arXiv:2602.19456v1 [math.AP] 23 Feb 2026

加权拉普拉斯算子第二 Robin 特征值的各向异性等周不等式

YI GAO、KUI WANG 和 ANQIANG ZHU

摘要。本文研究了关于原点对称的有界 Lipschitz 区域上加权拉普拉斯算子的第二 Robin 特征值的形状优化问题。我们的主要定理指出，对于一系列负 Robin 参数，在所有具有给定加权测度且关于原点对称的有界 Lipschitz 区域中，以原点为中心的球使第二 Robin 特征值达到最大。

1. 引言

经典的 Szegö-Weinberger 不等式 [23, 25]指出，在欧几里得空间中，在所有体积相同的有界区域里，球使拉普拉斯算子的第二个（第一个非零）诺伊曼特征值唯一达到最大。运用 Szegö 和 Weinberger 的论证，人们在多种情形下建立了类似的第二个诺伊曼特征值不等式：Ashbaugh-Benguria [3] 将该不等式推广到了半球和双曲空间中的有界区域；Chiacchio 和 di Blasio [12]为高斯空间中关于原点对称的有界区域的第一个非零诺伊曼特征值，得到了一个尖锐的等周不等式。此外，人们预计（参见 [17, 问题 4.41]），对于一系列负 Robin 参数，圆球应使第二 Robin 特征值达到最大。Freitas 和 Laugesen 最近通过 Szegö [14] 和 Weinberger [15]的方法证实了这一预期。关于塞格ő-温伯格型不等式的更多结果，请参见 [1, 2, 4, 9, 18, 19, 20, 22, 24, 26]及其中的参考文献。

加权拉普拉斯算子的特征值优化问题也受到了广泛关注。例如，Chiacchio 和 di Blasio [12] 证明，在所有高斯体积固定的原点对称区域中，球使第一个非零诺伊曼特征值达到最大；Brock、Francesco 和 di Blasio [9] 在加权测度下得到了最优的塞格ő-温伯格型不等式。关于加权特征值问题的更多结果，参见 [5, 6, 9, 11, 13, 16]及其中的参考文献。

受 Brock、Francesco 和 di Blasio [9] 关于加权拉普拉斯算子的工作以及 Freitas 和 Laugesen [15] 关于第二 Robin 特征值的工作启发，我们研究形状

2010 数学主题分类。35P15,58G25.关键词。第二 Robin 特征值，加权测度，等周不等式，斯捷克洛夫特征值。

下列一类问题的第二 Robin 特征值的优化问题

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(e^{h(|x|)}\nabla u) = \lambda e^{h(|x|)}u, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\alpha \in \mathbb{R}$。在此处及下文中，Ω 表示 $\mathbb{R}^m$ 中的有界连通区域，具有 Lipschitz 边界； ν 是 $\partial\Omega$ 的外法向量， $h(r)$ 是定义在 $[0,+\infty)$上的 C^2 函数。我们定义与 h 相关联的加权测度为

$$d\gamma_h = e^{h(|x|)}\,dx, \qquad x \in \mathbb{R}^m,$$

并将配备如下范数的加权 Sobolev 空间记为 $W^{1,\,2}(\Omega;\,\gamma_h)$

$$||u||_{W^{1,2}(\Omega;\gamma_h)} := \left(\int_\Omega u^2\,d\gamma_h\right)^{1/2} + \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,d\gamma_h\right)^{1/2}.$$

众所周知，问题 (1.1) 具有离散谱。我们将其特征值记为 $\lambda_{k,\,\alpha}(\Omega;\,\gamma_h)$，其中 $k = 1,\ 2, \cdots$，它们满足

$$\lambda_{1,\alpha}(\Omega;\gamma_h) < \lambda_{2,\alpha}(\Omega;\gamma_h) \le \lambda_{3,\alpha}(\Omega;\gamma_h) \le \cdots \to +\infty,$$

每个特征值均按其重数重复计入。根据自伴紧算子的标准谱理论，(1.1) 的前两个特征值具有如下变分刻画:

$$\lambda_{1,\alpha}(\Omega;\gamma_h) = \inf\{\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 d\gamma_h + \alpha\int_{\partial\Omega} u^2 e^h\,dA}{\int_\Omega u^2 d\gamma_h} : u \in W^{1,2}(\Omega;\gamma_h)\setminus\{0\}\}, \tag{1.2}$$

其中 dA 是 Ω 上的诱导测度；并且

(1.3)

$$\lambda_{2,\alpha}(\Omega;\gamma_h) = \inf\{\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 d\gamma_h + \alpha\int_{\partial\Omega} u^2 e^h dA}{\int_\Omega u^2 d\gamma_h} : u \in W^{1,2}(\Omega;\gamma_h)\setminus\{0\}, \int_\Omega u u_1 d\gamma_h = 0\},$$

其中 $u_1(x)$ 是对应于 $\lambda_{1,\alpha}(\Omega;\gamma_h)$ 的特征函数。

为陈述我们的主要结果，我们在 Ω 上引入如下 Steklov 特征值问题

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(e^{h(|x|)}\nabla u) = 0 & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.4}$$

第一个非零 Steklov 特征值可以变分地刻画为

$$\sigma_1(\Omega;\gamma_h) = \inf\left\{\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\,d\gamma_h}{\int_{\partial\Omega} u^2 e^h\,dA} : u \in W^{1,2}(\Omega;\gamma_h)\setminus\{0\},\ \int_{\partial\Omega} u e^{h(|x|)}\,dA = 0\right\}. \tag{1.5}$$

在本文中，我们建立了关于 (1.1) 的第二 Robin 特征值的如下最优等周不等式。

定理 1.1。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 是关于原点对称的有界 *Lipschitz* 区域。假设 $h(r) \in C^2([0,+\infty))$ 满足 $h'(r) \ge 0$ 且 $h''(r) \ge 0$ 对于 $r \in (0,+\infty)$成立。设 $B \subset \mathbb{R}^m$为以原点为中心且与 γ_h 体积相同的圆球，即 Ω， $\int_\Omega e^{h(|x|)}\,dx =$

