arXiv:2602.19434v1 [math.FA] 23 Feb 2026

L_1-高维网格上推土机距离与运输成本空间的失真

CHRIS GARTLAND[1],MIKHAIL OSTROVSKII、YUVAL RABANI 和 ROBERT YOUNG

Abstract. 我们证明，将高维网格 d上的运输成本空间或推土机距离嵌入 L_1 时，其失真为 $\Omega(\log\ N)$，其中 N为顶点数，隐含常数是通用的（尤其与维数无关）。这一 N下界与适用于任意 N点度量空间的通用上界 $O(\log N)$相匹配。我们的证明基于一个针对网格上实值函数的新 Sobolev 不等式，该不等式建立在支撑于二进立方体上的随机测度之上。

1. Introduction

度量空间上的测度空间中，基于最优传输的距离历史悠久，可追溯至蒙日和康托罗维奇的经典研究（历史背景参见[San15, Vil09] ），并出现在许多不同的语境中。例如，它们用于研究：(1) 概率测度之间的相似性度量；(2) 以相应最优运输成本的范数为范数的运输问题巴拿赫空间；以及 (3) 由度量空间生成并赋予由这些度量空间诱导的范数的自由线性空间。这催生了大量含义相同或密切相关的术语，例如 Arens-Eells空间、推土机距离、基尼距离、康托罗维奇距离、康托罗维奇-鲁宾斯坦范数、利普希茨自由巴拿赫空间、运输成本范数、Wasserstein距离和瓦瑟斯坦空间。本文使用术语推土机距离 (EMD)指度量空间 X 上的概率测度之间的度量，使用运输成本范数 指总测度为 0 的 X 上符号测度线性空间上的范数（精确定义见 §1.1）。

在计算机科学中，EMD 在复杂数据对象的比较方面有着广泛的应用。例如，人们已发现它能够很好地捕捉图像之间的差异 [RTG98, RTG00, Cha02, IT03] 以及文本文档之间的差异[KSKW15, RCP16, YCCMS19]。由于高维空间常用于描述文档，甚至是二维彩色图像，因此，对高维空间，尤其是高维网格上的 EMD 进行研究，已成为一个热门

Date:2026年2月。2020 *Mathematics Subject Classification.* 51F30 (30L05, 46B03, 49Q22, 60G57, 68R12, 68W25)。*Key words and phrases.*度量嵌入的扭曲，等周不等式，Kantorovich度量，Lipschitz自由空间，随机测度，Sobolev 不等式，Wasserstein度量。[1]第一作者得到美国国家科学基金会资助，项目编号为DMS-2546184。

方向 [AFPVX17, AIK08, BCJW25, CCRW23, CJLW22, FL23, IT03]。低失真嵌入 L_1 是这项研究中的标准工具之一 [AIK08, Cha02, IT03]。它们在近似最近邻问题中尤为重要 [JWZ24]。控制理论中也存在类似的动机：状态空间通常表示为多维网格，每个坐标反映一个受监测数值参数的离散化。EMD 在各种情境下被认为是一种稳健的测度，可用于衡量不确定状态之间（例如 [Yan17, LKKB17]）或受控设备群的状态之间（例如 [MHYZ23]）的差异；同样，低失真嵌入 L_1 也颇具吸引力，因为它能将计算问题化约为已有的解决方案。鉴于这些联系，厘清将高维网格上的 EMD 嵌入 L_1 所需的失真水平至关重要（精确定义见 §1.2）。本文对此进行了阐明。

1.1. 新结果与已有结果。 令 $m, d \in \mathbb{N}$。令 $G = (V, E)$ 为边长为 $m-1$ 的 d 维网格图；即，G 是路径图的 d 重笛卡尔积

$$P_m \square P_m \square \cdots \square P_m,$$

其中 P_m 是具有 m 个节点的路径图。令 d_G 表示 V 上的最短路径度量。记 $N = m^d = |V|$。我们考虑 Banach 空间 $\mathrm{TC}(G)$，它由 V 上总测度为 0 的符号测度构成，并赋予 L_1 最优传输范数 $\|\cdot\|_{\mathrm{TC}}$（其单位球由 $\mathrm{conv}\left\{\frac{\delta_x - \delta_y}{d_G(x,y)}(\cdot) : x, y \in V, x \neq y\right\}$ 刻画：$x, y \in V, x \neq y$）。以下定理是我们的主要结果。

定理 1.1。 若 $d \geq 2$，则从 $\mathrm{TC}(G)$ 到 L_1 的任意嵌入，其双 *Lipschitz* 畸变均为 $\Omega(\log N) = \Omega(d \log m)$。

我们还考虑度量空间 $\mathrm{EMD}(G)$，它由 V 上的概率测度构成，并配备距离 $\mathrm{EMD}(\mu, \nu) = \|\mu - \nu\|_{\mathrm{TC}}$。对于任意有限度量空间 X，度量空间 $\mathrm{EMD}(X)$ 的 L_1-畸变与 Banach 空间 $\mathrm{TC}(X)$ 的线性 L_1-畸变相同（精确陈述见定理 5.1）。这种将问题归约为线性映射的重要方法，已在 [NS07 的二维网格引理 3.1] 中提出；而对任意有限度量空间的推广则见于 [GO26]。因此，以下推论可由定理 1.1 和定理 5.1 立即推出。

推论 1.2. 若 $d \geq 2$，则从 $\mathrm{EMD}(G)$ 到 L_1 的任意嵌入都具有双 *Lipschitz* 畸变 $\Omega(\log N) = \Omega(d \log m)$。

回顾一下，度量空间 (X, d) 的 L_1-畸变是量 $c_1(X)$，其定义为使得存在映射 $F: X \to L_1(0, 1)$ 满足双 *Lipschitz* 畸变 C 的最小 $C \geq 1$；而这又意味着

$$\forall u, v \in X,\ d(u, v) \leq \|F(u) - F(v)\|_1 \leq C d(u, v).$$

我们指出，当 $d = 1$ 时，路径图 G 等距嵌入到 $\mathbb{R}$ 中，并且经典地有 $c_1(\mathrm{EMD}(G)) \leq c_1(\mathrm{EMD}(\mathbb{R})) = 1$（例如，参见 [San15，命题 2.17]）。

我们的下界在渐近意义上与 $O(\log N)$ 的通用上界相匹配。该上界适用于任意 N 点度量空间，可通过嵌入到支配树度量中的随机嵌入得到，这是 Fakcharoenphol、Rao 和 Talwar [FRT04] 的结果。一个引人深思的问题是，是否存在不同于随机嵌入所诱导的方法，能够将 $\mathrm{TC}(X)$ 空间嵌入到 L_1

X 支配树度量中。尤其重要的问题是，是否有任何方法能够实现低于将 X 随机嵌入支配树度量时所产生的随机嵌入畸变阶数的畸变。定理 1.1 排除了高维网格作为反例候选的可能性。

