arXiv:2602.19589v1 [math.OA] 23 Feb 2026

编码量子群对偶性的巴拿赫代数

JASON CRANN[1] 与 MATTHIAS NEUFANG[1,2]

摘要。我们为任意局部紧量子群 $\mathbb{G}$ 引入并研究迹类算子空间 $\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0$ 的迹零子空间上的一种新的巴拿赫代数结构；它通过 $\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))\widehat{}$ 上两个对偶乘积的混合李型乘积 $\circledast$ 定义，这两个乘积源自 $\mathbb{G}$ 和 $\mathbb{G}$ 的余乘积的典范扩张。令人惊讶的是，这一新乘积确实是结合的，而其根源恰恰在于后两个乘积的对偶性。特别地，这为 $M_d(\mathbb{C})$ 中的迹零矩阵赋予了新的忠实结合乘积。在确立 $\circledast$ 的一些基本性质之后，我们证明，单个代数 $(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))0, \circledast)$ 融合了 $\mathbb{G}$ 和 $\widehat{\mathbb{G}}$ 的性质；它对一大类量子群是忠实的，并将 $M_{cb}^r(L^1(\mathbb{G}))$ 和 $M_{cb}^r(L^1(\widehat{\mathbb{G}}))$ 分别编码为 $\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))$ 上的左、右完全有界模映射。最后，我们展示了局部紧群 G 上迹零核算子 $\mathrm{N}(L^p(G))_0$ 的类似乘积，以及 $p \in (1,\infty)$。以 [7], 为基础，我们的工作提出了一种发展局部紧量子群理论的 L^p 版本的思路。

1. 引言

对于任意局部紧量子群 $\mathbb{G}$， $L^\infty(\mathbb{G})$ 和 $L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$ 上（右）余乘积的典范扩张的预对偶，在迹类 $\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))$ 上赋予两种巴拿赫代数结构。这里将这些乘积记为 $\star$ 和 $\bullet$，它们分别提升了 $L^1(\mathbb{G})$ 和 $L^1(\widehat{\mathbb{G}})$ 的卷积乘积。这些乘积已从多个角度得到研究，包括巴拿赫代数同调 [4–6, 19, 26], 完全有界乘子 [14, 15, 23],量子群正则性 [16] 和拓扑中心 [13, 17]。

$\widehat{}$虽然 $\star$ 和 $\bullet$ 分别体现了 $\mathbb{G}$ 和 $\mathbb{G}$的基本性质，但这些乘积本身是退化的，具体而言，对于任意 $\tau \in L^\infty(\mathbb{G})_\perp$ 和 $\rho \in \mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))$，均有 $\rho \star \tau = 0$ （$\bullet$ 的情形类似）。本文出乎意料地证明，以下混合李型乘积

$$\rho \circledast \tau := \frac{1}{2}(\rho \star \tau - \tau \bullet \rho)$$

在 $\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0$ 的迹零元素子空间上赋予一种结合的（！）、完全压缩的巴拿赫代数结构。我们证明，对于一大类局部紧量子群 $\mathbb{G}$，乘积 $\circledast$ 是（左、右）忠实的，并且 $\mathbb{G}$ 与 $\widehat{\mathbb{G}}$ 的共同性质可由单个代数 $(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0, \circledast)$ 刻画。例如，我们在定理 4.11 中证明，$(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0, \circledast)$ 存在有界近似单位，当且仅当 $\mathbb{G}$ 与 $\mathbb{G}$ 都是余可和的。

乘积 $\star$ 与 $\bullet$ 能够确保 $\circledast$ 满足结合律的条件是在 $\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))_0$ 上的相互交换性（精确定义见命题 4.2 ）。我们通过在迹为零的核算子空间 $\mathcal{N}(L^p(G))_0$ 上建立一个与 $\circledast$ 类似的乘积，证明这种相互交换性并非仅存在于希尔伯特空间情形；对于局部

2010 数学学科分类号。46L67，46L07；次级分类号 46L89，43A99。关键词与短语。局部紧量子群，完全有界乘子。

紧群 G，当 $p \in (1,\infty)$（见第 6 节）。这一结果运用了 Neufang [23]和 Daws-Spronk [7]开发的技术，并在此基础上作了进一步发展。

对于任意局部紧量子群 $\mathbb{G}$，已确立的是，$M_{cb}^r(L^1(\mathbb{G}))$ 与 $M_{cb}^r(L^1(\widehat{\mathbb{G}}))$ 均作为完全有界左 $\star$ 模映射（相应地为 ● 模映射）完全等距地表示在 CB(T ($L^2(\mathbb{G})$)) 中。具体而言，

$$M_{cb}^r(L^1(\mathbb{G})) \cong {}_{\star}\mathcal{CB}(\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))) \quad \text{and} \quad M_{cb}^r(L^1(\widehat{\mathbb{G}})) \cong {}_{\bullet}\mathcal{CB}(\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G})))$$

反乘法地 [16, 定理 4.1]。我们证明，T ($L^2(\mathbb{G})$) 以典范方式成为 (T ($L^2(\mathbb{G})$)$_0$, $\circledast$)-双模，并且对于一大类量子群 $\mathbb{G}$，上述表示的像诱导完全等距同构

$$M_{cb}^r(L^1(\mathbb{G})) \cong {}_{\circledast}\mathcal{CB}(\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))) \quad \text{and} \quad M_{cb}^r(L^1(\widehat{\mathbb{G}})) \cong \mathcal{CB}(\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G})))_{\circledast}.$$

换言之，$L^1(\mathbb{G})$ 与 $L^1(\widehat{\mathbb{G}})$ 的完全有界乘子可分别视为 $\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))$ 在同一乘积下的左、右完全有界模映射（见定理5.2 的精确陈述）。

本文的结构如下。在第 2 节回顾必要的预备知识之后，我们在第 3 节引入巴拿赫代数 (T ($L^2(\mathbb{G})$)$_0$, $\circledast$)，并研究其一些基本性质。我们在第 4 节刻画有界近似单位的存在性，并在第 5 节建立前述完全有界乘子的表示。在第 6 节，我们研究局部紧群 G 和 $p \in (1,\infty)$ 上迹为零的核算子 N ($L^p(G)$)$_0$ 上与之类似的乘积 $\circledast$。

2. 预备知识

2.1. 完全压缩巴拿赫代数。 完全压缩巴拿赫代数 A 是一种巴拿赫代数，其乘法可延拓为完全压缩映射$m_A : A\widehat{\otimes}A \to A$，其中算子空间射影张量积为 $\widehat{\otimes}$。等价地，

$$\|[a_{i,j}b_{k,l}]\|_{mn} \leq \|[a_{i,j}]\|_m \|[b_{k,l}]\|_n, \quad [a_{i,j}] \in M_m(A),\ [b_{k,l}] \in M_n(A).$$

若算子空间 X 是左算子 A-模，则它是一个左巴拿赫 A-模，且模映射 $m_X : A\widehat{\otimes}X \to X$ 是完全压缩的。若对每个非零的 $x \in X$，都存在 $a \in A$ 使得 $a \cdot x \neq 0$，则称 X 为忠实的；若 $A \cdot X = X$，则称 X 为本质的，其中 $\cdot$ 表示闭线性张成。

任意左算子 A-模的算子空间对偶 X^* 以规范方式成为右算子A-模:

$$\langle f \cdot a, x\rangle = \langle f, a \cdot x\rangle, \quad f \in X^*,\ a \in A,\ x \in X. \tag{1}$$

右模的情形类似。

2.2. 局部紧量子群。A局部紧量子群是一个四元组 $\mathbb{G} = (L^\infty(\mathbb{G})\ \Gamma,\ \varphi,\ \psi)$，其中 $L^\infty(\mathbb{G})$是一个带有余乘法$\Gamma : L^\infty(\mathbb{G}) \to L^\infty(\mathbb{G})\otimes L^\infty(\mathbb{G})$的Hopf-冯诺依曼代数，而 φ 和 ψ 分别是 $L^\infty(\mathbb{G})$ 上的固定左、右Haar权 [20, 21]。在全文中，我们采用权理论中的以下标准记号

$$\mathcal{M}_\varphi^+ := \{x \in L^\infty(\mathbb{G})^+ : \varphi(x) < \infty\}, \quad \mathcal{N}_\varphi := \{x \in L^\infty(\mathbb{G}) : \varphi(x^*x) < \infty\}.$$

众所周知，N$_\varphi$ 是 $L^\infty(\mathbb{G})$中的一个左理想，而M$_\varphi$:= span$\{x^*y : x,\ y \in$ N$_\varphi\}$ =span M$_\varphi^+$ 是 $L^\infty(\mathbb{G})$中的一个 *-子代数 [28]。右 Haar 权 ψ的情形也类似。