$\int_B e^{h(|x|)}\,dx$。记 $\sigma_1(B;\ \gamma_h)$ 为 (1.4) 在 B上的第一个非零 ***Steklov*** 特征值，且$\lambda_{2,\ \alpha}(\Omega;\ \gamma_h)$ 为 (1.1) 在 Ω上的第二 ***Robin*** 特征值。如果 $\alpha \in [-\sigma_1(B;\ \gamma_h), 0]$, 那么

$$\lambda_{2,\alpha}(\Omega;\gamma_h) \le \lambda_{2,\alpha}(B;\gamma_h). \tag{1.6}$$

当且仅当 $\Omega = B$ 时等号成立。

取 $\alpha = 0$，定理 1.1 表明，在所有满足给定 γ_h-测度且关于原点对称的 $\mathbb{R}^m$ 有界 Lipschitz 区域 Ω 中，以原点为中心的球是使第二个诺伊曼特征值 $\mu_2(\Omega;\gamma_h)$ 达到最大值的唯一集合。Brock、Chiacchio 和 di Blasio 此前已证明这一结果（见 [9]中的定理 1.2）。注意，定理 1.1 特别适用于 $\lambda_{2,\ \alpha}(\Omega; e^{|x|^2/2})$。因此，我们的结果为该问题的特征值提供了信息

$$-\Delta u - x\cdot\nabla u = \lambda u$$

该问题已在文献中得到广泛研究（例如，见 $[8, 10]$）。定理 1.1 中对 Ω 的对称性假设确保正交条件 (3.5) 成立，因为加权测度 $e^{h(|x|)}$ 关于原点径向对称。对于高斯测度 $e^{-|x|^2/2}dx$ 的情形，(1.6) 是否成立仍是一个有趣的问题。

取 $\alpha = -\sigma_1(B;\gamma_h)$，定理 1.1 给出如下 Brock–Weinstock 不等式，该不等式已由 Brock 与 Chiacchio $[7,$ 定理 1.4 与 1.5$]$ 以及 Mao 与 Zhang[21,推论 1.2]证明。

推论 1.2. 在定理 *1.1* 的假设下，我们有

$$\sigma_1(\Omega;\gamma_h) \le \sigma_1(B;\gamma_h).$$

等号成立当且仅当 Ω 等距于圆球 B。

定理 1.1 证明的主要技巧依赖于 Weinberger 技巧，即利用圆球上的特征函数构造测试函数来估计特征值。证明中的主要困难包括分析 (1.1) 在圆球上的第二特征函数的性质，以及建立应用 Weinberger 方法所需的单调性。本文其余部分组织如下。在第 2 节中，我们研究加权空间中球的罗宾与 Steklov 特征值问题的性质。在第 3 节中，我们证明定理 1.1 与推论 1.2。

2. 加权空间中的球的特征值问题

本节中，我们证明以原点为中心的圆球上特征值问题 (1.1) 和 (1.4) 的若干性质。记 $B(R) \subset \mathbb{R}^m$ 为半径为R的以原点为中心的球。则 (1.4) 在 $B(R)$ 上的斯捷克洛夫特征值问题可写为

$$\begin{cases} -\Delta u - \nabla h\cdot\nabla u = 0 & \text{in } B(R),\\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u & \text{on } \partial B(R), \end{cases} \tag{2.1}$$

(1.1) 在 $B(R)$ 上的罗宾特征值问题可写为

$$\begin{cases} -\Delta u - \nabla h \cdot \nabla u = \lambda u & \text{in } B(R), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = 0 & \text{on } \partial B(R), \end{cases} \tag{2.2}$$

其中 ν 是 $\partial B(R)$上的单位外法向。

众所周知，拉普拉斯算子在 $B(R)$上的第一个非零 Steklov 特征值由 $1/R$给出。对于加权斯捷克洛夫特征值问题（1.4），我们得到 $\sigma_1(B(R);\gamma_h)$的以下上界。

命题 2.1. 设 $\sigma_1(B(R);\gamma_h)$ 为<无译>*(2.1)*</无译>的第一个非零 *Steklov* 特征值。若$h'(r) \geq 0$, 则

$$\sigma_1(B(R);\gamma_h) \leq \frac{1}{R}. \tag{2.3}$$

证明。 回忆一下，(2.1)的第一非零特征值可由瑞利商刻画

$$\sigma_1(B(R);\gamma_h) = \inf \left\{ \frac{\int_{B(R)} |\nabla u|^2 \, d\gamma_h}{\int_{\partial B(R)} u^2 e^{h(|x|)} \, dA} : u \in W^{1,2}(B(R)) \setminus \{0\}, \ \int_{\partial B(R)} u e^{h(|x|)} \, dA = 0 \right\}.$$

对于每个 $1 \leq i \leq m$，我们有

$$\sigma_1(B(R);\gamma_h) \int_{\partial B(R)} x_i^2 e^{h(|x|)} \, dA \leq \int_{B(R)} |\nabla x_i|^2 \, d\gamma_h$$

对 i 求和，得到

$$\sigma_1(B(R);\gamma_h) \leq \frac{\int_{B(R)} \sum_{i=1}^m |\nabla x_i|^2 \, d\gamma_h}{\int_{\partial B(R)} \sum_{i=1}^m x_i^2 e^{h(|x|)} \, dA} = \frac{m \int_0^R e^{h(r)} r^{m-1} \, dr}{e^{h(R)} R^{m+1}} \leq \frac{m \int_0^R e^{h(R)} r^{m-1} \, dr}{e^{h(R)} R^{m+1}} = \frac{1}{R},$$

其中，我们在第二个不等式中使用了 $h' \geq 0$ 。 □

现在，我们使用分离变量法研究罗宾特征值问题（2.2）。令

$$u(r,\theta) = w(r)T(\theta), \quad r \in (0,R), \quad \theta \in \mathbb{S}^{m-1},$$

为 $B(R)$上的一个罗宾特征函数。代入（2.2）可得

$$-w''(r) - (\frac{m-1}{r} + h'(r))w'(r) - \frac{\Delta_{S_r} T(\theta)}{T(\theta)} w(r) = \lambda w(r),$$