我们的结果建立在若干先前研究的基础上。Khot 和 Naor [KN06, 推论 3.7]针对 $m = 2$ （二进制立方体）的情形证明了 $\Omega(d)$ 的下界；最近，Gartland 和 Ostrovskii [GO26] 针对 $d = 2$ （平面网格）的情形证明了 $\Omega(\log m)$ 的下界。由于 G 同时包含一个 d 维二进制立方体和一个 $m \times m$ 平面网格，这些结果共同推出了如下下界：

$$c_1(\mathrm{TC}(G)) = \Omega(\max\{d, \log m\}), \tag{1.1}$$

而定理 1.1 改进了这一结果。关于菱形图上的运输成本空间的 L_1-畸变下界，也已有相关研究：最初见于 [BGS23], ，随后 [GO26]得到了精确界。后一项研究还排除了将菱形图作为上一段所提问题的潜在反例。

我们对定理 1.1 的证明采用了一条新的、基于随机测度的 Sobolev 型不等式 (1.3)；其证明运用了高维网格的大偏差界和（边）等周性质。有趣的是，我们对 Sobolev 不等式 (1.3) 的概率论证明要求维数为 $d > 2$ ，而且似乎不适用于 $d = 2$。相反， [GO26] 的几何方法适用于 $d = 2$，但这些方法中的常数对维数的依赖关系在 $d \to \infty$ 时便不明确了。因此，我们对定理 1.1 的证明对于 $d > 2$是新的，而对于 $d = 2$ 的证明则依赖于 [GO26]。定理 1.1 在 $d > 2$ 且 m充分大的情形即为定理 5.2，该定理在 §5 中证明（定理 1.1 的其他情形由下界 (1.1) 覆盖）。

1.2. 符号与背景。 令 n， $d \in \mathbb{N}$。在本文余下部分，我们**假设 $d \geq 3$**。为方便起见，我们将 d 维网格视为 $\mathbb{R}^d$ 中的整数网格，其度量由 ℓ_1-范数诱导；此外，也假设网格的边长是 2 的幂。具体而言，将整数集合 $\{1, \dots 2^n\}$ 记为 $[2^n]$，将其 d 重笛卡尔积记为 $[2^n]^d$。我们为 $[2^n]^d$ 配备边集

$$E([2^n]^d) := \{\{u, v\} \subseteq V : u = v \pm e_i \text{ for some } i \in \{1, \dots d\}\},$$

其中 $\{e_i\}_{i=1}^d$ 是 $\mathbb{R}^d$的标准基。配备（无权）最短路径度量后，当 $\mathbb{R}^d$ 配备 ℓ_1-范数时，从 $[2^n]^d$ 到 $\mathbb{R}^d$ 的包含映射是等距的。

设 (X, d) 是一个有限度量空间。考虑定义在 X上的实值测度 μ ，满足 $\mu(X) = 0$。这种实值测度一种自然且重要的解释是运输问题：需要将某种产品从满足 $\mu(v) > 0$ 的点运送到满足 $\mu(v) < 0$的点。

不难看出，运输问题 μ 可以表示为

$$\mu = a_1(\delta_{x_1} - \delta_{y_1}) + a_2(\delta_{x_2} - \delta_{y_2}) + \cdots + a_n(\delta_{x_n} - \delta_{y_n}), \tag{1.2}$$

其中 $a_i \geq 0$, $x_i, y_i \in X$，且对于 $u \in X$ ， $\delta_u(x)$ 是位于 u 的单位测度。我们将每个这样的表示称为 μ 的运输计划 。(1.2) 中运输计划的成本 定义为将 a_i 单位的产品从 x_i 运至 y_i 的总成本，即 $\sum_{i=1}^n a_i d(x_i, y_i)$。

线性空间中所有运输问题在 X 上的运输成本范数 $\|\mu\|_{\mathrm{TC}}$，是满足 (1.2) 的运输计划成本的下确界。由此得到一个有限维巴拿赫空间，记作 TC(X)。如 §1.1 所述，$\|\cdot\|_{\mathrm{TC}}$ 是运输问题上唯一的范数，其单位球为 conv $\left\{ \begin{smallmatrix} \delta_x-\delta_y \\ d\ x\ y \end{smallmatrix}(,) : \ x, y \in X, x \neq y \right\}$。或者，根据康托洛维奇对偶性 [Vil09, Par- ticular Case 5.16]，可得如下刻画：$\|\mu\|_{\mathrm{TC}} = \sup\{|\int_X f d\mu| : f: X \to \mathbb{R}$ 是 1-利普希茨$\}$。

1.3. **组织**。我们将通过构造定义在 $[2^n]^d$ 上、针对 $k \in \{1,\dots,n\}$ 的随机测度 ν_k，并证明对于所有 $24 \le k \le n$，都有[1] $\mathbb{E}[\|\nu_k\|_{\mathrm{TC}}] \gtrsim d2^n$，从而证明 c_1(TC(G)) 的下界；而 ν_k 满足如下形式的 Sobolev 型不等式

$$\sum_{k=24}^{n} \mathbb{E}\left|\int f \mathrm{d}\nu_k\right| \lesssim \|f\|_{W^{1,1}} \tag{1.3}$$

对于所有 $f: [2^n]^d \to \mathbb{R}$。关于 (1，1)-Sobolev 范数 $\|f\|_{W^{1,\,1}}$ 的定义，参见 §4。

测度 ν_k 在§2中构造，并在§3中建立 $\mathbb{E}[\|\nu_k\|_{\mathrm{TC}}]$ 的一个下界。在§4中，我们将证明(1.3)；最后，在§5中，我们将证明定理5.2（它与(1.1)一起推出定理1.1）。

2. Construction of Random Measures

本节中，我们为 $k \in \{1,\dots,n\}$构造随机测度 ν_k。对于$A \subseteq [2^n]^d$，定义

$$\mathrm{Vol}(A) := \frac{|A|}{|[2^n]^d|} = 2^{-nd}|A|. \tag{2.1}$$

固定 $k \in \{1,\dots n\}$。令 $\mathcal{D}_k$ 表示 $[2^n]^d$中所有边长基数为 2^{n-k}的 2^{kd} 二进立方体 Q 的集合。更准确地，对于 $j \in \{1,\dots 2^k\}$，定义

$$I_j^{(k)} := \{1 + (j-1)2^{n-k}, \dots, j2^{n-k}\}.$$

使得 $\{I_j^{(k)}\}_{j=1}^{2^k}$ 将 $[2^n]$ 分割为基数为 2^{n-k}的路径。接着，我们构造 $[2^n]^d$的乘积分割:

$$\mathcal{D}_k := \{Q \subseteq [2^n]^d : Q = \Pi_{i=1}^d I_{j_i}^{(k)} \text{ for some } (j_i)_{i=1}^d \in \{1,\dots 2^k\}^d\}.$$

注意，对于每个 $Q \in \mathcal{D}_k$，$\mathrm{Vol}(Q) = 2^{-kd}$。

回顾一下，$d \in \mathbb{N}$ 满足 $d \ge 3$。令 $p := 2^{-4d}$，并设 $\{X_Q\}_{Q\in\mathcal{D}_k}$ 为一组独立同分布随机变量，满足 $\mathbb{P}(X_Q = \pm 1) = p/2$ 且 $\mathbb{P}(X_Q = 0) = 1-p$。对于每个 $Q \in \mathcal{D}_k$，在 $[2^n]^d$ 上定义测度 Vol$_Q$，使得 Vol$_Q(A) :=$ Vol$(A \cap Q)$。在 $[2^n]^d$ 上定义随机符号测度 μ_k：

$$\mu_k := \sum_{Q\in\mathcal{D}_k} p^{-1}2^k X_Q \,\mathrm{Vol}_Q\,.$$

虽然 μ_k 的总质量通常会很小，但我们需要一个总质量几乎必然恰好为 0 的随机测度。看来，最切实可行的做法是

[1]我们使用以下渐近记号。给定 $a, b > 0$，记作 $a \lesssim b$ 或 $b \gtrsim a$ 表示，对于某个普适常数 $\omega > 0$，有 $a \le \omega b$。

