arXiv:2602.19557v1 [math.FA] 23 Feb 2026

拟贝尔林代数可数极限的维纳型定理及关于权的极大化结果

PRAKASH A. DABHI 和 KARISHMAN B. SOLANKI

Abstract. 我们在加权情形下，针对有限维和无限维情形，建立了拟巴拿赫代数可数射影极限与归纳极限的向量值维纳型定理。作为应用，我们利用拟贝尔林代数扩展了快速衰减与指数衰减序列空间的概念，并证明这些空间是逆封闭的；此外，我们利用权构造了一个逆封闭向量值代数层级。除此之外，我们还针对非容许加权版本的维纳定理，在离散情形与连续情形下推导了关于权的极大化结果。

Contents

1. 引言 1
2. 预备知识 5
2.1. 权 6
2.2. 拟贝尔林代数 7
2.3. 一些已知结果 9
3. 引理 10
4. 拟贝尔林代数可数极限的维纳型定理 13
4.1. 一维情形 13
4.2. 有限维情形 15
4.3. 无限维情形 17
5. 准框架中的逆封闭代数层级 19
6. 权的极大化 21
7. 非拟类比与结论 25
声明 27
参考文献 28

1. Introduction

正如标题所示，本文研究的是维纳经典结果的加权版本 [38]：该结果指出，若连续函数 $F\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$（其中 $\mathbb{T}$ 为单位圆）处处非零，且其傅里叶级数绝对收敛，则其逆元 $\frac{1}{F}$ 的傅里叶级数也绝对收敛。这一著名结果称为维纳定理。由 $\mathbb{Z}$上所有绝对可和序列构成的卷积巴拿赫代数 $\ell^1(\mathbb{Z})$

2020 数学主题分类。 主要分类：46H05, 46A16, 46A13, 40E05，次要分类：43A15, 46A45, 47A10, 46L52。关键词和短语。 Wiener定理，权，序列空间，傅里叶变换，射影极限，归纳极限。

通过傅里叶变换与 $\mathbb{T}$上所有傅里叶级数绝对收敛的连续函数构成的代数同构。因此，维纳定理可重述如下：元素 $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$可逆，当且仅当其傅里叶变换 $\widehat{f}: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ 处处非零。在 [40], 中，Zelazko 得到了适用于 $0 < p < 1$的 p次幂类比结果。其加权版本也得到了研究；沿着这一方向，Domar [14]证明，对于加权代数 $\ell^1_\omega(\mathbb{Z}) = \{\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|\omega(n) < \infty\}$，只要 ω 是非拟解析权，即 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\log \omega(n)}{1+n^2} < \infty$。请注意，非拟解析权是可容许的。若权 ω 定义在 $\mathbb{Z}^d$ 上并满足~~Gel'fand–Raĭkov–Šilov~~（GRS）条件 [19]: $\lim_{n\to\infty} \omega(nk)^{\frac{1}{n}} = 1$ 对所有 $k \in \mathbb{Z}^d$都成立，则称其为可容许权；已知维纳定理对可容许权成立。事实上，即使在高维情形下，该结果也是双向成立的，具体陈述如下；证明见 [23, 定理 5.24 和推论 5.27]。若子代数 $\mathcal{X}$ 是 $\ell^1(\mathbb{Z}^d)$的子代数，则称其为逆封闭的，如果每个在 $\ell^1(\mathbb{Z}^d)$中可逆的 $f \in \mathcal{X}$ 在 $\mathcal{X}$中也可逆。

定理 1.1 (Wiener-Domar-Zelazko-GRS)。 对于 $d \in \mathbb{N}$ 和 $0 < p \leq 1$， $\ell^p_\omega(\mathbb{Z}^d)$ 是逆封闭的，当且仅当 ω 是 $\mathbb{Z}^d$ 上的可容许权。

在 [5], 中，Bhatt 和 Dedania 证明，若 ω 不可容许，且 $f \in \ell^1_\omega(\mathbb{Z})$ 的傅里叶变换处处不为零，则 f 在 $\ell^1_\omega(\mathbb{Z})$ 中未必可逆；但存在一个与 ω 密切相关的权 ν，使得 f 的逆元属于 $\ell^1_\nu(\mathbb{Z})$。其 p-次幂类比见 [4] （针对 $0 < p < 1$），而 [8] 中针对 $1 < p < \infty$ 的结果则是在对权 ω 加上一些条件后得到的。 $0 < p \leq 1$ 的二变量类比见 [9] 。Zagorodnyuk 和 Mitrofanov 在 [39] 中研究了 $p = 1$ 的无限变量类比，且不涉及权。

上述所有结果都针对复值函数。由于算子值函数和巴拿赫空间值函数在分析中极为重要，文献中也对维纳定理的向量值类比进行了研究。Bochner 和 Phillips 在[6], 中将维纳定理推广到了巴拿赫代数值函数，并给出了其在实数轴上的连续类比。在 [11], 中，针对巴拿赫代数值 p函数，得到了维纳定理的幂权加权类比 $0 < p < \infty$ 以及其针对 $1 \leq p < \infty$的连续类比。对于 $0 < p \leq 1$，文献 p建立了其多变量有限维和无限维的幂类比 [10]。请注意，文献 [10, 11] 涵盖了上述所有结果，并在第 2.3节中进行了陈述。这里还需指出，这些结果是运用 Gel'fand 等人发展的经典巴拿赫代数方法建立的；有关其详细介绍，请参阅 [19, 26] 。

权在分析中非常有用，因为在许多情况下都能发挥作用，例如量化增长与衰减条件。具体而言，权用于控制或忽略函数在无穷远处的振荡，以分析其渐近行为或其在某一点附近的行为。最著名的例子包括多项式权 $\omega_s(n) = (1 + |n|^2)^{\frac{s}{2}}$ 以及次指数权 $\omega(n) = e^{|n|^\gamma}$，其中 $\gamma \in (0, 1)$，定义在 $\mathbb{Z}^d$ 上，以及它们在 $\mathbb{R}^d$ 上的扩展。这些权在分析中得到广泛应用，尤其是在时频分析以及线性和非线性偏微分方程的研究中；例如参见 [7, 20, 22, 23, 30, 33] 及其中的参考文献。

文献中已广泛研究了维纳型定理的向量值与加权类比，参见 [4–6, 8–11, 28, 39, 40] 及其中的参考文献；当然，这份列表并不全面。这是因为相关结果在分析的诸多领域中有广泛应用，例如信号理论、框架理论、采样理论、Gabor分析等；参见 [1,2,12,15,16,21,22,24,27,29,34–37]及其中的参考文献；这份列表绝非详尽无遗。

本文关注加权情形下巴拿赫代数值拟巴拿赫代数的可数射影极限与归纳极限所对应的维纳型定理。近期，Fern´andez、Galbis和Toft针对可容许权，在加权情形下研究了这类空间，见 [17, 18]。在 [15], Fageot等人研究了核代数（不具有范数结构的代数）的逆封闭性：他们使用以下类型的代数研究快速递减与指数递减序列空间：

- I 型：巴拿赫空间的可数射影极限 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \ell^1_{\omega_n}(\mathbb{Z}^d)$，其中 $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是满足 $\omega_n \le \omega_{n+1}$的权族；
- II 型：巴拿赫空间的可数归纳极限 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ell^1_{\omega_n}(\mathbb{Z}^d)$，其中 $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是满足 $\omega_{n+1} \le \omega_n$的权族。

巴拿赫空间的射影极限和归纳极限对于研究由卷积核控制的无限矩阵至关重要，尤其是在信号与图像处理领域，以及近似和采样理论领域。拟赋范空间在余轨道理论和时频分析领域也有多种应用，读者可参阅 [3,20,25,31,32] 及其中的参考文献。再加上前文提及的权、向量值序列以及分析中维纳定理各种版本的重要性，这些因素共同促成了本研究。

由定理1.1可知，I型代数是逆封闭的，当且仅当每个权 ω_n 都满足 GRS 条件。文献 [15] 研究了$\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ II 型代数的权族，其中每个 ω_n 均不满足 GRS 条件，但施加了扩展 GRS 条件，以保证其仍属于逆封闭性的范畴。定义在 $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 上 $\mathbb{Z}^d$ 的权族满足扩展 *GRS* 条件 [17]，如果

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\lim_{k\to\infty} \omega_n(km)^{\frac{1}{k}} \right) = 1 \quad \text{for all} \quad m \in \mathbb{Z}^d. \tag{1}$$

特别地，他们证明了以下结果。

定理 1.2。*[15,* 定理 *20] II* 型代数：$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ell^1_{\omega_n}(\mathbb{Z}^d)$ 是逆封闭的，当且仅当定义在 $\mathbb{Z}^d$ 上的权族 $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足扩展 *GRS* 条件。

这里，我们不施加 GRS 条件或扩展 GRS 条件，从而超越了这一框架。如前所述，即使对于不可容许权，维纳定理的向量值加权类比也是已知的。这里，我们为 I 型和 II 型代数证明类似的结果，其中权不必满足 GRS 条件或扩展 GRS 条件。此外，我们将分析推广到无限维情形；这一情形在 [15]中尚未考察。我们还根据下文给出的定义，考虑这些代数更为一般化的形式。

对于无限维情形，我们使用 $\mathbb{N}$ 上所有有限支撑整数序列组成的集合，记为 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$，也就是说，$\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 中的一个元素 α 具有如下形式

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, 0, 0, \dots), \quad \text{where} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{and} \quad \alpha_i \in \mathbb{Z} \quad (1 \le i \le n).$$

定义 1.3. 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺巴拿赫代数。对于 $\mathbb{X} \in \{\mathbb{Z}^d, \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}\}$，其中 $d \in \mathbb{N}$，我们定义如下代数：

- *I* 型：（拟）巴拿赫代数的可数射影极限

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \ell^{p_n}_{\omega_n}(\mathbb{X}, \mathcal{A}),$$

其中，$\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是<*tyle id='2'*> $(0, 1]$ 中的一个递减序列，且 $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是定义在 $\mathbb{X}$ 上的权族，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$都有 $\omega_n \le \omega_{n+1}$ 。

- *II* 型：（拟）巴拿赫代数的可数归纳极限

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ell^{p_n}_{\omega_n}(\mathbb{X},\mathcal{A}),$$

其中，$\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是<*style id='2'*>$(0,1]$ 中的递增序列，$\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{X}$ 上的权族，并且对所有 $n\in\mathbb{N}$，均有 $\omega_n \geq \omega_{n+1}$。

上述定义由引理3.1所证实。据作者所知，现有文献尚未研究过这些空间。由于我们只需要代数结构，因此不讨论这些代数的拓扑方面。不过值得注意的是，上述代数不具有（拟）范数结构，而且并集与交集中出现的拟赋范空间并非局部凸空间，这与标准定义中通常考虑的赋范空间不同。但这些空间具有良好的拓扑，该拓扑由相应的拟范数（而非范数）诱导。此外，代数 $\mathcal{A}$不一定是交换的，因此属于非交换代数的范畴。这使得本研究更具意义。I 型和 II 型代数也分别称为*Fr´echet* 代数和*LF*代数。

注 1.4. 我们认为 $\{p_n\}$ 是单调序列，不一定是严格单调序列。例如，取 $p_n = 1$ 和 $\mathcal{A} = \mathbb{C}$，即可得到 *[15, 17, 18]* 中所研究的空间。以下几点说明了上述定义的一些有用观察。

(i) 若取 $p_n \in (0,1)$，这些代数可视为“完美拟空间”，因为极限中的每个成员都是拟贝尔林代数。(ii) 令 $\{p_n\}$ 严格单调，便可以考虑所有权都相等的情形，包括平凡权；即便如此，这些代数仍然定义良好，而此前并非如此。类似地，通过选取互不相同的权族，可以固定 $p_n = p \in (0,1]$。(iii) 如果 *I* 型代数的 $\{p_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty} p_n \to 0$，那么其中只包含有限支集的序列；因此应避免这种情形。(iv) 值得强调的是，所有权都不可容许的情形尤为重要；探讨这一情形使本研究更具意义和新颖性。事实上，这正是本文工作的亮点。

此外，对于 $\mathbb{X} = \mathbb{Z}$，在适当的附加权条件下，也可得到非拟情形的类似结果；也就是说，当 $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $(1,\infty)$ 中的单调序列，且其他假设保持不变时，关联族中的权满足这些条件（定理 7.2 和定理 7.3）。为避免打乱全文的整体脉络，这些结果放在论文末尾介绍。

本文所述结果有望应用于上文提及的相关分析领域。作为一项直接应用，我们将研究拓展到快速递减序列和指数递减序列的向量值空间：通过将其定义为拟赋范空间而非赋范空间的射影极限和归纳极限，并证明其逆封闭性。我们指出，这些空间定义中使用的权为多项式权和指数权。鉴于这些权与次指数权在数学各领域中的重要性，我们给出了一个包含链，展示了拟 Beurling 框架下逆封闭向量值代数的层级。

本文第二部分讨论在包含 $f \in \ell^p_\omega(\mathbb{Z},\ \mathcal{A})$ 的 $\ell^p_\omega(\mathbb{Z},\ \mathcal{A})$ 与 $\subset \ell^1(\mathbb{Z},\ \mathcal{A})$ 之间，最小和最大（p-Beurling）代数的存在性，其中 $0 < p \leq 1$，且 ω 是 $\mathbb{Z}$上的一个权。若 ω 可容许，则结论显然成立，因为 $\ell^p_\omega(\mathbb{Z},\ \mathcal{A})$ 和

$\ell^1(\mathbb{Z},\mathcal{A})$ 是所需的代数。事实上，凭借维纳定理的向量值类比，最大此类代数的存在性总是显然的。值得关注的情形是： ω 不可容许，且 f 在 $\ell^1(\mathbb{Z},\mathcal{A})$ 中可逆，但在 $\ell^p_\omega(\mathbb{Z},\mathcal{A})$ 中不可逆。在这种情况下，我们知道存在一个权 ν ，使得若 ω 为常数（非常数），则 $\nu \leq \omega$, ν 为常数（非常数），且 f在 $\ell^p_\nu(\mathbb{Z},\mathcal{A})$ 中可逆（见定理 2.5）；事实上，这样的权有无穷多个。设 ν' 是另一个满足 $\nu \leq \nu' \leq \omega$的此类权。由引理 3.1，我们有以下包含关系链：

$$\ell^p_\omega(\mathbb{Z},\mathcal{A}) \subset \ell^p_{\nu'}(\mathbb{Z},\mathcal{A}) \subset \ell^p_\nu(\mathbb{Z},\mathcal{A}) \subset \ell^1(\mathbb{Z},\mathcal{A})$$

中间还有无穷多个这样的代数。具体而言，问题是要在上述链中找到形如 $\ell^p_\eta(\mathbb{Z},\mathcal{A})$ 的最小代数，使其包含 f 的一个逆元；因为如果 $p<1$ 且 $q\in(p,1)$，那么根据定理 1.1， f 在 $\ell^p(\mathbb{Z},\mathcal{A}) \subset \ell^q(\mathbb{Z},\mathcal{A})$ 中会有一个逆元。因此，固定 p 并研究权 ν 以找到这样的最小代数是有意义的； $p=1$ 的情形也进一步印证了这一点，因为在该情形下，我们别无选择，只能改变权。由此，这个问题现在可以等价地表述为：上文得到的权 ν 是否能够取到最大值和最小值。上述寻找最小代数的问题对应于取最大值的情形，而取最小值的情形则与寻找这样的最大代数有关；如前所见，答案是平凡权 $\nu\equiv 1$ 。取最大值或得到最小代数的情形并不显然，而且一般而言并不成立。这里，我们找到了这个最大权，从而解决了上述问题：其对应的代数可能不是包含 f 的逆元的最小代数，但它将是上述链中不包含 f 的逆元的最大代数。连续情形也有类似结果，见定理 2.8。

本文结构如下。在第2节，我们建立记号并给出必要的定义，以及一些已知结果。分析所需的技术引理在第3节给出。第4节专门讨论（拟）Beurling代数的可数投射极限与归纳极限的维纳型定理，即 I 型与 II 型代数，本节进一步分为三个小节：4.1、4.2 与4.3 ，分别处理一维、有限维与无限维情形。在第5节，我们证明在拟设定下定义的快速递减序列与指数递减序列的向量值空间是逆封闭的，并得到逆封闭代数的一个层级。关于权的最大化的结果在第6节针对离散情形与连续情形给出。在第7节，我们建立带 $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (1,\infty)$ 的一维 I 型与 II 型代数的维纳型定理，随后是结论与若干开放问题。