这意味着球面部分 $T(\theta)$ 是距离球面 S_r 上拉普拉斯-贝尔特拉米算子的特征函数。由于 $\lambda_{1,\alpha}(B(R);\gamma_h)$ 是单重的，且 $B(R)$ 具有旋转对称性，(2.2) 的第一罗宾特征函数必为径向函数。因此，$\lambda_{1,\alpha}(B(R);\gamma_h)$ 是径向问题的第一特征值

$$\begin{cases} w'' + \left(\frac{m-1}{r} + h'(r) \right) w' + \lambda w = 0 \quad \text{in } (0,R), \\ w'(0) = 0, \qquad w'(R) + \alpha w(R) = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

(2.2) 的第二特征值 $\lambda_{2,\ \alpha}(B(R);\gamma_h)$ 或为 (2.4) 的第二特征值，或为下列问题的第一特征值

$$\begin{cases} w'' + \left(\dfrac{m-1}{r} + h'(r)\right) w' + (\lambda - \frac{m-1}{r^2})w = 0 \quad \text{in } (0,R), \\ w(0) = 0, \qquad w'(R) + \alpha w(R) = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

令 μ_1 表示 (2.5) 的第一特征值，并令 $g(r)$ 为其对应的特征函数。则 g 满足

$$g'' + \left(\frac{m-1}{r} + h'\right) g' + (\mu_1 - \frac{m-1}{r^2})g = 0 \tag{2.6}$$

对于 $r \in (0,\ R)$，有 $g(0) = g'(R) + \alpha g(R) = 0$。此外，$\mu_1$ 具有如下变分刻画

(2.7)

$$\mu_1 = \inf_{g \in W^{1,2}((0,R))} \left\{ \frac{\int_0^R \left(g'(r)^2 + \frac{m-1}{r^2} g^2\right) r^{m-1} e^{h(r)}\, dr + \alpha g^2(R) R^{m-1} e^{h(R)}}{\int_0^R g^2 r^{m-1} e^{h(r)}\, dr} : g(0) = 0 \right\},$$

并且相应的特征函数 g 可在 $(0,\ R]$ 上取正。下文中，我们假设 (2.5) 的第一特征函数 $g(r)$ 在 $(0,\ R)$ 上为正，且满足 $g'(0) = 1$。

P命题 2.2。令 $g(r)$ 为 (2.5) 的正特征函数。若 $\alpha \le 0$，则

(1) $g'(r) > 0$ *for* $r \in (0,R)$.
(2) *Assume further that* $\alpha \ge -\frac{2}{R}$, *then* $g'(r) \ge -\alpha g(r)$ *for* $r \in (0,R]$.

证明。(1) 令

$$N(r) = r^{m-1} e^{h(r)} g'(r), \quad r \in [0,R].$$

利用 (2.5)，我们得到

$$N'(r) = \left(\frac{m-1}{r^2} - \mu_1\right) r^{m-1} e^{h(r)} g(r).$$

因此，$N'(r)$ 在 $(0,R]$ 中至多有一个零点，且在 0 附近为正。由于 $N(0) = 0$，对于充分小的 r，有 $N(r) > 0$。若存在 $r \in (0,R)$ 使得 $N(r) < 0$，则存在点 $\xi_1, \xi_2 \in (0,R)$，使得 $N(\xi_i) = 0, i = 1,2$。由罗尔定理，存在 $\eta_1 \in (0,\xi_1)$ 和 $\eta_2 \in (\xi_1,\xi_2)$，使得 $N'(\eta_i) = 0, i = 1,2$，这与假设矛盾。因此，对于所有 $r \in (0,R)$，都有 $N(r) \ge 0$。若对某个 $r_0 \in (0,R)$，有 $N(r_0) = 0$，则 $N'(r_0) = 0$，从而推出 $\frac{m-1}{r_0^2} = \mu_1$。因此，$N'(r) < 0$ 对 $r > r_0$ 成立，这与假设矛盾。故对于所有 $r \in (0,R)$，都有 $N(r) > 0$，进而对 $r \in (0,R)$，有 $g'(r) > 0$。

(2) 为证明 (2)，令 $v(r) = g'(r)/g(r)$。由 (2.5) 可得

$$v' + v^2 + (\frac{m-1}{r} + h'(r))v + \left(\mu_1 - \frac{m-1}{r^2}\right) = 0, \tag{2.8}$$

with

$$v(R) = -\alpha, \quad v(r) > 0 \quad \text{for} \quad r \in (0,R], \quad \text{and} \quad \lim_{r \to 0^+} v(r) = +\infty. \tag{2.9}$$

现在证明 $v(r) \geq -\alpha$ 在 $(0, R]$ 上。反设存在 $r_0 \in (0, R)$，使得

$$v'(r_0) = 0, \qquad v''(r_0) \geq 0, \quad \text{and} \quad 0 < v(r_0) < -\alpha.$$

对 (2.8) 求导并利用 (2.9)，我们在 $r = r_0$ 处得到

$$\begin{aligned} 0 &= v''(r_0) + (h''(r_0) - \frac{m-1}{r_0^2})v(r_0) + \frac{2(m-1)}{r_0^3} \\ &\geq (h''(r_0) - \frac{m-1}{r_0^2})v(r_0) + \frac{2(m-1)}{r_0^3} \\ &\geq -\frac{m-1}{r_0^2}v(r_0) + \frac{2(m-1)}{r_0^3}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

其中在最后一个不等式中我们用到了 $h'' \geq 0$。因此，由 (2.10) 可得

$$v(r_0) \geq \frac{2}{r_0} > \frac{2}{R}.$$

因此

$$-\alpha > v(r_0) > \frac{2}{R},$$

这与假设 $\alpha \geq -\frac{2}{R}$ 矛盾。因此，(2) 得证。 □

现在我们来证明当 $\alpha \leq 0$ 时，圆球上的第二罗宾特征函数具有以下性质。

命题 2.3。设 $\alpha \leq 0$ 和 $h'(r) > 0$。则 (2.2) 的第二 *Robin* 特征函数为

$$u_i(x) = g(r)\frac{x_i}{r}, \quad i = 1, 2, \cdots, m,$$

其中 $g(r) : [0, R] \to [0, \infty)$ 满足

$$g''(r) + (\frac{m-1}{r} + h'(r))g'(r) + \left(\lambda_{2,\alpha}(B(R); \gamma_h) - \frac{m-1}{r^2}\right) g(r) = 0 \tag{2.11}$$