对于每个局部紧量子群 $\mathbb{G}$，都存在一个左基本酉算子 W，作用于 $L^2(\mathbb{G}, \varphi) \otimes L^2(\mathbb{G}, \varphi)$；以及一个右基本酉算子 V，作用于 $L^2(\mathbb{G}, \psi) \otimes L^2(\mathbb{G}, \psi)$，它们通过以下方式实现余乘法 Γ

$$\Gamma(x) = W^*(1 \otimes x)W = V(x \otimes 1)V^*, \quad x \in L^\infty(\mathbb{G}).$$

这两个酉算子都满足五边形关系；也就是说，

$$W_{12}W_{13}W_{23} = W_{23}W_{12} \quad \text{and} \quad V_{12}V_{13}V_{23} = V_{23}V_{12}. \tag{2}$$

为简便起见，本文中我们用 $L^2(\mathbb{G})$ 表示 $L_2(\mathbb{G}, \varphi)$。存在一个严格正算子 δ，其与 $L^\infty(\mathbb{G})$ 相伴，称为模元，满足 $\psi(x) = \varphi(\delta^{1/2} x \delta^{1/2}), \quad x \in \mathfrak{M}_\psi$。

令 $L^1(\mathbb{G})$ 表示 $L^\infty(\mathbb{G})$ 的预对偶。则 Γ 的前伴随在 $L^1(\mathbb{G})$ 上诱导出一种结合的完全压缩乘法，定义为

$$\star : L^1(\mathbb{G}) \widehat{\otimes} L^1(\mathbb{G}) \ni f \otimes g \mapsto f \star g = \Gamma_*(f \otimes g) \in L^1(\mathbb{G}).$$

乘法 $\star$ 是从 $L^1(\mathbb{G}) \widehat{\otimes} L^1(\mathbb{G})$ 到 $L^1(\mathbb{G})$ 的完全商映射，这意味着

$$\langle L^1(\mathbb{G}) \star L^1(\mathbb{G}) \rangle = L^1(\mathbb{G}),$$

其中，与上文相同，$\cdot$ 表示闭线性张成。

$L^1(\mathbb{G})$ 上的典范 $L^\infty(\mathbb{G})$ 双模结构定义为

$$f \star x = (\mathrm{id} \otimes f)\Gamma(x) \quad \text{and} \quad x \star f = (f \otimes \mathrm{id})\Gamma(x)$$

对于 $x \in L^\infty(\mathbb{G})$ 和 $f \in L^1(\mathbb{G})$。$L^\infty(\mathbb{G})$ 上的左不变平均是一个态 $m \in L^\infty(\mathbb{G})^*$，满足

$$\langle m, x \star f \rangle = \langle f, 1 \rangle \langle m, x \rangle, \quad x \in L^\infty(\mathbb{G}), \ f \in L^1(\mathbb{G}).$$

右不变平均和双边不变平均的定义类似。若存在 $L^\infty(\mathbb{G})$ 上的左不变平均，则称局部紧量子群$\mathbb{G}$ 是可和的。已知$\mathbb{G}$ 是可和的，当且仅当存在右不变平均（等价地，双边不变平均）。若 $L^1(\mathbb{G})$ 有界左近似单位（等价地，有界右近似单位或双边近似单位），则称 $\mathbb{G}$ 为余可和的。若 $L^1(\mathbb{G})$ 有单位，则称 $\mathbb{G}$ 为离散的；此时将$L^1(\mathbb{G})$记为 $\ell^1(\mathbb{G})$。

对于一般情形 $\mathbb{G}$，左正则表示 $\lambda : L^1(\mathbb{G}) \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{G}))$ 定义为

$$\lambda(f) = (f \otimes \mathrm{id})(W), \quad f \in L^1(\mathbb{G}),$$

并且是从 $L^1(\mathbb{G})$到 $\mathrm{B}(L^2(\mathbb{G}))$的单射、完全压缩同态。于是，$L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}) := \{\lambda(f) : f \in L^1(\mathbb{G})\}''$是与对偶量子群 $\widehat{\mathbb{G}}$相关联的冯·诺依曼代数。类似地，我们有右正则表示 $\rho : L^1(\mathbb{G}) \to \mathrm{B}(L^2(\mathbb{G}))$，其定义为

$$\rho(f) = (\mathrm{id} \otimes f)(V), \quad f \in L^1(\mathbb{G}),$$

它也是从 $L^1(\mathbb{G})$到 $\mathrm{B}(L^2(\mathbb{G}))$的单射、完全压缩同态。于是，$L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}') := \{\rho(f) : f \in L^1(\mathbb{G})\}''$是与量子群 $\widehat{\mathbb{G}}'$相关联的冯·诺依曼代数。因此，$L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}') = L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})'$和 $L^\infty(\mathbb{G}) \cap L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}) = L^\infty(\mathbb{G}) \cap L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}') = \mathbb{C}1$[30, 命题 3.4]。对偶量子群 $\widehat{\mathbb{G}}$ 的左、右基本酉元由下式给出

$$\widehat{W} = \sigma W^* \sigma, \quad \widehat{V} = (J \otimes J)W(J \otimes J), \tag{3}$$

其中 $\sigma : L^2(\mathbb{G}) \otimes L^2(\mathbb{G}) \to L^2(\mathbb{G}) \otimes L^2(\mathbb{G})$ 是翻转映射，而 J 是由左 Haar 权 φ 诱导的模共轭。对偶左 Haar 权 $\widehat{\varphi}$ 在.....上的 GNS 希尔伯特空间

$L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$ 可以与 $L^2(\mathbb{G})$ 等同。在这种情况下，由左 Haar 权 φ 和 $\widehat{\varphi}$ 产生的模共轭之积定义了作用于 $L^2(\mathbb{G})$ 上的酉算子 $U := \widehat{J}J$，它通过 $\rho(f) = U\lambda(f)U^*$, $f \in L^1(\mathbb{G})$ intertwining 左正则表示和右正则表示。在基本酉元的层面，这一关系变为

$$V = \sigma(1 \otimes U)W(1 \otimes U^*)\sigma. \tag{4}$$

方程（4）和（3）使我们能够将五边形关系解释为交换关系介于 $\mathbb{G}$与 $\widehat{\mathbb{G}}$:

$$\widehat{W}_{23}W_{13} = W_{13}\widehat{W}_{23}W_{12}, \quad \widehat{V}_{12}V_{13} = V_{13}\widehat{V}_{12}\widehat{W}^*_{23}. \tag{5}$$

若 G 是局部紧群，我们令 $\mathbb{G}_a = (L^\infty(G)\ \Gamma_a, \varphi_a, \psi_a)$表示与交换冯·诺依曼代数 $L^\infty(G)$相关联的交换量子群，其中余乘法由 $\Gamma_a(f)(s,t) = f(st)$给出，且 φ_a与 ψ_a分别是关于左哈尔测度和右 Haar 测度的积分。此时的基本酉元由下式给出

$$W_a\xi(s,t) = \xi(s, s^{-1}t), \quad V_a\xi(s,t) = \xi(st,t)\Delta(t)^{1/2}, \quad \xi \in L^2(G \times G). \tag{6}$$

$\mathbb{G}_a$的对偶 $\widehat{\mathbb{G}}_a$是余交换量子群 $\mathbb{G}_s = (VN(G)\ \Gamma_s, \varphi_s, \psi_s)$，其中$VN(G)$是具有余乘法 $\Gamma_s(\lambda(t)) = \lambda(t) \otimes \lambda(t)$的左群冯·诺依曼代数，且 $\varphi_s = \psi_s$ 是Haagerup 的 Plancherel 权重。于是 $L^1(\mathbb{G}_a)$是通常的群卷积代数 $L^1(G)$，而 $L^1(\mathbb{G}_s)$是傅里叶代数 $A(G)$。已知每个交换局部紧量子群都具有形式 $\mathbb{G}_a$ [27, 定理 2]。由对偶性，每个余交换局部紧量子群都具有形式 $\mathbb{G}_s$。

对于一般的 $\mathbb{G}$，我们令 $C_0(\mathbb{G}) := \overline{\lambda(L^1(\widehat{\mathbb{G}}))}^{\|\cdot\|}$ 表示 $\mathbb{G}$的约化量子群 C^*-代数。这里，

$$\hat{\lambda}(\hat{f}) = (\hat{f} \otimes \mathrm{id})(\widehat{W}), \quad \hat{f} \in L^1(\widehat{\mathbb{G}}),$$

其中 $\widehat{W} = \sigma W^* \sigma$ 是 $\mathbb{G}$ 的左基本酉算子，而 σ 是作用于 $L^2(\mathbb{G}) \otimes L^2(\mathbb{G})$ 上的翻转映射。算子对偶 $M(\mathbb{G}) := C_0(\mathbb{G})^*$ 是一个完全压缩巴拿赫代数，并通过映射 $L^1(\mathbb{G}) \ni f \mapsto f|_{C_0(\mathbb{G})} \in M(\mathbb{G})$ 将 $L^1(\mathbb{G})$ 包含为范数闭双边理想。

