形下，由于 $G^+(P)$ 在 $S_P(v)$ 的顶点上传递地简单作用，且顶点图形是五边形，因此 $S_P(v)$ 在 $G^+(P)$ 下恰有 10 个旗轨道；所以，如果 P 有限，旗的总数为 $10\,|G^+(P)|$。在某些情况下， $S_P(v)$ 的完整对称群 $G(S_P(v))$ 大于其子群 $G^+(P)$。此时有两种可能。第一种情况下，基顶点 v 在 $G(S_p(v))$ 中的稳定子阶为 2，并包含一个交换 p 边形面 F_2^1 与 q 边形面 F_2^2 的对称变换；特别地， $p = q$ 以及 $S_P(v)$ 的 p 边形面和 q 边形面，在 $S_P(v)$ 的对称变换下全等。第二种情况下， $p = q = 3$ 与顶点稳定子同构于 D_5 （见命题 6.1）。

我们将在第 5.4 节的组合背景下看到，只要 v 满足 IPC，扭棱体的同构类型就不依赖于初始顶点 v。换言之，如果

两个 v 和 v' 都满足 IPC，那么 $S_P(v)$ 和 $S_P(v')$ 作为抽象多面体是同构的。（然而，在几何语境下，这些扭棱体通常既不全等也不相似。）

并非每个正则或手性几何多面体都有几何对偶多面体（但每个多面体都有抽象对偶）。以下观察讨论了存在几何对偶多面体时，扭棱体之间的关系。

定理 5.2. 设 P 是 $\mathbb{E}^3$ 中类型为 $\{p,q\}$ 的正则或手性多面体，令 $v \in \mathbb{E}^3$，并假设 v 满足式 *(3)* 关于 $G^+(P) = \langle s_1, s_2\rangle$ 的 *IPC*。此外，假设 P 有一个几何对偶多面体 P^δ，且在手性情形中，扭棱体 $S_P(v)$ 是由与生成元 s_2^{-1}、s_1^{-1} 相关联的 P^δ 的对映形式构造而成，其中生成元属于 $G^+(P^\delta)$。那么，这一对几何对偶多面体 P 和 P^δ 的扭棱体全等。更确切地说，$S_{P^\delta}(v)$ 与 $S_P(v)$ 全等。

证明。首先注意到 $G^+(P^\delta) = G^+(P)$，因此关于 $G^+(P^\delta)$ 和 $G^+(P)$ 的 IPC 是相同的条件。

现在假设 P是正则的，具有 $G(P) = \langle t_0, t_1, t_2\rangle$ 和 $s_1 = t_0t_1$，$s_2 = t_1t_2$，$s_0 = t_0t_2$。那么 $G(P^\delta) = \langle t_2, t_1, t_0\rangle$ 以及 $G^+(P^\delta) = \langle s_1', s_2', s_0'\rangle$，其中

$$s_1' = t_2t_1 = s_2^{-1},\ \ s_2' = t_1t_0 = s_1^{-1},\ \ s_0' = t_2t_0 = s_0^{-1} = s_0.$$

考察 $S_{P^\delta}(v)$的基边 e_0'，e_1'，e_2'。这里，$e_0' = e_0$和

$$e_1' = \{v, s_1'(v)\} = \{v, s_2^{-1}(v)\} = s_2^{-1}(e_2),\ \ e_2' = \{v, s_2'(v)\} = \{v, s_1^{-1}(v)\} = s_1^{-1}(e_1).$$

现在来看基面，

$$(F')_2^1 = \{s(e_1')|s \in \langle s_1'\rangle\} = \{s(s_2^{-1}(e_2))|s \in \langle s_2^{-1}\rangle\} = \{s(e_2)|s \in \langle s_2\rangle\}.$$

由此可得$(F')_2^1 = F_2^2$。类似地，$(F')_2^2 = F_2^1$。最后，

$$(F')_2^0 = \{e_0', e_1', s_1'(e_2')\} = \{e_0, s_2^{-1}(e_2), s_2^{-1}(s_1^{-1}(e_1))\} = s_0(\{e_0, s_1(e_2), e_1\}) = s_0(F_2^0).$$

因此，$S_P(v)$的基面的轨道与$S_{P^\delta}(v)$的基面的轨道相同，但 p边形面和 q边形面的作用互换了。

最后，假设 P是手性的。在这种情况下，δ按照 $(s_1, s_2) \mapsto (s_2^{-1}, s_1^{-1})$ 变换 $G(P)$ 的生成元 s_1，s_2（见 [30]）。根据我们对 P^δ 的对映形式所作的假设，元素 s_2^{-1}，s_1^{-1}恰好是 $G(P^\delta)$ 的生成元，而型集 I_v保持不变，即 $I_v = \{0,1,2\}$。但这样一来，按照与上文相同的论证，便可得到所需结果。 □

5.3 均匀性

一般来说，定理 5.1 中的扭棱 $S_P(v)$ 并非均匀多面体。根据构造，对于任意 v 的选取，$S_P(v)$ 都是顶点传递的，并且具有全等的正则 p 边形面和全等的正则q边形面。然而，三角形面（类型为 0）虽然彼此全等，通常却不是等边三角形。事实上，若 v 满足 (3) 的 IPC，则 $S_P(v)$ 是

均匀的，当且仅当类型为 0 的基面 F_2^0（顶点为 v，$s_0(v)$ $s_1(v)$）是等边三角形，也就是说，

$$||s_1(v) - v|| = ||s_0(v) - v|| = ||s_1(v) - s_0(v)||. \tag{11}$$

若令 $w_1 := s_1(v) - v$，$w_2 := s_0(v) - v$ 以及 $w_3 := s_1(v) - s_0(v)$，则上文 (11) 中的方程等价于

$$w_1(1)^2 + w_1(2)^2 + w_1(3)^2 = w_2(1)^2 + w_2(2)^2 + w_2(3)^2 = w_3(1)^2 + w_3(2)^2 + w_3(3)^2, \tag{12}$$

其中 $w_i(j)$ 表示 w_i 的 j^{th} 坐标。若记 $v = (x, y, z)$，则 (12) 中的方程关于 x, y, z 是二次的。我们将它们称为 $S_P(v)$ 的均匀性方程 。因此，若 v满足 (3) 的 IPC，则扭棱 $S_P(v)$ 是均匀多面体，当且仅当 $v = (x, y, z)$ 是均匀性方程的一个解。若 v 对 $G^+(P)$ 满足 (3) 的 IPC，则称方程 (12) 的解 $v = (x, y, z)$ 为可接受 。

下面的引理表明，存在正多面体 P 的实例，使得均匀性方程 (12) 没有可接受解。

引理 5.3. 设 P 是 $\mathbb{E}^3$ 中的一个几何正多面体，令 $v \in \mathbb{E}^3$，并假设 v 满足 *(3)* 对 $G^+(P) = \langle s_1、 s_2、 s_0 \rangle$ 的 *IPC*。若 $G^+(P)$ 的生成元 s_0 是一个平面反射，则不存在满足 $S_P(v)$ 均匀性方程的可接受解 v 。

证明。 为导出矛盾，假设存在满足 $S_P(v)$ 均匀性方程的可接受解 v 。那么， $S_P(v)$ 是一个均匀多面体，且 F_2^0 是正则的。因此， s_0 的反射平面（或在二维情形下 s_0 的反射直线）是 e_0 的垂直平分线，并经过 $s_1(v)$。然而， s_0 固定 $s_1(v)$，因而属于 $s_1(v)$ 的稳定子。这与 $G^+_{s_1(v)}(P) = s_1 G_v^+(P) s_1^{-1}$ 是平凡的这一事实矛盾。 □

请注意，没有几何手性多面体 P会将 s_0 作为平面反射，因此引理 5.3 的适用范围被限定为正多面体。

注 2. 如果无法为 v 选择合适的值，使扭棱 $S_P(v)$成为均匀多面体，那么 $S_P(v)$的底层抽象多面体仍可能存在均匀的忠实实现。例如，对半立方体 $\{4, 3\}_3$进行扭棱可得到一个例子；半立方体是四面体$\{3, 3\}$的佩特里对偶。注意，根据引理 5.3， $S_{\{4,3\}_3}(v)$无法成为均匀多面体。然而， $S_{\{4,3\}_3}(v)$与标准扭棱立方体组合等价，而后者是三维空间中的均匀凸多面体。

5.4 $S_P(v)$ 的拓扑

本节将说明，前几节讨论的几何扭棱体是由抽象多面体导出的组合扭棱的忠实几何实现。详情概述于下文的定理5.4。我们首先说明如何对抽象正多面体进行扭棱构造。

每个具有有限面（2-面）和顶点图形的抽象多面体 $\mathcal{P}$，都可以表示为闭曲面上的映射 M（见 [25, 第 7B、7C 章]）。我们通常不区分

$\mathcal{P}$ 与 M。如果 $\Gamma(M)$ 表示 M的自同构群，那么 $\Gamma(M)$、 $\cong \Gamma(\mathcal{P})$ 和 $\Gamma(M)$ 都可以实现为 M的同胚群。

现在假设 M 是曲面 K上的一个正则地图（对应于正多面体 $\mathcal{P}$），其自同构群为 $\Gamma(M) = \langle \rho_0, \rho_1, \rho_2 \rangle$，组合旋转子群为 $\Gamma^+(M) = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$，其中 $\sigma_1 := \rho_0\rho_1, \sigma_2 := \rho_1\rho_2$。考虑由 M的“重心细分”（序复形）得到的 K 的三角剖分 $B(M)$。$B(M)$中的三角形对应于 M的旗。在 $B(M)$中选取一个（闭）基三角形 Δ_1（对应于 $\mathcal{P}$的基旗 Φ），并令 $\Delta := \mathrm{int}(\Delta_1)$。若 $\Gamma^+(M)$在 $\Gamma(M)$中具有指数 2，则 $\Delta' := \mathrm{int}(\Delta_1 \cup \rho_0(\Delta_1))$是 $\Gamma^+(M)$在 K上的一个（开）基本区域（基本三角形），且包含 Δ。其闭包 $\Delta_1 \cup \rho_0(\Delta_1)$称为 $B(M)$中的双基三角形。若指数为 1，则改为 Δ 本身是 $\Gamma^+(M)$在 K上的一个（开）基本区域（三角形）。无论哪种情形，我们令 z 为 Δ 中的一个初始点，并考虑 z 在 $\Gamma^+(M)$作用下的轨道。利用 σ_1, σ_2，我们可以如第 5.1 节那样构造 M的扭棱 $S_M(z)$。通过令 z 位于 Δ 中，我们可以使扭棱的所有顶点、边和面都位于 K 上，并且若 M 可定向，则 $S_M(z)$ 2-胞腔嵌入到 K 中；在不可定向情形下， $S_M(z)$的面在 K上重叠。

也可以纯粹通过组合方式，在抽象多面体 $\mathcal{P}$ 本身上进行扭棱构造：取 Φ 在 $\Gamma^+(\mathcal{P})$ 下的轨道作为 $S_{\mathcal{P}}(z)$ 的顶点集，并使用 σ_1， σ_2 在该顶点集上施加组合结构，就像我们在第 5.1 节中所做的那样。由于 Φ 在 $\Gamma^+(\mathcal{P})$ 中的稳定子是平凡的，而且 z 选在（开）基本区域内，因此这一构造将类似于前文介绍的几何构造。