边界条件为 $g(0) = 0$ 且 $g'(R) = -\alpha g(R)$。这里 $\lambda_{2,\alpha}(B(R); \alpha)$ 表示 (2.2) 的第二 *Robin* 特征值。

证明。由于 (2.2) 的第二特征值 $\lambda_{2,\alpha}(B(R); \gamma_h)$ 要么是 (2.5) 的第一特征值 μ_1，要么是 (2.4) 的第二特征值 τ_2，因此只需证明

$$\mu_1 < \tau_2.$$

回顾一下，(2.4) 的第二特征值所对应的特征函数必在 $(0, R)$ 中变号。不失一般性，假设对于某个 $a < R$，$f(r)$ 在 $(0, a)$ 上为正，且 $f(a) = 0$。于是 $f'(a) < 0$，并且利用命题 2.2 第 (1) 部分中的同样论证可得，对 $r \in (0, a)$，$f'(r) < 0$。设 $f(r)$ 是 (2.4) 的一个特征函数，即

$$f'' + \left(\frac{m-1}{r} + h'\right) f' + \tau_2 f = 0 \tag{2.12}$$

对 $r \in (0, R)$，其中 $f'(0) = 0$，且 $f'(R) + \alpha f(R) = 0$。对 (2.12) 求导得

$$f''' + (\frac{m-1}{r} + h')f'' + (\tau_2 - \frac{m-1}{r^2} + h'')f' = 0. \tag{2.13}$$

令 $\phi(r) = e^{h(r)} f'(r)$，则

$$\phi'(r) = e^{h(r)} f'' + h'\phi,$$

and

$$\begin{aligned}
\phi''(r) &= e^{h(r)} f''' + e^{h(r)} h' f'' + h''\phi + h'\phi' \\
&= e^{h}(-(\frac{m-1}{r} + h'(r))f'' - (\tau_2 - \frac{m-1}{r^2} + h'')f') + e^{h(r)} h' f'' + h''\phi + h'\phi' \\
&= e^{h} f''(-(\frac{m-1}{r} + h'(r)) + h') - (\tau_2 - \frac{m-1}{r^2} + h'')\phi + h''\phi + h'\phi' \\
&= (\phi'(r) - h'\phi(r))(-\frac{m-1}{r}) - (\tau_2 - \frac{m-1}{r^2})\phi + h'\phi' \\
&= (-\frac{m-1}{r} + h')\phi' - (\tau_2 - \frac{m-1}{r^2} - \frac{m-1}{r}h')\phi.
\end{aligned}$$

因此，(2.13) 推出

$$\phi'' + (\frac{m-1}{r} - h')\phi' + (\tau_2 - \frac{m-1}{r^2} - \frac{m-1}{r}h')\phi = 0. \tag{2.14}$$

由 (2.6)，可得

$$\begin{aligned}
0 &= g'' + \left(\frac{m-1}{r} + h'\right) g' + (\mu_1 - \frac{m-1}{r^2})g \\
&= g'' + (\frac{m-1}{r} - h')g' + (\mu_1 - \frac{m-1}{r^2} - \frac{m-1}{r}h')g + 2h'g' + \frac{m-1}{r}h'g.
\end{aligned}$$

并且利用事实 $g(r) > 0, h'(r) \geq 0$ 以及 $g'(r) > 0$ 当 $r \in (0, a)$ 时，可得

$$0 \geq g'' + (\frac{m-1}{r} - h')g' + (\mu_1 - \frac{m-1}{r^2} - \frac{m-1}{r}h')g. \tag{2.15}$$

由于 $f'(r) < 0$ 当 $r \in (0, a)$ 时，我们有 $\phi(r) < 0$ 当 $r \in (0, a)$ 时。将 (2.15) 乘以 ϕ，得到

$$0 \leq \phi g'' + \phi g'(\frac{m-1}{r} - h') + (\mu_1 - \frac{m-1}{r^2} - \frac{m-1}{r}h')\phi g. \tag{2.16}$$

将乘以 g 的方程（2.14）从方程（2.16）中减去，得到

$$0 \leq \phi g'' - g\phi'' + (\frac{m-1}{r} - h')(g'\phi - g\phi') + (\mu_1 - \tau_2)g\phi. \tag{2.17}$$

将 (2.17) 乘以 $r^{m-1}e^{-h}$，并在 $(0, a)$ 上积分，得到

$$0 \leq \int_0^a (\phi g'' - g\phi'' + (\frac{m-1}{r} - h')(g'\phi - g\phi') + (\mu_1 - \tau_2)g\phi)r^{m-1}e^{-h(r)}dr. \tag{2.18}$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}&\int_0^a(\phi g''-g\phi'')r^{m-1}e^{-h(r)}dr\\=&\int_0^a(\phi g'r^{m-1}e^{-h(r)})'-\phi'g'r^{m-1}e^{-h}-(\frac{m-1}{r}-h')\phi g'r^{m-1}e^{-h}dr\\&-\int_0^a(g\phi'r^{m-1}e^{-h(r)})'dr+\int_0^a g'\phi'r^{m-1}e^{-h}dr+\int_0^a(\frac{m-1}{r}-h')g\phi^{'}dr,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\int_0^a(\phi g''-\phi''g)r^{m-1}e^{-h(r)}dr\\=&(\phi g'-g\phi')r^{m-1}e^{-h}\Big|_0^a+\int_0^a(\frac{m-1}{r}-h')(g\phi'-\phi g')r^{m-1}e^{h}dr.\end{aligned}\tag{2.19}$$

将 (2.19) 代入 (2.18) 得到

$$0\leq(\phi g'-g\phi')r^{m-1}e^{-h}\Big|_0^a+\int_0^a(\mu_1-\tau_2)g\phi r^{m-1}e^{-h(r)}dr.\tag{2.20}$$