2. Preliminaries

首先，我们设定记号并给出一些基本定义。

这里， $\mathbb{Z}$ 表示整数集， $\mathbb{N}$ 表示正整数集， $\mathbb{R}$ 表示实数集， $\mathbb{C}$ 表示复数集， $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ 表示 $\mathbb{C}$中的单位圆， $B(z,\epsilon)=\{z'\in\mathbb{C}:|z-z'|<\epsilon\}$ 表示 $\mathbb{C}$ 中以z 为中心、半径为 $\epsilon>0$的开球；对于 $0\leq a\leq b$, $\Gamma(a,b)=\{z\in\mathbb{C}:\ a\leq|z|\leq b\}$ 表示闭环域。对于 $d\in\mathbb{N}$, $\mathbb{X}^d$表示集合 $\mathbb{X}$的 d个副本，即 $\mathbb{X}^d=\{(x_1,x_2,\ldots,x_d):\ x_i\in\mathbb{X}\ (1\leq i\leq d)\}$。

下面给出一个重要的不等式，后文将频繁用到。

$$\text{If } 0<p\leq 1 \text{ and } a,b\geq 0, \text{ then } (a+b)^p\leq a^p+b^p. \tag{2}$$

定义 2.1。 *[40]* 设 $0 < p \leq 1$，并设 $\mathcal{A}$ 为一个代数。

- 映射 $\|\cdot\|: \mathcal{A} \to [0,\infty)$ 是 p-范数，定义在 $\mathcal{A}$ 上，若对所有 x、$y \in \mathcal{A}$ 和 $\alpha \in \mathbb{C}$，以下条件均成立。(i) $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$。(ii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$。(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha|^p \|x\|$。(iv) $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$。

- 代数 $\mathcal{A}$ 连同一个 p-范数 $\|\cdot\|$ 构成一个-赋范代数。
- 若 $\mathcal{A}$ 在 p-范数下是完备的，则$(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ 是一个 p-巴拿赫代数。
- 当 $p = 1$时，映射 $\|\cdot\|$ 是 $\mathcal{A}$上的范数，且$(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ 是一个赋范代数；若其完备，则是一个巴拿赫代数。
- 当 $0 < p < 1$ 时，p-范数和 p 拟赋范（巴拿赫）代数也分别称为拟范数 和 拟赋范（巴拿赫）代数。

定义 2.2. *[26]* 设 $\mathcal{A}$ 是一个不含单位元的代数，并设 $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \times \mathbb{C} = \{(a,\alpha) : a \in \mathcal{A}, \alpha \in \mathbb{C}\}$。则 $\mathcal{A}_1$ 是一个含幺代数，其运算定义如下：

(i) $(a, \alpha) + (b, \beta) = (a+b, \alpha+\beta)$,
(ii) $\beta(a, \alpha) = (\beta a, \beta\alpha)$, (iii) $(a, \alpha)(b, \beta) = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta)$,

对所有 a、$b \in \mathcal{A}$ 以及 α、$\beta \in \mathbb{C}$ 均成立。代数 $\mathcal{A}_1$ 是 $\mathcal{A}$ 的添单位化，这一过程称为向 $\mathcal{A}$ 中添加单位元。元素 $\mathbf{1} = (0,1)$ 是 $\mathcal{A}_1$ 的单位元。$\mathcal{A}_1$ 中的元素 (a,α) 也记作 $a + \lambda\mathbf{1}$ 或 $\lambda\mathbf{1} + a$。

除非另有说明，全文中我们作如下约定。

(i) $\mathcal{A}$是一个含幺巴拿赫代数。(ii) $\|\cdot\|$ 表示 $\mathcal{A}$的范数。(iii) $1_{\mathcal{A}}$ 表示 $\mathcal{A}$ 的单位元或恒等元，即对所有 $a \in \mathcal{A}$都有 $a1_{\mathcal{A}} = a = 1_{\mathcal{A}}a$。(iv) 所考虑的所有代数均为复代数。(v) d 是一个正整数。

2.1. 权。 设 $\mathbb{X} \in \{\mathbb{Z}^d, \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R}\}$。 $\mathbb{X}$ 上的一个权 是一个映射$\omega: \mathbb{X} \to [1,\infty)$（当 $\mathbb{X} = \mathbb{R}$时为博雷尔可测映射），满足

$$\omega(x+y) \leq \omega(x)\omega(y) \quad \text{for all} \quad x, y \in \mathbb{X}. \tag{3}$$

接下来，我们为这些权定义一些技术性量，以便研究盖尔范德空间并构造所需的权；详见 [5, 9, 10]。

- 对于 $\mathbb{Z}$上的权 ω，定义

$$\rho_{1,\omega} = \sup\{\omega(n)^{1/n} : n \leq 0\} \leq 1 \leq \rho_{2,\omega} = \inf\{\omega(n)^{1/n} : n \geq 0\}. \tag{4}$$

- 对于定义在 $\mathbb{Z}^2$上的权 ω，定义

$$\rho_{1,\omega} = \sqrt{\sup_{(m_1,m_2)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}} \omega(-m_1,m_2)^{-\frac{1}{m_1}}} \leq 1 \leq \rho_{2,\omega} = \sqrt{\inf_{(m_1,m_2)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}} \omega(m_1,m_2)^{\frac{1}{m_1}}},$$

$$\mu_{1,\omega} = \sqrt{\sup_{(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}} \omega(m_1,-m_2)^{-\frac{1}{m_2}}} \leq 1 \leq \mu_{2,\omega} = \sqrt{\inf_{(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}} \omega(m_1,m_2)^{\frac{1}{m_2}}}. \tag{5}$$

- 对于定义在 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 和 $i \in \mathbb{N}$上的权 ω，定义

$$\rho_{i,\omega} = \sup\left\{\omega(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, -\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots)^{-\frac{1}{\alpha_i}} : \alpha_i \in \mathbb{N}, \alpha_j \in \mathbb{Z}\ (j \neq i)\right\}$$

$$\text{and} \quad \mu_{i,\omega} = \inf\left\{\omega(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots)^{\frac{1}{\alpha_i}} : \alpha_i \in \mathbb{N}, \alpha_j \in \mathbb{Z}\ (j \neq i)\right\}. \tag{6}$$

那么 $\rho_{i,\,\omega} \leq 1 \leq \mu_{i,\,\omega}$ 对所有 $i \in \mathbb{N}$均成立。

已知，$\mathbb{Z}$ 上的权 ω 可容许，当且仅当

$$\rho_{1,\omega} = 1 = \rho_{2,\omega}.$$

定义 2.3. 为方便起见，我们采用以下定义。

- $\mathbb{Z}^2$ 上的权 ω 是可容许 的，当 $\rho_{1,\,\omega} = \rho_{2,\,\omega} = \mu_{1,\,\omega} = \mu_{2,\,\omega} = 1$。

对于 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 上的权 ω，定义集合

$$S_\omega = \{i \in \mathbb{N} : \mu_{i,\omega} \neq 1 \ \textit{or}\ \rho_{i,\omega} \neq 1\}. \tag{7}$$

(i) ω 是可容许的，当且仅当 S_ω 为空集，即 $\mu_{i,\,\omega} = 1 = \rho_{i,\,\omega}$ 对所有 $i \in \mathbb{N}$ 均成立。(ii) ω 对于 $m \in \mathbb{N}$ 是 m-不可容许的，当集合 S_ω 的基数为 m 时。(iii) ω 是 ∞- 不可容许的，当 S_ω 为无限集时。

注意，如果权 ω 在 $\mathbb{Z}^2$ 或 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 上满足 GRS 条件，那么按我们的定义它是可容许的。但反过来未必成立。关于两个变量的情形，更多详情请参见 [9, 13] 。

若以下两个条件之一成立，则 $\mathbb{Z}^2$ 上的权 ω 满足性质 $*_\omega$ [9] 。

(i) $\rho_{1,\omega} = \rho_{2,\omega} = \mu_{1,\omega} = \mu_{2,\omega} = 1$, and either $\omega(m_1, -m_2) = \omega(m_1, m_2)$ for all $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$ or $\omega(-m_1, m_2) = \omega(m_1, m_2)$ for all $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$.

(ii) $\sup\{\omega(m_1, m_2)^{\frac{1}{m_1}}\omega(m_1, -m_2)^{\frac{1}{m_1}} : m_1 < 0, m_2 \in \mathbb{Z}\} = \inf\{\omega(m_1, m_2)^{\frac{1}{m_1}}\omega(m_1, -m_2)^{\frac{1}{m_1}} : m_1 \in \mathbb{N}, m_2 \in \mathbb{Z}\}$ and
$\sup\{\omega(m_1, m_2)^{\frac{1}{m_2}}\omega(-m_1, m_2)^{\frac{1}{m_2}} : n < 0, m \in \mathbb{Z}\} = \inf\{\omega(m_1, m_2)^{\frac{1}{m_2}}\omega(-m_1, m_2)^{\frac{1}{m_2}} : m_2 \in \mathbb{N}, m_1 \in \mathbb{Z}\}$.

对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $0 < r_j \leq 1 \leq s_j < \infty (1 \leq j \leq n)$，并令 $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$ 为正整数。定义 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 上的权 ω 为

$$\omega(\alpha) = \prod_{j=1}^{n} h_j^{\alpha_{i_j}}, \quad \text{where} \quad h_j = \begin{cases} r_j, & \text{if } \alpha_{i_j} \leq 0 \\ s_j, & \text{if } \alpha_{i_j} \geq 0 \end{cases} \quad \text{and } \alpha_j \in \mathbb{Z} \text{ if } j \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_l\}.$$

由于 ω仅依赖于第 n 个变量在第 $i_1, i_2, \ldots, i_n$ 个位置上的取值，我们将这类权称为阶为 n 的权。

最后，对于定义在 $\mathbb{R}$上的权 ω，定义

$$\rho_{1,\omega} = \sup\{\log \omega(x)^{1/x} : x < 0\} \leq 0 \leq \rho_{2,\omega} = \inf\{\log \omega(x)^{1/x} : x > 0\}. \tag{8}$$

定义在 $\mathbb{R}$ 上的权 ω 若满足 $\rho_{1,\omega} = 0 = \rho_{2,\omega}$，则称其为可容许的。

2.2. 拟贝尔林代数。 将 $\mathbb{X} \in \{\mathbb{Z}^d, \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R}\}$ 视为一个加法群，并令 μ 在 $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ 时为勒贝格测度，在 $\mathbb{X} \in \{\mathbb{Z}^d, \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}\}$时为计数测度。对于 $0 < p \leq 1$，设 ω 是 $\mathbb{X}$ 上的一个权，$\mathcal{A}$是一个含幺巴拿赫代数，令

$$L^p_\omega(\mathbb{X}, \mathcal{A}) = \left\{f : \mathbb{X} \to \mathcal{A} : \|f\|_{L^p_\omega} = \int_{\mathbb{X}} \|f(x)\|^p \omega(x)^p d\mu(x) < \infty\right\}.$$

当 $\mathbb{X} = \mathbb{R}$时，还假设这些函数强可测。对于 f， $g \in L^p_\omega(\mathbb{X}, \mathcal{A})$，定义卷积为

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{X}} f(x-y)g(y)d\mu(y) \quad (x \in \mathbb{X}).$$

空间 $L^1_\omega(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ 在卷积运算下总是封闭的，并且在范数 $\|\cdot\|_{L^1_\omega}$ 下构成一个巴拿赫代数。如果 $0 < p < 1$，则 [4, 定理 2], 证明了它在卷积运算下封闭，并且在 p-范数 $\|\cdot\|_{L^p_\omega}$ 下构成一个 p-巴拿赫代数，当且仅当 $\mathbb{X}$ 是离散的。因此，当 $p < 1$时，我们只考虑 $\ell^p_\omega(\mathbb{Z}^d, \mathcal{A})$ 和 $\ell^p_\omega(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{A})$。这些加权（$p$-）巴拿赫代数称为（$p$-）Beurling代数或（准）Beurling代数。由于它们是以卷积为乘法的代数，因此也称为卷积代数。

此外，请注意， $\ell^p_\omega(\mathbb{Z}^d, \mathcal{A})$ 和 $\ell^p_\omega(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{A})$ 是含幺代数，其单位元或幺元为 $\delta_0(\mathbf{0}) = 1_{\mathcal{A}}$，在其他情况下则为零；其中 $\mathbf{0}$ 是 $\mathbb{Z}^d$ 和 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 的零元。但是， $L^1_\omega(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ 没有幺元，因此我们通过添加单位元 $\mathbf{1}$，对 $L^1_\omega(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ 进行添单位化，并记作 $L^1_\omega(\mathbb{R}, \mathcal{A})_{\mathbf{1}}$。

对于 $f \in \ell^1(\mathbb{Z}^d, \mathcal{A})$， $f, \widehat{f}\colon \mathbb{T}^d \to \mathcal{A}$ 的傅里叶变换 定义为

$$\widehat{f}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f(n)z^n \quad (z \in \mathbb{T}^d).$$

它是良定义的，因为对于每个 $z \in \mathbb{T}^d$,

$$\|\widehat{f}(z)\| = \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f(n)z^n \right\| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \|f(n)\| = \|f\|_{\ell^1} < \infty.$$

如果 $0 < p \leq 1$ 且 ω 是定义在 $\mathbb{Z}^d$上的权，那么有 $\ell^p_\omega(\mathbb{Z}^d, \mathcal{A}) \subset \ell^1(\mathbb{Z}^d, \mathcal{A})$（见引理 3.1），因此 $f \in \ell^p_\omega(\mathbb{Z}^d, \mathcal{A})$ 的傅里叶变换是良定义的。

令 $\mathbb{T}^\infty = \{(z_1, z_2, z_3, \dots) \in \mathbb{C}^\infty\colon |z_i| = 1 \text{对所有 } i \in \mathbb{N}\}$ 均成立，它是 $\mathbb{T}$ 的可数乘积。对于非零的 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 和 $z = (z_1, z_2, z_3, \dots) \in \mathbb{T}^\infty$，定义

$$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} \cdots .$$

于是 $z^{\mathbf{0}} = 1$，并且由于非零 α 长度有限，这个乘积是良定义的。事实上，对于非零 $\alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$， 令 n_α 为满足 $\alpha_{n_\alpha} \neq 0$ 且对所有 $k > n_\alpha$ 均有 $\alpha_k = 0$ 的正整数。那么

$$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} \cdots z_{n_\alpha}^{\alpha_{n_\alpha}} \quad \text{and} \quad |z^\alpha| = |z_1|^{\alpha_1} |z_2|^{\alpha_2} |z_3|^{\alpha_3} \cdots |z_{n_\alpha}|^{\alpha_{n_\alpha}}.$$

If $f \in \ell^1(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{A})$，则 $f, \widehat{f}$ 的傅里叶变换 $\mathbb{T}^\infty \to \mathcal{A}$ 定义为

$$\widehat{f}(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}} f(n)z^\alpha \quad (z \in \mathbb{T}^\infty).$$

同样，对于 $0 < p \leq 1$ 上的权 ω，对所有 $f \in \ell^p_\omega(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{A}) \subset \ell^1(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{A})$，它都有良好的定义。

对在 $\mathbb{R}$上具有权 ω 的$L^1_\omega(\mathbb{R}, \mathcal{A})$可进行类似的分析。事实上，设 $T_\omega = \{x + iy \in \mathbb{C}\colon \rho_{1,\omega} \leq x \leq \rho_{2,\omega}, y \in \mathbb{R}\}$，并设 $a + ib \in T_\omega$。则$\sup\{\log \omega(x)^{1/x}\colon x < 0\} \leq a \leq \inf\{\log \omega(x)^{1/x}\colon x > 0\}$ 对所有 $x \in \mathbb{R}$给出 $e^{ax} \leq \omega(x)$。因此，对于 $f \in L^1_\omega(\mathbb{R}, \mathcal{A})$,

$$\int_{\mathbb{R}} \|f(x)\||e^{(a+ib)x}|dx \leq \int_{\mathbb{R}} \|f(x)\|e^{ax}dx \leq \int_{\mathbb{R}} \|f(x)\|\omega(x)dx < \infty.$$

因此，我们将 $f \in L^1_\omega(\mathbb{R}, \mathcal{A})$的傅里叶变换 $\widehat{f}$定义为

$$\widehat{f}(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{zx}dx \in \mathcal{A} \quad (z \in T_\omega).$$

注意，通常的定义对应于 $T_\omega = i\mathbb{R}$，这出现在 ω 为可容许权时，特别是当 $\omega \equiv 1$时。这里，连续类比，亦即 $\mathbb{R}$ 的情形仅在第6节中为最大化权而被考虑，因此我们不考虑 $\mathbb{R}$的多变量情形。