减去一个相对于 Vol 具有常数密度的测度。为此，我们将 $[2^n]^d$ 上的随机符号测度 ν_k 定义为

$$\nu_k := \mu_k - \mu_k([2^n]^d)\,\mathrm{Vol}\,. \tag{2.2}$$

由于 ν_k 几乎必然具有 0 总质量，因此它是一个取值于 $\mathrm{TC}([2^n]^d)$ 的随机变量。下一个引理给出了 ν_k 的常密度部分的全变差范数的期望上界，这将使我们能够把求 ν_k 所需的所有相关估计化简为对 μ_k 的估计。

引理 2.1。设 $k \in \mathbb{N}$ 满足 $k \geq 5$。则 $\mathbb{E}[|\mu_k([2^n]^d)|] < \frac{1}{d}(\sqrt{2})^{16-k}$。

证明。我们首先用 $\mu_k([2^n]^d)$ 的 L_2-范数来估计其 L_1-范数，然后计算 L_2-范数：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|\mu_k([2^n]^d)|]^2 &\leq \mathbb{E}[|\mu_k([2^n]^d)|^2] \\
&= p^{-2}2^{2k}\sum_{Q\in\mathcal{D}_k}\mathbb{E}[X_Q^2]\,\mathrm{Vol}_Q([2^n]^d)^2 \\
&= p^{-2}2^{2k}p\sum_{Q\in\mathcal{D}_k}\mathrm{Vol}(Q)^2 \\
&= p^{-1}2^{2k}2^{kd}2^{-2kd} \\
&= 2^{4d-kd+2k}.
\end{aligned}$$

由于 $d \geq 3$ 和 $k \geq 5$，我们有

$$4d - kd + 2k = 15 - k - d + (3-d)(k-5) \leq 15 - k - d,$$

so

$$\mathbb{E}[|\mu_k([2^n]^d)|] \leq (\sqrt{2})^{15-d-k} = \frac{1}{d}(\sqrt{2})^{16-k}\cdot d(\sqrt{2})^{-d-1}.$$

容易验证

$$d(\sqrt{2})^{-d-1} = \sqrt{d^2 2^{-d-1}} < 1$$

对所有 $d \geq 3$，因此 $\mathbb{E}[|\mu_k([2^n]^d)|] \leq \frac{1}{d}(\sqrt{2})^{16-k}$，如所需。 □

3. Lower Bound on Expected TC norm

接下来，我们通过证明存在一个 $c > 0$，使得 ν_k 的大部分测度都必须移动至少距离 $cd2^{n-k}$，从下方界定 ν_k 的预期运输成本。关键界限如下引理所示。

引理 3.1。设 $Q_0 \in \mathcal{D}_k$，且设 $c > 0$。那么

$$|\{Q \in \mathcal{D}_k : \mathrm{dist}(Q_0, Q) \leq cd2^{n-k}\}| \leq (2e(c+2))^d$$

证明。我们将 $[2^n]^d$ 视为 ℓ_1^d 的子集，也就是说，$\mathbb{R}^d$ 配备了 ℓ_1–范数。于是，$[2^n]^d$ 上的图度量是 ℓ_1^d 上的 ℓ_1 度量的限制。令 $\mathcal{L}$ 为 ℓ_1^d 上的勒贝格测度；对于 $r > 0$ 和 $x \in \ell_1^d$，令 $B_r(x) \subset \ell_1^d$ 表示以 x 为中心、半径为 r 的球。那么 $\mathcal{L}(B_r(x)) = \frac{r^d 2^d}{d}$！（例如，[Bal97，第 3] 页），并且由于 $\overline{d}! \geq d^d e^{-d}$（例如，[Spe14，第 17] 页），

$$\mathcal{L}(B_r(x)) \leq \left(2e\frac{r}{d}\right)^d. \tag{3.1}$$

对于任意 $Q \in \mathcal{D}_k$，令 $\hat{} Q \subset \ell_1^d$，

$$\hat{Q} = \{q - x : q \in Q, x \in [0,1]^d\},$$

使得 $\hat{}Q$ 是 ℓ_1^d 中边长为 2^{n-k} 且包含 Q 的立方体；若 $Q_1 \neq Q_2$，则 $\hat{}Q_1$ 与 Q_2 的内部互不相交。

固定一点 $x_0 \in Q_0$。由于对所有 $Q \in \mathcal{D}_k$，$\operatorname{diam} \hat{}Q = d2^{n-k}$，若 $\operatorname{dist}(Q_0, Q) \leq cd2^{n-k}$，则

$$\hat{Q} \subset B_{(cd+2d)2^{n-k}}(x_0).$$

由于各个 $\hat{}Q$ 的内部两两不相交，且其勒贝格测度为 $2^{d(n-k)}$，

$$\begin{aligned}\left|\{Q \in \mathcal{D}_k : \operatorname{dist}(Q_0, Q) \leq cd2^{n-k}\}\right| &\leq \left|\{Q \in \mathcal{D}_k : \hat{Q} \subset B_{(cd+2d)2^{n-k}}(x_0)\}\right| \\ &\leq 2^{-d(n-k)} \mathcal{L}(B_{(cd+2d)2^{n-k}}(x_0)).\end{aligned}$$

根据 (3.1)，

$$|\{Q \in \mathcal{D}_k : \operatorname{dist}(Q_0, Q) \leq cd2^{n-k}\}| \leq (2e(c+2))^d,$$

如所欲证。 □

定理 3.2. 设 $k \in \{1, \dots n\}$，且 $k \geq 24$。则我们有下界 $\mathbb{E}[\|\nu_k\|_{\mathrm{TC}}] \geq \frac{7}{48} d2^n$。

证明。对每个子集 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}_k$，我们采用记号 $\bigcup(\mathcal{S}) := \bigcup_{Q \in \mathcal{S}} Q$，并如下定义 1-利普希茨函数 $f_{\mathcal{S}} \colon [2^n]^d \to [0, d2^n]$

$$f_{\mathcal{S}}(z) = \min\left\{\operatorname{dist}\left(z, \bigcup(\mathcal{S})\right), d2^n\right\}.$$

注意 $\operatorname{diam}[2^n]^d = d2^n$，因此对每个 $S \subseteq \mathcal{D}_k$，有 $f_{\mathcal{S}}(z) = \operatorname{dist}(z, \bigcup(\mathcal{S}))$，除非 $\mathcal{S} = \emptyset$，此时我们有 $f_{\mathcal{S}} \equiv d2^n$。

我们将用到

$$\forall \mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}_k, \quad \|f_{\mathcal{S}}\|_\infty \leq d2^n, \tag{3.2}$$