由于 $g(0)=0$ 且 $\phi(0)=e^{h(0)}f'(0)=0$，我们有

$$(\phi g'-g\phi')r^{m-1}e^{-h}\Big|_0^a=\phi(a)g'(a)-g(a)\phi'(a).$$

R回想一下，$g(a)>0$，$g'(a)>0$ 且 $\phi(a)=e^{h(a)}f'(a)<0$。由 (2.12)，我们得到

$$f''(a)+(\frac{m-1}{a}+h'(a))f'(a)+\tau_2f(a)=0$$

由于 $f(a)=0$ 且 $f'(a)\leq0$，因此

$$f''(a)+h'(a)f'(a)=-\frac{m-1}{a}f'(a)>0,$$

因此

$$\phi'(a)=e^{h(a)}(f''(a)+h'(a)f'(a))>0.$$

因此

$$(\phi g'-g\phi')r^{m-1}e^{-h}\Big|_0^a=(\phi(a)g'(a)-g(a)\phi'(a))a^{m-1}e^{-h(a)}<0.\tag{2.21}$$

将 (2.21) 代入 (2.20) 得

$$0<\int_0^a(\mu_1-\tau_2)g\phi r^{m-1}e^{-h(r)}dr$$

由于 $\phi(r)<0$ 对于 $r\in(0,\ a)$，我们得出 $\mu_1<\tau_2$。命题 2.3 的证明至此完成。□

命题 2.4。假设 $h'(r)\geq0$，且 $\alpha\geq-\sigma_1(B(R);\gamma_h)$。那么

$$\lambda_{2,\alpha}(B(R);\gamma_h)\geq0.$$

证明。 令 $g(r)$如命题 2.3 中所定义。由于

$$\int_{\partial B(R)} g(r)\frac{x_i}{r}e^{h(r)}dA = 0, 1 \le i \le m,$$

函数 $u_i = g(r)\frac{x_i}{r}$, $1 \le i \le m$, 是 $\sigma_1(B(R)\ \gamma_h)$ 的可容许检验函数。因此,

$$\sum_{i=1}^{m}\int_{B(R)} |\nabla u_i|^2\, d\gamma_h \ge \sigma_1(B(R);\gamma_h)\sum_{i=1}^{m}\int_{\partial B(R)} |u_i|^2 e^{h(r)}dA, \tag{2.22}$$

其中 dA 是 ∂B上的诱导测度。利用

$$\sum_{i=1}^{m}|\nabla u_i|^2 = g'(r)^2 + \frac{m-1}{r^2}g(r)^2.$$

并注意到对于 $r \in [0,R]$, $h(r) \le h(R)$, 由式 2.22 可得

$$\begin{aligned} 0 \le& \sum_{i=1}^{m}\int_{B(R)} |\nabla u_i|^2 e^{h(r)}dx - \sigma_1(B(R);\gamma_h)\sum_{i=1}^{m}\int_{\partial B(R)} |u_i|^2 e^{h(r)}dA \\ &\le \omega_{m-1}\int_0^R \left(g'(r)^2 + \frac{m-1}{r^2}g^2\right)e^{h(r)}r^{m-1}dr + \alpha\omega_{m-1}g(R)^2 e^{h(R)}R^{m-1}, \end{aligned} \tag{2.23}$$

其中 ω_{m-1} 表示 $\mathbb{R}^m$中的单位球面 $\mathbb{S}^{m-1}$ 的表面积。利用分部积分和式 (2.11), 我们计算得

$$\begin{aligned} &\int_0^R \left(g'(r)^2 + \frac{m-1}{r^2}g^2\right)e^{h(r)}r^{m-1}dr \\ =\ & gg'e^{h(r)}r^{m-1}\Big|_0^R - \int_0^R g(g'e^{h(r)}r^{m-1})'dr + \int_0^R \frac{m-1}{r^2}g^2 e^{h(r)}r^{m-1}dr \\ =\ & g(R)g'(R)e^{h(R)}R^{m-1} - \int_0^R g(g'' + (\frac{m-1}{r} + h')g')e^{h(r)}r^{m-1}dr \\ &+ \int_0^R \frac{m-1}{r^2}g^2 e^{h(r)}r^{m-1}dr \\ =& g(R)g'(R)e^{h(R)}R^{m-1} + \int_0^R g^2(\lambda_{2,\alpha}(B(R);\gamma_h) - \frac{m-1}{r^2})e^{h(r)}r^{m-1}dr \\ &+ \int_0^R \frac{m-1}{r^2}g^2 e^{h(r)}r^{m-1}dr. \end{aligned}$$

将此等式代入不等式 (2.23), 得到

$$\begin{aligned} 0 \le& \lambda_{2,\alpha}(B(R);\gamma_h)\int_0^R g^2(r)e^{h(r)}r^{m-1}dr + g(R)e^{h(R)}R^{m-1}(g'(R) + \alpha g(R)) \\ =& \lambda_{2,\alpha}(B(R);\gamma_h)\int_0^R g^2(r)e^{h(r)}r^{m-1}\,dr, \end{aligned}$$

这意味着 $\lambda_{2,\ \alpha}(B(R);\gamma_h) \ge 0$。 □

3. 定理 1.1 的证明

本节证明，在所有关于原点对称且体积为 γ_h 的有界 Lipschitz 域中，圆球使式 (1.1) 的第二 Robin 特征值达到最大值。

从现在起，假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 是关于原点对称的有界 Lipschitz 区域，且 $B \subset \mathbb{R}^m$ 是以原点为中心、与 Ω 体积相同的圆球。令R 为 B的半径。我们将 (2.11) 中定义的函数 g 延拓为

$$g(r) = g(R)e^{-\alpha(r-R)} \quad \text{for} \quad r \geq R. \tag{3.1}$$

根据定义， g 在 $(0, \infty)$ 上连续可微。若 $\alpha \leq 0$，则由命题 2.2 可知， g在 $(0, \infty)$ 上递增。下文中， $\sigma_1(B; \gamma_h)$ 表示 (2.2) 中定义的 B 的第一个非零 Steklov 特征值。

引理 3.1. 设 $\alpha \in [-\sigma_1(B; \gamma_h), 0]$。定义 $F: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ 为

$$F(r) := g'(r)^2 + \frac{m-1}{r^2}g^2(r) + 2\alpha g(r)g'(r) + \alpha(\frac{m-1}{r} + h'(r))g^2(r) \tag{3.2}$$