由于我们在此处理 $\mathcal{A}$值代数，我们通过下述定义将逆封闭性推广到向量值情形。

定义 2.4. 设 $\mathbb{X}$ 为集合 $\mathbb{Z}^d$ 或 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$之一。子代数 $\mathcal{X}$ （即 $\ell^1(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ 的子代数）称为逆封闭，如果每一个 $f \in \mathcal{X}$在 $\ell^1(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ 中可逆时也在 $\mathcal{X}$中可逆，或者$\widehat{\ }$等价地，如果 $f \in \mathcal{X}$使得 $f(z)$ 对所有 z均可逆，则 f在 $\mathcal{X}$中可逆。

2.3. **一些已知结果**。 首先，陈述 [10, 11] 中的结果，这些结果概述了关于 $0 < p \leq 1$的维纳定理的大多数已知类比。

定理 2.5。 *[11, 定理 1]* 设 $0 < p \leq 1$， ω 是 $\mathbb{Z}$上的一个权， $\mathcal{A}$是一个含幺$\widehat{\ }$巴拿赫代数，并设 $f \in \ell^p_\omega(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$。若对所有 $z \in \mathbb{T}$， $f(z)$ 在 $\mathcal{A}$ 中左可逆（分别为右可逆、可逆），则存在 $\mathbb{Z}$ 上的一个权 ν，使得 $\nu \leq \omega$， ν 是常数当且仅当 ω 是常数， ν 是可容许当且仅当 ω 是可容许，并且 f的一个左逆（分别为右逆、逆元）属于 $\ell^p_\nu(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$。

定理 *2.6*。 *[10, 定理 3.1]* 设 $0 < p \leq 1$， $\mathcal{A}$ 是一个含幺巴拿赫代数，并设ω 是 $\mathbb{Z}^2$ 上的一个权，且以下条件之一成立：ρ_1、ω、ρ_2、ω、μ_1、ω 与μ_2、ω 中至少有一个不等于 *1*，或者 ω满足性质 $*_\omega$。设 $f \in \ell^p_\omega(\mathbb{Z}^2, \mathcal{A})$满足：对所有 z_1， $\widehat{f}(z_1, z_2)$在 $\mathcal{A}$ 中左可逆（分别为右可逆、可逆）。那么存在 $\mathbb{Z}^2$ 上的一个权 ν，使得 $\nu \leq \omega$， ν 是常数当且仅当 ω 是常数，并且 f的一个左逆（分别为右逆、逆元）属于 $\ell^p_\nu(\mathbb{Z}^2, \mathcal{A})$。

定理 *2.7*。 *[10, 定理 4.1 和定理 4.2]* 设 $0 < p \leq 1$, $\mathcal{A}$ 是含幺巴拿赫代数， ω 是 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 上的一个权，并设 $f \in \ell^p_\omega(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{A})$ 满足：对于所有 $z \in \mathbb{T}^\infty$， $\widehat{f}(z)$ 在 $\mathcal{A}$ 中左可逆（分别为右可逆、可逆）。那么存在一个 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 上的权 ν，使得 $\nu \leq \omega$, ν 为常数当且仅当 ω 为常数，并且 f的一个左逆（分别为右逆、逆元）属于 $\ell^p_\nu(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{A})$。此外，假设集合 S_ω（见 *(7)*）的基数为 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。那么存在一个阶为 $l \in \{1, 2, \ldots, k\}$（若 $k \in \mathbb{N}$）或阶为 $l \in \mathbb{N}$（若 $k = \infty$）的权 ν，使得 $\nu \leq \omega$, ν 为常数当且仅当 ω 为常数，并且 f 的一个左逆属于 $\ell^p_\nu(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{A})$。

定理 2.8。 *[11, 定理 3]* 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺巴拿赫代数，单位元为 $1_\mathcal{A}$； ω 是定义在 $\mathbb{R}$上的权；并设 $f \in L^1_\omega(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ 满足：对所有 $t \in \mathbb{R}$， $1_\mathcal{A} + \widehat{f}(t)$ 在 $\mathcal{A}$ 中左可逆（分别地，右可逆、可逆）。则存在一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的权 ν，使得 $\nu \leq \omega$, ν为常数当且仅当 ω 为常数， ν 可容许当且仅当 ω 可容许，并且 $\mathbf{1} + f$的左逆（分别地，右逆、逆元）属于 $L^1_\nu(\mathbb{R}, \mathcal{A})$。特别地，若 ω 可容许，则 $\mathbf{1} + f$ 在 $L^1_\omega(\mathbb{R}, \mathcal{A})_1$中左可逆（分别地，右可逆、可逆）。

注 2.9. 从上述结果的证明中构造 ν 的方式可知，只要 ω 满足 *GRS* 条件，或者等价地说，相应的代数是逆元封闭的，就有 $\nu = \omega$。

注记 2.10. 请注意， $\mathcal{A}$ 不要求是交换的，这意味着相应的代数可能是非交换的。因此，左逆（如果存在）不要求唯一。

最后，我们陈述一些将在此用于证明本文结果的结论 .

引理 2.11。 *[26,* 引理 *1.2.7 (b)]* 设 $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ 是一个含幺巴拿赫代数，并设$x \in \mathcal{A}$ 满足 $\|1_{\mathcal{A}} - x\| < 1$。则 x 在 $\mathcal{A}$中可逆。

引理 2.12。 *[26,* 引理 *1.3.3]* 设 G 是一个局部紧群， ω 是定义在 G上的权，并设 K 是 G的一个紧子集。则存在 $0 < a \leq b < \infty$ 使得 $a \leq \omega(x) \leq b$对所有 $x \in K$均成立；也就是说， ω 在 G的每个紧子集上都有正下界且有上界。

3. Lemmas

本节给出证明本文结果所需的引理。首先，我们陈述一个关于所研究的拟巴拿赫空间之间包含关系的引理。

引理 3.1. 设 $0 < p \leq q \leq 1$、 $\mathbb{X}$ 为 $\mathbb{Z}^d$ 或 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$， ω 和 ν 为 $\mathbb{X}$ 上的权，满足 $\nu \leq \omega$，且 $\mathcal{A}$ 为巴拿赫代数。则有以下包含关系链

$$\ell^p_\omega(\mathbb{X}, \mathcal{A}) \subset \ell^p_\nu(\mathbb{X}, \mathcal{A}) \subset \ell^q_\nu(\mathbb{X}, \mathcal{A}) \subset \ell^1(\mathbb{X}, \mathcal{A})$$

并且范数不等式

$$\|f\|_{\ell^1(\mathbb{X},\mathcal{A})} \leq \|f\|^{\frac{1}{q}}_{\ell^q_\nu(\mathbb{X},\mathcal{A})} \leq \|f\|^{\frac{1}{p}}_{\ell^p_\nu(\mathbb{X},\mathcal{A})} \leq \|f\|^{\frac{1}{p}}_{\ell^p_\omega(\mathbb{X},\mathcal{A})}. \tag{9}$$

证明。 令 $f \in \ell^p_\omega(\mathbb{X}, \mathcal{A})$。然后利用 $1 \leq \nu \leq \omega$， 以及 (2) 对于 $0 < p \leq q \leq 1$ 和 $\frac{p}{q} \leq 1$， 可得

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\ell^1(\mathbb{X},\mathcal{A})} = \sum_{\alpha\in\mathbb{X}} \|f(\alpha)\| &\leq \left(\sum_{\alpha\in\mathbb{X}} \|f(\alpha)\|\nu(\alpha)\right)^{\frac{q}{q}} \\
&\leq \left(\sum_{\alpha\in\mathbb{X}} \|f(\alpha)\|^q \nu(\alpha)^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|^{\frac{1}{q}}_{\ell^q_\nu(\mathbb{X},\mathcal{A})} \\
&= \left(\sum_{\alpha\in\mathbb{X}} \|f(\alpha)\|^q \nu(\alpha)^q\right)^{\frac{p}{pq}} \\
&\leq \left(\sum_{\alpha\in\mathbb{X}} \|f(\alpha)\|^p \nu(\alpha)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|^{\frac{1}{p}}_{\ell^p_\nu(\mathbb{X},\mathcal{A})} \\
&\leq \left(\sum_{\alpha\in\mathbb{X}} \|f(\alpha)\|^p \omega(\alpha)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|^{\frac{1}{p}}_{\ell^p_\omega(\mathbb{X},\mathcal{A})}.
\end{aligned}$$

□

以下引理依赖于 $\mathcal{A}$ 为复代数，这是第2.3节中的定理成立所必需的。

引理 *3.2.* 设 $0 < p \leq 1$、 $\mathbb{X}$ 为 $\mathbb{Z}^d$ 或 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$， ω 是 $\mathbb{X}$ 上的一个权，且 $\mathcal{A}$ 是一个含幺巴拿赫代数。则 $\ell^p_\omega(\mathbb{X},\mathbb{C})$ 被视为 $\ell^p_\omega(\mathbb{X},\mathcal{A})$ 的含幺子代数，且二者具有相同的单位元。特别地， $\ell^p_\omega(\mathbb{X},\mathbb{C}) \subset \ell^p_\omega(\mathbb{X},\mathcal{A})$。此外， $f \in \ell^p_\omega(\mathbb{X},\mathbb{C})$ 在 $\ell^p_\omega(\mathbb{X},\mathbb{C})$ 中可逆，当且仅当 f 在 $\ell^p_\omega(\mathbb{X},\mathcal{A})$ 中可逆。

证明。 注意到 $\mathbb{C}$ 可通过映射 $\mathbb{C} \ni \alpha \mapsto \alpha 1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ 视为 $\mathcal{A}$ 的子代数。对于$f \in \ell^p_\omega(\mathbb{X},\mathbb{C})$, 定义 $\mathbf{f}(n) = f(n)1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$，其中 $n \in \mathbb{X}$。显然， $\mathbf{f} \in \ell^p_\omega(\mathbb{X},\mathcal{A})$。利用映射 $\ell^p_\omega(\mathbb{X},\mathbb{C}) \ni f \mapsto \mathbf{f} \in \ell^p_\omega(\mathbb{X},\mathcal{A})$，可知 $\ell^p_\omega(\mathbb{X},\mathbb{C})$ 是 $\ell^p_\omega(\mathbb{X},\mathcal{A})$ 的含幺子代数，且二者具有相同的单位元。

若 $f \in \ell^p_\omega(\mathbb{X},\mathbb{C})$ 在 $\ell^p_\omega(\mathbb{X},\mathbb{C})$ 中可逆，则显然它在 $\ell^p_\omega(\mathbb{X},\mathcal{A})$ 中也可逆。设 $f \in \ell^p_\omega(\mathbb{X},\mathbb{C})$ 在 $\ell^p_\omega(\mathbb{X},\mathcal{A})$ 中可逆，且其逆元为 g。那么， f，即 f 的傅里叶变换，是一个处处不为零的复值函数，因此 $\widehat{g} = 1/f$ 蕴含 $g \in \ell^p_\omega(\mathbb{X},\mathbb{C})$。□

我们有以下关于逆封闭性的结果。

命题 3.3. 设 $0 < p \leq 1$, $\mathbb{X}$ 是 $\mathbb{Z}^d$ 或 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, ω 是 $\mathbb{X}$上的一个权，并设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺巴拿赫代数。那么 $\ell^p_\omega(\mathbb{X},\mathcal{A})$ 是逆封闭的，当且仅当 ω 满足 *GRS* 条件。

证明。 对于 $\mathbb{X} = \mathbb{Z}^d$ 的情形，可由注记2.9 的特例和定理 1.1 以及引理 3.2得到。对于 $\mathbb{X} = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 的情形，可由注记 2.9 以及以下事实得到： $\ell^p_\omega(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}},\mathbb{C})$ 是逆封闭的，当且仅当 ω 满足 GRS 条件；再结合引理 3.2。□

接下来，我们陈述一些引理，描述当权族中的某个权可容许或不可容许时，该权族中各权之间的关系。

引理 3.4. 设 $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{Z}$ 上的一个权族，满足对所有 $n \in \mathbb{N}$都有 $\omega_n \leq \omega_{n+1}$；另设 $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{Z}$ 上的一个权族，满足对所有 $n \in \mathbb{N}$都有 $\nu_n \geq \nu_{n+1}$。

(i) 如果 ω_k 对某个 k是可容许的，那么 ω_n 对所有 $n \leq k$都是可容许的。(ii) 如果 ω_k 对某个 k不可容许，那么 ω_n 对所有 $n \geq k$都不可容许。(iii) 如果 ν_k 对某个 k是可容许的，那么 ν_n 对所有 $n \geq k$都是可容许的。(iv) 如果 ν_k 对某个 k不可容许，那么 ν_k 对所有 $n \leq k$都不可容许。

证明。 对于 $n \in \mathbb{N}$，对所有 $m \in \mathbb{Z}$， $\omega_n(m) \leq \omega_{n+1}(m)$，因此

$$\omega_{n+1}(-m)^{-\frac{1}{m}} \leq \omega_n(-m)^{-\frac{1}{m}} \quad \text{and} \quad \omega_n(m)^{\frac{1}{m}} \leq \omega_{n+1}(m)^{\frac{1}{m}} \quad \text{for all} \quad m \in \mathbb{N}.$$

由此可知，根据（4），

$$\rho_{1,\omega_{n+1}} \leq \rho_{1,\omega_n} \leq 1 \leq \rho_{2,\omega_n} \leq \rho_{2,\omega_{n+1}}. \tag{10}$$

同样，由于 $\nu_{n+1} \leq \nu_n$，我们有

$$\rho_{1,\nu_n} \leq \rho_{1,\nu_{n+1}} \leq 1 \leq \rho_{2,\nu_{n+1}} \leq \rho_{2,\nu_n}. \tag{11}$$

(i) 若 $k = 1$，则无需证明。令 $k > 1$。由于 ω_k 是可容许的，$\rho_{1,\,\omega_k} = 1 = \rho_{2,\,\omega_k}$。在（$n = k-1$）中取 10，可得 ω_{k-1} 是可容许的。重复相同的论证即可得到结论。

(ii) 由于 ω_k 不可容许，因此 $\rho_{1,\omega_k} < 1$ 或 $\rho_{2,\omega_k} > 1$ 至少有一个成立。在（10）中取 $n = k$，可知 $\rho_{1,\,\omega_{k+1}} < 1$ 或 $\rho_{2,\omega_{k+1}} > 1$ 至少有一个成立；等价地， ω_{k+1} 也不可容许。重复上述论证，即可得到结论。

(iii) 和 (iv) 可通过使用 (11) 并采用类似论证得到。

□

引理 3.5. 设 $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{Z}^2$ 上的权族，使得对所有 $n\in\mathbb{N}$， $\omega_n \le \omega_{n+1}$ 成立；再设 $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{Z}^2$ 上的权族，使得对所有 $n\in\mathbb{N}$， $\nu_n \ge \nu_{n+1}$ 成立。

(i) 如果对某个 k， ω_k 是可容许的，那么对所有 $n\le k$， ω_n 都是可容许的。(ii) 如果对某个 k， ω_k 不是可容许的，那么对所有 $n\ge k$， ω_n 都不是可容许的。(iii) 如果对某个 k， ν_k 是可容许的，那么对所有 $n\ge k$， ν_n 都是可容许的。(iv) 如果对某个 k， ν_k 不是可容许的，那么对所有 $n\le k$， ν_k 都不是可容许的。

证明。 设 $n\in\mathbb{N}$。由（5）可知,

$$\rho_{1,\omega_n}=\sqrt{\sup_{(m_1,m_2)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}}\omega_n(-m_1,m_2)^{-\frac{1}{m_1}}},\quad \rho_{2,\omega_n}=\sqrt{\inf_{(m_1,m_2)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}}\omega_n(m_1,m_2)^{\frac{1}{m_1}}},$$

$$\mu_{1,\omega_n}=\sqrt{\sup_{(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}\omega_n(m_1,-m_2)^{-\frac{1}{m_2}}},\quad \mu_{2,\omega_n}=\sqrt{\inf_{(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}\omega_n(m_1,m_2)^{\frac{1}{m_2}}}.$$

由于对所有 $(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}^2$，都有 $\omega_n(m_1,m_2)\le\omega_{n+1}(m_1,m_2)$，因此我们有

$$\omega_{n+1}(-m_1,m_2)^{-\frac{1}{m_1}}\le\omega_n(-m_1,m_2)^{-\frac{1}{m_1}},\quad \omega_n(m_1,m_2)^{\frac{1}{m_1}}\le\omega_{n+1}(m_1,m_2)^{\frac{1}{m_1}},$$

$$\omega_{n+1}(m_1,-m_2)^{-\frac{1}{m_2}}\le\omega_n(m_1,-m_2)^{-\frac{1}{m_2}},\quad \omega_n(m_1,m_2)^{\frac{1}{m_2}}\le\omega_{n+1}(m_1,m_2)^{\frac{1}{m_2}}.$$