对于局部紧量子群 $\mathbb{G}$，我们分别用 R 和 $(\tau_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 表示 $\mathbb{G}$ 的酉反粒子和缩放群。酉反粒子满足

$$(R \otimes R) \circ \Gamma = \Sigma \circ \Gamma \circ R, \tag{7}$$

其中 $\Sigma : L^\infty(\mathbb{G}) \otimes L^\infty(\mathbb{G}) \to L^\infty(\mathbb{G}) \otimes L^\infty(\mathbb{G})$ 表示翻转映射。$\mathbb{G}$ 的反粒子为 $S = R\tau_{-\frac{i}{2}}$，且它是作用于 $L^\infty(\mathbb{G})$ 上的闭稠密定义算子，其定义域记为 $\mathrm{D}(S)$。若量子群 $\mathbb{G}$ 满足 $S = R$, 且模元 δ 隶属于 $L^\infty(\mathbb{G})$ 的中心，则称其为***Kac*** 代数。在这种情况下，$\widehat{\mathbb{G}}$ 也是 Kac 代数。

3. 迹类上的对偶乘积

设 $\mathbb{G} = (L^\infty(\mathbb{G})\ \Gamma,\ \varphi,\ \psi)$ 是一个局部紧量子群。$\mathbb{G}$的右基本幺正元 V 诱导出一个余结合余乘法

$$\Gamma^r : \mathcal{B}(L^2(\mathbb{G})) \ni T \mapsto V(T \otimes 1)V^* \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{G})) \overline{\otimes} \mathcal{B}(L^2(\mathbb{G})),$$

而将 Γ^r 限制到 $L^\infty(\mathbb{G})$，即可得到 $L^\infty(\mathbb{G})$ 上的原始余乘法 Γ。Γ^r 的前伴随在 $\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))$ 上诱导出一种结合的完全压缩乘法，

定义为

$$\star : \mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))\widehat{\otimes}\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G})) \ni \omega \otimes \tau \mapsto \omega \star \tau = \Gamma^r_*(\omega \otimes \tau) \in \mathcal{T}(L^2(\mathbb{G})).$$

由于 Γ^r 是完全等距映射，因此 Γ^r_* 是完全商映射，所以我们有

$$\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G})) = \langle \mathcal{T}(L^2(\mathbb{G})) \star \mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))\rangle. \tag{8}$$

已知 $(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G})), \star)$ 总是左忠实的，当且仅当 $\mathbb{G}$ 是平凡的时才是右忠实的（参见 [14]）。根据 [14, 引理 5.2], , $L^\infty(\mathbb{G})$ 在 $\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))$ 中的预零化子 $L^\infty(\mathbb{G})_\perp$ 是 $(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G})), \star)$ 的范数闭双边理想，并且完全商映射

$$\pi : \mathcal{T}(L^2(\mathbb{G})) \ni \omega \mapsto f = \omega|_{L^\infty(\mathbb{G})} \in L^1(\mathbb{G}) \tag{9}$$

是从 $(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G})), \star)$ 到 $L^1(\mathbb{G})$ 上的完全压缩代数同态。因此，我们有完全等距巴拿赫代数同一

$$(L^1(\mathbb{G}), \star) \cong (\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G})), \star)/L^\infty(\mathbb{G})_\perp.$$

这使我们能够将 $(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G})), \star)$ 视为 $(L^1(\mathbb{G}), \star)$ 的提升。

例 3.1。 设 $\mathbb{G}_a = (L^\infty(G), \Gamma_a, \varphi_a, \psi_a)$ 是一个交换局部紧量子群。那么，如 [23], 所示，我们有

$$\omega \star_a \tau = \int_G \rho(s)^* \omega \rho(s) \pi_a(\tau)(s)$$

对于任意 $\omega, \tau \in \mathrm{T}(L^2(G))$。因此，在交换情形下，我们可以将 $\star_a$ 视为从 $L^1(G)$ 到 $\mathrm{T}(L^2(G))$ 的卷积提升。

例 3.2。 设 $\mathbb{G}_s = (VN(G), \Gamma_s, \varphi_s)$ 是一个余交换量子群。由方程（3）和（6）可知，右基本幺正元 $V_s = W_a$。于是，对于任意$\rho, \tau \in \mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))$ 和 $T \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{G}))$

$$\begin{aligned}
\langle \rho \star_s \tau, T\rangle &= \langle \rho \otimes \tau, V_s(T \otimes 1)V_s^*\rangle \\
&= \langle \rho \otimes \tau, W_a(T \otimes 1)W_a^*\rangle \\
&= \langle W_a^*(\rho \otimes \tau)W_a, T \otimes 1\rangle \\
&= \langle (\mathrm{id} \otimes \mathrm{tr})W_a^*(\rho \otimes \tau)W_a, T\rangle.
\end{aligned}$$

假设 G 是离散的。那么利用 $\ell^2(G)$的典范正交归一基 $(\delta_s)_{s\in G}$，我们得到

$$\begin{aligned}
\langle (\rho \star_s \tau)\delta_t, \delta_s\rangle &= \sum_{r\in G} \langle W_a^*(\rho \otimes \tau)W_a\delta_t \otimes \delta_r, \delta_s \otimes \delta_r\rangle \\
&= \sum_{r\in G} \langle (\rho \otimes \tau)W_a\delta_t \otimes \delta_r, W_a\delta_s \otimes \delta_r\rangle \\
&= \sum_{r\in G} \langle (\rho \otimes \tau)\delta_t \otimes \delta_{tr}, \delta_s \otimes \delta_{sr}\rangle \\
&= \langle \rho\delta_t, \delta_s\rangle \sum_{r\in G} \langle \tau\delta_{tr}, \delta_{sr}\rangle \\
&= \langle \rho\delta_t, \delta_s\rangle \sum_{r\in G} \langle \lambda(s^{-1})\tau\lambda(t)\delta_r, \delta_r\rangle \\
&= \langle \rho\delta_t, \delta_s\rangle \mathrm{tr}(\lambda(s^{-1})\tau\lambda(t)) \\
&= \langle \rho\delta_t, \delta_s\rangle \mathrm{tr}(\tau\lambda(ts^{-1})) \\
&= \langle ([\mathrm{tr}(\tau\lambda(ts^{-1}))]_{s,t} \circ_S \rho)\delta_t, \delta_s\rangle,
\end{aligned}$$

其中$\bigcirc_S$表示（逐项的）舒尔积。

由于对于任意局部紧量子群 $\mathbb{G}$，$L^2(\mathbb{G}) = L^2(\widehat{\mathbb{G}})$，将上述构造应用于 $L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$ 上的余乘法 $\widehat{\Gamma}$，可得到一个<样式 id='9'>对偶 乘积

$$\bullet : \mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))\widehat{\otimes}\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G})) \ni \omega \otimes \tau \mapsto \omega \bullet \tau = \widehat{\Gamma}_*^r(\omega \otimes \tau) \in \mathcal{T}(L^2(\mathbb{G})).$$

从两者提升卷积 $L^1(\mathbb{G})$ 和 $L^1(\widehat{\mathbb{G}})$ 到 $\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))$ 使我们能够研究$\widehat{\ }$的性质以及 $\mathbb{G}$ 和 $\mathbb{G}$ 之间的相互作用，置于 单个空格中。在 [19], 中展示了两个重要的相互作用，我们将利用它们来证明李型乘积的结合律。

命题 3.3。 [19] 设 $\mathbb{G}$ 是一个局部紧量子群。则对于每个 ρ、ω、$\tau \in \mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))$，有

$$\rho \star (\omega \bullet \tau) = \tau(1)\rho \star \omega, \quad \rho \bullet (\omega \star \tau) = \tau(1)\rho \bullet \omega, \tag{10}$$

and

$$(\rho \star \omega) \bullet \tau = (\rho \bullet \tau) \star \omega. \tag{11}$$

注意，迹 $\mathrm{tr} : \mathrm{T}(L^2(\mathbb{G})) \to \mathbb{C}$ 对于两个乘积都是可乘的 .