以及引理 2.1 对 $k \geq 24$ 的如下推论：

$$\mathbb{E}[|\mu_k([2^n]^d)|] \leq \frac{1}{48}. \tag{3.3}$$

令 $\mathcal{S}_-(X)$ 表示随机子集 $\{Q \in \mathcal{D}_k : \ X_Q = -1\}$。康托洛维奇对偶性意味着，$\|\nu_k\|_{\mathrm{TC}}$ 几乎必然以下界受随机 1-利普希茨函数 $f_{\mathcal{S}_-(X)}$ 对 ν_k 的积分绝对值所界。由此可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\|\nu_k\|_{\mathrm{TC}} &\geq \mathbb{E}\left|\int f_{\mathcal{S}_-(X)} \mathrm{d}\nu_k\right| \\ &\geq \mathbb{E}\left|\int f_{\mathcal{S}_-(X)} \mathrm{d}\mu_k\right| - \mathbb{E}\left|\int f_{\mathcal{S}_-(X)} \mu_k([2^n]^d)\, \mathrm{dVol}\right| \\ &\overset{(3.2)}{\geq} \mathbb{E}\left|\int f_{\mathcal{S}_-(X)} \mathrm{d}\mu_k\right| - d2^n \mathbb{E}|\mu_k([2^n]^d)| \\ &\overset{(3.3)}{\geq} \mathbb{E}\left|\int f_{\mathcal{S}_-(X)} \mathrm{d}\mu_k\right| - \frac{1}{48} d2^n.\end{aligned}$$

我们将证明

$$\mathbb{E}\int f_{\mathcal{S}_-(X)} \mathrm{d}\mu_k \geq \frac{1}{6} d2^n,$$

由此即可推出所需的不等式。

当 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}_k$，且 Y 是随机变量、E 是事件，并且 Y 和 1_E 都是随机变量 $\{X_Q\}_{Q\in\mathcal{D}_k}$ 的函数时，我们使用如下条件记号

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}[E] = \frac{\mathbb{P}\left[\mathcal{S}_-(X) = \mathcal{S} \text{ and } E\right]}{\mathbb{P}\left[\mathcal{S}_-(X) = \mathcal{S}\right]} \qquad \mathbb{E}_{\mathcal{S}}[Y] = \frac{\mathbb{E}\left[Y \cdot 1_{\{\mathcal{S}_-(X)=\mathcal{S}\}}\right]}{\mathbb{P}\left[\mathcal{S}_-(X) = \mathcal{S}\right]}.$$

Then

$$\mathbb{E}\int f_{\mathcal{S}_-(X)}\mathrm{d}\mu_k = \sum_{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{D}_k} \mathbb{P}\left[\mathcal{S}_-(X) = \mathcal{S}\right]\mathbb{E}_{\mathcal{S}}\int f_{\mathcal{S}_-(X)}\mathrm{d}\mu_k. \tag{3.4}$$

我们将通过对每个立方体 $Q \in \mathcal{D}_k$ 上的积分进行估计，来估计右侧的积分。固定 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}_k$ 和 $Q \in \mathcal{D}_k$。首先假设 $Q \notin \mathcal{S}$。若 $\mathcal{S}_-(X) = \mathcal{S}$，则 $X_Q \neq -1$，因此由于各 X_Q 均为独立同分布，我们有

$$\mathbb{P}_{\mathcal{S}}[X_Q = 1] = \mathbb{P}[X_Q = 1 | X_Q \neq -1] = \frac{p/2}{1-p/2} = \frac{p}{2-p}.$$

定义 $p' \coloneqq \frac{p}{2-p}$。

Then

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathcal{S}}\int_Q f_{\mathcal{S}_-(X)}\mathrm{d}\mu_k &= p^{-1}2^k\mathbb{E}_{\mathcal{S}}\int_Q f_{\mathcal{S}_-(X)}X_Q\,\mathrm{dVol} \\
&= p^{-1}2^k\int_Q f_{\mathcal{S}}\frac{\mathbb{E}\left[X_Q 1_{\{\mathcal{S}_-(X)=\mathcal{S}\}}\right]}{\mathbb{P}[\mathcal{S}_-(X)=\mathcal{S}]}\,\mathrm{dVol} \\
&= p^{-1}2^k\int_Q f_{\mathcal{S}}\mathbb{P}_{\mathcal{S}}[X_Q = 1]\,\mathrm{dVol} \\
&= p'p^{-1}2^k\int_Q f_{\mathcal{S}}\,\mathrm{dVol}\,. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

另一方面，若假设 $Q \in \mathcal{S}$，则 (3.5) 两边均为 0。因此，(3.5) 对所有 Q 都成立，故对 $Q \in \mathcal{D}_k$ 求和可得

$$\mathbb{E}_{\mathcal{S}}\int f_{\mathcal{S}_-(X)}\mathrm{d}\mu_k = p'p^{-1}2^k\int f_{\mathcal{S}}\,\mathrm{dVol}\,.$$

利用 (3.4) 及上述结果，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\int f_{\mathcal{S}_-(X)}\mathrm{d}\mu_k &= \sum_{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{D}_k}\mathbb{P}\left[\mathcal{S}_-(X)=\mathcal{S}\right]\mathbb{E}_{\mathcal{S}}\int f_{\mathcal{S}_-(X)}\mathrm{d}\mu_k \\
&= \sum_{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{D}_k}\mathbb{P}\left[\mathcal{S}_-(X)=\mathcal{S}\right]p'p^{-1}2^k\int f_{\mathcal{S}}\,\mathrm{dVol} \\
&= p'p^{-1}2^k\mathbb{E}\int f_{\mathcal{S}_-(X)}\,\mathrm{dVol} \\
&\geq 2^{k-1}\mathbb{E}\int f_{\mathcal{S}_-(X)}\,\mathrm{dVol}\,. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

因此我们考虑 $\mathbb{E}\int f_{\mathcal{S}_-(X)}$ dVol。

令 $Q \in \mathcal{D}_k$。那么引理 3.1（取 $c = \frac{1}{2}$）指出，至多有 $(5e)^d$ 个立方体 $Q' \in \mathcal{D}_k$ 满足 $d(Q,Q') \leq \frac{1}{2}d2^{n-k}$。如果这些立方体都不是 $\mathcal{S}_-(X)$ 的元素，那么 $\min_{z\in Q} f_{\mathcal{S}_-(X)}(z) \geq \frac{1}{2}d2^{n-k}$，因此由并集界可得

$$\mathbb{P}\left[\min_{z\in Q} f_{\mathcal{S}_-(X)}(z) \geq \frac{1}{2}d2^{n-k}\right] \geq 1 - \frac{p}{2}(5e)^d = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{5e}{16}\right)^d.$$

由于 $d \geq 3$, $1 - \frac{1}{2}(\frac{5e}{16})^d \geq \frac{2}{3}$, 并且

$$\mathbb{E}\int_Q f_{\mathcal{S}_-(X)}\,\mathrm{dVol} \geq \mathrm{Vol}(Q)\cdot\frac{1}{2}d2^{n-k}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}d2^{n-k}\,\mathrm{Vol}(Q).$$