这意味着

$$\rho_{1,\omega_{n+1}}\le\rho_{1,\omega_n}\le 1\le\rho_{2,\omega_n}\le\rho_{2,\omega_{n+1}}\quad\text{and}\quad \mu_{1,\omega_{n+1}}\le\mu_{1,\omega_n}\le 1\le\mu_{2,\omega_n}\le\mu_{2,\omega_{n+1}}. \tag{12}$$

Similarly, $\nu_{n+1}\le\nu_n$ gives

$$\rho_{1,\nu_n}\le\rho_{1,\nu_{n+1}}\le 1\le\rho_{2,\nu_{n+1}}\le\rho_{2,\nu_n}\text{ 以及 }\mu_{1,\nu_n}\le\mu_{1,\nu_{n+1}}\le 1\le\mu_{2,\nu_{n+1}}\le\mu_{2,\nu_n}. \tag{13}$$

现在的论证与前面引理3.4中的相同，只需分别用（12）和（13）代替（10）和（11）。

□

引理 3.6. 设 $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是定义在 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 上的权族，使得对所有 $n\in\mathbb{N}$， $\omega_n\le\omega_{n+1}$；另设 $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是定义在 $\mathbb{Z}$ 上的权族，使得对所有 $n\in\mathbb{N}$， $\nu_n\ge\nu_{n+1}$。

(i) 若 ω_k 对某个 k 可容许，则对所有 $n\le k$， ω_n 均可容许。***(ii)*** 若 ω_k 满足以下条件中的至少一个：对某些 i、$k\in\mathbb{N}$，$\rho_{i,\omega_k}<1$、 $1<\rho_{i,\omega_k}$、 $\mu_{i,\omega_k}<1$ 或 $1<\mu_{i,\omega_k}$ 成立，则对所有 $n\ge k$， ω_n 也满足相同条件。等价地，对所有 $n\ge k$， $S_{\omega_k}\subset S_{\omega_n}$ 成立；或者，若对某些 $k\in\mathbb{N}$ 和 $m\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$， ω_k 是 m-不可容许的，则对所有 $n\ge k$，ω_n 是 m-不可容许的。***(iii)*** 若 ν_k 对某个 k 可容许，则对所有 $n\ge k$， ν_n 均可容许。***(iv)*** 若 ν_k 满足以下条件中的至少一个：对某个 k，$\rho_{i,\nu_k}<1$、 $1<\rho_{i,\nu_k}$、 $\mu_{i,\nu_k}<1$ 或 $1<\mu_{i,\nu_k}$ 成立，则对所有 $n\le k$， ν_n 也满足相同条件。等价地，对所有$n\le k$，$S_{\omega_k}\subset S_{\omega_n}$ 成立；或者，若对某些 $k\in\mathbb{N}$ 和 $m\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$， ν_k 是 m-不可容许的，则对所有 $n\le k$， ν_n 是m-不可容许的。

证明。 现在证明应该很清楚，因为它基本上沿用了前两个引理中的相同技巧。以下是两个必要的观察。对于每个 $i,n\in\mathbb{N}$,

$$\rho_{i,\omega_{n+1}}\le\rho_{i,\omega_n}\le 1\le\mu_{i,\omega_n}\le\mu_{i,\omega_{n+1}} \tag{14}$$

and

$$\rho_{i,\nu_n}\le\rho_{i,\nu_{n+1}}\le 1\le\mu_{i,\nu_{n+1}}\le\mu_{i,\nu_n}. \tag{15}$$

□

4. Wiener type theorem for countable limit of quasi-Beurling algebras

现在，我们已经准备好讨论可数射影极限和归纳极限中的（拟）贝尔林代数的主要结果。首先，我们考察一维情形。

4.1. 一维情形。 在本小节中，我们给出一维情形的结果，即对于 $d = 1$。下面是我们的第一个主要定理，它针对射影极限。

定理 4.1。 设 $\mathcal{X} = \bigcap \ell^{p_n}_{\omega_n}(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$ 是一个 I 型代数。如果 $f \in \mathcal{X}$ 满足：对于所有 $z \in \mathbb{T}$，$\widehat{f}(z)$ 在 $\mathcal{A}$ 中都是$_{n\in\mathbb{N}}$左可逆（分别地，右可逆、可逆），那么存在定义在 $\mathbb{Z}$ 上的权族 $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$,

(i) $\nu_n \le \omega_n$,(ii) ν_n 若 ω_n 为常数（非常数），则为常数（非常数），(iii) ν_n 若 ω_n 为常数（不可容许），则为可容许（不可容许），(iv) $\nu_n \le \nu_{n+1}$，以及(v) f 的左逆（相应地，右逆、逆元）属于 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \ell^{p_n}_{\nu_n}(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$，这是一个 I 型代数。

In 特别地，$\mathcal{X}$ 是逆封闭的，当且仅当对所有 $n \in \mathbb{N}$，ω_n 都是可容许的　　.

证明. 若对所有 $n \in \mathbb{N}$，ω_n 都是可容许的，则由定理 2.5，取 $\nu_n = \omega_n$ $(n \in \mathbb{N})$即可。假设并非所有 ω_n 都可容许。令 $k \in \mathbb{N}$ 为使 ω_k 不可容许的最小正整数。由于 ω_k 不可容许，根据定理 2.5，存在定义在 $\mathbb{Z}$ 上的权ν，使得 f 在 $\ell^{p_k}_{\nu}(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$中左可逆。注意，该权 ν 并不唯一（参见定理 6.1）。因此，我们根据定理 2.5 构造一个权 ν_k，使其也满足所需条件。令 $z \in \Gamma(\rho_{1,\omega_k}, \rho_{2,\omega_k})$，见（4）。则对所有$n \in \mathbb{Z}$，$|z|^n \le \omega_k(n)$。由于 $f \in \ell^{p_k}_{\omega_k}(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$，我们有 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|f(n)\|^{p_k}\omega_k(n)^{p_k} < \infty$。将其与 $p_k \le 1$时的（2）结合，得到

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|f(n)\||z|^n \le \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|f(n)\|^{p_k}\omega_k(n)^{p_k}\right)^{\frac{1}{p_k}} < \infty,$$

也就是说，对于所有 $z \in \Gamma(\rho_{1,\ \omega_k},\ \rho_{2,\ \omega_k})$，$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)z^n$绝对收敛。

定义 $F\colon\ \Gamma(\rho_{1,\ \omega_k},\ \rho_{2,\ \omega_k}) \to \mathcal{A}$如下

$$F(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)z^n \quad (z \in \Gamma(\rho_{1,\omega_k}, \rho_{2,\omega_k})).$$

于是 F是连续的，并且 $F(z) = \widehat{f}(z)$对所有 $z \in \mathbb{T}$成立。这意味着 f可以连续地延拓到 $\Gamma(\rho_{1,\omega_k}, \rho_{2,\omega_k})$。任取 $z_0 \in \mathbb{T}$。由于 $\widehat{f}(z_0)$在 $\mathcal{A}$中是左可逆的，且集合 U_l（即 $\mathcal{A}$的全体左可逆元）是开的，故存在 $\epsilon > 0$，使得开球 $B(\widehat{f}(z_0), \epsilon)$包含于 U_l之中。由于 f连续，存在 $\delta_{z_0} > 0$，使得 $f(z) \in B(\widehat{f}(z_0), \epsilon)$对所有 $z \in B(z_0, \delta_{z_0}) \cap \Gamma(\rho_{1,\omega_k}, \rho_{2,\omega_k})$成立，也就是说，$f(z) \in U_l$对所有 $z \in B(z_0, \delta_{z_0}) \cap \Gamma(\rho_{1,\omega_k}, \rho_{2,\omega_k})$成立。由 $\mathbb{T}$的紧致性，我们得到正实数 r_k, s_k，使得$\rho_{1,\omega_k} \le r_k \le 1 \le s_k \le \rho_{2,\omega_k}$，并且 $f(z) \in U_l$对所有 $z \in \Gamma(r_k, s_k)$成立。由于 ω_k不是可容许的，故$\rho_{1,\omega_k} < 1$或$\rho_{2,\omega_k} > 1$。若

$\rho_{1,\omega_k} < 1$，则选取 $r_k < 1$；若$\rho_{2,\omega_k} > 1$，则选取 $s_k > 1$。在 $\mathbb{Z}$上如下定义权 ν_k

$$\nu_k(n) = \begin{cases} r_k^n & \text{if } n \leq 0, \\ s_k^n & \text{if } n \geq 0 \end{cases}.$$

于是 $\nu_k \leq \omega_k$ 且它是定理2.5中的一个权。因此，f 在$\ell^{p_k}_{\nu_k}(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$ 中左可逆。

由引理 3.4 (ii)，ω_n 对所有 $n \geq k$都不可容许。并且，由 (10)，

$$\rho_{1,\omega_{k+1}} \leq \rho_{1,\omega_k} \leq r_k \leq 1 \leq s_k \leq \rho_{2,\omega_k} \leq \rho_{2,\omega_{k+1}}.$$

因此，我们可以像对 ω_k 所做的那样，为 ω_{k+1} 选取 r_{k+1}, s_{k+1}，使得

$$\rho_{1,\omega_{k+1}} \leq r_{k+1} \leq r_k \leq 1 \leq s_k \leq s_{k+1} \leq \rho_{2,\omega_{k+1}},$$

并以与 ν_k 相同的方式定义 ν_{k+1}。结合 $\nu_k(0) = 1 = \nu_{k+1}(0)$，可得 $\nu_k \leq \nu_{k+1}$。归纳地，对 $n \geq k$ 定义 ν_n，于是对所有 $n \geq k$ 都有 $\nu_n \leq \nu_{n+1}$。现在，若 $k = 1$，则结论成立。否则，对所有 $1 \leq n < k$ 取 $\nu_n \equiv 1$。这保证了对 $1 \leq n < k$ 有 $\nu_n \leq \nu_{n+1}$。

因此，我们得到一个权族 $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathbb{Z}$ 上，满足 $\nu_n \leq \omega_n$ 以及 $\nu_n \leq \nu_{n+1}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立。此外，这些权的构造方式保证了定理2.5 确保f在 $\ell^{p_n}_{\nu_n}(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$中对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均左可逆，进而可推出 f在$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \ell^{p_n}_{\nu_n}(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$中左可逆，而后者是一个 I 型代数。

特殊情形可由命题3.3推出。 □

下面给出我们的第二个主要定理，该定理针对归纳极限。

定理 4.2. 设 $\mathcal{X} = \bigcup \ell^{p_n}_{\omega_n}(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$ 是一个 *II* 型代数。设 $f \in \mathcal{X}$ 满足$_{n\in\mathbb{N}}\frown f(z)$ 在 $\mathcal{A}$ 中对所有 $z \in \mathbb{T}$均左可逆（分别地，右可逆、可逆）。进一步假设，若对于某个 $j \in \mathbb{N}$，有 $f \in \ell^{p_j}_{\omega_j}(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$，且 ω_j 不可容许而 ω_{j+1} 可容许，则序列 $\{p_n\}_{n>j}$ 严格递增。那么存在一个定义在 $\mathbb{Z}$ 上的权族 $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$,

(i) $\nu_n \leq \omega_n$, (ii) 如果 ω_n 是常数（非常数），那么在所有 ω_n 均可容许或均不可容许的情况下，ν_n 是常数（非常数）。(iii) 如果 ω_n 是常数（不可容许），则 ν_n 可容许（不可容许），(iv) $\nu_{n+1} \leq \nu_n$，并且(v) f 的左逆（分别为右逆、逆元）属于$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ell^{p_n}_{\nu_n}(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$，这是一个 *II* 型代数。

特别地，$\mathcal{X}$ 是逆封闭的，当且仅当 $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足扩展 *GRS* 条件。

证明。令 k 为使 $f \in \ell^{p_k}_{\omega_k}(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$ 成立的最小正整数。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，有 $\omega_{k+n} \leq \omega_k$ 和 $p_k \leq p_{k+n}$。因此，根据引理 3.1，对于所有 $n \geq k$，$f \in \ell^{p_n}_{\omega_n}(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$。如果 ω_k 可容许，那么根据引理 3.4 (iii)，对于所有 $j \geq k$，ω_j 可容许。在此情况下，对所有 $j \in \mathbb{N}$，令 $\nu_j = \omega_j$，定理即由定理 2.5 得证。

若 ω_k 不可容许，则与定理4.1中一样，存在正实数 r_k, s_k，使得$\frown\rho_{1,\omega_k} \leq r_k \leq 1 \leq s_k \leq \rho_{2,\omega_k}$，并且对于至少有一个

r_k 或 s_k 不为 1 的所有(,)，() 都是左可逆的。再次，在 $\mathbb{Z}$ 上定义权 ν_k 为

$$\nu_k(m) = \begin{cases} r_k^m & \text{if } m \leq 0, \\ s_k^m & \text{if } m \geq 0 \end{cases}.$$

则 $\nu_k \leq \omega_k$ 且 f 在 $\ell^{p_k}_{\nu_k}(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$ 中左可逆。假设 ω_{k+1} 也不可容许。由于$\omega_{k+1} \leq \omega_k$，利用（11），我们可以选取 r_{k+1} 和 s_{k+1}，其中至少一个不为 1，使得

$$\rho_{1,\omega_k} \leq \rho_{1,\omega_{k+1}} \leq r_{k+1} \leq 1 \leq s_{k+1} \leq \rho_{2,\omega_{k+1}} \leq \rho_{2,\omega_k},$$

以及

$$r_k \leq r_{k+1} \leq 1 \leq s_{k+1} \leq s_k,$$

并据此构造 ν_{k+1}。这意味着 $\nu_{k+1} \leq \nu_k$。如果所有 ω_j 对于$j \geq k$都不可容许，则归纳地构造 ν_j。否则，令 $j > k$ 为使得ω_j 可容许的最小整数，并对所有 $l \geq j$令 $\nu_l \equiv 1$。对于 $l < k$，令 $\nu_l = \omega_l$。从 $\nu_l\,(l \geq k)$ 的构造显然可知

$$\nu_l \leq \omega_l \quad \text{for all} \quad l \in \mathbb{N}, \quad \text{and} \quad \nu_{l+1} \leq \nu_l \quad \text{for all} \quad l \in \mathbb{N} \setminus \{k-1\}.$$

注意 $\nu_k \leq \omega_k \leq \omega_{k-1} = \nu_{k-1}$。至此，权族$\{\nu_n\}$的构造完成。考虑代数 $\mathcal{X}' = \bigcup \ell^{p_n}_{\nu_n}(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$。那么 $\mathcal{X}'$是 II 型代数，且 f在 $\mathcal{X}'$中$_{n\in\mathbb{N}}$左可逆。

该特殊情形由定理 1.2 和引理 3.2得出。 □

注 4.3。 关于上面定理 $\mathcal{X}'$ 中的一些说明 *4.2*。

(i) 如果我们考虑上一个定理中的代数 $\mathcal{X}' = \cup_{n=1}^{k} \ell^{p_n}_{\nu_n}(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$，那么 f的一个左逆也属于 $\mathcal{X}'$，但此时 $\mathcal{X}'$不过是 $\ell^{p_k}_{\nu_k}(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$，它不是 *II* 型代数。(ii) 如果 $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是严格递增的，那么取 $\mathcal{X}' = \cup_{n\in\mathbb{N}} \ell^{p_n}_{\nu_n}(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$ 并令 $\nu_n \equiv 1$ 为$n > k$ 也足够，但这违反了条件 ***(ii)*** 和 ***(iii)***。(iii) 作出进一步假设是为了使 $\mathcal{X}'$ 成为 *II* 型代数，因为当存在某个 $j > k$ 使得 ω_j 是可容许的而 ω_k 不是时，我们需要对 $l \geq j$ 设定$\nu_l \equiv 1$。如果去掉该假设，那么 $\mathcal{X}'$ 可能成为有限并集，从而成为单个空间。还可以改为取 $\{p_n\}_{n\geq j}$，使其包含一个严格递增的子序列，但为简便起见，我们取 $\{p_n\}_{n\geq j}$ 为严格递增的。