这也表明，在对正则地图 M 进行扭棱构造时，只要 z 在 $\Gamma^+(M)$ 中的稳定子是平凡的（也就是说， z 满足类似于 IPC 的条件，适用于 $\Gamma^+(M)$），我们本可以选择位于 Δ 之外的 z。不过，就我们的目的而言，令 $z \in \Delta$ 即已足够。这样还有一个好处：如果 M 可定向，那么 $S_M(v)$ 就胞腔嵌入在曲面 K 上。一般来说，若选择其他 z，这一性质便不再成立。

上述构造也可稍作修改后应用于手性映射（以及抽象多面体）：若 $\Gamma(M) = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$，则我们选择 $\Gamma(M)$ 的基本区域为基三角形 Δ_1 与其 0-邻接三角形（旗）的并集的内部；这个并集仍称为双基三角形。扭棱的初始顶点也必须再次选在 $\Delta := \mathrm{int}(\Delta_1)$ 中，以确保扭棱是 2-胞腔嵌入于曲面中的。在手性情形下，底层曲面 K 是可定向的，也作为扭棱所在的曲面。正如几何语境中所解释的，将手性多面体的基旗改为其 0-邻接旗作为新的基旗，会产生 $\Gamma(M)$ 的新特定生成元（但不会改变基本区域）。若 σ_1, σ_2 是与基旗关联的特定生成元，则 $\sigma_1^{-1}, \sigma_1^2\sigma_2$ 是与 0-邻接旗关联的特定生成元。

定理5.4。设 P 是 $\mathbb{E}^3$ 中的正则或手性多面体，具有有限面（以及顶点图形），并设 $G^+(P) = \langle s_1, s_2 \rangle$。令 M 表示实现为闭曲面 K上的映射的底层抽象多面体，令 $B(M)$ 表示 K 上 M 的重心细分，并令 Δ 表示 $B(M)$的基三角形内部。那么，几何扭棱体与组合扭棱体的关系如下。

(a) 若 v、 $v' \in \mathbb{E}^3$ 以及 v和 v'均满足针对 $G^+(P)$ 的 *(3)* 中的 *IPC*，则几何扭棱体 $S_P(v)$ 和 $S_P(v')$ 同构。

(b) 若 z、$z' \in \Delta$，则组合扭棱 $S_M(z)$ 和 $S_M(z')$ 同构。

(c) 若 $v \in \mathbb{E}^3$ 和 v 满足关于 $G^+(P)$的 ***(3)*** 中的 ***IPC***，且若 $z \in \Delta$，则几何扭棱 $S_P(v)$ 与组合扭棱 $S_M(z)$同构。

证明。我们只证明第三部分，并构造从 $S_M(z)$ 到 $S_P(v)$ 的一个同构。第一和第二部分的直接论证类似（但请注意，它们也都可由第三部分推出）。我们的证明利用了这样一个事实：$\Gamma^+(M)$ 在 $S_M(z)$ 的顶点集上的作用，与 $G^+(P)$ 在 P 的顶点集上的作用等价；并且严格来说，$S_P(v)$ 中的关联和基面是由 $S_M(z)$ 中的关联和基面诱导的。

我们假设 P是正则的，因为手性情形的证明几乎完全采用相同的方法。因此 $G(P) = \langle r_0, r_1, r_2\rangle$且 $G^+(P) = \langle s_1, s_2, s_0\rangle$，其中 $s_1 := r_0r_1$, $s_2 := r_1r_2$，且 $s_0 := s_1s_2 = r_0r_2$。由于 M也正则，$\Gamma(M) = \langle \rho_0, \rho_1, \rho_2\rangle$且 $\Gamma^+(M) = \langle \sigma_1, \sigma_2\rangle$，其中 $\sigma_1 := \rho_0\rho_1$, $\sigma_2 := \rho_1\rho_2$，且 $\sigma_0 := \sigma_1\sigma_2 = \rho_0\rho_2$。特别是，

$$\begin{array}{rccc} \kappa: & \Gamma(M) & \mapsto & G(P) \\ & \rho_i & \mapsto & r_i \end{array}$$

是一个群同构，其在 $\Gamma^+(M)$ 上的限制是到 $G^+(P)$ 的同构，并将每个 i 映射为 s_i。(如果 P 是手性的，且 $G(P) = \langle s_1,\ s_2\rangle$，那么 P 的面的有限性将意味着 M 是抽象手性的 [29],，因此该构造将是 κ：$\sigma_1 \mapsto s_1$ 和 $\sigma_2 \mapsto s_2$ 所定义的 $\Gamma^+(M) \to G(P)$。)

我们将从其限制（也记为 β）出发，归纳地构造一个同构 β：$S_M(z)$ 到 $\mapsto S_P(v)$，这些限制分别作用于顶点集和边集。$S_M(z)$ 的顶点集、边集和面集分别记为 V_M、E_M 和 F_M，$S_P(v)$ 的相应集合也采用类似记法。

首先，再令 v 为 $S_P(v)$ 的基顶点，并回忆它满足 IPC。我们将 $S_P(v)$ 的基边记为

$$e_1^P = \{v, s_1(v)\},\ e_2^P = \{v, s_2(v)\},\ e_0^P = \{v, s_0(v)\},$$

以及 $S_P(v)$ 的基面，记为

$$F_2^{P,i} = \{g(e_i^P) | g \in \langle s_i\rangle\}\ (i = 1, 2),\quad F_2^{P,0} = \{e_0^P, e_1^P, s_1(e_2^P)\}.$$

类似地，设 z 为位于 Δ 中的 $S_M(z)$ 的基顶点，并将 $S_M(z)$ 的基边记为

$$e_1^M = \{z, \sigma_1(z)\},\ e_2^M = \{z, \sigma_2(z)\},\ e_0^M = \{z, \sigma_0(z)\}$$

以及 $S_M(z)$ 的基面，记为

$$F_2^{M,i} = \{\gamma(e_i^M) | \gamma \in \langle \sigma_i\rangle\}\ (i = 1, 2),\quad F_2^{M,0} = \{e_0^M, e_1^M, \sigma_1(e_2^M)\}.$$

在顶点集上，我们定义 β

$$\begin{array}{rccc} \beta: & V_M & \mapsto & V_P \\ & \tau(z) & \mapsto & \kappa(\tau)(v)\quad (\tau \in \Gamma^+(M)). \end{array} \tag{13}$$

于是 $\beta(z) = v$，由于基顶点具有平凡稳定子，不难验证 β 定义良好且为双射。

注意到 $\Gamma(M)$ 在 V_M 上的作用与 $G(P)$ 在 V_P 上的作用等价，因此它们在 $\Gamma^+(M)$ 和 $G^+(P)$ 上的限制也等价。更明确地说，当 $\gamma,\ \tau \in \Gamma^+(M)$ 时，$\beta(\gamma(\tau(z))) = \kappa(\gamma)(\beta(\tau(z)))$。这个等价性反映在 β 的定义中。

接下来，我们通过将 (13) 扩展为

$$\begin{array}{rccl} \beta: & E_M & \mapsto & E_P \\ & \tau(e_i^M) & \mapsto & \kappa(\tau)(e_i^P) \quad (\tau \in \Gamma^+(M),\, i = 0,1,2), \end{array} \tag{14}$$

并证明这个映射是良定义且双射的。事实上，由于边具有唯一的类型，且基边的稳定子如第 5.2 节所述，因此我们得到

$$\begin{aligned} \tau(e_i^M) = \tau'(e_j^M) &\iff i = j,\ \begin{cases} \tau' = \tau, \text{ if } i = 1,2 \\ \tau' = \tau \text{ or } \tau' = \tau\sigma_0, \text{ if } i = 0 \end{cases} \\ &\iff i = j,\ \begin{cases} \{\kappa(\tau')(v), \kappa(\tau')s_i(v)\} = \{\kappa(\tau)v, \kappa(\tau)s_i(v)\}, \text{ if } i = 1,2 \\ \{\kappa(\tau')(v), \kappa(\tau')s_0(v)\} = \{\kappa(\tau)v, \kappa(\tau)s_0(v)\}, \text{ if } i = 0 \end{cases} \\ &\iff \kappa(\tau)(e_i^P) = \kappa(\tau')(e_j^P). \end{aligned}$$

(14) 中的 β 良定义且为单射。这由 κ 的满射性可推出满射性。

组合映射 $\beta\colon V_M \cup E_M \to V_P \cup E_P$ 在两个方向上都保关联。设 $\tau,\ \varphi \in \Gamma^+(M)$，且 M 的顶点 $\tau(z)$ 包含在边 $\varphi(e_i^M)$ 中。那么

$$\tau(z) \in \varphi(e_i^M) = \{\varphi(z), \varphi\gamma(z)\}$$

其中 $\gamma = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_0$ 为 $i = 1, 2, 0$。因此 $\tau = \varphi$ 或 $\tau = \varphi\gamma$，进而 $\kappa(\tau) = \kappa(\varphi)$ 或 $\kappa(\tau) = \kappa(\varphi)\kappa(\gamma)$（其中 $\kappa(\gamma) = s_1, s_2, s_0$）。由此可得

$$\kappa(\tau)(v) \in \{\kappa(\varphi)(v), \kappa(\varphi)\kappa(\gamma)(v)\} = \kappa(\varphi)(e_i^M),$$

这正是所需的。由于所有步骤均可逆，该映射在两个方向上都保关联。

接下来，我们在面集上定义 β

$$\begin{array}{rccl} \beta: & F_M & \mapsto & F_P \\ & \tau(F_2^{M,i}) & \mapsto & \kappa(\tau)(F_2^{P,i}) \quad (\tau \in \Gamma^+(M),\, i = 0,1,2), \end{array}$$

并证明 β 是良定义且双射的。由 κ 的满射性可知，满射性显然。根据（10）中面稳定子的结构，以及面具有唯一的

类型，我们得到

$$\begin{aligned}\tau(F_2^{M,i})=\tau'(F_2^{M,j}) &\Longleftrightarrow i=j,\begin{cases}\tau'=\tau\sigma_i^k \text{ for some } k, \text{ if } i=1,2\\ \tau'=\tau, \text{ if } i=0\end{cases}\\ &\Longleftrightarrow i=j,\begin{cases}\kappa(\tau')(F_2^{P,i})=\kappa(\tau)s_i^k(F_2^{P,i})=\kappa(\tau)(F_2^{P,i}) \text{ for some } k, \text{ if } i=1,2\\ \kappa(\tau')(F_2^{P,0})=\kappa(\tau)(F_2^{P,0}), \text{ if } i=0\end{cases}\\ &\Longleftrightarrow \kappa(\tau)(F_2^{P,i})=\kappa(\tau')(F_2^{P,j}).\end{aligned}$$