其中， $g(r)$ 由 (3.1) 定义。则 F 在 $(0, \infty)$ 上单调递减。

证明。 **情形 1**。 $0 < r \leq R$。直接计算可得

$$\begin{aligned} F'(r) &= 2g'g'' + 2\frac{m-1}{r^2}gg' - 2\frac{m-1}{r^3}g^2 \\ &\quad + 2\alpha g'(r)^2 + 2\alpha gg'' + 2\alpha(\frac{m-1}{r} + h')gg' + \alpha(h'' - \frac{m-1}{r^2})g^2 \end{aligned}$$

利用 (2.11)，可得

$$\begin{aligned} F'(r) &= 2g'(g'' + \frac{m-1}{r}g) - 2\frac{m-1}{r^3}g^2 \\ &\quad + 2\alpha g(g'' + (\frac{m-1}{r} + h')g') + 2\alpha g'(r)^2 + \alpha(h'' - \frac{m-1}{r^2})g^2 \\ &= 2g'(-(\frac{m-1}{r} + h')g' - (\lambda_2 - \frac{m-1}{r^2})g + \frac{m-1}{r^2}g) - 2\frac{m-1}{r^3}g^2 \\ &\quad + 2\alpha g^2(\frac{m-1}{r^2} - \lambda_2) + \alpha(h'' - \frac{m-1}{r^2})g^2 + 2\alpha(g')^2 \\ &= -2\frac{m-1}{r}(g')^2 + 4\frac{m-1}{r^2}g'g - 2\frac{m-1}{r^3}g^2 - 2h'(r)g'(r)^2 - 2\lambda_2 gg' \\ &\quad + \alpha\frac{m-1}{r^2}g^2 + 2\alpha g'(r)^2 + \alpha h''g^2 - 2\alpha\lambda_2 g^2 \\ &= -2\frac{m-1}{r}(g' - \frac{1}{r}g)^2 - 2\lambda_2 g(g' + \alpha g) - 2h'g'(r)^2 + \alpha\frac{m-1}{r^2}g^2 + 2\alpha(g')^2 + \alpha h''g^2, \end{aligned}$$

其中，为简便起见，我们用 $\lambda_2 = \lambda_{2,\alpha}(B; \gamma_h)$ 表示。利用 $h' \geq 0$、 $h'' \geq 0$ 和 $\alpha \leq 0$，可得

$$F'(r) \leq -2\frac{m-1}{r}(g' - \frac{1}{r}g)^2 - 2\lambda g(g' + \alpha g). \tag{3.3}$$

根据假设 $\alpha \geq -\sigma_1(B;\gamma_h)$ 和 (2.3)，可得

$$\alpha \geq -\frac{1}{R},$$

命题 2.3 的第（2）部分给出

$$g'(r) + \alpha g(r) \geq 0, \quad r \in [0, R]. \tag{3.4}$$

Re由命题 2.4 可知 $\lambda_2 \geq 0$，再由（3.3）和（3.4），我们得到

$$F'(r) \leq -2\frac{m-1}{r}(g' - \frac{1}{r}g)^2,$$

这证明了 $F(r)$ 在 $(0, R)$ 上单调递减。

情形 2。 $r \geq R$。对于 $r \geq R$,

$$F(r) = (-\alpha^2 + \frac{m-1}{r^2} + \alpha\frac{m-1}{r} + \alpha h^{'})g^2(r),$$

直接计算可得

$$F'(r) = (2\alpha^3 + \alpha h'' - 2\alpha^2 h' - 2\alpha^2\frac{m-1}{r} - 3\alpha\frac{m-1}{r^2} - 2\frac{m-1}{r^3})g^2(r).$$

由于 $\alpha \leq 0, h' \geq 0$ 和 $h^{''} \geq 0$，我们得到

$$\begin{aligned} F'(r) &\leq \left(-2\alpha^2\frac{m-1}{r} - 3\alpha\frac{m-1}{r^2} - 2\frac{m-1}{r^3}\right) g(r)^2 \\ &= -\frac{m-1}{r}(2(\alpha + \frac{3}{4r})^2 + \frac{7}{8}\frac{1}{r^2})g(r)^2 < 0, \end{aligned}$$

从而证明 $F(r)$ 在 $(0,\ R)$ 上单调递减。 □

证明定理 1.1 的主要思路是利用 Weinberger 引入的技巧，为 $\lambda_{2,\ \alpha}$ （见 (1.3)）构造试探函数。我们首先回顾一个关于加权对称化的单调性引理。

引理 3.2。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 是一个有界集，令 B 为与 Ω 具有相同 γ_h 体积的以原点为中心的圆球。如果 $f(r)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减，则

$$\int_\Omega f(|x|)\, d\gamma_m \leq \int_B f(|x|)\, d\gamma_m.$$

当且仅当 $\Omega = B$ 时，等号成立。

证明。 引理 3.2 可直接由 Hardy–Littlewood 不等式推出；参见 [9,第 213]页中不等式(4.24)的证明。□

现在我们开始证明定理 1.1。

证明。 设 Ω 是 $\mathbb{R}^m$ 中关于原点对称的有界 Lipschitz 区域，并设$B \subset \mathbb{R}^m$ 为半径为 R 、以原点为中心的圆球，满足

$$\int_B d\gamma_h = \int_\Omega d\gamma_h.$$

按照 (3.1) 定义 $g(r)$（其中 $r \in [0, +\infty)$），并对每个 $1 \le i \le m$，令

$$v_i(x) = g(|x|)\frac{x_i}{|x|},$$

其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m$。

由于 Ω 和 $d\gamma_h$ 都关于原点对称，且 $\lambda_{1,\alpha}(\Omega;\gamma_h)$ 是单的，因此第一罗宾特征函数记为 $u_1(x)$，也关于原点对称。于是，

$$\int_\Omega v_i(x)u(x)\,d\gamma_h = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m. \tag{3.5}$$

因此，由 (3.5) 以及 $\lambda_{2,\alpha}(\Omega;\gamma_h)$ 的变分刻画 (1.3) 可知，每个 $v_i(x)$ 都是可容许的；也就是说，对于 $1 \le i \le m$,

$$\lambda_{2,\alpha}(\Omega;\gamma_h)\int_\Omega v_i(x)^2\,d\gamma_h \le \int_\Omega |\nabla v_i(x)|^2\,d\gamma_h + \alpha\int_{\partial\Omega} v_i(x)^2 e^{h(|x|)}\,dA \tag{3.6}$$