注 4.4. 鉴于引理 *3.4* (iii)，就权的分析而言，由此可知所有 ω_n 均不可容许的情形对 *II* 型代数更有意义，这一点还可由 $\{\nu_n\}$ 在上述定理中的构造进一步证实。此外，显然 $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足扩展 *GRS* 条件当且仅当 $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足扩展 *GRS* 条件。

4.2. **有限维情形**。 我们只讨论 $d = 2$ 的情形，因为任意 $d \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ 的情形可相应地加以修改。应当注意，它与 $d = 1$ 的情形不同，因为这里需要对权施加一些附加条件。

定理 4.5。 设 $\mathcal{X} = \bigcap \ell^{p_n}_{\omega_n}(\mathbb{Z}^2, \mathcal{A})$ 是一个 *I*型代数。假设对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$_{n\in\mathbb{N}}\omega_n$ 要么满足性质 $*_{\omega_n}$，要么 ρ_{1,ω_n}、ρ_{2,ω_n}、μ_{1,ω_n} 和 μ_{2,ω_n} 中至少有一个不等于 1。如果

$\backsim f \in \mathcal{X}$ 使得对于所有 $z \in \mathbb{T}^2$， $\mathcal{A}$ 中的 $f(z)$ 均为左可逆（分别地，右可逆、可逆），那么存在一个定义在 $\mathbb{Z}^2$ 上的权族 $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得

(i) $\nu_n \leq \omega_n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$,(ii) $\nu_n \leq \nu_{n+1}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$, 并且(iii) f 的左逆（分别为右逆、逆元）属于 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \ell^{p_n}_{\nu_n}(\mathbb{Z}^2, \mathcal{A})$，它是一个 I 型代数。

证明. 设 $k \in \mathbb{N}$为最小的正整数，使得 $\rho_{1,\omega_k}, \rho_{2,\omega_k}, \mu_{1,\omega_k}$和 μ_{2,ω_k}中至少有一个不等于 1。对所有 $1 \leq n < k$, 令 $\nu_n \equiv 1$。现在，若 $(z, \eta) \in \Gamma_{\omega_k} = \Gamma(\rho_{1,\omega_k}, \rho_{2,\omega_k}) \times\Gamma(\mu_{1,\omega_k}, \mu_{2,\omega_k})$，则 $\rho_{1,\omega_k} \leq |z| \leq \rho_{2,\omega_k}$且 $\mu_{1,\omega_k} \leq |\eta| \leq \mu_{2,\omega_k}$，这意味着对于所有 $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$，有 $|z|^{2m_1} \leq\omega_k(m_1, m_2)$ 且 $|\eta|^{2m_2} \leq \omega_k(m_1, m_2)$。因此，对于所有 $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$，有 $|z|^{m_1}|\eta|^{m_2} \leq \omega_k(m_1, m_2)$。由于 $f \in \ell^{p_k}_{\omega_k}(\mathbb{Z}^2, \mathcal{A})$ 且 $p_k < 1$，利用 (2) 可得

$$\sum_{(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}^2} \|f(m_1, m_2)\||z|^{m_1}|\eta|^{m_2} \leq \sum_{(m_1,m_2)\in F} \|f(m_1, m_2)\|\omega_k(m_1, m_2)$$
$$\leq \left(\sum_{(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}^2} \|f(m_1, m_2)\|^{p_k}\omega_k(m_1, m_2)^{p_k} \right)^{\frac{1}{p_k}} < \infty.$$

$\widehat{}$这意味着，对于所有 $(\sum_{(m_1,\ m_2)\in\mathbb{Z}^2} \|\widehat{f}\ (m_1,\ m_2)$，$\||z|^{m_1}|\eta|^{m_2}$都收敛，因此 f可以延拓到 Γ_{ω_k}。由于 $\widehat{f}$连续，且对所有 $(z,\ \eta) \in \mathbb{T}^2$，$\widehat{f}\ (z,\ \eta)$都是左可逆的，因此存在正实数 $r_{k_1},\ r_{k_2},\ s_{k_1},\ s_{k_2}$，使得

$$\rho_{1,\omega_k} \leq r_{k_1} \leq 1 \leq r_{k_2} \leq \rho_{2,\omega_k}, \quad \mu_{1,\omega_k} \leq s_{k_1} \leq 1 \leq s_{k_2} \leq \mu_{2,\omega_k},$$

$\widehat{}$并且对所有 $(z,\ \eta) \in \Gamma\ (r_{k_1},\ r_{k_2}) \times \Gamma\ (s_{k_1},\ s_{k_2})$，$f\ (z,\ \eta)$都是左可逆的。注意，如果$\rho_{1,\ \omega_k} < 1$，那么我们得到$\rho_{1,\ \omega_k} \leq r_{k_1} < 1$；如果$\rho_{2,\ \omega_k} > 1$，那么我们得到$1 < r_{k_2} \leq \rho_{2,\ \omega_k}$。对$s_{k_1}$和$s_{k_2}$也同样如此。定义 $\nu_k :\ \mathbb{Z}^2 \to [1, \infty)$为

$$\nu_k(m_1, m_2) = \begin{cases} r^m_{k_1} s^n_{k_1} & \text{if } m \leq 0, n \leq 0 \\ r^m_{k_1} s^n_{k_2} & \text{if } m \leq 0, n > 0 \\ r^m_{k_2} s^n_{k_1} & \text{if } m > 0, n \leq 0 \\ r^m_{k_2} s^n_{k_2} & \text{if } m > 0, n > 0 \end{cases}.$$

现在，$\omega_k \leq \omega_{k+1}$ 意味着存在正实数 $r_{(k+1)_1},\ r_{(k+1)_2},\ s_{(k+1)_1},\ s_{(k+1)_2}$，与上文类似，并且

$$\rho_{1,\omega_{k+1}} \leq r_{(k+1)_1} \leq r_{k_1} \leq 1 \leq r_{k_2} \leq r_{(k+1)_2} \leq \rho_{2,\omega_{k+1}}$$
$$\text{and} \quad \mu_{1,\omega_{k+1}} \leq s_{(k+1)_1} \leq s_{k_1} \leq 1 \leq s_{k_2} \leq s_{(k+1)_2} \leq \mu_{2,\omega_{k+1}}.$$

并利用 ν_{k+1} 构造 ν_k，使用 $r_{(k+1)_1},\ r_{(k+1)_2},\ s_{(k+1)_1},\ s_{(k+1)_2}$。其余论证与定理 4.2中的论证类似。证明至此完成。□

定理 *4.6.* 设 $\mathcal{X} = \bigcup \ell^{p_n}_{\omega_n}(\mathbb{Z}^2, \mathcal{A})$ 是一个 *II* 型代数。假设对于每个$n\in\mathbb{N}n \in \mathbb{N}$，$\omega_n$ 要么满足性质 $*_{\omega_n}$，要么 ρ_1、$_{\omega_n}$、ρ_2、$_{\omega_n}$、μ_1、$_{\omega_n}$ 和 μ_2、$_{\omega_n}$ 中至少有一个不等于$\widehat{}1$。设 $f \in \mathcal{X}$ 满足：对于所有 $z \in \mathbb{T}^2$，$f(z)$ 在 $\mathcal{A}$ 中是左可逆（分别为右可逆、可逆）的。进一步假设，若对于某个 $j \in \mathbb{N}$，$f \in \ell^{p_j}_{\omega_j}(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$，且 ω_j 不可容许而 ω_{j+1} 可容许，则序列 $\{p_n\}_{n>j}$ 严格递增。那么存在一个定义在 $\mathbb{Z}^2$ 上的权族 $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得

(i) $\nu_n \le \omega_n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立，(ii) $\nu_{n+1} \le \nu_n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立，并且 (iii) f 的一个左逆（分别为右逆、逆元）属于 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ell^{p_n}_{\nu_n}(\mathbb{Z}^2, \mathcal{A})$，后者是一个 *II* 型代数。

证明。 证明采用定理 4.2 中的技巧，并结合按定理4.5所构造的权。 □

4.3. 无限维情形。 最后，在本小节中我们给出关于 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$的定理。同样，我们仅给出非容许权 ω_n 的权 ν_n 构造，其余细节可参照前述情形验证。

定理4.7。 设 $\mathcal{X} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \ell^{p_n}_{\omega_n}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}},\ \omega_n,\ \mathcal{A})$ 是一个*I*型代数。若 $f \in \mathcal{X}$满足$\frown f(z)$ 在 $\mathcal{A}$ 中对所有 $z \in \mathbb{T}^\infty$均左可逆（分别地，右可逆、可逆），则对每个 $n \in \mathbb{N}$，存在 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 上的权族 $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得

(i) $\nu_n \le \omega_n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立，(ii) $\nu_n \le \nu_{n+1}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立，且(iii) f 的左逆（分别地，右逆、逆元）属于$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \ell^{p_n}_{\nu_n}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{A})$，这是一个 *I* 型代数。

设 $n \in \mathbb{N}$ 是首个使得 ω_n 不是可容许权的整数。若对某个 $m \in \mathbb{N}$， ω_n 是 m-不可容许的，则给定任意 $l \in \{1, 2, \dots, m\}$，可以构造族 $\{\nu_n\}$，使得 ν_j $(j \ge n)$ 的阶为 l；若 ω_n 是 ∞-不可容许的，则给定任意$l \in \mathbb{N}$，可以构造族 $\{\nu_n\}$，使得 ν_j $(j \ge n)$ 的阶为 l。

证明。若 ω_n 满足对于所有 $n, i \in \mathbb{N}$，均有 $\mu_{i,\omega_n} = 1 = \rho_{i,\omega_n}$，那么只需取 $\nu_n = \omega_n$。令 $k \in \mathbb{N}$ 为第一个满足这样的整数：对于某个 $m \in \mathbb{N}$， ω_k 是 m-不可容许的。于是 $S_{\omega_k} = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$，其中 $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$ 为正整数，并且对于所有 $1 \le t \le m$， μ_{i_t,ω_k} 和 ρ_{i_t,ω_k} 中至少有一组不等于 1。固定 $l \in \{1, 2, \dots, m\}$。由 (6) 可得

$$\mu^{\frac{1}{l}}_{i,\omega_k} = \left(\sup\{\omega(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, -\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots)^{-\frac{1}{\alpha_i}} : \alpha_i \in \mathbb{N}, \alpha_j \in \mathbb{Z}\ (j \ne i)\}\right)^{\frac{1}{l}},$$

$$\text{and}\quad \rho^{\frac{1}{l}}_{i,\omega_k} = \left(\inf\{\omega(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots)^{\frac{1}{\alpha_i}} : \alpha_i \in \mathbb{N}, \alpha_j \in \mathbb{Z}\ (j \ne i)\}\right)^{\frac{1}{l}}.$$

1 1令 $z \in D = \Pi_{n\in\mathbb{N}} A_n$，其中 $A_{i_t} = \Gamma(\mu^l_{i_t}, \rho^l_{i_t})$ 且 $A_n = \mathbb{T}\ (n \ne i_t)$ 对于 $1 \le t \le l$ 成立。则 $|z_{i_t}|^{l\alpha_{i_t}} \le \omega(\alpha)$ 对于 $1 \le t \le l$ 成立，因此对所有 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots\dots) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$，都有 $|z_{i_1}|^{\alpha_{i_1}} |z_{i_2}|^{\alpha_{i_2}} \cdots |z_{i_l}|^{\alpha_{i_l}} \le \omega_k(\alpha)$。由于 $f \in \ell^{p_k}_{\omega_k}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}},\ \mathcal{A})$， $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}} \|f(\alpha)\|^{p_k} \omega_k(\alpha)^{p_k} < \infty$。这意味着

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}} \|f(\alpha)\| |z^\alpha| \le \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}} \|f(\alpha)\| |z_{i_1}|^{\alpha_{i_1}} |z_{i_2}|^{\alpha_{i_2}} \cdots |z_{i_l}|^{\alpha_{i_l}}$$

$$\le \left(\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}} \|f(\alpha)\|^{p_k} \omega_k(\alpha)^{p_k}\right)^{\frac{1}{p_k}} < \infty.$$

^ ^因此，对所有 $z \in D$， $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}} f(\alpha) z^\alpha$ 收敛。由于 f 连续，且对所有 $z \in \mathbb{T}^\infty$， $f(z)$ 都是左可逆的，并且左可逆元集合是开集，因此存在 $r_{t,k}, s_{t,k}$ $(1 \le t \le l)$，使得 $\frown \mu_{i_t,\omega_k} \le r_{t,k} \le 1 \le s_{t,k} \le \rho_{i_t,\omega_k}$，且对所有 $z \in \Gamma = \Pi_{n\in\mathbb{N}} A_n$， $f(z)$ 都是左可逆的，其中

$A_{i_t} = \Gamma(r_{t,k}, s_{t,k})$，并且当 $n \neq i_t$ 时，$A_n = \mathbb{T}$ 对 $1 \leq t \leq l$ 成立。如果 $\mu_{i_t,\omega_k} < 1$，那么 $r_{t,k} < 1$；如果$\rho_{i_t,\omega_k} > 1$，那么 $s_{t,k} > 1$。定义 ν_k 上的权 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 如下

$$\nu_k(\alpha) = \prod_{t=1}^{l} h_{t,k}^{\alpha_{i_t}}, \quad \text{where} \quad h_{t,k} = \begin{cases} r_{t,k}, & \text{if } \alpha_{i_t} \leq 0 \\ s_{t,k}, & \text{if } \alpha_{i_t} \geq 0 \end{cases} \quad \text{and } \alpha_j \in \mathbb{Z} \text{ if } j \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_l\}.$$

那么 ν_k 是 l 上 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$的一个阶为。对于 $1 \leq t \leq l$，利用（14），我们得到正实数$r_{t,\,k+1}$ 以及$s_{t,\,k+1}$，使得

$$\mu_{i_t,\omega_{k+1}} \leq r_{t,k+1} \leq r_{t,k} \leq 1 \leq s_{t,k} \leq s_{t,k+1} \leq \rho_{i_t,\omega_{k+1}}.$$

归纳地，对每个 $1 \leq t \leq l$，我们得到依赖于权的子族 $\{\omega_j\}_{j\geq k}$ 的正实数序列 $\{r_{t,j}\}_{j\geq k}$ 和 $\{s_{t,j}\}_{j\geq k}$，使得

$$r_{t,j+1} \leq r_{t,j} \leq 1 \leq s_{t,j} \leq s_{t,j+1}$$
$$\text{and} \quad \mu_{i_t,\omega_j} \leq r_{t,j} \leq 1 \leq s_{t,j} \leq \rho_{i_t,\omega_j}$$

对所有 $j \geq k$。对于 $j \geq k$，在 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 上构造权 ν_j 如下

$$\nu_j(\alpha) = \prod_{t=1}^{l} h_{t,j}^{\alpha_{i_t}}, \quad \text{where} \quad h_{t,j} = \begin{cases} r_{t,j}, & \text{if } \alpha_{i_t} \leq 0 \\ s_{t,j}, & \text{if } \alpha_{i_t} \geq 0 \end{cases} \quad \text{and } \alpha_i \in \mathbb{Z} \text{ if } i \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_l\}.$$

由构造可知，显然 ν_j 是一个阶为 l 对所有 $j \geq k$；并且 $\nu_n \leq \omega_n$且 $\nu_n \leq \nu_{n+1}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$。证明的其余部分与定理2.7的证明思路相同。

当 ω_k 是 ∞-不可容许时，可用类似的方法处理，唯一的变化是我们固定 l取自 $\mathbb{N}$，而不是 $\{1, 2, \ldots, m\}$。□

注 4.8。在上述定理中，我们无法定义权族 $\{\nu_n\}$，使得$_1\nu_j$ 对于 $j \geq k$ 依赖于无穷多个指标，因为我们需要利用数值 $\rho_{i,\,\omega_{j1}}^{l}$和 $\mu_{i,\,\omega_j}^{l}$ 来定义权 $\nu_j\,(j \geq k)$。因此，取 $l = \infty$ 会使这些数值都变为1，进而使所有权 $\nu_j \equiv 1$ 对于 $j \geq k$都变为1 。

鉴于注 4.3 和注 4.4，在以下结果中，我们将取所有 ω_n 均不可容许。

定理 4.9。设 $\mathcal{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ell_{\omega_n}^{p_n}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{A})$ 是一个 *II* 型代数。假设对于所有 $n \in \mathbb{N}$，ω_n 都不可容许。若 $f \in \mathcal{X}$ 满足：对于所有 $z \in \mathbb{T}^{\infty}$，$f(z)$ 在 $\mathcal{A}$ 中左可逆（分别地，右可逆、可逆），则存在定义在$\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 上的权族 $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得