接下来需要证明组合映射 β：$V_M\cup E_M\cup F_M\to V_P\cup E_P\cup F_P$ 保关联。我们已经验证了顶点—边对的保关联性质。现在假设有一条边 τ φ $\tau\ \varphi\in$ $\Gamma^+\ M$ 2 F^M (e_i^M) 与一个面 $(F^{M,}$ $_2\ ^j)$ 关联，其中 $,(\ )$。若 $j=1,$，则 $\varphi(_{,2}\ ^j)$ 的所有边也都是 j 类型，因此有 $i=j$。若 $j=0$，则 $\varphi(F^{M}{}_{,2}\ ^j)$ 的边中会出现全部三种类型。首先，我们讨论 $j=1,2$ 的情形（此时 $i=j$），并依据边稳定子的结构：

$$\begin{aligned}\tau(e_i^M)\in\varphi(F_2^{M,i})=\{\varphi\gamma(e_i^M)|\gamma\in\langle\sigma_i\rangle\} &\Longleftrightarrow \tau=\varphi\gamma \text{ for some } \gamma\in\langle\sigma_i\rangle\\ &\Longleftrightarrow \kappa(\tau)=\kappa(\varphi)g \text{ for some } g\in\langle s_i\rangle\\ &\Longleftrightarrow \kappa(\tau)(e_i^P)\in\{\kappa(\varphi)g(e_i^P)|g\in\langle s_i\rangle\}=\kappa(\varphi)(F_2^{P,i}).\end{aligned}$$

类似地，如果 $j=0$（以及 $i=0,1,2$），则

$$\begin{aligned}\tau(e_i^M)\in\varphi(F_2^{M,0})=\{\varphi(e_0^M),\varphi(e_1^M),\varphi\sigma_1(e_2^M)\} &\Longleftrightarrow \tau\in\varphi\langle\sigma_0\rangle \text{ or } \tau=\varphi,\varphi\sigma_1\\ &\Longleftrightarrow \kappa(\tau)\in\kappa(\varphi)\langle s_0\rangle \text{ or } \kappa(\tau)=\kappa(\varphi),\kappa(\varphi)s_1\\ &\Longleftrightarrow \kappa(\tau)(e_i^P)\in\{\kappa(\varphi)e_0^P,\kappa(\varphi)e_1^P,\kappa(\varphi)s_1e_2^P\}\\ &\Longleftrightarrow \kappa(\tau)(e_i^P)\in\kappa(\varphi)(F_2^{P,0}).\end{aligned}$$

因此，β 在边-面对上是保关联的。于是 β 在顶点-面对上也是保关联的，因为顶点与面之间的关联由顶点与边之间以及边与面之间的关联的传递闭包给出。因此，组合映射 β 是一个同构，β：$S_M(z)\to S_P(v)$。

注意，同构 β：$S_M(z)\to S_P(v)$ 是分别由其到 V_M 和 E_M 的限制归纳构造而成的，因此我们可以把 β 看作 $\beta=\{\beta_k\}_{k=0,1,2}$，其中 β_0：$V_M\to V_P$，β_1：$E_M\to E_P$，β_2：$F_M\to F_P$。这些 β_k 之间的确切关系如下：

（i）映射 β_0 由下式给出

$$\begin{array}{rccl}\beta_0: & V_M & \mapsto & V_P\\ & \tau(z) & \mapsto & \kappa(\tau)(v)\quad(\tau\in\Gamma^+(M)).\end{array}$$

（ii）则 β_1 由下式给出

$$\begin{array}{rccl}\beta_1: & E_M & \mapsto & E_P\\ & \{z_1,z_2\} & \mapsto & \{\beta_0(z_1),\beta_0(z_2)\}.\end{array}$$

为验证这一点，写作

$$\{z_1, z_2\} = \{\tau(z), \tau\gamma(z)\} = \tau(\{z, \gamma(z)\}) = \tau(e_i^M),$$

对于某个 $\tau \in \Gamma^+(M)$，并且有 $\gamma = \sigma_1$， σ_2， σ_0，注意在 β 下这会被映射到

$$\kappa(\tau)(e_i^P) = \{\kappa(\tau)(v), \kappa(\tau)\kappa(\gamma)(v)\} = \{\beta_0(z_1), \beta_0(z_2)\}.$$

(iii) 最后， β_2 由下式给出

$$\begin{array}{rlcl} \beta_2: & F_M & \mapsto & F_P \\ & F = \{f_1, \ldots, f_m\} & \mapsto & \{\beta_1(f_1), \ldots, \beta_1(f_m)\}, \end{array}$$

其中 F 是 F_M 中一个一般面，其边为 f_1，……， f_m。为验证这一点，分别考察类型为 0 、 1 、 2 的面。对于类型为 0 的面，若

$$F = \{f_1, f_2, f_3\} = \{\tau(e_0^M), \tau(e_1^M), \tau\sigma_1(e_2^M)\} = \tau(F_2^{M,0})$$

若有 $\tau \in \Gamma^+(M)$，则 β 将 F 映射到

$$\kappa(\tau)(F_2^{P,0}) = \{\kappa(\tau)(e_0^P), \kappa(\tau)(e_1^P), \kappa(\tau)s_1(e_2^P)\} = \{\beta_1(f_1), \beta_1(f_2), \beta_1(f_3)\}.$$

对于类型为 $i = 1$，2 的面（这里分别为 $m = p$ 或 $m = q$），若

$$F = \{f_1, \ldots, f_m\} = \{\tau\gamma(e_i^M) | \gamma \in \langle\sigma_i\rangle\} = \tau(F_2^{M,i}),$$

那么在 β 下，这会映射到

$$\kappa(\tau)(F_2^{P,i}) = \{\kappa(\tau)g(e_i^P) | g \in \langle s_i\rangle\} = \{\kappa(\tau\gamma)(e_1^P) | \gamma \in \langle\sigma_1\rangle\} = \{\beta_1(f_1), \ldots, \beta_1(f_m)\}.$$

$\beta = \{\beta_k\}_{k=0,\ 1,\ 2}$ 的递归设定与 [25]中的定理 5A1 相似。它利用了这样一个重要性质：P 的边可以与顶点集的二元子集相对应，而 P 的面可以与 P的边集的 m元子集相对应。在几何多面体中，这一性质自动成立。因此，它对 M也成立。 □

我们先前已经指出，可定向正多面体或手性多面体（具有有限面）的扭棱仍然是可定向的。下面的定理说明，更一般地，任何具有有限面的几何正多面体的扭棱都是可定向的，即使原多面体不可定向。

定理 5.5。 设 P 是 $\mathbb{E}^3$ 中的一个正多面体或手性多面体，且具有有限面，令 $v \in \mathbb{E}^3$，并假设 v 满足（*3*）中关于 $G^+(P)$的 ***IPC***。那么， $S_P(v)$ 是可定向的。

证明。 只需考虑正非可定向多面体，因为其他所有情形下结论都成立。设 P 是一个正则的不可定向多面体。那么， P 与闭曲面 K_M 上的不可定向映射 M 组合等价。根据 Wilson [43]（紧情形）和 Jones [19]（一般情形），存在一个唯一的正则映射 N，定义在

一个可定向紧曲面 K_N 上，它是 M 的光滑二重覆盖，因而也是 P 的光滑二重覆盖。（[19]，中没有讨论二重覆盖的唯一性，不过证明起来并不困难。）这里的光滑性仅指 N 和 M 的施莱夫利符号相同，即 $\{p, q\}$。更明确地说，存在一个从 K_N 到 K_M 的 2 对 1 覆盖投影 f，它将 N 映射到 M，并且在 N 的面中心和顶点周围是一一映射。

我们将建立 N 上 K_N 的组合扭棱 $S_N(z)$ 与 $\mathbb{E}^3$中的几何扭棱 $S_P(v)$ 之间的同构。或者，我们也可以研究 K_M上 M的扭棱体，但我们更倾向于直接研究 P的扭棱体。由于可定向正则地图的扭棱体是可定向的，这将证明 $\mathcal{S}_P(v)$ 是可定向的。

为此，令 $\Gamma(N) = \langle \rho_0, \rho_1, \rho_2 \rangle$，并令 $G(P) = \langle r_0, r_1, r_2 \rangle (\cong \Gamma(M))$。同样，将 $\Gamma(N)$ 视为 K_N的同胚群。于是，$\rho_i \mapsto r_i (i = 0, 1, 2)$ 定义了一个满同态 κ'：$\Gamma(N) \to G(P)$；由于 f是二重覆盖，κ'的核的阶为 2。特别地，由 [43] 中的证明（另见 [2]）可知，κ'在 $\Gamma^+(N)$ 上的限制是一个同构。因此

$$\begin{array}{rccc} \kappa: & \Gamma^+(N) & \mapsto & G^+(P) \\ & \sigma_i & \mapsto & s_i \end{array}$$

定义了一个同构。注意，$G^+(P) = G(P)$，因为 P 是不可定向的；但$\Gamma^+(N)$在 $\Gamma(N)$中的指数为 2，因为 N是可定向的。

接下来，我们讨论扭棱体 $S_N(z)$和 $S_P(v)$。这里，在 Δ中选取 z，因此 z在 ρ_0作用下移动。我们递归地构造 $S_N(z)$与 $S_P(v)$之间的同构 β，使其满足$\beta = (\beta_k)_{k=0,\,1,\,2}$，如定理5.4所示。因此，

$$\beta_0 : V_N \to V_P,\ \beta_1 : E_N \to E_P,\ \beta_2 : F_N \to F_P,$$

其中 β_0 定义为

$$\tau(z) \mapsto \kappa(\tau)(v) \quad (\tau \in \Gamma^+(N)),$$

由β_1 给出

$$\{z_1, z_2\} \mapsto \{\beta_0(z_1), \beta_0(z_2)\},$$

并由 β_2 给出

$$\{f_1, \ldots, f_n\} \mapsto \{\beta_1(f_1), \ldots, \beta_1(f_n)\}.$$

证明 β 是同构的过程与定理5.4中的证明完全相同。

□

因此，可定向正则多面体或手性多面体的扭棱体与其底多面体位于同一曲面上；对于任意有限不可定向正则多面体 P 的扭棱体，我们都能找到一个唯一的可定向正则地图，其扭棱体与 P 的扭棱体组合意义下同构。有时，这种可定向正则地图可以在 $\mathbb{E}^3$ 中实现为多面体。注 2 中提到了一个这样的例子：半立方体和立方体的扭棱体同构，$S_{\{4,3\}_3} \cong S_{\{4,3\}}$。

6 大多数扭棱型均匀多面体都是扭棱体

回想一下，均匀多面体 P 若每个顶点周围按循环顺序排列的面（允许反转方向）为一个正则扭棱型 $p.3.3.q.3$ 边形、两个正三角形、一个正则 q边形以及另一个正三角形（其中允许 p或 q 为 3，或 ∞ 重合），则称其为扭棱型。本节将探讨哪些扭棱型均匀多面体（满足 $q < \infty$）可作为 $\mathbb{E}^3$ 中类型为 $\{p, q\}$ 的某个正则或手性多面体的扭棱体。

我们先处理顶点符号 3.3.3.3.3。此类型的均匀多面体只有两个，而且二者都是扭棱体。

命题 6.1. 二十面体 $\{3, 5\}$ 和大二十面体 $\{3, \frac{5}{2}\}$ 是在 $\mathbb{E}^3$中唯一具有扭棱型3.3.3.3.3 的均匀多面体。二者都是正四面体的扭棱体。