直接计算可得

$$|\nabla v_i(x)|^2 = g'(r)^2\frac{x_i^2}{|x|^2} + g(r)^2\left(\frac{1}{|x|^2} - \frac{x_i^2}{|x|^4}\right).$$

将其代入 (3.6) 并对 i 求和，得到

$$\lambda_{2,\alpha}(\Omega;\gamma_h)\int_\Omega g(r)^2\,d\gamma_h \le \int_\Omega \left(g'(r)^2 + \frac{m-1}{r^2}g(r)^2\right)d\gamma_h + \alpha\int_{\partial\Omega} g(x)^2 e^{h(|x|)}\,dA. \tag{3.7}$$

利用散度定理，我们估计

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} g(r)^2 e^{h(|x|)}\,dA &\ge \int_{\partial\Omega} g(r)^2\langle\nabla r, \nu\rangle e^{h(|x|)}\,dA = \int_\Omega \operatorname{div}(g^2 e^{h(|x|)}\nabla r)dx\\ &= \int_\Omega \left(g^2\Delta r + \nabla g^2\cdot\nabla r + g^2\nabla h\cdot\nabla r\right)d\gamma_h\\ &= \int_\Omega \left(\left(\frac{m-1}{r} + h'(r)\right)g(r)^2 + (g(r)^2)'\right)d\gamma_h. \end{aligned}\tag{3.8}$$

由于 $\alpha \le 0$，将 (3.8) 代入 (3.7) 得

$$\begin{aligned}&\lambda_{2,\alpha}(\Omega;\gamma_h)\int_\Omega g(r)^2\,d\gamma_h\\ &\le \int_\Omega \left(g'(r)^2 + \frac{m-1}{r^2}g(r)^2) + \alpha\left(\frac{m-1}{r} + h'(r)\right)g(r)^2 + 2\alpha g(r)g'(r)\right)d\gamma_h\\ &= \int_\Omega F(r)^2\,d\gamma_h,\end{aligned}\tag{3.9}$$

其中 $F(x)$ 定义见引理 3.1。由命题 2.2，$g(r)$ 在 $(0, \infty)$ 上单调递增；因此，由引理 3.2,

$$\int_\Omega g^2\,d\gamma_h \ge \int_B g^2(r)\,d\gamma_h. \tag{3.10}$$

此外，由引理 3.1 和引理 3.2，我们还可得

$$\int_\Omega F(r)\,d\gamma_h \le \int_B F(r) d\gamma_h. \tag{3.11}$$

将不等式 (3.9)、(3.10) 和 (3.11) 合并，得到

$$\lambda_{2,\alpha}(\Omega;\gamma_h) \le \frac{\int_B F(r) d\gamma_h}{\int_B g(r)^2 d\gamma_h}. \tag{3.12}$$

回忆一下，t he 函数 $g(r)\ \frac{x_i}{|x|}$ 是对应于 $\lambda_{2,\ \alpha}(B;\gamma_h)$ 的特征函数。因此

$$\lambda_{2,\alpha}(B;\gamma_h) = \frac{\int_B g'(r)^2 + \frac{m-1}{r^2} g(r)^2\, d\gamma_h + \alpha \int_{\partial B} g(r)^2 e^{h(|x|)}\, dA}{\int_B g(r)^2\, d\gamma_h}.$$

此外，

$$\begin{aligned}\int_{\partial B} g^2(r) e^{h(|x|)}\, dA &= \int_{\partial B_R} \langle g(r)^2 e^{h(|x|)} \nabla r, \nu\rangle\, dA \\ &= \int_B \operatorname{div}\left(g(r)^2 e^{h(|x|)} \nabla r\right)\, dx \\ &= \int_B 2g(r)g'(r) + (\frac{m-1}{r} + h'(r)) g(r)^2\, d\gamma_h.\end{aligned}$$

因此，

$$\lambda_{2,\alpha}(B;\gamma_h) = \frac{\int_B F(r)\, d\gamma_h}{\int_B g(r)^2\, d\gamma_h}. \tag{3.13}$$

由 (3.12) 和 (3.13)，我们得到

$$\lambda_{2,\alpha}(\Omega;\gamma_h) \le \lambda_{2,\alpha}(B;\gamma_h),$$

从而证明了不等式 (1.6)。

若不等式 (1.6) 取等号，则 (3.10) 和 (3.11) 中的等号迫使 $\Omega = B$。证明完毕。□

现在证明推论 1.2。

证明。 由于 $\lambda_{2,0}(\Omega;\gamma_h)$ 是第二个（第一个非零）特征值，且且 $\lambda_{2,-\sigma_1(B;\gamma_h)}(\Omega) \le \lambda_{2,-\sigma_1(B;\gamma_h)}(B) = 0$, 因此存在 $\alpha_0 \in [-\sigma_1(B;\gamma_h), 0]$，使得 $\lambda_{2,\alpha_0}(\Omega;\ \gamma_h) = 0$。令 u 为 $\lambda_{2,\alpha_0}(\Omega;\gamma_h)$ 的一个特征函数。那么

$$\begin{cases}\Delta u + \nabla h \cdot \nabla u = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = -\alpha_0 u & \text{on } \partial\Omega.\end{cases} \tag{3.14}$$

将 (3.14) 中的第一个方程乘以 e^h 并在 Ω 上积分，可得

$$0 = \int_\Omega (\Delta u + \nabla h \cdot \nabla u)\, d\gamma_h = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} e^h dA = -\alpha_0 \int_{\partial\Omega} u e^h dA.$$

由于 $\alpha_0 \neq 0$，我们得到 $\int_{\partial\Omega} u e^h dA = 0$。回顾该定义

$$\sigma_1(\Omega;\gamma_h) := \inf\{\frac{\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \, d\gamma_h}{\int_{\partial\Omega} \varphi^2 e^h dA} : \varphi \in W^{1,2}(\Omega;\gamma_h) \setminus \{0\}, \int_{\partial\Omega} \varphi e^h dA = 0\},$$