现在我们推导对偶基本酉算子之间的一个关系，该关系将导出一个联系对偶迹类乘积的具体公式。令 $m_\star : \mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))\widehat{\otimes}\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G})) \to \mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))$ 表示乘法，$m_\bullet$ 同理。

命题 3.4。 令 $\mathbb{G}$ 为一个局部紧量子群。存在一个酉算子 $u \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{G}))$，使得 $\widehat{V} = \sigma WV(1 \otimes u)$。因此，

$$m_\bullet = m_\star \circ \mathrm{Ad}(W^*) \circ \Sigma. \tag{12}$$

$\widehat{\ }$当 $\mathbb{G}$ 是一个幺模 *Kac* 代数且 φ 是迹时，我们有 $u = U = JJ$。

证明。 固定 $x \in L^\infty(\mathbb{G})$ 和 $\widehat{x} \in L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$。于是

$$\begin{aligned}
\widehat{V}(x\widehat{x} \otimes 1)\widehat{V}^* &= (x \otimes 1)\widehat{\Gamma}(\hat{x}) \\
&= \sigma W\Gamma(x)W^*\sigma\widehat{\Gamma}(\hat{x}) \\
&= \sigma W\Gamma(x)W^*\sigma(\widehat{W}^*(1 \otimes \widehat{x})\widehat{W}) \\
&= \sigma W\Gamma(x)(\widehat{x} \otimes 1)\sigma\widehat{W} \\
&= \sigma WV(x\widehat{x} \otimes 1)V^*W^*\sigma.
\end{aligned}$$

由 $L^\infty(\mathbb{G})L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$ 在 $\mathrm{B}(L^2(\mathbb{G}))$ [29, 命题 2.5], 中的弱*稠密性可知，

$$\widehat{V}(T \otimes 1)\widehat{V}^* = \sigma WV(T \otimes 1)V^*W^*\sigma, \quad T \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{G})),$$

这意味着存在一个（必然唯一的酉算子）元素 $u \in \mathrm{B}(L^2(\mathbb{G}))$，使得$\widehat{V} = \sigma WV(1 \otimes u)$。在余乘法层面上，这意味着

$$\widehat{\Gamma}^r(T) = \sigma WV(1 \otimes u)(T \otimes 1)(1 \otimes u)^*V^*W^*\sigma = \sigma W\Gamma^r(T)W^*\sigma, \quad T \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{G})),$$

也就是说，$\widehat{\Gamma}^r = \Sigma \bigcirc \mathrm{Ad}(W) \bigcirc \Gamma^r$。取前伴随可得，$m_\bullet = m_\star \bigcirc \mathrm{Ad}(W^*) \bigcirc \Sigma$。

最后，假设 $\mathbb{G}$ 是一个幺模 Kac 代数，且 φ 是迹的。我们将通过直接证明 $\widehat{V} = \sigma WV(1 \otimes U)$来说明，$u$必然是 $U = \widehat{J}J$。

设 a，b，c，$d \in \mathrm{N}_\varphi$。利用关系 $\widehat{V} = (J \otimes J)W(J \otimes J)$，我们有

$$\langle V(1 \otimes U)\widehat{V}^*\sigma\Lambda_\varphi(a) \otimes \Lambda_\varphi(b), V\Lambda_\varphi(c) \otimes \Lambda_\varphi(d)\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle (1\otimes U)\widehat{V}^*\sigma\Lambda_\varphi(a)\otimes\Lambda_\varphi(b), \Lambda_\varphi(c)\otimes\Lambda_\varphi(d)\rangle \\
&= \langle (J\otimes\widehat{J})W^*(\Lambda_\varphi(b^*)\otimes\Lambda_\varphi(a^*)), \Lambda_\varphi(c)\otimes\Lambda_\varphi(d)\rangle \\
&= \langle \Lambda_\varphi(c^*)\otimes\Lambda_\varphi(R(d^*)), W^*(\Lambda_\varphi(b^*)\otimes\Lambda_\varphi(a^*))\rangle \\
&= \langle \Lambda_\varphi(c^*)\otimes\Lambda_\varphi(R(d^*)), \Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(\Gamma(a^*)(b^*\otimes 1))\rangle \\
&= (\varphi\otimes\varphi)((b\otimes 1)\Gamma(a)(c^*\otimes R(d^*))) \\
&= R(d^*)\cdot\varphi((\varphi\otimes\mathrm{id})(\Gamma(a)(c^*b\otimes 1))) \\
&= R(d^*)\cdot\varphi(R((\varphi\otimes\mathrm{id})((a\otimes 1)\Gamma(c^*b)))) \quad ([20,\ \text{Proposition 5.24}]) \\
&= (\varphi\otimes\varphi)((a\otimes d^*)\Gamma(c^*b)) \\
&= (\varphi\otimes\varphi)((1\otimes d^*)\Gamma(c^*b)(a\otimes 1)) \\
&= \langle \Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(\Gamma(b)(a\otimes 1)), \Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(\Gamma(c)(1\otimes d))\rangle \\
&= \langle W^*\Lambda_\varphi(a)\otimes\Lambda_\varphi(b), V\Lambda_\varphi(c)\otimes\Lambda_\varphi(d)\rangle.
\end{aligned}
$$

由此可得 $W^* = V(1\otimes U)\widehat{V}^*\sigma$，等价地，$\widehat{V} = \sigma WV(1\otimes U)$。

□

注 3.5. 对于更一般的量子群 $\mathbb{G}$，恒等式 $\widehat{V} = \sigma WV(1\otimes U)$ 也可能成立。

4. 编码量子群对偶性的李／乔丹乘积

在本节中，除非另有说明，$\mathbb{G}$ 表示一个局部紧量子群。现在，我们利用 $\star$ 及其对偶 ●，在 $\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))$ 上定义乔丹／李型乘积。下文中，我们令 $\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0 := \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$。

The定理 4.1. 映射 $\circledast, \circledast^+ : \mathcal{T}(L^2(\mathbb{G})) \times \mathcal{T}(L^2(\mathbb{G})) \to \mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))$ 定义如下

$$\rho\circledast\tau := \frac{1}{2}(\rho\star\tau - \tau\bullet\rho), \quad \rho,\tau\in\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G})), \tag{13}$$

$$\rho\circledast^+\tau := \frac{1}{2}(\rho\star\tau + \tau\bullet\rho), \quad \rho,\tau\in\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G})), \tag{14}$$

是双线性的，并在$\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))_0$上定义结合的完全压缩巴拿赫代数乘积。

证明。我们 首先验证 $\circledast$ 的双线性：给定 $\rho,\omega,\tau\in\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))$ 与 $a,b\in\mathbb{C}$，我们有 ve

$$
\begin{aligned}
\rho\circledast(a\omega+b\tau) &= \frac{1}{2}(\rho\star(a\omega+b\tau) - (a\omega+b\tau)\bullet\rho) \\
&= \frac{1}{2}(a\rho\star\omega + b\rho\star\tau - a\omega\bullet\rho - b\tau\bullet\rho) \\
&= a\rho\circledast\omega + b\rho\circledast\tau.
\end{aligned}
$$

对第一个自变量的线性是相同的。

现在，令 $\rho,\omega,\tau\in\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0$。我们计算：

$$
\begin{aligned}
(\rho\circledast\omega)\circledast\tau &= \frac{1}{2}((\rho\circledast\omega)\star\tau - \tau\bullet(\rho\circledast\omega)) \\
&= \frac{1}{4}((\rho\star\omega - \omega\bullet\rho)\star\tau - \tau\bullet(\rho\star\omega - \omega\bullet\rho)).
\end{aligned}
$$

由（10），$\tau\bullet(\rho\star\omega)=\omega(1)\tau\bullet\rho=0$，以及由（11）$(\omega\bullet\rho)\star\tau=(\omega\star\tau)\bullet\rho$。结合各个乘积的结合律，我们可知

$$(\rho\circledast\omega)\circledast\tau=\frac{1}{4}(\rho\star(\omega\star\tau)-(\omega\star\tau)\bullet\rho+(\tau\bullet\omega)\bullet\rho).$$

通过相加 $0=-\omega(1)\rho\star\tau=-\rho\star(\tau\bullet\omega)$ (利用 (10))，可得

$$\begin{aligned}(\rho\circledast\omega)\circledast\tau&=\frac{1}{4}(\rho\star(\omega\star\tau)-(\omega\star\tau)\bullet\rho-\rho\star(\tau\bullet\omega)+(\tau\bullet\omega)\bullet\rho)\\&=\frac{1}{2}(\rho\circledast(\omega\star\tau)-\frac{1}{2}(\rho\star(\tau\bullet\omega)-(\tau\bullet\omega)\bullet\rho))\\&=\frac{1}{2}(\rho\circledast(\omega\star\tau)-\rho\circledast(\tau\bullet\omega))\\&=\rho\circledast(\frac{1}{2}(\omega\star\tau-\tau\bullet\omega))\\&=\rho\circledast(\omega\circledast\tau).\end{aligned}$$

乘积 $\circledast$ 的完全压缩性由各个乘积的完全压缩性推出。

关于 $\circledast^+$ 的论证完全相同。 □

考察上述证明中所用对偶乘积之间的必要关系，可得关于交换的巴拿赫代数乘积的以下一般结果。

命题 4.2。 设 A是一个赋有结合*Banach*代数乘积$\star$ 和 $\bullet$的巴拿赫空间，且它们满足

(1) $a\star(b\bullet c)=b\bullet(a\star c)$,
(2) $(a\star b)\bullet c=(a\bullet c)\star b$,