证明。 在 $\mathbb{E}^3$ 中的扭棱型均匀多面体 P 具有五价顶点。若其顶点符号为 3.3.3.3.3，则它具有一个 Schl¨afli 符号 $\{3, 5\}$，且在组合意义上是二十面体或半二十面体，因此是有限的。由于 P 是有限且顶点传递的，其顶点位于以其中心为球心的球面 S 上。此外，由于均匀多面体的边全等，与给定顶点 x 相邻的顶点都位于以 x 为中心的球面 S' 上，因此构成一个平面顶点图形，其顶点位于圆 $S \cap S'$上。由于 P的面是正三角形， x 处的顶点图形是一个顶点内接于圆的等边五边形。顶点图形只有两种可能：正五边形 $\{5\}$或正五角星$\{\frac{5}{2}\}$。由于 P是顶点传递的，不同顶点处的顶点图形彼此全等，因此 P只有两种可能，即二十面体和大二十面体。手性多面体是无限的，不能有有限的扭棱体。由于顶点符号中的所有项均为 3，只有四面体能以二十面体或大二十面体作为其扭棱体。正二十面体和正大二十面体确实都是四面体的扭棱体。

□

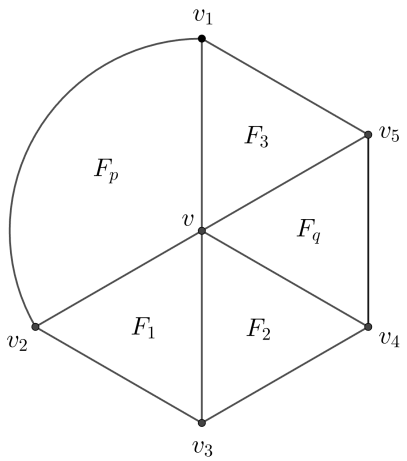


图 2：顶点 v 处相邻的顶点和面

接下来我们讨论含有四个 3 的顶点符号。若 $q = 3$ 和 $p \neq 3$ （例如），使得类型为 $p.3.3.3.3$，我们可以将 P 的某些三角形面指定为“特殊三角形”，并将其记为 3^*，从而每个顶点恰好位于一个特殊三角形中，以一种

与顶点符号 $p.3.3.3^*.3$一致的方式。为说明这一点，考虑图 2 中所示的顶点 v 的顶点邻域。我们将分析哪些面（图中未显示）可以与边 $\{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}$ 和 $\{v_5, v_1\}$关联。首先，注意到 $\{v_5, v_1\}$ 和 $\{v_2, v_3\}$必须都位于两个三角形中。如果 $\{v_3, v_4\}$ 和 $\{v_4, v_5\}$ 也都位于两个三角形中，那么我们就在这些三角形的新顶点处断开顶点符号。因此， F_q 或 F_2 中的一个必须邻接一个 p-面，由此可知另一个必须邻接一个三角形。不失一般性地，假设由三角形围成的面是 F_q。于是， F_q 是包含 v 且不与 p-边形共享一条边的唯一三角形。我们将这样的三角形称为特殊三角形。这一特征出现在 P的每个顶点处，也就是说，每个顶点都有一个顶点符号$p.3.3.3^*.3$ ，其中 3^* 表示一个特殊三角形。注意，对称群$G(P)$的元素将特殊三角形映射为特殊三角形。

注意，扭棱型均匀多面体 P $p.3.3.q.3$在对称群 $G(P)$ 中的顶点稳定子的阶为 1 或 2，除非 $p = q = 3$（且 P是 $\{3, 5\}$或 $\{3, \frac{5}{2}\}$，依据命题 6.1）。这由顶点符号所决定；若 $p = 3$ 或 $q = 3$，则也可根据上述考量得出。此外，如果顶点稳定子非平凡，那么 $p = q$ ，且顶点处的 p 面与 q 面全等（在顶点稳定子中的某个元素作用下）；然而，这些条件可能不足以保证顶点稳定子非平凡。

正如我们在前面各节看到的，正多面体或手性多面体的扭棱体往往会产生扭棱型均匀多面体。现在我们讨论其逆命题：哪些扭棱型均匀多面体 P是扭棱体？我们发现答案是“大多数”，但很难准确量化。

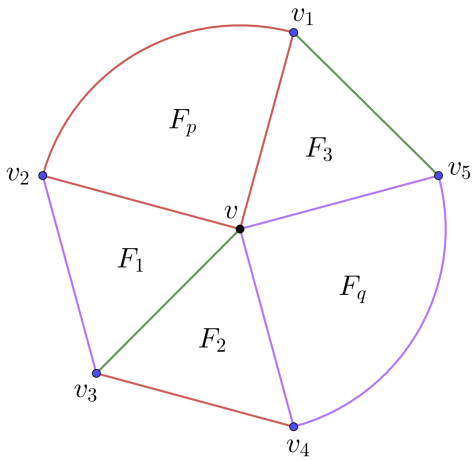


图 3： v周围的面和顶点

从扭棱型均匀多面体 P 出发，我们首先确定 $G(P)$ 的合适生成元，或确定 $G(P)$ 的某个合适子群的生成元；之后，当将该群视为正则或手性多面体对称群的组合旋转子群时，这些生成元将作为特定生成元。

定理 6.2. 设 P 是 n 维欧几里得空间 $\mathbb{E}^3$ 中一个扭棱型 $p.3.3.q.3$ 的均匀多面体。假设 p 边形面与 q 边形面不全等（若 $p \neq q$，则此条件显然成立）。设 v 是 P 的一个顶点，并将 v 周围的面按图 3 标记。则 $G(P)$ 含有元素 σ_1、σ_2 （它们是唯一的），满足以下性质：

(a) 若 $p < \infty$，则 σ_1 遍历 F_p 的各顶点，且其阶为 p。若 $p = \infty$，则 σ_1 将 F_p 的顶点沿一个方向平移一步，且其阶为无限阶。

(b) 若 $q < \infty$，则 σ_2 依次经过 F_q 的各个顶点，且其阶为 q。若 $q = \infty$，则 σ_2将 F_q 的顶点沿一个方向移动一步，且其阶为无限阶。

(c) $\sigma_0 := \sigma_1\sigma_2$ 是一个对合。

(d) $G(P) = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$.

证明。我们在假设 $p \neq q$ 且 $p,\ q > 3$ 的条件下给出证明。当 $p = q$，且 p边形与 q边形不全等，或当 $p \neq 3$ 且 $q = 3$ （此时特殊三角形为 q边形）时，类似的论证同样适用。注意，根据我们关于不全等的假设，情形 $p = q = 3$ 不成立（见命题 6.1）。

考虑图 3 所示顶点 v 的邻域。由于 P是均匀的，G（P）在 P 的顶点上传递作用；又根据关于 $p,\ q$ 的假设，顶点稳定子是平凡的。因此，存在唯一的 $\sigma_1 \in G$（P），使得 σ_1（v）$= v_2$。注意，由于 P 的每个顶点恰好属于一个 p 边形，而 F_p 是包含 v 和 v_2 的 p 边形，因此必有 σ_1（F_p）$= F_p$。于是，将 σ_1 视为 F_p的组合自同构时，它只能依次遍历 F_p 的顶点、沿一个方向移动一步，或作为对合交换 v 和v_2。后一种情况不可能，因为那样 σ_1 就会固定一个顶点 v_3。

类似的论证表明，存在一个（唯一的） $\sigma_2 \in G(P)$ 映射 v 到 v_5，使得 σ_2 要么循环经过，要么（每次移动一步）平移 F_q的顶点。

现在令 $\sigma_0 := \sigma_1\sigma_2$。那么，使用图 3 中的记号，并牢记 σ_1 和 σ_2 保持面邻接，我们可以得出 $\sigma_1\sigma_2(v) = \sigma_1(v_5) = v_3$ 且$\sigma_1\sigma_2(v_3) = \sigma_1(v_1) = v$。因此，纯粹从组合角度来看，$\sigma_0^2(v) = v$，从而 $\sigma_0^2 = 1$。因此 σ_0 的阶为 2。

一旦我们证明了 $A := \langle \sigma_1,\ \sigma_2 \rangle$在顶点上传递地作用，定理的最后一部分便很容易得出。事实上，作为一个简单顶点传递群的顶点传递子群，$G(P)$，群 A必与 $G(P)$ 重合。证明 A的顶点传递性依赖于这样一个观察：对于任意两个 p 边形或 q 边形的面 H 和F，都存在一个由 p 边形或 q 边形的面及顶点组成的有限序列，

$$H = H_0, w_1, H_1, w_2, H_2, \ldots, w_{k-1}, H_{k-1}, w_k, H_k = F,$$

其中相继的面 H_i 与 H_{i+1} 共用一个顶点 w_{i+1}，且 p边形与 q边形交替出现。我们称这样的序列为一条长度为 k、连接 H 与 F的(p, q)-路径 。

首先，我们证明，对于任意一个 p 边形或 q 边形面 F，都存在一个元素 $\sigma = \sigma_F \in A$，它固定 F，并依次循环遍历（或移位） F 的顶点。这里的关键在于$\sigma \in A$。事实上，在关于 p, q 的假设下，$G(P)$ 的顶点传递性也蕴含其在 p 边形面和 q 边形面上的传递性，因此，根据 σ_1 和 σ_2 的存在性，$G(P)$ 中存在这样的元素 σ 显而易见。现在，为了证明可以在 A 中选取 σ，我们考察从 F_q 到面 F 的 (p, q)-路径，并对最短此类 (p, q)-路径的长度使用归纳法证明该命题。如果 $F = F_q$，我们可以取 $\sigma := \sigma_2$。

现在，继续进行归纳，如果

$$F_q = H_0, w_1, H_1, w_2, H_2, \ldots, w_{k-1}, H_{k-1}, w_k, H_k = F$$

是从 F_q 到 F 的一条最短（p, q）路径，那么连接 F_q 和 H_{k-1} 的子路径显然是从 F_q 到 H_{k-1} 的一条最短（p, q）路径，因此归纳假设给出一个元素 $\sigma_{H_{k-1}} \in A$，它固定 H_{k-1}，并按顺序循环（或平移）H_{k-1} 的顶点。特别是，由于 H_{k-1} 和 F 共享一个顶点，对于某个 j，有 $F = \sigma^j_{H_{k-1}}($ $H_{k-2})$。于是，$\sigma_F := \sigma^j_{H_{k-1}}\sigma_{H_{k-2}}\sigma^{-j}_{H_{k-1}}$ 给出了我们在 A 中所需的、对应于 F 的元素。

最后，为了证明 A 的顶点传递性，取一个顶点 w，以及位于 w 处的一个 p 边形或 q 边形 F。如上所述，通过一条从 F_q 到 F 的（p, q）路径连接 v 和 w；请注意，v 是 F_q 的一个顶点。此外，设 $w_0 := v$ 且 $w_{k+1} := w$。由于 w_i 和 w_{i+1} 都属于 H_i，存在 $\sigma_{H_i} \in A$，使得对于某个（取决于 i 的）j，有 $\sigma^j_{H_i}(w_i) = w_{i+1}$。因此，沿着从 v 到 w 的（p, q）路径移动时，我们可以通过 A 中的一个元素将一个顶点映射到下一个顶点，从而这些映射的复合将 v 映射到 w。因此，A 是顶点传递的。

□

定理 6.2 中生成元 σ_1, σ_2 的几何形状由均匀多面体 P 的几何形状所决定。特别地，若 $p < \infty$，则 σ_1 是旋转或旋转反射；若 $p = \infty$，则 σ_1 是螺旋平移、滑移反射或平移；对 σ_2 和 q 也有类似结论。对合 σ_0 是半周旋转或中心反射，并将 v 与 v_3 互换。注意，σ_0 不可能是平面反射，否则它会固定一个顶点 v_2。