对所有 $Q \in \mathcal{D}_k$ 求和，我们得到

$$\mathbb{E}\int f_{\mathcal{S}_-(X)}\,\mathrm{dVol} \geq \sum_{Q\in\mathcal{D}_k}\frac{1}{3}d2^{n-k}\,\mathrm{Vol}(Q) = \frac{1}{3}d2^{n-k}.$$

因此，由 (3.6) 及上述不等式可得，

$$\mathbb{E}\int f_{\mathcal{S}_-(X)}\mathrm{d}\mu_k \geq 2^{k-1}\mathbb{E}\int f_{\mathcal{S}_-(X)}\,\mathrm{dVol} \geq \frac{1}{6}d2^n,$$

正如所需。 □

4. Proving the Sobolev Inequality

对于 $f\colon\ [2^n]^d \to \mathbb{R}$，我们定义 f 的 (1,1)-Sobolev（半）范数为

$$\|f\|_{W^{1,1}} := \frac{1}{|E([2^n]^d)|}\sum_{\{u,v\}\in E([2^n]^d)} 2^n|f(v)-f(u)|.$$

本节将证明以下关于函数 $[2^n]^d \to \mathbb{R}$ 的 Sobolev 不等式。

定理 4.1（关于 ν_k 的 Sobolev 不等式）。存在一个常数 $C < \infty$（与 n、d 无关），使得对于任意 $f\colon\ [2^n]^d \to \mathbb{R}$，都有

$$\sum_{k=8}^{n}\mathbb{E}\left|\int f\mathrm{d}\nu_k\right| \leq C\|f\|_{W^{1,1}}.$$

我们先对示性函数证明定理 4.1（定理 4.5），然后将证明推广到任意函数。定理 4.1 的证明将在本节末尾给出。

4.1. 关于示性函数的 Sobolev 不等式。

对于 $A \subseteq [2^n]^d$，定义

$$\partial A := \{\{u,v\} \in E([2^n]^d) : |\{u,v\}\cap A| = 1\}$$

and

$$\mathrm{Per}(A) := \frac{1}{d}2^{-n(d-1)}|\partial A|. \tag{4.1}$$

利用 $|E([2^n]^d)| = d(2^n)^{d-1}(2^n-1)$，得到

$$\mathrm{Per}(A) \leq 2^n\frac{|\partial A|}{|E([2^n]^d)|}.$$

上述不等式表明

$$\mathrm{Per}(A) \leq \|1_A\|_{W^{1,1}}. \tag{4.2}$$

Bollobás 和 Leader 在 [BL91] 中证明了高维网格上的（边）等周不等式。利用 [BL91], 的结果，我们在下一个定理中推导出这些等周不等式的若干版本，它们在定理 4.1 的证明中起着关键作用。

定理 4.2（等周不等式）。 存在 $C_{iso} \le 2$，使得对所有$A \subseteq [2^n]^d$,

$$\mathrm{Vol}(A) \le 2^{-2d} \implies \mathrm{Vol}(A)^{1-\frac{1}{d}} \le C_{iso}\,\mathrm{Per}(A), \ and \tag{4.3}$$

$$\mathrm{Vol}(A) \le \frac{1}{2} \implies \mathrm{Vol}(A)^{1-\frac{1}{d}} \le C_{iso} d \cdot \mathrm{Per}(A). \tag{4.4}$$

证明。**(4.3) 的证明**。

根据 Per(A)（4.1）和 Vol(A)（2.1）的定义，不等式（4.3）等价于

$$|A| \le 2^{-2d}2^{nd} \implies d|A|^{1-\frac{1}{d}} \le C_{iso}|\partial A|. \tag{4.5}$$

设 $A \subseteq [2^n]^d$。对于 $r \in [1,d]$，定义 $f_r\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 如下：

$$f_r(t) := t^{1-\frac{1}{r}} \cdot r \cdot (2^n)^{\frac{d}{r}-1}.$$

Bolloba´s-Leader [BL91，定理 3] 证明了

$$|\partial A| \ge \min\{f_r(|A|) :\ r \in \{1,\dots d\}\}. \tag{4.6}$$

假设 $|A| = 2^{-kd}2^{nd}$ 满足 $k \ge 2$。那么

$$f_r(|A|) = 2^{-kd(1-\frac{1}{r})} \cdot r \cdot (2^n)^{d-1},$$

因此

$$\frac{d}{dr} f_r(|A|) = 2^{-kd(1-\frac{1}{r})} \cdot (2^n)^{d-1} \left(-\frac{kd}{r^2}\ln 2 \cdot r + 1\right).$$

若 $r \le d$，则 $r \le 2d \ln 2 \le kd \ln 2$，因此函数 $r \mapsto f_r(|A|)$ 在$r \in [1,d]$时递减。于是，(4.6) 中的下确界在 $r = d$ 处取得，且我们有

$$|\partial A| \ge d|A|^{1-\frac{1}{d}}. \tag{4.7}$$

也就是说，(4.5) 对任意 $C_{iso} \ge 1$ 都成立。

(4.4) 的证明：根据 Per(A) (4.1) 和Vol(A) (2.1) 的定义，不等式 (4.4) 等价于

$$|A| \le 2^{nd-1} \implies |A|^{\frac{d-1}{d}} \le C_{iso}|\partial A|. \tag{4.8}$$

根据 (4.3)，只需考虑以下情形：

$$2^{-2d} \cdot 2^{nd} \le |A| \le \frac{1}{2}2^{nd}. \tag{4.9}$$

我们使用 [BL91，推论 4] 的以下部分：

$$|\partial A| \ge \begin{cases} \frac{4|A|}{2^n} & \text{if } |A| < \frac{2^{nd}}{4}, \\ 2^{n(d-1)} & \text{if } \frac{2^{nd}}{4} \le |A| \le \frac{3\cdot 2^{nd}}{4}. \end{cases} \tag{4.10}$$

If

$$\frac{1}{4} \cdot 2^{nd} \le |A| \le \frac{1}{2} \cdot 2^{nd},$$

那么，(4.8)（对任意 $C_{iso} \ge 1$）可直接由 (4.10) 的第二部分推出。因此，我们考虑以下情形

$$\frac{1}{2^{m+1}} \cdot 2^{nd} \le |A| < \frac{1}{2^m} \cdot 2^{nd}, \quad 2 \le m < 2d-1.$$

在这种情况下，(4.10) 中的第一个不等式意味着

$$|\partial A| \geq \frac{4}{2^n} \cdot \frac{1}{2^{m+1}} \cdot 2^{nd} = \frac{1}{2^{m-1}} \cdot 2^{n(d-1)}.$$

另一方面，由于 $2 \leq m < 2d-1$,

$$|A|^{\frac{d-1}{d}} < \frac{1}{2^{m\frac{d-1}{d}}} \cdot 2^{n(d-1)} \leq \frac{2}{2^{m-1}} \cdot 2^{n(d-1)}.$$

如果 $2 \leq m < 2d-1$，那么

$$\frac{1}{2^{m-1}} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{m\frac{d-1}{d}}},$$

因此 $|A|^{\frac{d-1}{d}} \leq 2|\partial A|$。所以，对于任意 $C_{iso} \geq 2$，(4.8) 都成立。 □

接下来的两个引理将分别为定义 ν_k （见 (2.2)）中的两个被加数证明示性函数的 Sobolev 不等式。第一个引理为 $\mu_k(A)$ 提供一个充分界， $A \subseteq [2^n]^d$。