对所有 a、b、$c\in A$ 均成立。因此

$$a\circledast b:=\frac{1}{2}(a\star b-b\bullet a),\quad a,b\in A,$$
$$a\circledast^+ b:=\frac{1}{2}(a\star b+b\bullet a),\quad a,b\in A,$$

在 A 上定义相伴的巴拿赫代数乘积。

在第 6 节中，我们研究一类满足命题4.2条件的巴拿赫代数。

现在我们研究 $(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0,\ \circledast)$ 的巴拿赫代数结构，首先讨论一些基本观察。

注 4.3。(1) 更一般的结合性条件也成立：

$$(\rho\circledast\omega_0)\circledast\tau=\rho\circledast(\omega_0\circledast\tau),\quad\text{and}\quad(\rho\circledast^+\omega_0)\circledast^+\tau=\rho\circledast^+(\omega_0\circledast^+\tau),$$

对所有 $\rho,\ \tau\in\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))$ 和 $\omega_0\in\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0$ 均成立。也就是说，只需中间元素属于理想 $\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0$，即可保证结合律。由此可知，$\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))$ 成为 $(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0,\ \circledast)$ 和 $(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0,\ \circledast^+)$ 上的算子双模。

(2) 如果在 $\mathbb{G}$ 和 $\widehat{\mathbb{G}}$ 的定义中互换二者的角色（14）中的定义（分别是（13））， 便可得到反乘积（分别是反乘积的负）。也就是说，

$$\rho\,\widehat{\circledast^+}\,\tau=\frac{1}{2}(\rho\bullet\tau+\tau\star\rho)=\tau\circledast^+\rho,\quad\rho,\tau\in\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))_0.$$

$$\rho \mathbin{\widehat{\circledast}} \tau = \frac{1}{2}(\rho \bullet \tau - \tau \star \rho) = -\tau \circledast \rho, \quad \rho, \tau \in \mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))_0.$$

(3) 典范商映射 $\pi : \mathrm{T}(L^2(\mathbb{G})) \to L^1(\mathbb{G})$ π_0 在 $\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0$上的限制显然映入 $L^1(\mathbb{G})_0 = \mathrm{Ker}(1)$，即 $L^1(\mathbb{G})$ 的增广理想。 $\pi_0 : \mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0 \to L^1(\mathbb{G})_0$ 的伴随$\pi_0^* : L^\infty(\mathbb{G})/\mathbb{C}1 \to \mathrm{B}(L^2(\mathbb{G}))/\mathbb{C}1$ 是等距映射，因为

$$\inf\{\|x + \lambda 1\|_{L^\infty(\mathbb{G})} \mid \lambda \in \mathbb{C}\} = \inf\{\|x + \lambda 1\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{G}))} \mid \lambda \in \mathbb{C}\}, \quad x \in L^\infty(\mathbb{G}).$$

因此， π_0 是一个商映射。此外，$\frac{1}{2}\pi_0$ 是乘法的：首先，对于所有 τ， $\rho \in \mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0$，都有 $\pi_0(\tau \bullet \rho) = 0$：

$$\langle \pi_0(\tau \bullet \rho), x \rangle = \langle \tau \otimes \rho, \widehat{\Gamma}(x) \rangle = \langle \tau \otimes \rho, x \otimes 1 \rangle = \tau(x)\rho(1) = 0, \quad x \in L^\infty(\mathbb{G}).$$

因此，

$$\frac{1}{2}\pi_0(\rho \circledast \tau) = \frac{1}{4}(\pi_0(\rho) \star \pi_0(\tau))) = \frac{1}{2}\pi_0(\rho) \star \frac{1}{2}\pi_0(\tau).$$

类似地，典范商映射 $\hat{}\pi : \mathrm{T}(L^2(\mathbb{G})) \to L^1(\widehat{\mathbb{G}})$ 在 $\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0$ 上的限制 $\hat{}\pi_0$ 是到 $L^1(\widehat{\mathbb{G}})_0 := \mathrm{Ker}(1)$ 的商映射，而 $_{12}\hat{}\pi_0$ 关于 $\circledast^+$ ($\circledast$) 是乘法的（相差 -1）。

(4) 恒等式 $(\rho \star \tau) \star \omega = \rho(\tau \bullet \omega + \tau \star \omega)$，对所有 ρ， τ， $\omega \in \mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))_0$, 与洗牌恒等式(16) 相同，出自 [8]。我们感谢 Roland Speicher 在与第二作者讨论本工作的部分内容时， [8] 提醒我们注意到这一点。

当 $\mathbb{G}$ 是有限的，$\mathrm{B}(L^2(\mathbb{G})) = M_d(\mathbb{C})$，其中 $d = \dim L^\infty(\mathbb{G})$。在这种情况下，$\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0$ 是迹零矩阵的空间，即 $\mathfrak{sl}(d)$， $SL(d, \mathbb{C})$ 的李代数。因此，定理 4.1 为任意维数为 d 的量子群在 $\mathfrak{sl}(d)$ 上给出了新的结合乘积。

例 4.4。 我们来明确计算 $\circledast$-乘积在 $\mathcal{T}(\ell^2(G))_0$ 上，针对有限群 G。根据例 3.1 和 3.2，对于任意 $\omega = [\omega_{s,t}]$， $\tau = [\tau_{s,t}] \in \mathcal{T}(\ell^2(G))_0$,

$$(\omega \star \tau)_{s,t} = \sum_{r \in G} \langle \rho(r)^* \omega \rho(r) \delta_t, \delta_s \rangle \tau_{r,r} = \sum_{r \in G} \tau_{r,r} \omega_{sr^{-1}, tr^{-1}},$$

$$(\tau \bullet \omega)_{s,t} = \mathrm{tr}(\omega \lambda(ts^{-1}))\tau_{s,t} = \tau_{s,t} \sum_{r \in G} \omega_{rs,rt}.$$

因此，乘积的 (s, t) 项为

$$(\omega \circledast \tau)_{s,t} = \frac{1}{2} \sum_{r \in G} (\tau_{r,r} \omega_{sr^{-1}, tr^{-1}} - \tau_{s,t} \omega_{rs,rt}).$$

换言之，它是 $\pi(\tau)$-平均值，即 ω 的“右 (s, t)-对角线”减去 (s, t) 项乘以 τ ，再减去 ω 的“左 (s, t)-对角线”的均匀平均值。由下文定理 4.11 的证明可知，对于 $\circledast$-乘积， $E = 2(\omega_{\delta_e} - \omega_\chi)$ 是单位元，其中 $\chi(s) = |G|^{-1/2}$, $s \in G$ 是归一化常值函数。作为矩阵，

$$E = 2(\delta_e \delta_e^* - \chi\chi^*) = \frac{-2}{|G|} \begin{bmatrix} 1 - |G| & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

现在我们证明，对于量子群 $\mathbb{G}$ 满足某些温和条件时，代数 $(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0, \circledast)$ 是阿贝尔的，当且仅当 $\dim(\mathbb{G}) = 1$ （此时 $\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0 = \{0\}$）。为此，我们需要：

引理 4.5。 设 $\mathbb{G}$ 是一个局部紧量子群，满足以下条件中的至少一个：

(1) $L^1(\mathbb{G})_0 = \langle L^1(\mathbb{G})_0 \star L^1(\mathbb{G})_0 \rangle$；

(2) $\mathbb{G}$ 是余可和的。

那么，当且仅当 $L^1(\mathbb{G})_0$ 是阿贝尔的时， $L^1(\mathbb{G})$ 才是阿贝尔的。

证明。 对于任意 $\mathbb{G}$，一个方向显然成立，因此不妨设 $L^1(\mathbb{G})_0$ 是阿贝尔的。

假设条件 (1) 成立，并固定一个态 $h \in L^1(\mathbb{G})$。若 $f_0 = \sum_{i=1}^n f_{1,i} \star f_{2,i}$ 中的每一对$f_{1,i}, f_{2,i} \in L^1(\mathbb{G})_0$，则

$$f_0 \star h = \sum_{i=1}^n f_{1,i} \star \underbrace{(f_{2,i} \star h)}_{\in L^1(\mathbb{G})_0} = \sum_{i=1}^n (f_{2,i} \star h) \star f_{1,i} = \sum_{i=1}^n f_{2,i} \star \underbrace{(h \star f_{1,i})}_{\in L^1(\mathbb{G})_0} = \sum_{i=1}^n h \star f_{1,i} \star f_{2,i} = h \star f_0.$$