注 3. 设 P 是扭棱型均匀多面体 $p.3.3.q.3$。若 $p = q > 3$，且 P 的 p 边形面与 q 边形面全等，则 $G(P)$ 中的顶点稳定子的阶为 1 或 2。我们不知道是否确实存在具有全等 p 边形面和 q 边形面且顶点稳定子平凡的均匀多面体。不过，若 $G(P)$ 中的顶点稳定子非平凡，则一个顶点处的 p 边形面与 q 边形面在该顶点稳定子中的某个元素作用下全等。在这种情况下，确实存在实例；与定理 6.2 的证明中类似的论证表明，σ_1 和 σ_2 在此处也存在（满足 (a)、(b) 和 (c)），且是唯一的（！）；并且 $A := \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ 是 $G(P)$ 的一个指数为 1 或 2 的顶点传递子群。正方形镶嵌 $\{4, 4\}$ 的扭棱是指数为 2 的一个例子（此处 A 中的顶点稳定子是平凡的）。

生成元 σ_1、σ_2 的存在将使我们能够确立一个引人注目的事实：大多数扭棱型均匀多面体都是正多面体或手性多面体的扭棱体。设 P 是一个扭棱型均匀多面体 $p.3.3.q.3$，且 $q < \infty$ 成立；令 σ_1、σ_2 如定理 6.2 或注 3 后一种情形中所述，并令 $A := \langle \sigma_1$、$\sigma_2 \rangle$。在大多数情况下，实际上有 $A = G(P)$，尽管我们的论证并不依赖这一点。同样，设 v 是 P 的一个顶点（其邻域如图 3 所示），并设 u 是（有限）面 F_q 的中心。现在，我们将 Q 从 u 和 A 生成一个正则或手性几何多面体，使其具有轨道结构，随后证明 Q 以 P 为扭棱体。首先，我们令

$$K_0 := u,\ K_1 := \{u, \sigma_1\sigma_2(u)\} = \{u, \sigma_1(u)\},\ K_2 := \{\sigma(u) | \sigma \in \langle \sigma_1 \rangle\}, \tag{15}$$

分别表示 Q 的基顶点、基边和基面。于是，Q 的顶点集、边集和面集分别由基顶点、基边和基面的轨道

在 A作用下得到。在下面的定理中，我们证明，在相对温和的条件下， Q 确实是具有所需特征的几何多面体。我们分别用 A_{K_0}、 A_{K_1}和 A_{K_2} 表示 K_0、 K_1和 K_2 在 A中的稳定子，并注意到

$$\langle\sigma_2\rangle \subseteq A_{K_0},\ \langle\sigma_1\sigma_2\rangle \subseteq A_{K_1},\ \langle\sigma_1\rangle \subseteq A_{K_2}. \tag{16}$$

事实证明，这些包含关系中等号的出现，几乎足以得出结论： Q 具有所需的性质。

定理 6.3。 设 P 是 $\mathbb{E}^3$ 中扭棱型 $p.3.3.q.3$ （具有 $q<\infty$）的均匀多面体。假设 p 边形面与 q 边形面不全等。进一步假设， P 的一个 p 边形面与一个 q 边形面至多共享 P 的一个顶点。设 P 的一个顶点为 v ，设 σ_1、 σ_2 如定理 *6.2* 所述，设 $A:=\langle\sigma_1$、 $\sigma_2\rangle$，并设 K_0、 K_1、 K_2 和 Q 如上所述。若 $A_{K_0}=\langle\sigma_2\rangle$、 $A_{K_1}=\langle\sigma_1\sigma_2\rangle$ 和 $A_{K_2}=\langle\sigma_1\rangle$ （即式 *(16)* 中的包含关系均为等式），则 Q 是直接正则或手性几何多面体，并且 $P=\mathcal{S}_Q(v)$ 。因此， P 是 Q 的扭棱。

证明。由于 $G(P)$中 P 的顶点稳定子是平凡的，定理 6.2(d)表明$A=G(P)$。

我们首先组合地考察 Q，并证明 Q 是一个抽象多面体。 A 的生成元 σ_1,σ_2 按定义满足关系

$$\sigma_1^p=\sigma_2^q=(\sigma_1\sigma_2)^2=1,$$

并且由于 F_p 且 F_q 仅相交于 v，由此可知 A 具有交性质 ，

$$\langle\sigma_1\rangle\cap\langle\sigma_2\rangle=\langle\sigma_1\rangle\cap\langle\sigma_1\sigma_2\rangle=\langle\sigma_2\rangle\cap\langle\sigma_1\sigma_2\rangle=\{1\}.$$

于是，由 [32], 我们可以从 A 生成一个直接正则或手性的抽象多面体$\mathcal{Q}$ ，其顶点、边和面分别是子群 $A^0:=\langle\sigma_2\rangle$、$A^1:=\langle\sigma_1\sigma_2\rangle$和 $A^2:=\langle\sigma_1\rangle$在 A中的左陪集，关联由陪集的非空交给出（即当且仅当 $i\le j$且 $\varphi A^i\cap\tau A^j\neq\emptyset$时， $\varphi A^i\le\tau A^j$在 $\mathcal{Q}$中）。此外， A是 $\mathcal{Q}$ 的自同构群的一个子群，并作用在 $\mathcal{Q}$ 上，具有两个旗轨道，使得相邻旗位于不同的轨道中。

接下来，我们证明由下式给出的映射

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathcal{Q} & \mapsto & Q \\ & \varphi A^i & \mapsto & \varphi(K_i)\ \ (i=0,1,2;\ \varphi\in A) \end{array}$$

是 $\mathcal{Q}$与 Q的面集之间的多胞体同构。首先注意到，关于稳定子 A_{K_i} 的假设使我们能够证明 f 是一个双射。事实上，由于对每个 i都有 $A_{K_i}=A^i$ ，因此 $\varphi(K_i)=\psi(K_i)$当且仅当 $\varphi A_{K_i}=\psi A_{K_i}$；也就是说，当且仅当 $\varphi A^i=\psi A^i$。因此， f 是良定义且单射的。显然， f 也是满射，所以 f 是双射。注意，群 A 以保关联的方式作用于 $\mathcal{Q}$和 Q 。接下来只需证明映射 f 和 f^{-1} 都保关联。以下论证表明， f

本身保关联。若 $\varphi A^i \le \tau A^j$ 属于 $\mathcal{Q}$，则 $i \le j$ 且 $\varphi A^i \cap \tau A^j \neq \emptyset$，因此存在 $\alpha \in A^i$ 和 $\beta \in A^j$ 使得 $\varphi\alpha = \tau\beta$；于是

$$f(\varphi A^i) = \varphi(K_i) = \varphi\alpha(K_i) = \tau\beta(K_i) \le \tau\beta(K_j) = \tau(K_j) \le f(\tau A^j),$$

如所需。为了证明 f^{-1} 也保关联，只需考虑 Q 中满足 $\le K_j$ 的面 $\varphi(K_i)$，其中 $(i,j) = (0,1)$、$(0,2)$、$(1,2)$。K_1 的顶点为 $\sigma_1\sigma_2(^k)K_0$，其中 $k = 0$ 取 1；而 K_2 的顶点和边分别由 $\sigma_1^l(K_0)$ 和 $\sigma_1^l(K_1)$ 给出，其中 $l \ge 0$。现在请牢记我们关于 Q 的基面 K_l 的稳定子的假设，并回想当 $l = 0$ 取 1、2 时，$A_{K_l} = A^l$。若 $(i,j) = (0,1)$，则可推出，对于某个 $k = 0$（取 1），$\varphi \in (\sigma_1\sigma_2)^k A^0$，因此

$$\varphi A^0 \cap A^1 = (\sigma_1\sigma_2)^k\langle\sigma_2\rangle \cap \langle\sigma_1\sigma_2\rangle \neq \emptyset.$$

若 $(i,\ j) = (0,\ 2)$，则对于某个 $l \ge 0$，$\varphi \in \sigma_1^l A^0$，因此 $\varphi A^0 \cap A^2 = \sigma_1^l\langle\sigma_2\rangle \cap \langle\sigma_1\rangle \neq \emptyset$。类似地，若 $(i,\ j) = (1,\ 2)$，则 $\varphi A^1 \cap A^2 = \sigma_1^l\langle\sigma_1\sigma_2\rangle \cap \langle\sigma_1\rangle \neq \emptyset$。由此可知，每种情况下，$\varphi A^i \le A^j$ 在 $\mathcal{Q}$ 中。这证明 f^{-1} 也保关联。

因此，Q 也是一个抽象多胞体，在 f下与 $\mathcal{Q}$ 同构。特别地，Q 是一个几何多胞体（按照 [25]的意义，$\mathcal{Q}$在 $\mathbb{E}^3$ 中的忠实实现），而 A 是 Q 的对称群的一个子群，它作用于 Q，且有两个旗轨道，使得相邻旗属于不同轨道。生成元 σ_1，σ_2 是对应于此作用的 A 的特定生成元，并且 $A = G^+(Q)$。此外，根据我们关于 P的假设，v 在 A 中的稳定子是平凡的，因此 v 满足 G^+的 IPC（Q）。因此，v 可作为 Q的扭棱 $S_Q(v)$ 的初始顶点。

最后，我们断言 $P = S_Q(v)$。事实上，使用第 5.1 节中关于 $s_1 = \sigma_1$、$s_2 = \sigma_2$和 $s_0 = \sigma_1\sigma_2$的记号，可以看出，$S_Q(v)$ 的面与 P的面相对应。具体而言，从扭棱 $S_Q(v)$ 的初始顶点 v 出发，$S_Q(v)$ 的基边可表示为$\{v, s_i(v)\}$，其中 $i = 0$、1、2，因此它们是从 P的顶点 v发出的 P的边。类似地，$S_Q(v)$ 的基面是 P 中包含顶点 v的面。其余部分由 A的作用完成。证明完毕。 □

注4. 设 P 是扭棱型 $p.3.3.q.3$ 均匀多面体（具有 $q < \infty$）。如果 p 边形面与 q 边形面全等，$G(P)$ 中的顶点稳定子非平凡，并且 A 是 $G(P)$ 的指数 2 子群（因此 A 中的顶点稳定子是平凡的），那么定理 6.3 的结论同样成立，证明也可照搬。我们不知道有任何扭棱型均匀多面体满足以下条件：p 边形面与 q 边形面全等，$G(P)$ 中的顶点稳定子非平凡，并且 $A = G(P)$。

注5。 再次假设，$u(= K_0)$是均匀多面体 P中顶点 v 处面 F_q 的中心。定理 6.3 对 $A_u(= A_{K_0})$的假设相当宽松，而且我们不知道有任何不满足该假设的例子。显然，如果 $\varphi \in A_u$，那么 $\varphi(F_q)$也是 P 中以 u 为中心的q边形面，并且可能与 F_q重合，也可能不重合。从几何上看，条件 $A_u = \langle\sigma_2\rangle$ 简单地意味着，P 中以 u为中心的 q边形面只有 F_q 这一个。事实上，如果不满足关于 A_u 的条件，那么以 u为中心的 q边形不止一个