引理 4.3。设 $k \in \mathbb{N}$ 满足 $k \geq 8$。对于任意满足 $\mathrm{Vol}(A) \leq \frac{1}{2}$ 的 $A \subseteq [2^n]^d$，令$m(A) \in \mathbb{N}$ 满足 $2^{-m(A)} < \mathrm{Vol}(A)^{\frac{1}{d}} \leq 2^{-m(A)+1}$。那么

$$\mathbb{E}[|\mu_k(A)|] \leq 2^9 C_{iso} 2^{-\frac{|m(A)-k|}{2}} \mathrm{Per}(A).$$

证明。为简洁起见，记 $m = m(A)$。令 $N := 2^{kd}\,\mathrm{Vol}(A) = \mathrm{Vol}(A)/\mathrm{Vol}(Q)$，其中 $Q \in \mathcal{D}_k$。我们断言

$$\mathbb{E}[|\mu_k(A)|] \leq 2^k \,\mathrm{Vol}(A) \min\{1, (pN)^{-\frac{1}{2}}\}. \tag{4.11}$$

为直观理解这个不等式，暂且假设 A 等于 $\mathcal{D}_k$ 中若干个立方体 Q 的并。那么 N 就是这类立方体的数量，因此 $\mu_k(A)$ 是由 N 个独立同分布的对称随机变量组成的和；这些随机变量以 $1-p$ 的概率取值 0，并分别以 $p/2$ 的概率取值 $\pm p^{-1}2^k \frac{\mathrm{Vol}(A)}{N}$。容易看出，对于这样的独立同分布随机变量之和，(4.11) 成立。我们将证明，事实上对于任意 $A \subseteq [2^n]^d$，同一不等式都成立。

首先，对于每个 $Q \in \mathcal{D}_k$ 和 $x \in Q$， $|\mu_k|$在 x 处的期望 Radon-Nikod´ym 密度为

$$\mathbb{E}\Big[\Big|\frac{\mathrm{d}\mu_k}{\mathrm{dVol}}(x)\Big|\Big] = \mathbb{E}\Big[\Big|\frac{\mu_k(Q)}{\mathrm{Vol}(Q)}\Big|\Big] = \mathbb{E}[|p^{-1}2^k X_Q|] = 2^k. \tag{4.12}$$

因此，

$$\mathbb{E}[|\mu_k(A)|] = \mathbb{E}\Big[\Big|\int_A \frac{\mathrm{d}\mu_k}{\mathrm{dVol}}\,\mathrm{dVol}\Big|\Big] \leq \int_A \mathbb{E}\Big[\Big|\frac{\mathrm{d}\mu_k}{\mathrm{dVol}}\Big|\Big]\,\mathrm{dVol} = 2^k\,\mathrm{Vol}(A). \tag{4.13}$$

当某个 $Q \in \mathcal{D}_k$ 满足 $A \subseteq Q$ 时，此界是紧的。

其次，由于随机变量 $\{X_Q\}_{Q\in\mathcal{D}_k}$ 相互独立、均值为零，且对所有 $Q \in \mathcal{D}_k$ 都有 $\mathbb{E}[X_Q^2] = p$，因此我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mu_k(A)^2] &= \sum_{Q\in\mathcal{D}_k} \mathbb{E}\left[(p^{-1}2^k X_Q\,\mathrm{Vol}_Q(A))^2\right] \\ &= p^{-2}2^{2k}\sum_{Q\in\mathcal{D}_k}\mathbb{E}[X_Q^2]\,\mathrm{Vol}_Q(A)^2 = p^{-1}2^{2k}\sum_{Q\in\mathcal{D}_k}\mathrm{Vol}_Q(A)^2.\end{aligned}$$

接着，由于对所有 $Q \in \mathcal{D}_k$ 都有 $\mathrm{Vol}_Q(A) \le \mathrm{Vol}(Q) = 2^{-kd}$，因此

$$\mathbb{E}[\mu_k(A)^2] \le p^{-1}2^{2k} \max_{Q\in\mathcal{D}_k} \mathrm{Vol}_Q(A) \sum_{Q\in\mathcal{D}_k} \mathrm{Vol}_Q(A) \le p^{-1}2^{2k}2^{-kd}\,\mathrm{Vol}(A).$$

因此，

$$\begin{aligned}(4.14)\quad \mathbb{E}[|\mu_k(A)|] &\le \sqrt{\mathbb{E}[\mu_k(A)^2]} \le \sqrt{p^{-1}2^{2k}2^{-kd}\,\mathrm{Vol}(A)} \\ &= 2^k\,\mathrm{Vol}(A)\sqrt{p^{-1}2^{-kd}\,\mathrm{Vol}(A)^{-1}} = 2^k\,\mathrm{Vol}(A)(pN)^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

不等式（4.11）由（4.13）和（4.14）立即得出。

为证明引理，我们分两种情况讨论。首先，假设 $k-m\le 5$。由于$k\ge 8$，我们有 $m\ge 3$，因此 $\mathrm{Vol}(A) \le 2^{-2d}$。根据我们对 m 和 N的选择，

$$(4.15)\qquad 2^{(k-m-4)d} < pN \le 2^{(k-m-3)d}.$$

利用定理 4.2 的第一部分，我们有

$$\frac{\mathbb{E}[|\mu_k(A)|]}{\mathrm{Per}(A)} \overset{(4.13)}{\le} 2^k\frac{\mathrm{Vol}(A)}{\mathrm{Per}(A)} \overset{(4.3)}{\le} C_{iso}\,\mathrm{Vol}(A)^{\frac{1}{d}}2^k \le C_{iso}2^{k-m+1}.$$

比值

$$\frac{2^{k-m+1}}{2^{-\frac{|k-m|}{2}}} = 2^{k-m+1+\frac{|k-m|}{2}}$$

随 $k-m$ 增大，因此 $2^{k-m+1} < 2^9 2^{-\frac{|k-m|}{2}}$，从而

$$\frac{\mathbb{E}[|\mu_k(A)|]}{\mathrm{Per}(A)} \le C_{iso}2^{k-m+1} \le 2^9 C_{iso}2^{-\frac{|k-m|}{2}},$$

如所期望。

否则，假设 $k-m\ge 6$。利用定理 4.2 的第二部分，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}[|\mu_k(A)|]}{\mathrm{Per}(A)} &\overset{(4.14)}{\le} 2^k\frac{\mathrm{Vol}(A)}{\mathrm{Per}(A)}(pN)^{-\frac{1}{2}} \\ &\overset{(4.4)}{\le} 2^k C_{iso}d\,\mathrm{Vol}(A)^{\frac{1}{d}}(pN)^{-\frac{1}{2}} \\ &\le dC_{iso}2^{k-m+1}(pN)^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

于是，由 (4.15) 可得，

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}[|\mu_k(A)|]}{\mathrm{Per}(A)} &\le dC_{iso}2^{k-m+1}2^{-\frac{d}{2}(k-m)+2d} \\ &= 2^{2d+1-\frac{d-3}{2}(k-m)}dC_{iso}2^{-\frac{k-m}{2}}.\end{aligned}$$