由于 $L^1(\mathbb{G})_0 = L^1(\mathbb{G})_0 \star L^1(\mathbb{G})_0$，任意 $f_0 \in L^1(\mathbb{G})_0$ 都有同样的结论成立。现在，对于任意 $f, g \in L^1(\mathbb{G})$，存在 $f_0, g_0 \in L^1(\mathbb{G})_0$ 使得

$$f = f_0 + f(1)h \quad \text{and} \quad g = g_0 + g(1)h.$$

将 $L^1(\mathbb{G})$ 中元素的换位子记为 $[\cdot,\cdot]$，可知

$$[f, g] = g(1)[f_0, h] + f(1)[h, g_0].$$

根据上述推理， $[f_0, h] = [h, g_0] = 0$，因此 $[f, g] = 0$，结论得证。

假设条件 (2) 成立，并令 (h_i) 为 $L^1(\mathbb{G})$的一个由态组成的有界近似单位 [13, 定理 2]。那么，对任意给定的 f， $g \in L^1(\mathbb{G})$，存在 f_i， $g_i \in L^1(\mathbb{G})_0$使得

$$f = f_i + f(1)h_i \quad \text{and} \quad g = g_i + g(1)h_i.$$

同上，我们有

$$[f, g] = g(1)[f_i, h_i] + f(1)[h_i, g_i] = g(1)f(1)([f, h_i] + [h_i, g]).$$

But $[f, h_i]$， $[h_i, g] \to 0$，因此必有 $[f, g] = 0$，证明完毕。 □

注记 4.6。 众所周知， $L^1(\mathbb{G})_0$ 有有界近似单位，当且仅当 $\mathbb{G}$ 既可和又余可和 [12, 命题 16]。 $L^1(\mathbb{G})_0$ 存在有界近似单位，意味着有如下分解： $L^1(\mathbb{G})_0 = L^1(\mathbb{G})_0 \star L^1(\mathbb{G})_0$ 这进而意味着 $L^1(\mathbb{G})_0 = L^1(\mathbb{G})_0 \star L^1(\mathbb{G})_0$。

命题 4.7. 设 $\mathbb{G}$ 是一个局部紧量子群，且满足以下条件中的至少一个：

(1) $\widehat{\mathbb{G}}$是余可和的；*(2)* $\mathbb{G}$ 是余可和的；*(3)* $L^1(\widehat{\mathbb{G}})_0 = \langle L^1(\widehat{\mathbb{G}})_0 \star L^1(\widehat{\mathbb{G}})_0 \rangle$；*(4)* $L^1(\mathbb{G})_0 = \langle L^1(\mathbb{G})_0 \star L^1(\mathbb{G})_0 \rangle$。

那么，若 维数$(\mathbb{G}) \geq 2$, $(\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))_0, \circledast)$ 是非阿贝尔的。

证明。 设 $\mathbb{G}$ 满足 $\dim(\mathbb{G}) \geq 2$。假设 $(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0, \circledast)$ 是阿贝尔的。由于 $\frac{1}{2}\hat{\pi}_0 : \mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0 \to L^1(\widehat{\mathbb{G}})_0$ 是一个满足下列条件的满射

$$\frac{1}{2}\hat{\pi}_0(\rho \circledast \tau) = -\frac{1}{2}\hat{\pi}_0(\rho) \bullet \frac{1}{2}\hat{\pi}_0(\tau), \quad \rho, \tau \in \mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))_0$$

(由注4.3(3)，可知 $L^1(\widehat{\mathbb{G}})_0$是阿贝尔的。同样，由于$\frac{1}{2}\hat{\pi}_0 : \mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))_0 \to L^1(\mathbb{G})_0$ 是满同态（由注4.3(3)）， $L^1(\mathbb{G})_0$ 是阿贝尔的。因此，

在上述四个条件中的任一条件下，根据引理 $L^1(\widehat{\mathbb{G}})$ 或 $L^1(\mathbb{G})$，我们可以得出其是阿贝尔的。因此，不失一般性，我们可以假设 $\mathbb{G}$ 是一个交换量子群，故 $L^\infty(\mathbb{G}) = L^\infty(G)$ 对某个局部紧群 G [27, 定理 2]。

由于 $(\mathrm{T}(L^2(G))_0, \circledast)$ 是阿贝尔的，对于每个 $\rho,\ \tau \in \mathrm{T}(L^2(G))_0$ 和 $T \in \mathrm{B}(L^2(G))$，

$$\langle \rho\otimes\tau, \Gamma^r(T) - \Sigma\widehat{\Gamma}^r(T)\rangle = 2\langle \rho\circledast\tau, T\rangle = 2\langle \tau\circledast\rho, T\rangle = \langle \rho\otimes\tau, \Sigma\Gamma^r(T) - \widehat{\Gamma}^r(T)\rangle.$$

取定 $\tau \in \mathrm{T}(L^2(G))0$, $f \in C_0(G)$ 和 $s \in G$, $s \neq e$。那么对于 $T = M_f\lambda(s)$，有 $\rho\otimes\tau, \Gamma(M_f)(\lambda(s)\otimes 1) - (\lambda(s)\otimes M_f\lambda(s)) = \rho\otimes\tau, \Sigma\Gamma(M_f)(1\otimes\lambda(s)) - (M_f\lambda(s)\otimes\lambda(s))$，对所有 $\rho \in \mathrm{T}(L^2(G))_0$ 均成立。设 ξ 和 η 是 $L^2(G)$ 中的单位向量，并令 $\rho = \omega_\xi - \omega_\eta \in \mathrm{T}(L^2(G))_0$。容易验证 $(\lambda(s)\cdot\rho)|_{L^\infty(G)} = \lambda(s)\xi\cdot\xi - \lambda(s)\eta\cdot\eta \in L^1(G)$，因此

$$\langle \tau, M_f \star (\lambda(s)\xi\cdot\overline{\xi} - \lambda(s)\eta\cdot\overline{\eta}) - (\langle\lambda(s)\xi,\xi\rangle - \langle\lambda(s)\eta,\eta\rangle)M_f\lambda(s)\rangle \tag{15}$$

$$= \langle \tau, ((\xi\cdot\overline{\xi} - \eta\cdot\overline{\eta}) \star M_f - (\langle M_f\lambda(s)\xi,\xi\rangle - \langle M_f\lambda(s)\eta,\eta\rangle)\lambda(s)\rangle. \tag{16}$$

现在，令 g、$h \in G$，并取 $C_c(G)$ 中由单位向量组成的网 (ξ_i) 和 (η_j)，使得对于 g 和 h 的任意邻域 U 和 V，分别存在 i_U 和 j_V，使得对于 $i \geq i_U$ 和 $j \geq j_V$，分别有 $\mathrm{supp}(\xi_i) \subseteq U$ 和 $\mathrm{supp}(\eta_j) \subseteq V$。由于 $s \neq e$，存在 g 和 h 的邻域 U 和 V，使得 $s^{-1}U\cap U = s^{-1}V\cap V = \varnothing$。因此，$\lambda(s)\xi_i\cdot\xi_i,\ \lambda(s)\eta_j\cdot\eta_j \to$ 在 $(L^1(G), \|\cdot\|_1)$ 中趋于 0。在 (15) 中取极限可得

$$\lim_i\lim_j \langle \tau, M_f \star (\lambda(s)\xi_i\cdot\overline{\xi_i} - \lambda(s)\eta_j\cdot\overline{\eta_j}) - (\langle\lambda(s)\xi_i,\xi_i\rangle - \langle\lambda(s)\eta_j,\eta_j\rangle)M_f\lambda(s)\rangle = 0.$$

另一方面，$\xi_i\cdot\xi_i \to \delta_g$ 和 $\eta_j\cdot\eta_j \to \delta_h$ 在 $M(G)$ 中弱*收敛，因此 $(\xi_i\cdot\xi_i - \eta_j\cdot\eta_j) \star M_f \to (\delta_g - \delta_h) \star M_f$ 在 $L^\infty(G)$ 中弱*收敛（因为 $f \in C_0(G)$）。此外，

$$\langle M_f\lambda(s)\xi_i,\xi_i\rangle - \langle M_f\lambda(s)\eta_j,\eta_j\rangle = \langle M_f, \lambda(s)\xi_i\cdot\overline{\xi_i} - \lambda(s)\eta_j\cdot\overline{\eta_j}\rangle \to 0,$$

从而

$$0 = \lim_i\lim_j \langle \tau, ((\xi_i\cdot\overline{\xi_i} - \eta_j\cdot\overline{\eta_j})\star M_f - (\langle M_f\lambda(s)\xi_i,\xi_i\rangle - \langle M_f\lambda(s)\eta_j,\eta_j\rangle)\lambda(s)\rangle = \langle \tau, ((\delta_g - \delta_h)\star M_f)\lambda(s)\rangle.$$

由于 $\tau \in \mathrm{T}(L^2(G))_0$ 是任意的，由此可得

$$M_{\rho(g)f}\lambda(s) = M_{\rho(h)f}\lambda(s) + z1,$$

对某个 $z \in \mathbb{C}$。但这样一来

$$M_{\rho(g)f} - M_{\rho(h)f} = z\lambda(s^{-1}) \in L^\infty(G)\cap VN(G) = \mathbb{C}1,$$