P	s_1	s_2	s_0
$\{3,3\}$	$(\frac{\beta}{2}+\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{\beta}{2}-\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{\alpha}{\sqrt{2}})$	$(\frac{\alpha}{2}-\frac{z}{\sqrt{2}},-\frac{\alpha}{2}-\frac{z}{\sqrt{2}},-\frac{\beta}{\sqrt{2}})$	$(y,\ x,\ -z)$
$\{4,3\}_3$	$(-y,\ x,\ -z)$	$(\frac{\alpha}{2}-\frac{z}{\sqrt{2}},-\frac{\alpha}{2}-\frac{z}{\sqrt{2}},-\frac{\beta}{\sqrt{2}})$	$(\frac{\alpha}{2}+\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{\alpha}{2}-\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{\beta}{\sqrt{2}})$
$\{4,3\}$	$(y,-x,z)$	$(y,\ -z,\ -x)$	$(-z,-y,-x)$
$\{6,3\}_4$	$(-z,\ -x,\ -y)$	$(y,\ -z,\ -x)$	$(x,\ -y,\ z)$
$\{6,4\}_3$	$(-z,-x,-y)$	$(-y,x,z)$	$(-z,\ y,\ -x)$

表 1：非二十面体有限正多面体 P的 $G^+(P)$的生成元 s_1、 s_2、 s_0，其中 $\alpha := x+y$， $\beta := x-y$。

P 中心位于 u的 q边形也在某种意义上相互重叠。在几何图形中，这种几何性质很容易辨认。请注意，由于多面体 P 属于扭棱型， F_q 无法在 $G(P)$中具有二面体稳定子。

7 $G^+(P)$的生成元与基本区域

接下来的三个章节重点介绍 $\mathbb{E}^3$中的有限正多面体的扭棱体。其余正多面体的扭棱体将在 [37]中详细介绍。

为从正多面体 P 构造扭棱体，我们需要组合旋转子群 $G^+(P)$ 的生成元 s_1， s_2（以及 $s_0 = s_1 s_2$）的显式公式。我们以如下形式列出表 1、表 2 中的信息

P	s_1	s_2	s_0

我们的表格只列出对偶对中的一个多面体，因为对偶多面体具有相同的对称群。

群 $G^+(P)$ 的基本区域可通过第4节末尾所述的方法求得：选取一个点 w，使其不被 $G^+(P)$ 的任何非平凡元素固定，然后将 w 在由点 w 在 $G^+(P)$ 作用下形成的点轨道所确定的狄利克雷-沃罗诺伊镶嵌中的狄利克雷-沃罗诺伊区域（胞）内部，取作基本区域。在表 3 中，我们给出用于生成狄利克雷-沃罗诺伊镶嵌、进而生成 $G^+(P)$ 的基本区域 D 的点 w。基本区域 D 本身是顶点为 (0,0,0)、由表 3 的集合 V 中非零向量张成的凸锥的内部。

8 个有限正多面体的扭棱体

本节中，为了说明我们的方法，我们将扭棱构造应用于十八种有限正多面体 P，初始顶点 v 选取在 $G^+(P)$ 的（开）基本区域 D 内，或者选取为 D 边界上由某个生成元 s_0、s_1 或 s_2 固定的点。关于其余正多面体的扭棱体，请参阅 [37]。我们的计算基于表1、表2中 $G^+(P)$ 的生成元 s_1， s_2， s_0

P	s_1 s_2	s_0
$\{3,5\}$	$(\alpha x+\frac{y}{2}+\beta z, \frac{x}{2}-\beta y-\alpha z, \alpha y-\beta x-\frac{z}{2})$ $(\alpha x-\frac{y}{2}+\beta z, \frac{x}{2}+\beta y-\alpha z, \beta x+\alpha y+\frac{z}{2})$	$(x,-y,-z)$
$\{10,5\}_3$	$(\alpha x+\frac{y}{2}+\beta z, \beta y-\frac{x}{2}+\alpha z, \alpha y-\beta x-\frac{z}{2})$ $(\alpha x-\frac{y}{2}+\beta z, \frac{x}{2}+\beta y-\alpha z, \beta x+\alpha y+\frac{z}{2})$	$(x,\ y,\ -z)$
$\{10,3\}_5$	$(\alpha x+\frac{y}{2}+\beta z,\ \beta y-\frac{x}{2}+\alpha z,\ \alpha y-\beta x-\frac{z}{2})$ $(\alpha x+\frac{y}{2}-\beta z,\ \frac{x}{2}-\beta y+\alpha z,\ \beta x-\alpha y-\frac{z}{2})$	$(x,-y,z)$
$\{5,\frac{5}{2}\}$	$(\frac{x}{2}+\beta y+\alpha z, \beta x+\alpha y-\frac{z}{2}, \frac{y}{2}-\alpha x+\beta z)$ $(\frac{x}{2}-\beta y+\alpha z, \beta x-\alpha y-\frac{z}{2}, \alpha x+\frac{y}{2}-\beta z)$	$(x,-y,-z)$
$\{6,\frac{5}{2}\}$	$(\frac{x}{2}+\beta y+\alpha z, \frac{z}{2}-\alpha y-\beta x, \frac{y}{2}-\alpha x+\beta z)$ $(\frac{x}{2}-\beta y+\alpha z, \beta x-\alpha y-\frac{z}{2}, \alpha x+\frac{y}{2}-\beta z)$	$(x,y,-z)$
$\{6,5\}$	$(\frac{x}{2}+\beta y+\alpha z, \frac{z}{2}-\alpha y-\beta x, \frac{y}{2}-\alpha x+\beta z)$ $(\frac{x}{2}+\beta y-\alpha z, \beta x+\alpha y+\frac{z}{2}, \alpha x-\frac{y}{2}+\beta z)$	$(x,-y,z)$
$\{3,\frac{5}{2}\}$	$(\alpha y-\beta x+\frac{z}{2},\ \beta z-\frac{y}{2}-\alpha x,\ \frac{x}{2}-\beta y+\alpha z)$ $(\alpha y-\beta x-\frac{z}{2}, \alpha x+\frac{y}{2}+\beta z, \frac{x}{2}-\beta y-\alpha z)$	$(x,-y,-z)$
$\{\frac{10}{3},\frac{5}{2}\}$	$(\alpha y-\beta x+\frac{z}{2},\ \beta z-\frac{y}{2}-\alpha x,\ \beta y-\frac{x}{2}-\alpha z)$ $(\alpha y-\beta x-\frac{z}{2}, \alpha x+\frac{y}{2}+\beta z, \frac{x}{2}-\beta y-\alpha z)$	$(x,-y,z)$
$\{\frac{10}{3},3\}$	$(\alpha y-\beta x+\frac{z}{2}, \beta z-\frac{y}{2}-\alpha x, \beta y-\frac{x}{2}-\alpha z)$ $(\frac{z}{2}-\alpha y-\beta x, \alpha x-\frac{y}{2}-\beta z, \frac{x}{2}+\beta y+\alpha z)$	$(x,y,-z)$

表2：二十面体有限正多面体 P 的 $G^+(P)$ 的生成元 s_1， s_2， s_0，其中$\alpha:=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$，$\beta:=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$。

P	w	V
$\{3,3\}$	$(\frac{1}{9}, 0, -\frac{2}{9\sqrt{2}})$	V_1
$\{4,3\}_3$	$(\frac{1}{12}, \frac{1}{8}, -\frac{\sqrt{2}}{12})$	V_2
$\{4,3\}$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$	V_3
$\{6,3\}_4$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$	V_3
$\{6,4\}_3$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$	V_4
$\{10,5\}_3$	$(\frac{5+4\sqrt{5}}{12}, \frac{1+\sqrt{5}}{24}, \frac{1}{4})$	V_6
$\{10,3\}_5$	$(\frac{5+4\sqrt{5}}{12}, \frac{1+\sqrt{5}}{24}, \frac{1}{4})$	V_6
$\{6,\frac{5}{2}\}$	$(\frac{5+4\sqrt{5}}{12}, \frac{1+\sqrt{5}}{24}, \frac{1}{4})$	V_6
$\{6,5\}$	$(\frac{5+4\sqrt{5}}{12}, \frac{1+\sqrt{5}}{24}, \frac{1}{4})$	V_6
$\{\frac{10}{3},3\}$	$(\frac{5+4\sqrt{5}}{12}, \frac{1+\sqrt{5}}{24}, \frac{1}{4})$	V_6
$\{\frac{10}{3},\frac{5}{2}\}$	$(\frac{5+4\sqrt{5}}{12}, \frac{1+\sqrt{5}}{24}, \frac{1}{4})$	V_6
$\{3,5\}$	$(\frac{7+5\sqrt{5}}{18}, \frac{1+\sqrt{5}}{18}, \frac{1}{3})$	V_5
$\{5,\frac{5}{2}\}$	$(\frac{7+5\sqrt{5}}{18}, \frac{1+\sqrt{5}}{18}, \frac{1}{3})$	V_5
$\{3,\frac{5}{2}\}$	$(\frac{7+5\sqrt{5}}{18}, \frac{1+\sqrt{5}}{18}, \frac{1}{3})$	V_5

V_1	$(1, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3\sqrt{2}})$
V_2	$(1, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3\sqrt{2}})$
V_3	$(0, 0, -1)$, $(1, 0, -1)$, $(1, 1, -1)$, $(0, 1, -1)$
V_4	$(1, 1, -1)$, $(1, 0, -1)$, $(0, 0, -1)$
V_5	$(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0, 1)$, $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0, 0)$, $(\frac{2+\sqrt{5}}{3}, \frac{1+\sqrt{5}}{6}, 0)$, $(\frac{3+\sqrt{5}}{4}, \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2})$
V_6	$(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0, 1)$, $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0, 0)$, $(\frac{2+\sqrt{5}}{3}, \frac{1+\sqrt{5}}{6}, 0)$

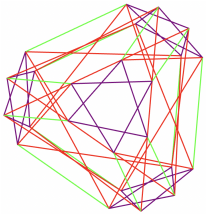
T表 3：有限正多面体 P 所对应的 $G^+(P)$ 的基本区域。

以及表 3 中 $G^+(P)$ 的基本区域 D。回顾我们的记号 $S_P^i(v)$，它表示由初始点 v 导出的扭棱$S_P(v)$，该初始点被 $s_i\,(i=0,1,2)$ 所固定。

如果 P 是柏拉图立体或开普勒-庞索多面体，且 v 满足 $G^+(P)$ 的式 (3) 的 IPC，那么 $S_P(v)$ 就对应于一个已经广为人知的扭棱体。特别地，通过选取 v 作为 $S_P(v)$ 的均匀性方程的适当可接受解，我们得到以下均匀多面体：正二十面体或正大二十面体（由四面体得到）、扭棱立方体（由立方体和八面体得到）、扭棱十二面体（由十二面体和二十面体得到）、扭棱十二-十二面体或反扭棱十二-十二面体（由 $\{\frac{5}{2},5\}$ 和 $\{5,\frac{5}{2}\}$ 得到），以及大扭棱二十面十二面体、大反扭棱二十面十二面体或大反向扭棱二十面十二面体（由 $\{3,\frac{5}{2}\}$ 和 $\{\frac{5}{2},3\}$ 得到）。这些多面体的名称见 [5, 42]。此外，P 的退化扭棱体 S_P^0、$\bar{S}_P^1$ 和 S_P^2 分别是 P 的中位多面体、P 的对偶多面体以及 P 本身。