由于 $d\ge 3$ 和 $k-m\ge 6$，我们有

$$2^{2d+1-\frac{d-3}{2}(k-m)}d \le 2^{2d+1-3(d-3)}d = 2^{-d+10}d \le 2^9.$$

因此，$\mathbb{E}[|\mu_k(A)|] \le 2^9 C_{iso}\,\mathrm{Per}(A)2^{-\frac{|k-m|}{2}}$，这就证明了该引理。 □

下一个引理为 $\nu_k(A),\mu_k([2^n]^d)\,\mathrm{Vol}(A)$ 中的另一个被加数给出了一个充分界。这是引理 2.1 的一个简单推论。

引理4.4。设 $k\in\mathbb{N}$ 满足 $k\ge 5$。对于任意满足 $\mathrm{Vol}(A) \le \frac{1}{2}$ 的 $A\subseteq[2^n]^d$，

$$\mathbb{E}[|\mu_k([2^n]^d)\,\mathrm{Vol}(A)|] \le (\sqrt{2})^{16-k}C_{iso}\,\mathrm{Per}(A).$$

证明。 设 $A \subseteq [2^n]^d$ 满足 $\mathrm{Vol}(A) \leq \frac{1}{2}$。根据定理 4.2 以及 $\mathrm{Vol}(A) \leq \mathrm{Vol}(A)^{1-\frac{1}{d}}$ 这一事实，只需证明

$$\mathbb{E}[|\mu_k([2^n]^d)\,\mathrm{Vol}(A)|] \leq (\sqrt{2})^{16-k}\frac{1}{d}\,\mathrm{Vol}(A).$$

该不等式恰好是引理 2.1 的结论，两边均乘以 $\mathrm{Vol}(A)$。□

定理 4.5 （示性函数的 Sobolev 不等式）。 存在常数 $C < \infty$（与 n、d 无关），使得对任意 $A \subseteq [2^n]^d$,

$$\sum_{k=8}^{n}\mathbb{E}[|\nu_k(A)|] \leq C\,\mathrm{Per}(A).$$

证明。 令 $A \subseteq [2^n]^d$。由于所需不等式的两边在置换 $A \leftrightarrow A^c$ 下均不变，我们可以假设 $\mathrm{Vol}(A) \leq \frac{1}{2}$。令 $m(A) \in \mathbb{N}$，且$2^{-m(A)} < \mathrm{Vol}(A)^{\frac{1}{d}} \leq 2^{=m(A)+1}$。于是，利用引理 4.3 和 4.4，我们可以找到常数 C_1，C_2，$C < \infty$（与 n，d，A 无关），使得

$$\begin{aligned}\sum_{k=8}^{n}\mathbb{E}[|\nu_k(A)|] &\leq \sum_{k=8}^{n}\mathbb{E}[|\mu_k(A)|] + \mathbb{E}[|\mu_k([2^n]^d)\,\mathrm{Vol}(A)|]\\ &< \sum_{k=8}^{\infty} C_1(\sqrt{2})^{-|m(A)-k|}\,\mathrm{Per}(A) + C_2(\sqrt{2})^{-k}\,\mathrm{Per}(A)\\ &\leq C\,\mathrm{Per}(A).\end{aligned}$$

□

4.2. **从示性函数到一般函数**。 以下定理使我们能够将一般函数的 Sobolev 不等式证明简化为示性函数的情形。

定理 4.6 ([GO26，定理 2。3])。 设 $|||\cdot|||$ 是从 $[2^n]^d \to \mathbb{R}$ 上的函数集合到实数的半范数，且 $|||\cdot|||$ 在常值函数上取零，并令$C \in [0,\infty)$为一个常数。若对于所有子集 $A \subseteq [2^n]^d$，均有 $|||1_A||| \leq C\|1_A\|_{W^{1,\,1}}$，则对于所有 $f\colon [2^n]^d \to \mathbb{R}$，均有$|||f||| \leq C\|f\|_{W^{1,\,1}}$。

定理 *4.1* 的证明。 该定理可由定理 4.5、定理 4.6 和不等式 (4.2) 立即推出。□

5. Sobolev Inequality Implies L_1-Distortion

在最后一节中，我们将利用以下线性化结果推导出定理 1.1 和推论 1.2。

定理 5.1 ([GO26,§5])。 对于每个有限度量空间 X，等式

$$c_1(\mathrm{EMD}(X)) = c_1(\mathrm{TC}(X)) = c_{1,\mathrm{lin}}(\mathrm{TC}(X))$$

成立，其中 $c_{1,\ \mathrm{lin}}(\mathrm{TC}(X))$ 表示所有 $m \in \mathbb{N}$ 和所有线性映射 $f\colon \mathrm{TC}(X) \to \ell_1^m$中的下确界失真。

这一结果是 Bourgain 离散化定理的推论 [Bou87], 参见[GO26,§5] 了解详情。

我们还需要以下事实。设 X 是一个有限度量空间， $\lambda : \mathrm{TC}(X) \to \mathbb{R}$ 是一个线性泛函，且 $x_0 \in X$ 是一个基点。令 $f(x) = \lambda(\delta_x - \delta_{x_0})$。于是，由于 $\{\delta_x - \delta_{x_0}\}_{x \in X}$ 张成$\mathrm{TC}(X)$，对任意 $\mu \in \mathrm{TC}(X)$，我们有$\lambda(\mu) = \int f d\mu$。

下一个定理在情形 $d \geq 3$下确立了定理 1.1。

定理 5.2. 对于满足 $d \geq 3$的 n、 $d \in \mathbb{N}$ ，存在常数 $C < \infty$ （与 n、 d无关），使得 $c_1(\mathrm{TC}([2^n]^d)) \geq C^{-1}(n-23)d$。

证明. 由定理 5.1，只需证明$c_{1,\mathrm{lin}}(\mathrm{TC}([2^n]^d)) \geq C^{-1}(n-23)d$。设 $L : \mathrm{TC}([2^n]^d) \to \ell_1^m$ 是映入有限维 ℓ_1空间的任意非压缩线性算子。选取函数 $\{f_i : [2^n]^d \to \mathbb{R}\}_{i=1}^m$，使得对所有$\mu \in \mathrm{TC}([2^n]^d)$，对所有 $i \in \{1, \dots m\}$都有 $\int f_i \mathrm{d}\mu = L(\mu)_i$。令 $p := 2^{-4d}$。然后，对每个 f_i应用定理 4.1，我们得到

$$\sum_{k=24}^{n} \mathbb{E}\,|L(\nu_k)_i| \leq \frac{C}{|E([2^n]^d)|} \sum_{\{u,v\} \in E([2^n]^d)} 2^n |L(\delta_v - \delta_u)_i|.$$

对 $i \in \{1, \dots m\}$ 求和可得

$$\sum_{k=24}^{n} \mathbb{E}\,\|L(\nu_k)\|_1 \leq \frac{C}{|E([2^n]^d)|} \sum_{\{u,v\} \in E([2^n]^d)} 2^n \|L(\delta_v - \delta_u)\|_1.$$