而这由于 $s \neq e$ 迫使 $z = 0$，从而 $\rho(g)f = \rho(h)f$。由于 G 至少有两个元素，于是选取 $g = s$ 与 $h = e \neq g$，我们看到 $\rho(s)f = f$。由于 $f \in C_0(G)$ 是任意的，我们得到矛盾。因此 $G = \{e\}$ 是平凡的。□

推论 4.8. 对任意局部紧群 G，且 $|G| \geq 2$，$(\mathcal{T}(L^2(G))_0, \circledast)$ 是非阿贝尔的。

4.1. 近似单位：针对 $\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0$。 我们现在研究 $(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0, \circledast)$ 的有界近似单位的存在性，首先给出下述众所周知的引理，并为完整起见纳入其证明。

引理 4.9. 设 $\mathbb{G}$ 是一个局部紧量子群。若 $\mathbb{G}$ 余可和，则存在一个网 (η_i) 属于 $\Lambda_\varphi(\mathcal{N}\varphi)_{\|\cdot\|=1}$，满足 $J\eta_i = \eta_i$ 且

$$\|V(\xi\otimes\eta_i) - \xi\otimes\eta_i\|, \|W(\eta_i\otimes\xi) - \eta_i\otimes\xi\| \to 0, \quad \xi \in L^2(\mathbb{G}).$$

证明。众所周知，余可和性意味着存在一个（双侧）余单位$E \in L^\infty(\mathbb{G})^*$ 满足

$$E(x \star f) = \langle f, x\rangle = E(f \star x), \quad f \in L^1(\mathbb{G}),\ x \in L^\infty(\mathbb{G}).$$

标准论证表明 $(\mathrm{id} \otimes E)V = 1$（例如，参见 [1, 定理 3.1]）。用态网 (f_i) 在 $L^1(\mathbb{G})$ 中按弱*逼近E。由于 $L^\infty(\mathbb{G})$ 在 $L^2(\mathbb{G})$ 上有标准表示，因此每个态 $f_i = \omega_{\eta_i}|_{L^\infty(\mathbb{G})}$ 都对应于唯一的单位向量 $\eta_i \in \mathrm{P}_\varphi = \{\pi_\varphi(x)J\Lambda_\varphi(x) \mid x \in \mathrm{N}_\varphi\}$。由范数稠密性可知，我们可以假设 $\eta_i = \Lambda_\varphi(x_i)J\Lambda_\varphi(x_i)$，其中某个 $x_i \in \mathrm{N}_\varphi \cap \mathrm{D}(\sigma_i^\varphi/2)$ 满足这一条件；此时$\eta_i = \Lambda_\varphi(x_i\sigma_i^\varphi/2(x_i)^*) \in \Lambda_\varphi(\mathrm{N}_\varphi)$，且 $J\eta_i = \eta_i$。于是，对于每个 $\xi \in L^2(\mathbb{G})$,

$$\langle V(\xi \otimes \eta_i), \xi \otimes \eta_i\rangle \to \langle (\mathrm{id} \otimes E)(V)\xi, \xi\rangle = \|\xi\|^2,$$

由此可得 $\|V(\xi \otimes \eta_i) - \xi \otimes \eta_i\| \to 0$。

公式 4于是推出

$$\begin{aligned}\|W(\eta_i \otimes \xi) - \eta_i \otimes \xi\| &= \|(1 \otimes U^*)\sigma V\sigma(1 \otimes U)(\eta_i \otimes \xi) - \eta_i \otimes \xi\| \\ &= \|V(U\xi \otimes \eta_i) - U\xi \otimes \eta_i\| \\ &\to 0.\end{aligned}$$

□

推论 4.10。设 $\mathbb{G}$为一个局部紧量子群。若 $\mathbb{G}$ 是余可和的，则存在一个网 (η_i)，其中 $\Lambda_\varphi(\mathcal{N}_\varphi)_{\|\cdot\|=1}$，满足

$$\|\omega_{\eta_i} \star \rho - \rho \bullet \omega_{\eta_i}\| \to 0,\ \rho \in \mathcal{T}(L^2(\mathbb{G})).$$

证明。根据引理 4.9，余可容性意味着存在一个由 (η_i) 组成的单位向量网，位于$L^2(\mathbb{G})$ 中，并满足

$$\|W(\eta_i \otimes \xi) - \eta_i \otimes \xi\| \to 0, \quad \xi \in L^2(\mathbb{G}).$$

根据命题3.4，对于每个 i，我们都有

$$\begin{aligned}\omega_\xi \bullet \omega_{\eta_i} &= m_\bullet(\omega_\xi \otimes \omega_{\eta_i}) \\ &= m_\star \circ \mathrm{Ad}(W^*) \circ \Sigma(\omega_\xi \otimes \omega_{\eta_i}) \\ &= m_\star(W^*(\eta_i\eta_i^* \otimes \xi\xi^*)W).\end{aligned}$$

因此，

$$\omega_\xi \bullet \omega_{\eta_i} - \omega_{\eta_i} \star \omega_\xi = m_\star(W^*(\eta_i\eta_i^* \otimes \xi\xi^*)W - \eta_i\eta_i^* \otimes \xi\xi^*) \to 0.$$

由线性、有界性与稠密性，该结论成立。 □

.

定理 4.11. $(\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))_0, \circledast)$ 具有有界近似单位，当且仅当 $\mathbb{G}$ 与$\frown\mathbb{G}$是余可和的。

证明。结合引理 4.9与（其证明）推论 4.10，存在网 (η_i)，由单位向量组成且这些向量属于 $L^2(\mathbb{G})$，满足

(a) $\|V(\xi \otimes \eta_i) - \xi \otimes \eta_i\| \to 0,\ \xi \in L^2(\mathbb{G})$;
(b) $\|\omega_{\eta_i} \star \rho - \rho \bullet \omega_{\eta_i}\| \to 0,\ \rho \in \mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))$;
(c) $J\eta_i = \eta_i$.

由于 $\widehat{\mathbb{G}}$ 也是余可和的，同样的结果蕴含 $L^2(\mathbb{G})$中存在单位向量网(ξ_j)满足

(a') $\|\widehat{V}(\xi\otimes\xi_j)-\xi\otimes\xi_j\|\to 0$, $\xi\in L^2(\mathbb{G})$;
(b') $\|\omega_{\xi_j}\bullet\rho-\rho\star\omega_{\xi_j}\|\to 0$, $\rho\in\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))$;
(c') $\widehat{J}\xi_j=\xi_j$.

考虑$\rho_{i,j}:=\omega_{\xi_j}-\omega_{\eta_i}\in \mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_{0}$。则

$$\begin{aligned}\tau\circledast\rho_{i,j}&=\frac{1}{2}(\tau\star\rho_{i,j}-\rho_{i,j}\bullet\tau)\\&=\frac{1}{2}(\tau\star\omega_{\xi_j}-\tau\star\omega_{\eta_i}-\omega_{\xi_j}\bullet\tau+\omega_{\eta_i}\bullet\tau).\end{aligned}$$

根据网 (ω_{ξ_j}) 的性质 (b'),

$$\lim_j \tau\circledast\rho_{i,j}=\frac{1}{2}(\omega_{\eta_i}\bullet\tau-\tau\star\omega_{\eta_i}).$$

接下来，网 (ω_{η_i}) 的性质 (a) 蕴含

$$\|\omega_\xi\star\omega_{\eta_i}-\omega_\xi\|=\|(\mathrm{id}\otimes\mathrm{tr})V^*(\xi\xi^*\otimes\eta_i\eta_i^*)V-\xi\xi^*\|\to 0,\quad \xi\in L^2(\mathbb{G}).$$

由线性、稠密性和有界性，$\rho\star\omega_{\eta_i}\to\rho$ 对所有 $\rho\in\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))$。最后，关系 (3) 和 (4) 蕴含 $V=(\widehat{J}\otimes J)\sigma\widehat{V}\sigma(\widehat{J}\otimes J)$，因此网 (ω_{η_i}) 的性质 (a) 和 (c) 蕴含

$$\|\widehat{V}(\eta_i\otimes\xi)-\eta_i\otimes\xi\|=\|V(\widehat{J}\xi\otimes\eta_i)-\widehat{J}\xi\otimes\eta_i\|\to 0,\quad \xi\in L^2(\mathbb{G}).$$

上述收敛性蕴含

$$\|\omega_{\eta_i}\bullet\omega_\xi-\omega_\xi(1)\omega_{\eta_i}\|=\|(\mathrm{id}\otimes\mathrm{tr})\widehat{V}^*(\eta_i\eta_i^*\otimes\xi\xi^*)\widehat{V}-\omega_\xi(1)\omega_{\eta_i}\|\to 0,\quad \xi\in L^2(\mathbb{G}),$$