其余九个有限正多面体是柏拉图立体的佩特里对偶，以及开普勒－庞索多面体的佩特里对偶。其中，唯一可定向的多面体是立方体的佩特里对偶。此外，这九个多面体各自的生成元 s_0 都是反射，因此根据引理 5.3，它们的扭棱体无法成为均匀多面体。若 P 是这九个多面体之一，则 S_P^1 会收缩为一个点（原点），而 S_P^2 与其自身 P 相似。退化的扭棱体 S_P^0 最值得关注，因为由此我们可以得到新的有限均匀多面体类别；这些类别将在第 9 节中介绍。

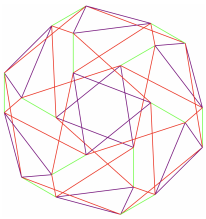
现在，我们来介绍由这些其余正多面体生成的扭棱体（带有 $v\in D$），首先是 $\{3,3\}$的佩特里对偶 $\{4,3\}_3$的扭棱体。

	$S_{\{4,3\}_3}(v)$ 具有 $v\in D$
	$4_{s_4^{\circ 3\circ 3\circ 3\circ 3}}$ 或 $c.3.3.3.3$
	$(f_0, f_1^0, f_1^1, f_1^2, f_2^0, f_2^1, f_2^2) = (24, 12, 24, 24, 24, 6, 8)$
	$\chi(S_P) = 2$

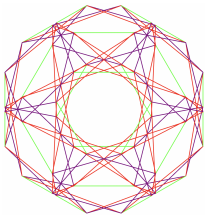
我们的表格第二行列出了所有可实现的顶点符号。回顾我们的约定：将正则凸 p边形、正则星形 p边形（密度为 d）或正则扭斜p边形分别记为 p_c、$\frac{p}{d}$或 p_s。表格第三行给出该扭棱的详细 $\bar{f}$向量，其中 f_i^j 是类型为 j的 i面的数目。第四行给出扭棱 $S_P(v)$（具有 $v\in D$）的欧拉示性数。

对于 $P=\{4,3\}_3$，由于 s_1 是旋转反射，取决于 v （仍在D中）的选择，我们可以得到扭斜面或类型 1 的凸面。半立方体 $\{4,3\}_3$ 是射影平面上的非可定向正则地图，其二重覆盖是球面上的立方体 $\{4,3\}$。因此，根据定理5.4，$S_{\{4,3\}_3}(v)\cong S_{\{4,3\}}(w)$，其中 w 位于 $G^+(\{4,3\})$ 的基本区域内。根据注 2，$S_{\{4,3\}_3}(v)$无法从几何上实现为均匀形体，但 $S_{\{4,3\}}(w)$可以通过实现为标准扭棱立方体而成为均匀形体。

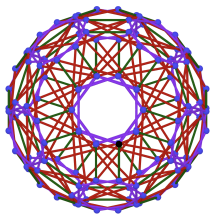
现在，我们以与上述相同的格式介绍其余的扭棱体。我们经常使用 [1] 的记号来命名底层的曲面地图。

	$S_{\{6,3\}_4}(v)$，带有 $v \in D$
	$6_s.3.3.3.3$ 或 $6_c.3.3.3.3$
	$(f_0, f_1^0, f_1^1, f_1^2, f_2^0, f_2^1, f_2^2) = (24, 12, 24, 24, 24, 4, 8)$
	$\chi(S_P) = 0$

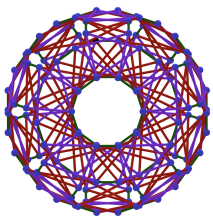
由于 $\{6,3\}_4$ 是可定向的，$S_{\{6,3\}_4}(v)$ 可以胞腔嵌入在与 $\{6,3\}_4$ 相同的曲面上，即环面。正如后文的讨论将表明的，这是经典正多面体唯一一个不具有成对共享中心的面、且其佩特里对偶为有限的情况。

	$S_{\{6,4\}_3}(v)$，带有 $v \in D$
	$6_s.3.3.4_c.3$ 或 $6_c.3.3.4_c.3$
	$(f_0, f_1^0, f_1^1, f_1^2, f_2^0, f_2^1, f_2^2) = (48, 24, 48, 48, 48, 8, 12)$
	$\chi(S_P) = -4$

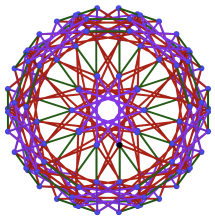
注意，$\{6,4\}_3$ 是亏格 4 的不可定向曲面上的正则地图，其二重覆盖是一个正则地图 M，类型为 $\{6,4\}$，位于亏格 3 的可定向曲面上，且其佩特里多边形的长度为 6，在 [1] 中记作 R3.4'。因此，根据定理 5.5 的证明，$S_{\{6,4\}_3}(v) \cong S_M(w)$，其中 w 位于 Δ。回想一下，Δ 是映射 M 的重心细分 $B(M)$的基三角形的内部（见第 5.4 节）。

	$S_{\{10,5\}_3}(v)$ 与 $v \in D$
	$10_s.3.3.5_c.3$ 或 $10_c.3.3.5_c.3$
	$(f_0, f_1^0, f_1^1, f_1^2, f_2^0, f_2^1, f_2^2) = (120, 60, 120, 120, 120, 12, 24)$
	$\chi(S_P) = -24$

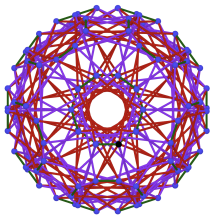
注意，$\{10,5\}_3$ (N14.3') 是定义在亏格为 14 的不可定向曲面上的正则地图，其二重覆盖是定义在亏格为 13 的可定向曲面上的类型为 $\{10,5\}$ 的正则地图 M，其佩特里多边形的长度为 6（R13.8'）。因此，$S_{\{10,5\}_3}(v) \cong S_M(w)$，其中 w 属于 Δ。

	$S_{\{10,3\}_5}(v)$，其中 $v \in D$
	$10_s.3.3.3.3$ 或 $10_c.3.3.3.3$
	$(f_0, f_1^0, f_1^1, f_1^2, f_2^0, f_2^1, f_2^2) = (120, 60, 120, 120, 120, 12, 40)$
	$\chi(S_P) = -8$

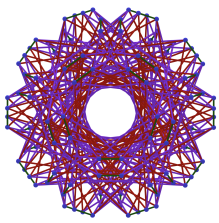
注意，$\{10,3\}_5$ (N6.2')是亏格为 6 的不可定向曲面上的正则地图，其二重覆盖是一个正则地图 M，类型为 $\{10,3\}$，位于亏格为 5 的可定向曲面上，且其佩特里多边形的长度为 10 (R5.2')。因此，$S_{\{10,3\}_5}(v) \cong S_M(w)$，其中 w 属于 Δ。

	$S_{\{6,\frac{5}{2}\}}(v)$，带有 $v \in D$
	$6_s.3.3.\frac{5}{2}.3$ 或 $6_c.3.3.\frac{5}{2}.3$
	$(f_0,\ f_1^0,\ f_1^1,\ f_1^2,\ f_2^0,\ f_2^1,\ f_2^2) = (120,\ 60,\ 120,\ 120,\ 120,\ 20,\ 24)$
	$\chi(S_P) = -16$

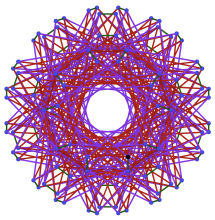
注意，$\{6,\frac{5}{2}\}$给出一个亏格为 10 的不可定向曲面上的正则地图 (N10.5')，其二重覆盖是一个正则地图 M，类型为 $\{6,5\}$，亏格为 9，且其佩特里多边形的长度为 10 (R9.15')。因此，$S_{\{6,\frac{5}{2}\}}(v) \cong S_M(w)$，其中 w属于 Δ。

	$S_{\{6,5\}}(v)$，带有 $v \in D$
	$6_s.3.3.5_c.3$ 或 $6_c.3.3.5_c.3$
	$(f_0,\ f_1^0,\ f_1^1,\ f_1^2,\ f_2^0,\ f_2^1,\ f_2^2) = (120,\ 60,\ 120,\ 120,\ 120,\ 20,\ 24)$
	$\chi(S_P) = -16$

组合地，多面体 $\{6,5\}$ 是 $\{6,5\}_{5,3}$ (N10.5')，是亏格 10 的不可定向曲面上的正则地图，其二重覆盖是亏格 9 的可定向曲面上的类型为 $\{6,5\}$ 的正则地图 M，其佩特里多边形长度为 10 (R9.15')。同样，$S_P(v) \cong S_M(w)$，其中 w 位于 Δ 中。值得注意的是，$S_{\{6,5\}} \cong S_{\{6,\frac{5}{2}\}}$。

	$S_{\{\frac{10}{3},\frac{5}{2}\}}(v)$，带有 $v \in D$
	$(\underline{10}\,3)_s.3.3.\frac{5}{2}.3$ or $\frac{10}{3}.3.3.\frac{5}{2}.3$
	$(f_0,\ f_1^0,\ f_1^1,\ f_1^2,\ f_2^0,\ f_2^1,\ f_2^2) = (120,\ 60,\ 120,\ 120,\ 120,\ 12,\ 24)$
	$\chi(S_P) = -24$

组合地，$\{\frac{10}{3},\frac{5}{2}\}$是 $\{10,5\}_3$（N14.3'），一个亏格为 14 的不可定向正则地图，其二重覆盖是一个亏格为 13、类型为 $\{10,5\}$ 的可定向正则地图 M，其佩特里多边形的长度为 6（R13.8'）。我们有 $S_P(v) \cong S_M(w)$，其中 w位于 Δ中。

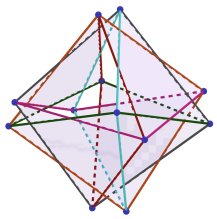
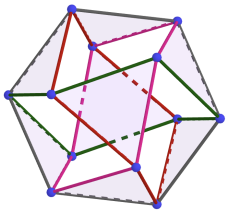
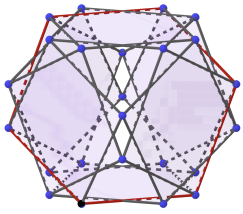
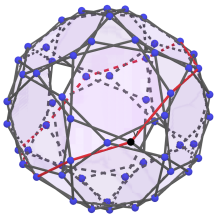
	$S_{\{\frac{10}{3},3\}}(v)$，含有 $v \in D$
	$(\frac{10}{3})_s.3.3.3.3$ or $\frac{10}{3}.3.3.3.3$
	$(f_0,\ f_1^0,\ f_1^1,\ f_1^2,\ f_2^0,\ f_2^1,\ f_2^2) = (120,\ 60,\ 120,\ 120,\ 120,\ 12,\ 40)$
	$\chi(S_P) = -8$