(i) $\nu_n \leq \omega_n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立，(ii) $\nu_{n+1} \leq \nu_n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立，并且 (iii) f的左逆（分别地，右逆、逆元）属于$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ell_{\nu_n}^{p_n}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{A})$，它是一个 *II* 型代数。

此外，如果对于某个 $m \in \mathbb{N}$，所有 ω_n都是 m-不可容许的，那么给定任意 $l \in \{1, 2, \ldots, m\}$，可以选择族 $\{\nu_n\}$，使得所有 ν_n 的阶均为 l；如果所有 ω_n 都是 ∞-不可容许的，那么给定任意 $l \in \mathbb{N}$，可以选择族 $\{\nu_n\}$，使得所有 ν_n 的阶均为 l。

证明。我们只需证明所有 ω_n 都至少是 m-不可容许的，对某个 $m \in \mathbb{N}$而言。在这种情况下，由引理 3.6 (iv)可知，$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_{\omega_n}$ 的基数至少为 m。令$l \in \{1, 2, \ldots, m\}$。取 $i_1 < i_2 < \cdots < i_l$自 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_{\omega_n}$。现在，对每个 $1 \leq t \leq l$，由于

按照前一定理中的做法，用（15）代替（14），我们得到正实数序列$\{r_{t,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{s_{t,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得

$$r_{t,n} \le r_{t,n+1} \le 1 \le s_{t,n+1} \le s_{t,n}$$
$$\text{and} \quad \mu_{i_t,\omega_n} \le r_{t,n} \le 1 \le s_{t,n} \le \rho_{i_t,\omega_n} \quad \text{for all} \quad n \in \mathbb{N}.$$

证明的其余部分可通过按照前一定理中的方法构造权，并采用与定理4.2证明中类似的论证来完成。□

注 4.10。一维情形下关于可容许权的特殊情况，即定理*4.1*和定理 *4.2*，并不适用于多维情形，因为这里考虑的定义在 $\mathbb{Z}^d$ $(d>2)$ 和 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 上的权的可容许权定义，与采用 *GRS* 条件的通常定义不同。

将扩展 GRS 条件的定义从 $\mathbb{Z}^d$ 推广到 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 如下：称权族 $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 上满足扩展 GRS 条件，如果

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\lim_{k\to\infty} \omega_n(km)^{\frac{1}{k}} \right) = 1 \quad \text{for all} \quad m \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}.$$

那么有以下定理，其证明可利用命题 3.3和定理 1.2 的技巧以及引理 3.2很容易验证。

定理 4.11（高维中的逆封闭性）。

（i）*I* 型代数：

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \ell^{p_n}_{\omega_n}(\mathbb{Z}^d,\mathcal{A}) \quad and \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \ell^{p_n}_{\omega_n}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}},\mathcal{A})$$

当且仅当对于所有 $n\in\mathbb{N}$，每个 ω_n 都满足 *GRS* 条件时，才是逆封闭的。

(ii) *II* 型代数：

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ell^{p_n}_{\omega_n}(\mathbb{Z}^d,\mathcal{A}) \quad and \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ell^{p_n}_{\omega_n}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}},\mathcal{A})$$

当且仅当 $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足扩展 *GRS* 条件时，才是逆封闭的。

5. Hierarchy of inverse-closed algebras in quasi framework

Fo在本节中，$\mathbb{X}$ 是 $\mathbb{Z}^d$ 或 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$，我们考虑定义在 $\mathbb{X}$上的以下权。

（i）多项式权：对于某个 $s\ge 0$，$\omega_s(m) = (1+|m|)^s$ $(m\in\mathbb{X})$。（ii）指数权：对于某个 $r\ge 0$，$\nu_r(m) = e^{\frac{|m|}{r+1}}$ $(m\in\mathbb{X})$。—（iii）次指数权：对于某些 $a>0$ 和 $0<b<1$，$\eta_{a,\,b}(m) = e^{a|m|^b}$ $(m\in\mathbb{X})$。

以下引理已为文献所知，但为完整起见，我们仍给出证明。

引理 5.1. 对于所有 $s\ge 0$、$a>0$ 和 $0<b<1$，权 ω_s 和$\eta_{a,\,b}$ 均为可容许的。此外，权族 $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足扩展 *GRS* 条件。

证明。对于每个 $m\in\mathbb{X}$，

$$\lim_{k\to\infty} \omega_s(km)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} (1+k|m|)^{\frac{s}{k}} = 1,$$
$$\lim_{k\to\infty} \eta_{a,b}(km)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} e^{\frac{a|km|^b}{k}} = \lim_{k\to\infty} e^{\frac{a|m|^b}{k^{1-b}}} = 1,$$

and

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\nu_n(km)^{\frac{1}{k}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\left(e^{\frac{|km|}{(n+1)}}\right)^{\frac{1}{k}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}e^{\frac{|m|}{(n+1)}}\right)=1,$$

也就是说，$\inf_{n\in\mathbb{N}}(\lim_{k\to\infty}\nu_n(km)^{\frac{1}{k}})=1$。因此，$\omega_s$ 和 $\eta_{a,\,b}$ 满足 GRS 条件，而族 $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足扩展 GRS 条件。□

快速递减序列和指数递减序列的空间分别刻画为

$$\mathcal{S}(\mathbb{Z}^d)=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\ell^1_{\omega_n}(\mathbb{Z}^d)\quad\text{and}\quad\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\ell^1_{\nu_n}(\mathbb{Z}^d),$$

。

这里，我们以如下方式将 $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^d)$ 和 $\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)$ 的定义推广到向量值情形，并使用准 Beurling 代数。

定义 5.2。对于含幺巴拿赫代数 $\mathcal{A}$，定义

(i) 快速递减序列空间：

$$\mathcal{S}^{\{p_n\}}(\mathbb{X},\mathcal{A})=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\ell^{p_n}_{\omega_n}(\mathbb{X},\mathcal{A}),$$

其中，$\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是$(0,1]$ 中的一个递减序列，且 $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{X}$上的一族多项式权。

(ii) 指数递减序列空间：

$$\mathcal{E}^{\{q_n\}}(\mathbb{X},\mathcal{A})=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\ell^{q_n}_{\nu_n}(\mathbb{X},\mathcal{A})$$

其中，$\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是$(0,1]$ 中的一个递增序列，且 $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{X}$上的一族指数权。

取 $\mathcal{A}=\mathbb{C}$，$\mathbb{X}=\mathbb{Z}^d$ 和 $p_n=1=q_n$ 对所有 $n\in\mathbb{N}$成立，我们便得到通常的 $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^d)$ 和 $\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)$。显然，空间 $\mathcal{S}^{\{p_n\}}(\mathbb{X},\ \mathcal{A})$ 和 $\mathcal{E}^{\{q_n\}}(\mathbb{X},\ \mathcal{A})$ 分别是 I 型和 II 型代数，因为 $\omega_n\le\omega_{n+1}$ 和 $\nu_{n+1}\le\nu_n$ 对所有 $n\in\mathbb{N}$成立。因此，根据定义 4.11 ，结合定义 2.4，可立即得到以下定理。

T定理 5.3. 代数 $\mathcal{S}^{\{p_n\}}(\mathbb{X},\mathcal{A})$ 和 $\mathcal{E}^{\{q_n\}}(\mathbb{X},\mathcal{A})$ 是逆封闭的 .

接下来，我们给出准框架中逆封闭代数层级的如下定理。

定理 5.4. 若序列 $\{p_n\}$ 和 $\{q_n\}$ 满足条件 $0<q_n\le p\le p_n\le 1$ 对所有$n\in\mathbb{N}$均成立，则有如下逆封闭代数层级：

$$\mathcal{E}^{\{q_n\}}(\mathbb{X},\mathcal{A})\subset\ell^p_{\eta_{a,b}}(\mathbb{X},\mathcal{A})\subset\mathcal{S}^{\{p_n\}}(\mathbb{X},\mathcal{A})\subset\ell^{p_n}_{\omega_{s_n}}(\mathbb{X},\mathcal{A})\subset\ell^{p_1}_{\omega_{s_1}}(\mathbb{X},\mathcal{A})\subset\ell^1(\mathbb{X},\mathcal{A}),$$

对所有满足 $n-1<s_n\le n$ 的 $n\in\mathbb{N}$。

证明。令 $n\in\mathbb{N}$。那么对于充分大的 $|m|$，$\eta_{a,b}(m)=e^{a|m|^b}\le e^{\frac{|m|}{n+1}}(\,)=\nu_n(m)$；也就是说，存在某个 $M_n\in\mathbb{N}$，使得对于所有 $|m|>M_n$，$\eta_{a,b}(m)\le\nu_n(m)$。由引理 2.12，存在某个 $K_n>0$，使得对于所有 $|m|\le M_n$，$\eta_{a,b}(m)\le K_n\nu_n(m)$。因此，对于所有 $m\in\mathbb{X}$，我们有 $\eta_{a,b}(m)\le K_n\nu_n(m)$。于是，由引理 3.1，$\ell^{q_n}_{\nu_n}(\mathbb{X},\mathcal{A})\subset\ell^{q_n}_{\eta_{a,b}}(\mathbb{X},\mathcal{A})$，而且 $q_n\le p$ 蕴含 $\ell^{q_n}_{\eta_{a,b}}(\mathbb{X},\mathcal{A})\subset\ell^{p}_{\eta_{a,b}}(\mathbb{X},\mathcal{A})$。这给出了包含关系 $\mathcal{E}^{\{q_n\}}(\mathbb{X},\mathcal{A})\subset\ell^{p}_{\eta_{a,b}}(\mathbb{X},\mathcal{A})$。

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，存在 $M_n, K_n > 0$，使得对于 $|m| > M_n$，$\omega_n(m) = (1+|m|)^n \le e^{a|m|^b} = \eta_{a,b}(m)$，且对于 $|m| \le M$，$\omega_n(m) \le K_n \eta_{a,b}(m)$，由此得到 $\omega_n \le N_n \eta_{a,b}$。结合 $p \le p_n$ 和引理 3.1，可得包含关系 $\ell^p_{\eta_{a,b}}(\mathbb{X}, \mathcal{A}) \subset \mathcal{S}^{\{p_n\}}(\mathbb{X}, \mathcal{A})$。

其余的包含关系可以用同样的方法加以验证。 □

注 *5.5*。定义 *2.4* 使我们能够超越 $\ell^1(\mathbb{Z}^d)$，正如引理 *3.2* 所示，该引理指出 $\ell^1(\mathbb{Z}^d)$ 本身是包含于 $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$ 中的逆封闭代数。特别地，对于 $n > 1$，考虑 $\ell^1(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C}^n)$，我们得到无穷多个严格包含$\ell^1(\mathbb{Z}^d)$ 且自身逆封闭的代数。并且将 $\mathbb{Z}^d$ 替换为 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 后，这些结果仍然成立，这也增添了新颖性。

6. Maximizing the weight

在本节中，我们给出关于权的最大化 ν 在定理 2.5 （离散情形）以及定理 2.8 （连续情形）中所得的结果。

对于 $\mathbb{Z}$ 上的权 ω，令 $\Gamma_\omega = \Gamma(\rho_{1,\omega}, \rho_{2,\omega})$。用 A^{o} 和 $\overline{A}$ 分别表示集合 $A \subset \mathbb{C}$ 的内部和闭包。以下是本节关于离散情形的第一个主要定理。

定理 6.1。设 $0 < p \le 1$、ω 是定义在 $\mathbb{Z}$ 上的权，$\mathcal{A}$ 是含幺巴拿赫代数，且令 $f \in \ell^p_\omega(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$。若对于所有 $z \in \mathbb{T}$，$f(z)$ 在 $\mathcal{A}$ 中左可逆（分别地，右可逆、可逆），则存在定义在 $\mathbb{Z}$ 上的权 η，满足以下性质：

(i) $\eta \le \omega$，(ii) 若 ω 是常数（非常数），则 η 是常数（非常数），(iii) 若 ω 是可容许（不可容许）的，则 η 是可容许（不可容许）的，(iv) 若 ν 是定义在 $\mathbb{Z}$ 上且满足 $\nu \le M\omega$ 的权，其中 $M > 0$，并且 f 的左逆（分别地，右逆、逆元）属于 $\ell^p_\nu(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$，则对于某个仅依赖于 ν 的常数 $K_\nu \ge 1$，有 $\nu \le K_\nu \eta$。

特别地，如果 ω 是可容许的，那么 $\eta = \omega$；如果 ω 是不可容许的，且 f 在 $\ell^p_\omega(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$中不可逆，那么 $\ell^p_\eta(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$ 是链 $\ell^p_\omega(\mathbb{Z}, \mathcal{A}) \subset \ell^1(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$ 中不包含 f的逆元的最大代数。

证明。如定理 4.1中所述，f 可以在 $\Gamma(r_1, r_2)$上延拓，其中某个 $\rho_{1,\omega} \le r_1 \le 1 \le r_2 \le \rho_{2,\omega}$使得该延拓 $f(z)$对所有 $z \in \Gamma(r_1, r_2)$都是左可逆的。令 r 为所有此类 r_1 的下确界，令 s 为所有此类 r_2 的上确界。于是 $\rho_{1,\omega} \le r \le 1 \le s \le \rho_{2,\omega}$。

情形 *1*：如果 ω 是可容许的，或者 $f(z)$有定义且对所有 $z \in \Gamma^{\mathrm{o}}_\omega = \{z \in \mathbb{C} : \rho_{1,\omega} < |z| < \rho_{2,\omega}\}$都是左可逆的，那么 $r = \rho_{1,\omega}$ 且 $s = \rho_{2,\omega}$，在此情形下取 $\eta = \omega$。

情形 *2*：假设 ω 不可容许，并且 $f(z)$对某个 $z \in \Gamma^{\mathrm{o}}_\omega$不可逆。则$\rho_{1,\omega} < r$ 或$s < \rho_{2,\omega}$。设

$$D = \begin{cases} \{z \in \mathbb{C} : 1 \le |z| < s\}, & \text{if} \quad r = 1 < s, \\ \{z \in \mathbb{C} : r < |z| \le 1\}, & \text{if} \quad r < 1 = s, \\ \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < s\}, & \text{if} \quad r < 1 < s. \end{cases}$$

那么，无论如何，对于所有 $z \in D$，$f(z)$ 都是左可逆的，并且存在某个 $z_0 \in D$，使得 $f(z_0)$ 不是左可逆的。定义 $\eta : \mathbb{Z} \to [1, \infty)$ 如下：

若 $\rho_{1,\ \omega} = r \leq 1 < s < \rho_{2,\ \omega}$，则定义

$$\eta(n) = \begin{cases} \omega(n), & n \leq 0, \\ s^n, & n > 0. \end{cases}$$

若 $\rho_{1,\ \omega} < r < 1 \leq s = \rho_{2,\ \omega}$，则定义

$$\eta(n) = \begin{cases} r^n, & n < 0, \\ \omega(n), & n \geq 0. \end{cases}$$

若 $\rho_{1,\ \omega} < r < 1 < s < \rho_{2,\ \omega}$，则定义

$$\eta(n) = \begin{cases} r^n, & n \leq 0, \\ s^n, & n \geq 0. \end{cases}$$

那么，无论哪种情况，η 都是 $\mathbb{Z}$ 上的权，且它是常数（可容许）的，当且仅当 ω 是常数（可容许）的，$\eta \leq \omega$、$D \subset \Gamma_\eta$ 和 $D = \Gamma_{\eta^\circ}$

设 ν 是 $\mathbb{Z}$ 上的权，满足对某个 $M > 0$ 和 ℓ^p_ν，$\nu \leq M\omega$（$\mathbb{Z}$，$\mathcal{A}$）包含 f 的一个左逆元 $\widehat{\ }$。于是可得，对于所有 $z \in \Gamma_\nu$，$\rho_{1,\ \omega} \leq \rho_{1,\ \nu} \leq 1 \leq \rho_{2,\ \nu} \leq \rho_{2,\ \omega}$ 和 f（z）在 $\mathcal{A}$ 中均为左可逆。因此，$\Gamma_\nu \subset D$。根据 r，s 和 η 的定义，

$$r = \rho_{1,\eta} \leq \rho_{1,\nu} \leq 1 \leq \rho_{2,\nu} \leq \rho_{2,\eta} = s.$$

这意味着

$$\lim_{n\to\infty} \eta(-n)^{-1/n} \leq \lim_{n\to\infty} \nu(-n)^{-1/n} \quad \text{and} \quad \lim_{n\to\infty} \eta(n)^{1/n} \geq \lim_{n\to\infty} \nu(n)^{1/n}.$$