由于 $\|\delta_v - \delta_u\|_{\mathrm{TC}} = 1$，可得

$$\sum_{k=24}^{n} 2^{-n} \mathbb{E}\,\|L(\nu_k)\|_1 \leq C\|L\|_{op},$$

其中 $\|L\|_{op}$ 表示算子范数。又由于 L 是非收缩的，这意味着

$$\sum_{k=24}^{n} 2^{-n} \mathbb{E}\,\|\nu_k\|_{\mathrm{TC}} \leq C\|L\|_{op}.$$

根据定理 3.2，左侧的下界为 $(n-23)\frac{7d}{48}$，证明至此完成。□ —

6. Acknowledgments

我们谨向 Assaf Naor 致以诚挚谢意，感谢他向我们提出这个问题，并在美国数学研究所于2025年7月举办的“度量嵌入”会议期间组织了一场相关研讨会。我们也感谢参加该研讨会的所有与会者。

References

[AFPVX17] P.K.Agarwal, K. Fox, D.Panigrahi, K.R. Varadarajan, A.Xiao.几何运输问题的更快算法。见 *Proc. of the 33rd Int'l Symp. on Com-putational Geometry* ，页码: –: 。7 1 7 16, 2017

[AIK08] A. Andoni, P. Indyk, R. Krauthgamer.高维空间上的推土机距离。见 *Proc. of the 19th Ann. ACM-SIAM Symp, on Discrete Algorithms*，第 343–352 页，2008 年。

[Bal97] K. Ball.现代凸几何入门。 *Flavors of geometry* 1 58, 31, , – 数学科学研究所出版物，剑桥大学出版社，剑桥，1997 年。[BGS23] F. Baudier, C. Gartland, Th. Schlumprecht.将 Wasserstein 度量嵌入 L_1 的 L_1-畸变：两个维度的故事。 *Trans. Amer. Math. Soc.* Ser. B 10 (2023), 1077–1118. [BCJW25] L. Beretta, V. Cohen-Addad, R. Jayaram, E. Waingarten.以接近最近点对的速度近似高维推土机距离。见 *Proc. of the 66th Ann.* , 。[BL91] *IEEE Symp. on Foundations of Computer Science* 2025 B. Bollob´as, I. Leader.网格中的边等周不等式。 *Combinatorica* **11 (1991)**，第 4 期，299–314。[Bou87] J. Bourgain.关于离散集上定义的 Lipschitz 映射的延拓及一致同胚的评论。见: *Geometrical aspects of functional analysis* (1985/86), 157–167, *Lecture Notes in Math.*, 1267, Springer, Berlin, 1987.[Cha02] M. Charikar.通过舍入算法进行相似度估计的技术。见 *Proc. of* ，第 – 页。[*the 34th Ann. ACM Symp. on Theory of Computing* 380 388, 2002 CCRW23] M. Charikar, B. Chen, C. R´e, E. Waingarten.最优传输新松弛形式的快速算法。见 it Proc. of 36th Conf. on Learning Theory, pages 4831–4862. 2023.[CJLW22] X. Chen, R. Jayaram, A. Levi, E. Waingarten.高维 EMD 和最小生成树的新型流式算法。见 *Proc. of the 54th Ann. ACM Symp. on Theory ofComputing*，第 222–233 页，2022 年。[FRT04] J. Fakcharoenphol, S. Rao, K. Talwar.用树度量近似任意度量的紧确界。 *J. Comput. System Sci.*, 69 (2004), no. 3, 485–497. [FL23] E. Fox, J. Lu. 几何运输问题的确定性近线性时间近似方案。见 *Prof. of the 64th Ann. IEEE Symp. on Foundations of ComputerScience*，第 1301–1315 页，2023 年。[GO26] C. Gartland, M. Ostrovskii.运输成本空间的 L_1-畸变下界。 *arXiv:2602.14852v1*，已获第 58 届 ACM 年度计算理论研讨会录用，2026 年。[IT03] P. Indyk, N. Thaper, 通过嵌入实现快速图像检索，见: *Proc. of the 3rd Int'l* , 。[JWZ24] *Workshop on Statistical and Computational Theories of Vision* 2003 R. Jayaram, E. Waingarten, T. Zhang.用于推土机距离的数据依赖型 LSH。见 *Proc. of the 56th Ann. ACM Symp. on Theory of Computing*，第 800–811 页，2024 年。[KN06] S. Khot, A. Naor.通过傅里叶分析得到的不可嵌入定理。 *Math. Ann.*, 334 (2006), 821–852. [KSKW15] M. Kusner, Y. Sun, N. Kolkin, K. Weinberger.从词嵌入到文档距离。见 *International conference on machine learning*，第 957–966 页，2015 年。[LKKB17] Z. Littlefield, D. Klimenko, H. Kurniawati, K. E. Bekris.合适的距离函数在信念空间规划中的重要性。见 *Robotics Research: Volume 2*，Springer，第 683–700 页，2017 年。[MHYZ23] S. Ma, M. Hou, X. Ye, H. Zhou.使用 Wasserstein 度量匹配进行高维最优密度控制。见 *Proc. of the 62nd IEEE Conference on Decision* , 第 –6818 *and Control* 6813 页，2023 年。[NS07] A. Naor, G. Schechtman.平面推土机不属于 L_1。 *SIAM J. Computing*, 37 (2007), 804–826. [RCP16] A. Rolet, M. Cuturi, G. Peyr´e.利用平滑 Wasserstein 损失进行快速字典学习。见 *Artificial intelligence and statistics*，第 630–638 页，2016 年。[RTG98] Y. Rubner, C. Tomasi, L. J. Guibas.一种适用于图像数据库的分布度量。见 *Proc. of the 6th Int'l Conf. on Computer Vision*，第 59 66 页，1998 –。[RTG00] Y. Rubner, C. Tomasi, L. J. Guibas.作为图像检索度量的推土机距离。 *International journal of computer vision*, 40:99–121, 2000.[San15] F. Santambrogio. *Optimal Transport for Applied Mathematicians: Calculus of Variations PDEs* , , *and Modeling*。《非线性微分方程及其应用进展》，第 87 卷，Birkhäuser，2015 年。[Spe14] J. Spencer. *Asymptopia*。与 Laura Florescu 合著。学生数学图书馆，第 71 卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2014 年。

[Vil09] C. Villani。 *Optimal Transport: Old and New*。《数学科学基础》，**338**，Springer，2008年。[Yan17] I. Yang。采用凸优化方法研究带 Wasserstein距离的分布鲁棒马尔可夫决策过程。*IEEE Control Systems Letters*，**1(1)**（2017），164–169。[YCCMS19] M. Yurochkin、S. Claici、E. Chien、F. Mirzazadeh、J.M. Solomon。用于文档表示的分层最优传输。载于 *Proc. of the 33nd Int'l Conf. on* ，第 – 页。*Neural Information Processing Systems* 1601 1611, 2019

Department of Mathematics and Statistics, University of North Carolina at Charlotte, University City Blvd, Charlotte, NC 28223, U.S.A.

Department of Mathematics and Computer Science, St. John's University, 8000 Utopia Parkway, Queens, NY 11439, USA

The Rachel and Selim Benin School of Computer Science and Engineering, The Hebrew University of Jerusalem, 9190416 Jerusalem, Israel

Courant Institute School of Mathematics, Computing, and Data Science, New York University, 251 Mercer St., New York, NY 10012, USA