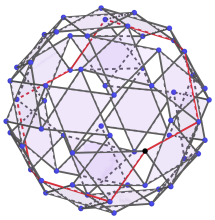
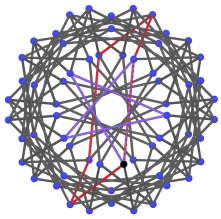
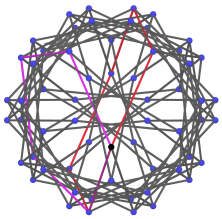
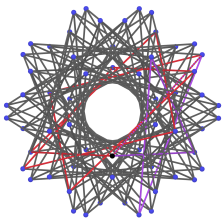
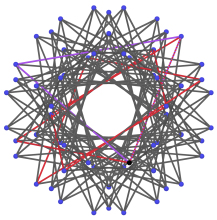
最后，$\{\frac{10}{3},3\}$ 与 $\{10,3\}_5$ (N6.2')同构，后者是一个亏格为 6 的不可定向正则地图，其二重覆盖是一个亏格为 10、类型为 $\{10,3\}$ 的可定向正则地图 M，其佩特里多边形的长度为 5（R5.2'）。我们有 $S_P(v) \cong S_M(w)$，其中 w位于 Δ中。

9 新的有限均匀多面体

本节介绍通过对正有限多面体应用扭棱构造而得到的新均匀多面体。正如我们在第8节中所见，这些正多面体经由真正的扭棱（即满足 v 的 IPC 条件 (3)）不会产生新的均匀多面体。不过，还存在许多形如$S_P^0(v)$的新均匀退化扭棱多面体。计算方面，我们仍参考表1、表2、表3。

我们考察形如 $S_P^0(v)$ 的有限均匀多面体类，其中 v 的选取满足 $s_0(v) = v_\circ$ 请注意，这里说的是“类”，因为每个 s_0 的不动点集都是一个平面。因此，在此平面上改变 v，就能得到无穷多个组合等价、但不相似（几何不等价）的多面体。在下方各表中，我们为每一类新的均匀多面体选取了一个代表；其顶点图形为交叉四边形，如图4和图5所示，分为蝴蝶结形或蝴蝶形。

	$\mathcal{S}_{\{4,3\}_3}(\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{\sqrt{2}}{10})$
	$4_s.3.4_s.3$
	交叉四边形（蝴蝶形）
	$(f_0,\ f_1,\ f_2^1,\ f_2^2) = (12,\ 24,\ 8,\ 6)$
	$\mathcal{S}_{\{6,3\}_4}(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{10})$
	$6_s.3.6_s.3$
	交叉四边形（蝴蝶形）
	$(f_0, f_1, f_2^1, f_2^2) = (12, 24, 4, 8)$
	$\mathcal{S}_{\{6,4\}_3}(\frac{1}{10}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{2})$
	$6_s.4_c.6_s.4_c$
	交叉四边形（蝴蝶形）
	$(f_0, f_1, f_2^1, f_2^2) = (24, 48, 8, 12)$
	$\mathcal{S}_{\{10,5\}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3}{10}, 0)$
	$10_s.5_c.10_s.5_c$
	交叉四边形（蝴蝶形）
	$(f_0,\ f_1,\ f_2^1,\ f_2^2) = (60,\ 120,\ 12,\ 24)$

	$\mathcal{S}_{\{10,3\}}(1,\ 0,\ {}_{1}\underline{10})$
	$10_{s}{}^{\circ\ 3\circ\ 10}{}_{s}.3$
	交叉四边形（蝴蝶形）
	$(f_0,\ f_1,\ f_2^1,\ f_2^2)=(60,\ 120,\ 12,\ 40)$
	$\mathcal{S}_{\{6,\frac{5}{2}\}}(1、{}_{1}\underline{10},\ 0)$
	$6_{s}\ \frac{5}{2}{}^{.6}\ {}_{s}\cdot\frac{5}{2}$
	交叉四边形（蝴蝶形）
	$(f_0, f_1, f_2^1, f_2^2)=(60, 120, 20, 24)$
	$\mathcal{S}_{\{6,5\}}(1,\ 0,\ {}_{1}\underline{10})$
	$6_s.5_c.6_s.5_c$
	交叉四边形（蝴蝶形）
	$(f_0,\ f_1,\ f_2^1,\ f_2^2)=(60,\ 120,\ 20,\ 24)$
	$\mathcal{S}_{\{\frac{10}{3},\frac{5}{2}\}}(1,\ {}^{0,\ \underline{1}}_{10})$
	$(\frac{10}{3})_s\cdot\frac{5}{2}.(\frac{10}{3})_s\cdot\frac{5}{2}$
	交叉四边形（蝴蝶形）
	$(f_0,\ f_1,\ f_2^1,\ f_2^2)=(60,\ 120,\ 12,\ 24)$
	$\mathcal{S}_{\{\frac{10}{3},3\}}(1,{}_{1}\underline{10},\ 0)$
	$(\underline{10}\,3)_s.3.(\frac{10}{3})_s.3$
	交叉四边形（蝴蝶形）
	$(f_0,\ f_1,\ f_2^1,\ f_2^2)=(60,\ 120,\ 12,\ 40)$

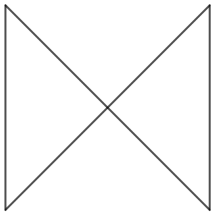


图 4：交叉四边形（领结形）

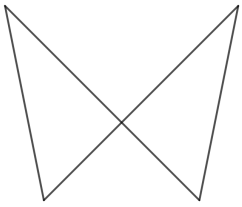


图 5：交叉四边形（蝴蝶形）

致谢

我们感谢 Gareth Jones 和 Marston Conder 就不可定向正则映射的二重光滑可定向正则覆盖的存在问题进行了有益讨论，也感谢前者提醒我们关注他的文章 [19]。

数据可用性声明

本研究未创建或分析任何新数据。本文不适用数据共享。

参考文献

[1] M. Conder 和 P. Dobcs´anyi. 小亏格正则地图的确定。组合理论杂志*B*辑, 81(2):224-242, 2001.[2] M. Conder 和 S. Wilson. 内反射子与不可定向正则地图。离散数学，307(3):367-372, 2007.[3] H.S.M. Coxeter. 三维和四维中的正则扭斜多面体及其拓扑类似物。伦敦数学会会刊 *(2)*，43:33–62, 1937.[4] H.S.M. Coxeter.正则多胞形。Dover，1973.[5] H.S.M. Coxeter、M.S. Longuet-Higgins 和 J.C.P. Miller. 均匀多面体。《伦敦皇家学会哲学汇刊 *A* 辑》，246:401–450, 1954.[6] G. Cunningham 和 D. Pellicer. 普通空间中的有限三轨道多面体，I。离散与计算几何，70:1785-1819, 2023. [7] G. Cunningham 和 D. Pellicer. 普通空间中的有限三轨道多面体，II。墨西哥数学会通报30:32, 2024.[8] A.M.Cutlerand E. Schulte. 指数为二的正则多面体，I。*Contributions to Algebraand Geometry*，52:133–161, 2011.[9] A.W.M. Dress. 关于 Gr¨unbaum 新正则多面体的组合理论，第一部分：Gr¨unbaum 的新正则多面体及其自同构群。*AequationesMathematicae*，23:252-265, 1981.[10] A.W.M. Dress. 关于 Gr¨unbaum 新正则多面体的组合理论，第二部分：完全枚举。*Aequationes Mathematicae*，29:222–243, 1985.[11] S. L. Farris. 完全分类所有顶点传递和边传递多面体，第一部分：必要的类条件。*Geometriae Dedicata*，26:111–124, 1988.[12] B. Gr¨unbaum. 正则多面体——旧与新。*Aequationes Mathematicae*，16:1–20, 1977.

[13] B. Gr¨unbaum.“新”均匀多面体。《离散几何：献给 W. Kuper- berg 60 岁生日》，第 331-350 页，2003 年。[14] Z. Har'El. 均匀多面体的均匀解。Geometriae Dedicata，47:57–110，1993 年。[15] M. Hohenwarter. GeoGebra——用于平面动态几何和代数的软件系统。Diplomarbeit，萨尔茨堡大学，2002 年。[16] I. Hubard. 由群生成的双轨道多面体。European Journal of Combinatorics，31:943–960，2010 年。[17] I. Hubard 和 L.M. Garc´ıa-Vel´azquez. 普通三维空间中的有限双轨道骨架多面体（准备中）。[18] N.W. Johnson. 具有正多边形面的凸立体。Canadian Journal of Mathematics，18:69–200，1966 年。[19]G.A. Jones. 不稳定映射。Acta Mathematica Universitatis Comenianae，88:341，2019 年。[20] H. Martini. 具有对称性的欧几里得多胞体的层次分类。《多胞体：抽象、凸与计算》，第 71–96 页，1994 年。[21] P. McMullen. 正则多胞形的实现。Aequationes Mathematicae，37:38–56，1989 年。[22] P. McMullen. 几何正多胞体。剑桥大学出版社，2020 年。[23] P. McMullen 和 B. Monson. 正则多胞形的实现，II。Aequationes Mathematicae，65(1):102–112，2003 年。[24] P. McMullen 和 E. Schulte. 普通空间中的正则多胞形。Discrete and Computational Geometry，17:449–478，1997 年。[25] P. McMullen 和 E. Schulte. 抽象正则多胞形。剑桥大学出版社，2002 年。[26] A. Montero. 三维环面中的正则多面体。Advances in Geometry，18(4):431-450，2018 年。[27] D. Pellicer 和 E. Schulte. 空间中的正多边形复形，I。Transactions of the American Mathematical Society，362:6679–6714，2010 年。[28] D. Pellicer 和 G. Williams. 关于类 2_0 和 2_2中的无限双轨道多面体。Con- tributions to Algebra and Geometry，2023 年。[29] D. Pellicer 和 A.I. Weiss. Schulte 的手性多面体的组合结构。Dis- crete and Computational Geometry，44:167–194，2010 年。

[30] E. Schulte. 普通空间中的手性多面体，I.《离散与计算几何》，32:55-99，2004.
[31] E. Schulte. 普通空间中的手性多面体，II.《离散与计算几何》，34:181-229，2005.[32] E. Schulte 和 A.I. Weiss. 手性多胞体。载于《应用几何与离散数学（维克多·克利纪念文集）》（编者：P. Gritzmann 和 B. Sturmfels），DIMACS离散数学与理论计算机科学丛书，第4卷，美国数学会和计算机协会，493–516，1991.[33] E. Schulte 和 A.I. Weiss. 骨架几何复形及其对称性。《数学智者》，39:5–16，2016.[34] E. Schulte 和 A.I. Weiss. 具有平面正则面的遗传多面体。《离散与应用数学艺术》3:#P2.07，2020.[35] E. Schulte 和 A. Williams. 普通空间中的韦托夫骨架多面体，I.《离散与计算几何》，56:657–692，2016.[36] T. Sk´acel. 普通空间中的骨架扭棱多面体。博士论文。东北大学（2023）。[37] T. Sk´acel. 普通空间中的骨架扭棱多面体，II（筹备中）。[38] J. Skilling. 均匀多面体的完整集合。《伦敦皇家学会哲学汇刊 *A* 辑》，278:111–135，1975.[39] J. Skilling. 均匀多面体的均匀复合体。《剑桥哲学学会数学会刊》，79:447–457，1976.[40]A. Williams. 韦托夫骨架多面体。博士论文，东北大学，2015.[41] V. Viana. 十五世纪和十六世纪的阿基米德立体。《精确科学史档案》，https://doi.org/10.1007/s00407-024-00331-7.[42] 维基百科，https://en.wikipedia.org/wiki/List of uniform polyhedra.[43] S.E. Wilson. 不可定向正则地图。《组合艺术》，5:213-218，1978.[44] Wolfram Research公司。*Mathematica 13.2*。Wolfram Research公司，2022。