因此，存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $|n| > n_0$，$\nu(n) \leq \eta(n)$。此外，存在某个 $K_\nu \geq 1$，使得对于所有 $|n| \leq n_0$，$\nu(n) \leq K_\nu \eta(n)$。因此，对于所有 $n \in \mathbb{Z}$，$\nu(n) \leq K_\nu \eta(n)$。证明至此完成。□

接下来，我们给出如下权的最大化结果 ν，该结果在定理2.8 中得到，并且可视为定理6.1 对于 $p = 1$的连续类比。

定理 6.2。设 ω 是 $\mathbb{R}$ 上的一个权，$\mathcal{A}$ 是含幺巴拿赫代数，其单位元为 $1_\mathcal{A}$，并设 $f \in L^1_\omega(\mathbb{R}, \mathcal{A})$。若对于所有 $t \in \mathbb{R}$，$1_\mathcal{A} + \widehat{f}(it)$ 在 $\mathcal{A}$ 中左可逆（分别地，右可逆、可逆），则存在 $\mathbb{R}$ 上的一个权 η，满足以下性质：

(i) $\eta \leq \omega$,(ii) η 在 ω 为常数（非常数）时是常数（非常数），(iii) η 在 ω 可容许（不可容许）时是可容许（不可容许）的，并且(iv) 若 ν 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的权，满足 $\nu \leq M\omega$，其中某个 $M > 0$ 以及 $\mathbf{1} + f$ 的左逆（分别为右逆、逆元）属于 $f \in L^1_\nu(\mathbb{R}, \mathcal{A})_1$，，则对于某个依赖于 ν 的常数 $K_\nu \geq 1$，有 $\nu \leq K_\nu \eta$。

特别地，若 ω 可容许，则 $\eta = \omega$；若 ω 不可容许，且 $\mathbf{1}+f$ 在 $L^1_\omega(\mathbb{R}, \mathcal{A})_1$，中不可逆，则 $L^1_\eta(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ 是链 $L^1_\omega(\mathbb{R}, \mathcal{A}) \subset L^1(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ 中不包含 $\mathbf{1} + f$ 的逆元的最大代数。

证明。令 $T_\omega = \{x+iy \in \mathbb{C} : \rho_{1,\ \omega} \leq x \leq \rho_{2,\ \omega},\ y \in \mathbb{R}\}$。由于 $f \in L^1_\omega(\mathbb{R},\ \mathcal{A})$，由黎曼-勒贝格引理可得，

$$\lim_{|z|\to\infty} \|\widehat{f}(z)\| = 0.$$

这意味着存在某个 $M>0$，使得

$$\|1_{\mathcal{A}}-(1_{\mathcal{A}}+\widehat{f}(x+iy))\|=\|\widehat{f}(x+iy)\|<1$$

对所有满足 $|y|>M.$ 的 $x+iy\in T_{\omega}$，由引理 2.11，$1_{\mathcal{A}}+f(x+iy)$ 在 $\mathcal{A}$ 中是左可逆的，对所有满足 $|y|>M.$ 的 $x+iy\in T_{\omega}$，。令 $y\in\mathbb{R}$ 满足 $|y|\leq M$。那么根据假设，$1_{\mathcal{A}}+f(iy)$ 在 $\mathcal{A}$ 中是左可逆的。由于 $\mathcal{A}$ 中所有左可逆元构成的集合是开集，且 在 T_{ω} 中连续，因此存在 $\delta_y>0$，使得对所有 $z\in B(iy,\delta_y)\cap T_{\omega}$，$1_{\mathcal{A}}+f(z)$ 在 $\mathcal{A}$ 中是左可逆的。由 $\{iy$ 的紧致性：$|y|\leq M\}$，可得 r_1、$r_2\in\mathbb{R}$，使得 $\rho_{1,\ \omega}\leq r_1\leq 0\leq r_2\leq\rho_{2,\ \omega}$，且对所有 $z=x+iy\in[r_1,r_2]+i[-M,M]$，$1_{\mathcal{A}}+f(z)$ 在 $\mathcal{A}$ 中是左可逆的。因此，我们得到 r_1、$r_2\in\mathbb{R}$，使得 $\rho_{1,\ \omega}\leq r_1\leq 0\leq r_2\leq\rho_{2,\ \omega}$，并且对所有 $z=x+iy\in[r_1,r_2]+i\mathbb{R}$，$1_{\mathcal{A}}+f(z)$ 在 $\mathcal{A}$ 中是左可逆的。

令 r 为所有此类 r_1 的下确界，并令 s 为所有此类 r_2 的上确界。则 $\rho_{1,\ \omega}\leq r\leq 0\leq s\leq\rho_{2,\ \omega}$。

情形 1：若 ω 可容许，或者对所有 $z\in T_{\circ_{\omega}}=\{x+iy\in\mathbb{C}$，$1_{\mathcal{A}}+f(z)$ 左可逆，则 $r=\rho_{1,\ \omega}$ 且 $s=\rho_{2,\ \omega}$。取 $\eta=\omega_{\circ}$

情形 2：假设 ω 不可容许，且 $1_{\mathcal{A}}+f(z)$ 对某个 $z\in T_{\circ\omega}$ 不可逆。则 $\rho_{1,\ \omega}<r$ 或 $s<\rho_{2,\ \omega}$。取

$$D=\begin{cases}\{x+iy\in\mathbb{C}:0\leq x<s\}, & \text{if}\quad r=0<s,\\ \{x+iy\in\mathbb{C}:r<x\leq 0\}, & \text{if}\quad r<0=s,\\ \{x+iy\in\mathbb{C}:r<x<s\}, & \text{if}\quad r<0<s.\end{cases}$$

定义 $\eta:\mathbb{R}\to[1,\infty)$ 如下：
若 $\rho_{1,\ \omega}=r\leq 0<s<\rho_{2,\ \omega}$，则

$$\eta(x)=\begin{cases}\omega(x) & x\leq 0\\ e^{r_2x} & x>0\end{cases}.$$

如果 $\rho_{1,\ \omega}<r<0\leq s=\rho_{2,\ \omega}$，那么

$$\eta(x)=\begin{cases}e^{r_1x} & x\leq 0\\ \omega(x) & x>0\end{cases}.$$

如果 $\rho_{1,\ \omega}<r<0<s<\rho_{2,\ \omega}$，那么

$$\eta(x)=\begin{cases}e^{r_1x} & x\leq 0\\ e^{r_2x} & x>0\end{cases}.$$

那么，在任何情况下，η 都是 $\mathbb{R}$ 上的权，且当且仅当 ω 为常数（可容许）时，η 为常数（可容许），$\eta\leq\omega$、$D\subset T_{\eta}$ 和 $D=T_{\eta\circ}$

设 ν 是 $\mathbb{R}$ 上的一个权，使得对于某个 $M>0$ 和 L^1_{ν}，$\nu\leq M\omega$（$\mathbb{R}$，$\mathcal{A}$）$_1$ 包含 $\mathbf{1}+f$ 的一个左逆元。那么，对于所有 $z\in S_{\nu}$，$\rho_{1,\ \omega}\leq\rho_{1,\ \nu}\leq 1\leq\rho_{2,\ \nu}\leq\rho_{2,\ \omega}$ 和 $1_{\mathcal{A}}+f$（z）在 $\mathcal{A}$ 中均左可逆。因此，$S_{\nu}\subset D_{\circ}$ 此外，

$$r=\rho_{2,\eta}\leq\rho_{1,\nu}\leq 1\leq\rho_{2,\nu}\leq s=\rho_{2,\eta}$$

意味着

$$\lim_{x\to\infty}\eta(-x)^{-1/x}\leq\lim_{x\to\infty}\nu(-x)^{-1/x}\quad\text{and}\quad\lim_{x\to\infty}\eta(x)^{1/x}\geq\lim_{x\to\infty}\nu(x)^{1/x}.$$

因此，存在某个 $\delta > 0$，使得对所有 $|x| > \delta$， $\nu(x) \leq \eta(x)$。由引理 2.12， η 和 ν 在 $[-\delta, \delta]$ 上有界。因此，存在 $K_\nu \geq 1$，使得对所有 $|x| \leq \delta$， $\nu(x) \leq K_\nu \eta(x)$。所以，对所有 $x \in \mathbb{R}$，$\nu(x) \leq K_\nu \eta(x)$。证明完毕。□

注 6.3. 以下说明为何在某些情形下，我们无法得到给定链中包含给定函数之逆元的最小代数。

(i) 在定理 *6.1* 中， f 在 $\ell^p_\eta(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$ 中可能没有逆元。例如，考虑由 $f(0) = 2$、$f(1) = -1$ 给出、其余处为零的函数 $f \in \ell^1_\omega(\mathbb{Z})$，其中$\omega(n) = e^{|n|}$ $(n \in \mathbb{Z})$。其傅里叶变换为 $\widehat{f}(z) = 2 - z$ （对 $z \in \mathbb{T}$）。于是 $\mathbb{Z}$ 上的极大化权 η 定义为 $\eta(n) = 2^n$ $(n \geq 0)$ 以及 $\eta(n) = e^{-n}(n \leq 0)$。注意 $\frac{1}{f}$ 不在 $\ell^1_\eta(\mathbb{Z})$ 中。*(ii)* 类似地，在定理 *6.2* 中， $\mathbf{1}+f$ 在 $L^1_\eta(\mathbb{R}, \mathcal{A})_{\mathbf{1}}$ 中可能没有逆元。例如，考虑 $L^1_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 中的函数 $f(x) = -e^{-x}$ （对 $0 \leq x \leq 1$），其余处为 0，其中$\omega(x) = e^{2|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$。于是 $\mathbb{R}$ 上的极大化权 η 定义为 $\eta(x) = e^x(x \geq 0)$ 以及 $\eta(x) = e^{-2x}$ $(x \leq 0)$。注意函数 $\mathbf{1} + f$ 在$L^1_\eta(\mathbb{R}, \mathbb{C})_{\mathbf{1}}$ 中不可逆。

我们结合定理4.1 和定理4.2 与定理6.1，陈述关于一维 I 型和 II 型代数的两个推论。

推论 6.4。 设 $\mathcal{X} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \ell^{p_n}_{\omega_n}(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$ 是一个 *I*型代数，并设 $f \in \mathcal{X}$ 满足：对于所有 $z \in \mathbb{T}$，$\backsim f(z)$ 在 $\mathcal{A}$ 中左可逆（分别为右可逆、可逆）。此外，假设

(i) 对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $f \in \ell^{p_1}_{\omega_1}(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$， ω_n 均不可容许；以及(ii) $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 严格递增，或者 $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足：对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$1 \neq \rho_{1,\ \omega_{n+1}} < \rho_{1,\ \omega_n}$ 或 $\rho_{2,\ \omega_n} < \rho_{2,\ \omega_{n+1}} \neq 1$ 。

那么，存在定义在 $\mathbb{Z}$ 上的权族 $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$，

(i) $\eta_n \leq \omega_n$，(ii) 若 ω_n 为常数（非常数），则 η_n 为常数（非常数），(iii) 若 ω_n 可容许（不可容许），则 η_n 可容许（不可容许），(iv) $\eta_n \leq \eta_{n+1}$，并且(v) 若 $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是定义在 $\mathbb{Z}$ 上的权族，使得 $\nu_n \leq \omega_n$ 且 f 的左逆（分别为右逆、逆元）属于 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \ell^{p_n}_{\nu_n}(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$，那么对所有 $n \in \mathbb{N}$，有 $\nu_n \leq K_{\nu_n}\eta_n$，其中常数 $K_{\nu_n} \geq 1$ 依赖于 ν_n 。

推论 6.5。 设 $\mathcal{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ell^{p_n}_{\omega_n}(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$ 是一个 *II* 型代数，并设 $f \in \mathcal{X}$ 满足：对所有 $z \in \mathbb{T}$，$\backsim f(z)$ 在 $\mathcal{A}$ 中左可逆（分别为右可逆、可逆）。此外，假设

(i) ω_n 不是可容许的，并且对所有 $n \in \mathbb{N}$，$f \in \ell^{p_n}_{\omega_n}(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$ 成立；且(ii) $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是严格递增的，或者 $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足：对所有 $n \in \mathbb{N}$，$\rho_{1,\omega_n} < \rho_{1,\omega_{n+1}} \neq 1$ 或$1 \neq \rho_{2,\omega_{n+1}} < \rho_{2,\omega_n}$

那么存在一个定义在 $\mathbb{Z}$ 上的权族 $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$，

(i) $\eta_n \leq \omega_n$,(ii) 如果 ω_n 是常数（非常数），则 η_n 是常数（非常数），(iii) 如果 ω_n 是可容许（不可容许）的，则 η_n 是可容许（不可容许）的，(iv) $\eta_{n+1} \leq \eta_n$，并且

(v) 如果 $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是定义在 $\mathbb{Z}$ 上的权族，且 $\nu_n \le \omega_n$，并且 f 的一个左逆（分别地，右逆、逆元）属于 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ell^{p_n}_{\nu_n}(\mathbb{Z},\mathcal{A})$，那么对于所有 $n\in\mathbb{N}$，存在一个常数 $K_{\nu_n}\ge 1$，使得 $\nu_n \le K_{\nu_n}\eta_n$；该常数取决于 ν_n。

注 6.6。对于上述推论所需的进一步假设，第一项不能省略，因为它是存在满足所需条件的 $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的必要条件；第二项则确保所有 $\ell^{p_n}_{\eta_n}(\mathbb{Z},\mathcal{A})$ 彼此不同。两者共同确保 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \ell^{p_n}_{\eta_n}(\mathbb{Z},\mathcal{A})$ 和 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ell^{p_n}_{\eta_n}(\mathbb{Z},\mathcal{A})$ 确实分别是 *I* 型和 *II* 型代数，它们的作用如同相应代数链中不包含给定 f 的最大代数的作用。

7. Non-quasi analogues and concluding remarks

我们简要提及 $p>1$ 在一维情形下的情况。设 $1<p<\infty$，并令 p' 为其共轭指标，即 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$。权 ω 在 $^-\mathbb{Z}$ 上是一个 p-几乎单调代数权 [8]，如果满足以下条件：

(i) $\omega^{-p'}\star\omega^{-p'}\le\omega^{-p'}$ 和 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\omega(n)^{-p'}<\infty$。**(ii)** 如果 $\rho_{1,\ \omega}=1$，那么存在一个正常数 K，使得对于所有$-n,\ -k\in\mathbb{N}$，都有 $\omega(n)\le K\omega(n+k)$。**(iii)** 如果 $\rho_{2,\ \omega}=1$，那么存在一个正常数 K，使得对于所有$n,\ k\in\mathbb{N}_0$，都有 $\omega(n)\le K\omega(n+k)$。

(i) 中的第一个条件是确保 $\ell^p_\omega(\mathbb{Z},\ \mathcal{A})$ 成为代数所必需的（见 [29]），而第二个条件则蕴含包含关系 $\ell^p_\omega(\mathbb{Z},\ \mathcal{A})\subset\ell^1(\mathbb{Z},\ \mathcal{A})$，进而使得能够为 $f\in\ell^p(\mathbb{Z},\ \mathcal{A})$ 定义傅里叶变换。而条件 (ii) 和 (iii) 是构造下述定理以及后续定理中 p-几乎单调代数权 ν 所必需的。

定理 7.1。 *[11, 定理 2]* 设 $1<p<\infty,\omega$ 是$\frown$上的 p-几乎单调代数权，$\mathcal{A}$ 是含幺巴拿赫代数，且设 $f\in\ell^p_\omega(\mathbb{Z},\mathcal{A})$。若对于所有 $z\in\mathbb{T}$，$f(z)$ 在 $\mathcal{A}$ 中左可逆（分别地，右可逆、可逆），则存在 $\mathbb{Z}$ 上的 p-几乎单调代数权 ν，使得 $\nu\le\omega,\nu$ 可容许当且仅当 ω 可容许，并且 f 的左逆（分别地，右逆、逆元）属于 $\ell^p_\nu(\mathbb{Z},\mathcal{A})$。特别地，若 ω 是可容许权，则 f 的左逆（分别地，右逆、逆元）属于 $\ell^p_\omega(\mathbb{Z},\mathcal{A})$。

利用这一结果以及定理 4.1和定理4.2中使用的技巧，我们得到以下两个定理。由于常权，尤其是平凡权$\omega\equiv 1$，对于任何 $p>1$都不是 p-几乎单调代数权，因此我们附加一个假设。我们仅给出这些权的构造，其余细节均可容易验证。