并注意到 u 满足正交条件，我们得到

$$\begin{aligned}
\sigma_1(\Omega;\gamma_h) &\leq \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\gamma_h}{\int_{\partial\Omega} u^2 e^h dA} \\
&= \frac{\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu} e^h dA - \int_\Omega u(\Delta u + \nabla h \cdot \nabla u) \, d\gamma_h}{\int_{\partial\Omega} u^2 e^h dA} \\
&= \frac{-\alpha_0 \int_{\partial\Omega} u^2 e^h dA}{\int_{\partial\Omega} u^2 e^h dA} \\
&= -\alpha_0 \leq \sigma_1(B;\gamma_h).
\end{aligned}$$

因此，所需的不等式得证。 □

参考文献

[1] A. R. Aithal 和 G. Santhanam. 秩一对称空间中有界区域第一非零诺伊曼特征值的尖锐上界。美国数学会汇刊, 348(10):3955–3965, 1996. [2] Mark S. Ashbaugh. 拉普拉斯算子特征值的未决问题。载于分析与几何不等式及其应用，第478卷数学及其应用，第13–28页。克吕维尔学术出版社，多德雷赫特，1999.[3] Mark S. Ashbaugh 和 Rafael D. Benguria. 常曲率空间中有界区域第一非零诺伊曼特征值的尖锐上界。伦敦数学会杂志 *(2)*, 52(2):402–416, 1995. [4] Rafael D. Benguria, Barbara Brandolini 和 Francesco Chiacchio. 半球区域上拉普拉斯-贝尔特拉米算子诺伊曼特征值的尖锐估计。当代数学通讯, 22(3):1950018, 9, 2020. [5] Barbara Brandolini, Francesco Chiacchio, Antoine Henrot 和 Cristina Trombetti. 高斯空间中的最优庞加莱-维尔廷格不等式。数学研究快报, 20(3):449–457, 2013. [6] Barbara Brandolini, Francesco Chiacchio, David Krejčiřík 和 Cristina Trombetti. 庞加莱-维尔廷格型不等式中的等号情形。林琴国家科学院院刊：林琴数学与应用辑, 27 464, 2016 4 443( ): – .[7] F. Brock 和 F. Chiacchio. 径向权函数下加权斯捷克洛夫特征值的等周界。预印本, 2025. arXiv:2510.12631. [8] F. Brock, F. Chiacchio 和 A. Mercaldo. 锥中的加权等周不等式及其应用。非线性分析, 75(15):5737–5755, 2012. [9] Friedemann Brock, Francesco Chiacchio 和 Giuseppina di Blasio. 最优塞格ő-温伯格型不等式。纯粹与应用分析通讯, 15(2):367–383, 2016. [10] Friedemann Brock, Anna Mercaldo 和 Maria Rosaria Posteraro. 关于无限测度下的等周不等式。伊比利亚美洲数学杂志, 29(2):665–690, 2013. [11] Ruifeng Chen 和 Jing Mao. 关于维滕-拉普拉斯算子低阶诺伊曼特征值的 Ashbaugh-Benguria型猜想。预印本, 2024. arXiv:2403.0807. [12] F. Chiacchio 和 G. Di Blasio. 高斯空间中第一诺伊曼特征值的等周不等式。庞加莱研究所年刊 *C*辑：非线性分析, 29(2):199–216, 2012. [13] Francesco Chiacchio 和 Nunzia Gavitone. 厄米特算子在罗宾边界条件下的法贝尔-克拉恩不等式。数学年刊, 384(1-2):789–804, 2022. [14] Pedro Freitas 和 Richard S. Laugesen. 从斯捷克洛夫到诺伊曼及更进一步：通过罗宾条件，沿塞格ő方法。加拿大数学杂志, 72(4):1024–1043, 2020.

[15] Pedro Freitas 和 Richard S. Laugesen. 从诺伊曼到斯捷克洛夫及更进一步：通过罗宾条件，沿 Weinberger 方法。美国数学杂志, 143(3):969–994, 2021. [16] Yi Gao 和 Kui Wang. 高斯空间中低阶诺伊曼特征值的等周不等式。泛函分析杂志, 290(8):论文编号 111379, 2026. [17] Antoine Henrot，编。形状优化与谱理论。De Gruyter Open，华沙，2017. [18] Jeffrey J. Langford 和 Richard S. Laugesen. 第二个诺伊曼特征值在半球之外的极大值。数学年刊, 386(3-4):2255–2281, 2023. [19] Xiaolong Li, Kui Wang 和 Haotian Wu. 非紧秩一对称空间中的第二 Robin 特征值。预印本, 2022. arXiv:2208.07546 [math.DG]. [20] Xiaolong Li, Kui Wang 和 Haotian Wu. 关于拉普拉斯算子的第二 Robin 特征值。《微积分与变分及偏微分方程》, 62(9):论文编号 256, 17, 2023. [21] Jing Mao 和 Shijie Zhang. 维滕-拉普拉斯算子斯捷克洛夫特征值的布洛克型等周不等式。预印本, 2024. arXiv:2404.07412. [22] Yifeng Meng 和 Kui Wang. 秩一对称空间中有界区域诺伊曼特征值的等周不等式。《微积分与变分及偏微分方程》, 63(5):论文编号 113, 12, 2024. [23] G. Szegö. 给定面积的膜的某些特征值的不等式。有理力学分析杂志, 3:343–356, 1954. [24] Kui Wang. 黎曼流形上第二个诺伊曼特征值的上界。几何专论, 201:317–323, 2019. [25] H. F. Weinberger. N维自由膜问题的一个等周不等式。有理力学分析杂志, 5:633–636, 1956. [26] Changyu Xia 和 Qiaoling Wang. 关于 Ashbaugh和 Benguria 关于诺伊曼拉普拉斯算子低阶特征值的猜想。数学年刊, 385(1-2):863–879, 2023.

苏州大学数学科学学院，苏州，215006，中国电子邮箱： yigao 1@163.com

–

苏州大学数学科学学院，苏州，215006，中国电子邮箱： kuiwang@suda.edu.cn

武汉大学数学与统计学院，武汉 430072，中国电子邮箱： aqzhu.math@whu.edu.cn