定理 7.2。 设 $\mathcal{X}=\bigcap\ell^{p_n}_{\omega_n}(\mathbb{Z},\mathcal{A})$ 是一个 *I* 型代数，其中 $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $(1,\infty)$ 中的递减$_{n\in\mathbb{N}}$序列，并且对于所有 $n\in\mathbb{N}$，ω_n 都是一个 p_n-几乎单调代数权。此外，$\widehat{}$假设所有 ω_n 都是可容许的，或者都不可容许。若 $f\in\mathcal{X}$ 满足：对于所有 $z\in\mathbb{T}$，$f(z)$ 在 $\mathcal{A}$ 中是左可逆（分别为右可逆、可逆）的，则存在 $\mathbb{Z}$ 上的一个权族 $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得对于所有 $n\in\mathbb{N}$，

(i) $\nu_n\le K_n\omega_n$ 对某个 $K_n>1$，(ii) ν_n 是 p_n-几乎单调代数权，

(iii) ν_n 是可容许的（不可容许的），当且仅当 ω_n 是常数（不可容许的），(iv) $\nu_n \le \nu_{n+1}$，并且(v) f 的左逆（分别地，右逆、逆元）属于 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \ell^{p_n}_{\nu_n}(\mathbb{Z},\mathcal{A})$，后者是一个 I 型代数。

此外，当且仅当对于所有 $n \in \mathbb{N}$， $\mathcal{X}$ 是逆封闭的，且 ω_n 是可容许的 p_n-几乎单调代数权。

证明。 固定 $\gamma \in (0,1)$。令 $k \in \mathbb{N}$。那么，与定理 4.2 中一样，我们可以选取正实数 r_k, s_k，使得 $\rho_{1,\omega_k} \le r_k \le 1 \le s_k \le \rho_{2,\omega_k}$，并且对于所有 $z \in \Gamma(r_k, s_k)$， $f(z)$ 在 $\mathcal{A}$ 中左可逆。

我们考虑以下三种情形。

情形 *1*： 如果 $\rho_{1,\omega_k} = 1$ 且 $\rho_{2,\omega_k} > 1$，那么根据 [8, 引理 2]，，存在 $K_{k,1} > 1$，使得对于所有 $m < 0$， $\omega_k(m) \le \widetilde{\omega_k}(m) \le K_{k,1}\omega_k(m)$，其中 $\widetilde{\omega_k}(m) = \max\{\omega_k(l) : \text{对于所有 } m < 0$。此外，存在 $K_{k,2} > 1$，使得 $e^{|m|^\gamma} \le K_{k,2}\omega_k(m)$ 对于所有 $n \in \mathbb{N}_0$。令 $K_k = \max\{K_{k,1}, K_{k,2}\}$ 并定义

$$\nu_k(m) = \begin{cases} \widetilde{\omega_k}(m), & m < 0, \\ s_k^{\frac{m}{2}} e^{\frac{|m|^\gamma}{2}}, & m \ge 0. \end{cases}$$

情形 *2*： 设 $\rho_{1,\omega_k} < 1$ 且 $\rho_{2,\omega_k} = 1$。若 $\widetilde{\omega_k}(m) = \max\{\omega_k(l) : 0 \le l \le n\}$ 对所有 $m \in \mathbb{N}_0$均成立，则再次由 [8, 引理 2], 可知，存在 $K_{k,1} > 0$ 使得 $\omega_k(m) \le \widetilde{\omega_k}(m) \le M_{k,1}\omega_k(m)$ 对所有 $m \in \mathbb{N}_0$均成立。此外，存在一个常数 $K_{k,2} > 0$ 使得 $e^{|m|^\gamma} \le K_{k,2}\omega_k(m)$ 对所有 $m < 0$均成立。令 $K_k = \max\{K_{k,1}, K_{k,2}\}$ 并定义

$$\nu_k(m) = \begin{cases} r_k^{\frac{m}{2}} e^{\frac{|m|^\gamma}{2}}, & m < 0, \\ \widetilde{\omega_k}(m), & m \ge 0. \end{cases}$$

情形 *3*： 若 $\rho_{1,\omega_k} < 1 < \rho_{2,\omega_k}$，则存在某个 $K_k > 1$ 使得对所有$m \in \mathbb{Z}$， $e^{|m|^\gamma} \le K_k\omega_k(m)$ 均成立。定义

$$\nu_k(m) = \begin{cases} r_k^{\frac{m}{2}} e^{\frac{|m|^\gamma}{2}}, & m < 0, \\ s_k^{\frac{m}{2}} e^{\frac{|m|^\gamma}{2}}, & m \ge 0. \end{cases}$$

那么，无论如何， ν_k 是 p_k几乎单调代数权，定义在 $\mathbb{Z}$ 上，并且满足 $\nu_k \le K_k\omega_k$对某个 $K_k > 0$。根据假设，所有 ω_n 都不可容许，因此，利用定理4.1的技巧，我们可以选取 r_n， s_n 使得 $r_{n+1} \le r_n$ 且 $s_n \le s_{n+1}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立。此外，$\omega_n \le \omega_{n+1}$ 意味着 $\widetilde{\omega_n} \le \widetilde{\omega}_{n+1}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立。因此，$\nu_n \le \nu_{n+1}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立。由于这些权的构造方式与定理7.1 类似，结论由定理 7.1 得出。□

定理 7.3。 设 $\mathcal{X} = \bigcup \ell^{p_n}_{\omega_n}(\mathbb{Z},\mathcal{A})$ 是一个 II 型代数，其中 $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $(1,\infty)$ 中的递增序列，且对所有 $n \in \mathbb{N}$， ω_n 都是一个 p_n-几乎单调代数权。此外，假设所有 ω_n 均可容许，或者它们全都不可容许。若 $f \in \mathcal{X}$ 满足：对所有 $z \in \mathbb{T}$， $f(z)$在 $\mathcal{A}$ 中左可逆（分别为右可逆、可逆），则存在定义在 $\mathbb{Z}$ 上的权族 $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$,

(i) $\nu_n \le \omega_n$,(ii) ν_n 是 p_n-几乎单调代数权，(iii) ν_n 是可容许的（不可容许的），当且仅当 ω_n 是常数（不可容许的），(iv) $\nu_{n+1} \le \nu_n$，并且

(v) f 的左逆（分别地，右逆、逆元）属于 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ell^{p_n}_{\nu_n}(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$，这是一个 *II* 型代数。

此外， $\mathcal{X}$ 当且仅当以下族 $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的 p_n几乎单调代数权满足扩展 *GRS* 条件(1)时逆封闭。

Th以下是一些总结性评论以及供未来研究探讨的开放问题 .

注 *7.4.* 多维情形下没有极大化结果的原因，同样在于可容许权的定义经过了调整，详见注 *4.10*。事实上，第 *2.3* 节中的维纳定理各版本的证明依赖于巴拿赫代数的盖尔范德理论，而 $\ell^p_\omega(\mathbb{Z})$ 的盖尔范德空间被识别为 $\Gamma(\rho_{1,\omega},\rho_{2,\omega})$；但在高维情形下，这一点尚不完全清楚，也就是说， $\ell^p_\omega(\mathbb{Z}^2)$ 的盖尔范德空间可能大于 $\Gamma(\rho_{1,\omega}, \rho_{2,\omega}) \times \Gamma(\mu_{1,\omega}, \mu_{2,\omega})$，无穷维类比情形也同样如此。识别一个代数的盖尔范德空间本身就是一个重要问题。*Dedania* 和 *Goswami* *[13]* 曾尝试识别 $\ell^1_\omega(\mathbb{Z}^2)$ 的盖尔范德空间，但结果发现这一问题比所需的复杂得多。众所周知，若 ω 是 $\mathbb{Z}^d$ （或 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$）上的权且满足 *GRS* 条件，则它是 $\mathbb{T}^d$（或 $\mathbb{T}^\infty$）。这自然引出了以下开放问题，它们最终将完善本文所呈现的研究。

注 7.5。 对于 $p > 1$，没有最大化结果的原因在于，此处需要几乎单调代数权，而定理 *6.1*中的技巧会失效，因为得到的权可能不是几乎单调代数权。此外，没有多维类似物的原因是，对于不可容许的权ω ，我们尚不知道 $\ell^p_\omega(\mathbb{Z}^d)$ 的盖尔范德空间。因此，提出以下问题。

问题： 当 ω 是 $\mathbb{Z}^2$ （或 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$）上的一个不满足 GRS 条件的权时， $\ell^p_\omega(\mathbb{Z}^2)$（或 $\ell^p_\omega(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}})$）的盖尔范德空间能否表示为两个（或无限多个）环域的乘积?

如果上述问题的答案是否定的，那么可以进一步提出以下问题。

问题： 对于哪一类不可容许权， $\ell^p_\omega(\mathbb{Z}^2)$（或 $\ell^p_\omega(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}})$）的盖尔范德空间可以表示为两个（或无限多个）环域的乘积?

关于上述问题，已知若所考察的权可分解为各坐标上的权的乘积，则所需结论随即成立。

Statements and Declarations

致谢。 第一作者感谢印度国家高等数学委员会（NBHM）提供的研究资助（02011/39/2025/NBHM(R. P.)/R&D II/16090）。第二作者谨此感谢印度理工学院罗帕尔分校 ISIRD项目 9–551/2023/IITRPR/10229 提供的博士后奖学金。本研究部分得到印度政府科学技术部 FIST计划的支持，项目编号：SR/FST/MS–I/2018/22(C)。

经费。 本研究未获得任何经费支持。

利益冲突。 作者声明不存在需要披露的相关财务或非财务利益。

作者贡献。 所有作者贡献相同。

数据和材料的可用性。 本研究未使用数据 y.

伦理审批。不适用。

References

[1] A. G. Baskakov，抽象调和分析与逆矩阵元素的渐近估计，Mat. Zh. 52 (1992)，第 2 期，17–26。[2] ，逆算子矩阵元素的渐近估计与调和分析，Sib. Math. J. 38 (1997)，第 1 期，10–22。[3] Federico Bastianoni 和 Elena Cordero，局部紧阿贝尔群上的拟巴拿赫调制空间与局部化算子，Banach Journal of Mathematical Analysis 16 (2022)，1–71。[4] S. J. Bhatt、P. A. Dabhi 和 H. V. Dedania，Wiener–Lévy–Zelazko 定理和 Zelazko 定理的 Beurling 代数类比，Studia Math. 195 (2009)，第 3 期，219–225。[5] S. J. Bhatt 和 H. V. Dedania，Wiener 和 Lévy 关于绝对收敛傅里叶级数的经典定理的 Beurling 代数类比，Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 113 (2003)，第 2 期，179–182。[6] S. Bochner 和 R. S. Phillips，非交换赋范环上的绝对收敛傅里叶展开，Ann. of Math. 43 (1942)，第 3 期，409–418。[7] Scipio Cuccagna 和 Mirko Tarulli，离散 Schrödinger 方程驻波的渐近稳定性，$\mathbb{Z}$，SIAM Journal on Mathematical Analysis 41 (2009)，第 3 期，861–885。[8] P. A. Dabhi，傅里叶级数的加权 ℓ^p-收敛：Wiener 和 Lévy 定理的一个变体，Adv. Oper. Theory 5 (2020)，1832–1838。[9] ，关于傅里叶级数的 Wiener 和 Lévy 定理的二元 Beurling 代数类比，Proc. Amer. Math. Soc. 150 (2022)，第 3 期，997–1008。[10] P. A. Dabhi 和 K. B. Solanki，Wiener 和 Zelazko 定理的多元向量值 Beurling 代数类比，Commun. Korean Math. Soc. 40 (2025)，第 3 期，687–697。[11] ，Wiener 定理的向量值 Beurling 代数类比，Indian J. Pure Appl. Math. 56 (2025)，448–461。[12] ，某些算子代数及巴拿赫代数元素的 Wiener 型定理，J. Math. Sci. 290 (2025)，155–170。[13] H. V. Dedania 和 V. N. Goswami，$\mathbb{Z}_+^2$ 和 $\mathbb{Z}^2$上的离散 Beurling 代数的 Gel'fand 空间，Italian Journal of Pure and Applied Mathematics (2022)，第 47 期，1166–1182。[14] Y. Domar，基于某些交换巴拿赫代数的调和分析，Acta Math. 96 (1956)，1–66。[15] J. Fageot、M. Unser 和 J. P. Ward，超越 Wiener 引理：核卷积代数与数字滤波器的求逆，J. Fourier Anal. Appl. 25 (2019)，2037–2063。[16] Hans G. Feichtinger，局部紧群上的权函数，Osterreich. Akad. Wiss. Math.- Natur. Kl. Sitzungsber. II 188 (1979)，451–471。[17] C. Fernández、A. Galbis 和 J. Toft，矩阵代数的谱性质，Journal of Fourier Analysis and Applications 20 (2014)，第 2 期，362–383。[18] ，GRS 权的刻画及其在时频分析中的推论，Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications 3 (2015)，第 6 期，383–390。[19] I. Gel'fand、D. Raĭkov 和 G. Šilov，交换赋范环，Chelsea Publishing Co.，纽约，1964。[20] Loukas Grafakos，现代傅里叶分析，Springer，2008。[21] K. Gröchenig，Sjöstrand 类的时频分析，Rev. Mat. Iberoam. 22 (2006)，第 2 期，703–724。[22] ，时频分析中的权函数，《伪微分算子：偏微分方程与时频分析》，Fields Inst. Commun.，第 52 卷，Amer. Math. Soc.，Providence, RI，2007，第 343–366 页。[23] ，Wiener 引理：主题与变奏。谱不变性及其应用简介，《调和分析四门短期课程》，Springer，柏林，2010，第 175–234 页。[24] K. Gröchenig 和 A. Klotz，非交换逼近：逆封闭子代数与矩阵的非对角衰减，Constr. Approx. 32 (2010)，第 2 期，429–466。[25] Karlheinz Gröchenig、Christine Pfeuffer 和 Joachim Toft，矩阵代数与伪微分算子的拟巴拿赫代数的谱不变性，Forum Mathematicum 36 (2024)，第 5 期，1201–1224。[26] E. Kaniuth，交换巴拿赫代数教程，Graduate Texts in Mathematics，第 246 卷，Springer，2009。

[27] Lukas K¨ohldorfer 与 Peter Balazs，算子值矩阵巴拿赫代数的维纳对，J. Math. Anal. Appl. 549 (2025)，第2期，论文号 129525。[28] I. Krishtal，Wiener 引理：展览会上的图画，Rev. Uni´on Mat. Argent. 52 (2011)，61–79。[29] Yulia Kuznetsova 与 Carine Molitor-Braun，加权 L^p-代数的调和分析，Expo. Math. 30 (2012)，第2期，124–153。[30]D. E. Pelinovsky 与 A. Stefanov，一维离散 Schr¨odinger 方程的谱理论与色散估计，Journal of Mathematical Physics 49 (2008)，第11期，113501。[31] Holger Rauhut，拟巴拿赫空间的相轨道空间理论，Studia Mathematica 180 (2007)，第3期，237–253。[32]　　，相对于拟巴拿赫空间的维纳拼接空间，Colloquium Mathematicum 109 (2007)，第2期，345–362。[33] Maximilian Reich、Michael Reissig 与 Winfried Sickel，次指数权调制空间上的非解析叠加结果，伪微分算子及其应用杂志 7 (2016)，365–409。[34] C. E. Shin 与 Q. Sun，Wiener 引理：局部化及各种方法，Appl. Math. A J. Chin. Univ. 28 (2013)，第4期，465–484。[35] Q. Sun，具有多项式非对角衰减的无限矩阵的 Wiener 引理，Comptes Rendus Mathematique 340 (2005)，第8期，567–570。[36]　　,无限矩阵的 Wiener 引理，Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007)，第7期，3099–3123。[37]　　,无限矩阵的 Wiener 引理 II，Constr. Approx. 34 (2011)，209–235。[38] N. Wiener，陶伯定理，Ann. of Math. 33 (1932)，1–100。[39] A. V. Zagorodnyuk 与 M. A. Mitrofanov，无限维巴拿赫空间上维纳定理的一个类似结果（俄文。俄文摘要），Mat. Zametki 97 (2015)，第2期，191–202。[40] W. Zelazko，拓扑代数选题，讲义系列，第31号，奥胡斯大学，1971。

Department of Basic Sciences, Institute of Infrastructure Technology Research and Management (IITRAM), Maninagar (East), Ahmedabad - 380026, Gujarat, India电子邮箱地址: lightatinfinite@gmail.com, prakashdabhi@iitram.ac.inDepartment of Mathematics, Indian Institute of Technology Ropar, Rupnagar, Punjab -140001, India电子邮箱地址: karishsolanki002@gmail.com, staff.karishman.solanki@iitrpr.ac.in