这又由标准论证表明 $\|\omega_{\eta_i}\bullet\rho-\rho(1)\omega_{\eta_i}\|\to 0$ 对所有 $\rho\in \mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))$ 均成立。特别地，当 $\tau\in \mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0$ 时，$\|\omega_{\eta_i}\bullet\tau\|\to 0$。综合这些事实，我们得到

$$\lim_i\lim_j \tau\circledast\rho_{i,j}=\frac{1}{2}(\omega_{\eta_i}\bullet\tau-\tau\star\omega_{\eta_i})=-\frac{1}{2}\tau.$$

因此，将迭代极限合并为一个网后，$(-2\rho_{i,\,j})$ 构成一个有界右近似单位。

左侧的论证完全类似。

$$\begin{aligned}\rho_{i,j}\circledast\tau&=\frac{1}{2}(\rho_{i,j}\star\tau-\tau\bullet\rho_{i,j})\\&=\frac{1}{2}(\omega_{\xi_j}\star\tau-\omega_{\eta_i}\star\tau-\tau\bullet\omega_{\xi_j}+\tau\bullet\omega_{\eta_i}).\end{aligned}$$

网 (ω_{ξ_j}) 的性质 (a') 蕴含 $\tau\bullet\omega_{\xi_j}\to\tau$。性质 (a') 和 (c') 蕴含

$$\|V(\xi_j\otimes\xi)-\xi_j\otimes\xi\|=\|\widehat{V}(J\xi\otimes\xi_j)-J\xi\otimes\xi_j\|\to 0,\quad \xi\in L^2(\mathbb{G}),$$

这导致 $\|\omega_{\xi_j}\star\tau\|\to 0$ for $\tau\in \mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0$。将此与网 (ω_{η_i}) 的性质 (b) 结合，我们看到

$$\lim_i\lim_j \rho_{i,j}\circledast\tau=\lim_i\frac{1}{2}(\tau\bullet\omega_{\eta_i}-\omega_{\eta_i}\star\tau-\tau)=-\frac{1}{2}\tau.$$

因此，$(-2\rho_{i,\,j})$ 构成一个有界近似单位。

对于逆命题，设 $\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0$ 具有一个有界近似单位 (ρ_i)。令$f_i=\pi_0(\rho_i)\in L^1(\mathbb{G})_0$。由于 π_0 是到 $L^1(\mathbb{G})_0$, 上的商映射，给定 $g\in L^1(\mathbb{G})_0$, ，取

$\rho \in \mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0$ 使得 $\pi_0(\rho) = g$。注意，对于所有 $\omega,\ \tau \in \mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0$，$\pi(\omega \bullet \tau) = 0$

$$\langle \pi(\omega \bullet \tau), x\rangle = \langle \omega \otimes \tau, \widehat{\Gamma}(x)\rangle = \langle \omega \otimes \tau, x \otimes 1\rangle = \omega(x)\tau(1) = 0, \quad x \in L^\infty(\mathbb{G}).$$

因此，

$$g \star f_i = \pi_0(\rho \star \rho_i) = 2\pi_0\Big(\frac{1}{2}(\rho \star \rho_i - \rho_i \bullet \rho)\Big) = 2\pi_0(\rho \circledast \rho_i)$$
$$\to 2\pi_0(\rho) = 2g.$$

类似地，$f_i \star g \to 2g$。因此，$(\frac{1}{2}f_i)$ 构成 $L^1(\mathbb{G})_0$的有界近似单位。根据[22, 定理 4。10]（另见 [22, 定理 4。1]），这意味着 $\mathbb{G}$ 既是可和的，也是余可和的。

由对称性，$(\frac{1}{2}\hat{\pi}(\rho_i))$ 构成 $L^1(\widehat{\mathbb{G}})_0$，从而 $\widehat{\mathbb{G}}$ 是余可和且可和的。

□

推论 4.12。设 $\mathbb{G}$ 是一个局部紧量子群。当且仅当 $\mathbb{G}$ 是有限的时，$\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))_0$ 是有单位的。

证明。检查定理4.11的证明可知，$L^1(\mathbb{G})_0$ 具有一个双侧单位元，记为 e_0。于是 $L^1(\mathbb{G}) \ni f \mapsto \langle 1, f - e_0 \star f\rangle \in \mathbb{C}$是一个非零右 $L^1(\mathbb{G})$-模映射，从而$\widehat{\mathbb{G}}$的紧性得以成立。同样，$\mathbb{G}$ 也是紧的，这迫使 $\mathbb{G}$ 为有限的。□

5. 完全有界乘子

对于任意局部紧量子群 $\mathbb{G}$，$\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))$ 是一个$(\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))_0, \circledast)$-双模（见注记4.3）。本节将证明，这个双模结构通过完全等距反表示同时刻画了 $M_{cb}^r(L^1(\mathbb{G}))$和 $M_{cb}^r(L^1(\widehat{\mathbb{G}}))$。

$$\Theta : M_{cb}^r(L^1(\mathbb{G})) \hookrightarrow {}_{\circledast}\mathcal{CB}(\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))) \quad \text{and} \quad \widehat{\Theta} : M_{cb}^r(L^1(\widehat{\mathbb{G}})) \hookrightarrow \mathcal{CB}_{\circledast}(\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))).$$

回忆一下，如果对所有 $f \in L^1(\mathbb{G})$，$\hat{}b' \in L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}')$ 均满足 $\hat{}\rho(f)b' \in \rho(L^1(\mathbb{G}))$，那么称其为 $L^1(\mathbb{G})$ 的完全有界右乘子，且相应的诱导映射

$$m_{\hat{b}}^r : L^1(\mathbb{G}) \ni f \mapsto \rho^{-1}(\rho(f)\hat{b}') \in L^1(\mathbb{G})$$

在 $L^1(\mathbb{G})$ 上完全有界。我们用 $M_{cb}^r(L^1(\mathbb{G}))$ 表示 $L^1(\mathbb{G})$ 的完全有界右乘子空间。关于范数，该空间是一个完全压缩巴拿赫代数

$$\|[\hat{b}'_{ij}]\|_{M_n(M_{cb}^r(L^1(\mathbb{G})))} = \|[m^r_{\hat{b}'_{ij}}]\|_{cb}.$$

$\hat{}\,\hat{}$ 给定 $b' \in M_{cb}^r(L^1(\mathbb{G}))$，伴随 $\Theta^r(b') := (m_{\hat{b}}^r)^*$ 在 $L^\infty(\mathbb{G})$ 上定义了一个正规完全有界右 $L^1(\mathbb{G})$-模映射，并按照规范方式延拓为 $\mathrm{B}(L^2(\mathbb{G}))$ 上的正规完全有界映射 $\hat{}$ Proposition 4.3]。当 $b' = \rho(f)$，且对某个 $f \in L^1(\mathbb{G})$ 成立时，映射$\Theta^r(\rho(f))$ 及其延拓分别就是 $L^1(\mathbb{G})$ 在 $L^\infty(\mathbb{G})$ 和 $\mathrm{B}(L^2(\mathbb{G}))$ 上的卷积作用，即，

$$\Theta^r(\rho(f))(x) = (\mathrm{id} \otimes f)\Gamma(x), \quad \Theta^r(\rho(f))(T) = (\mathrm{id} \otimes f)\Gamma^r(T), \quad x \in L^\infty(\mathbb{G}),\ T \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{G})).$$

此外，该映射

$$\Theta^r : M_{cb}^r(L^1(\mathbb{G})) \cong \mathcal{CB}_\star^\sigma(L^\infty(\mathbb{G})) \cong \mathcal{CB}_{L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})}^{\sigma, L^\infty(\mathbb{G})}(\mathcal{B}(L^2(\mathbb{G}))) \tag{17}$$

诱导出完全压缩巴拿赫代数之间的完全等距同构 [18,定理 4。5] （对于后面的记号，我们称 [18] ）。

当 $\mathbb{G}$是余可和时， $M_{cb}^r(L^1(\mathbb{G})) = \rho(M(\mathbb{G}))$ [14,定理 4.2],因此我们将 ˆ乘子 b' 简单记为 $\mu \in M(\mathbb{G})$。

我们先来看下面这个观察。

命题 5.1. 映射

$$\Theta : M_{cb}^r(L^1(\mathbb{G})) \ni \hat{b}' \mapsto \Theta^r(\hat{b}')_* \in {}_{\circledast}\mathcal{CB}(\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G})))$$
$$\widehat{\Theta} : M_{cb}^r(L^1(\widehat{\mathbb{G}})) \ni \hat{\hat{b}} \mapsto \widehat{\Theta}^r(\hat{b}')_* \in \mathcal{CB}_{\circledast}(\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))).$$

是完全等距反表示。

证明。 Θ 和 $\widehat{\Theta}$ 是映入 $\mathrm{CB}(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G})))$ ˆ的完全等距反表示，这由 [18, 定理 4.5]可知。还需证明模性质。给定 $b' \in M_{cb}^r(L^1(\mathbb{G}))$、 $\rho \in \mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0$ 和 $\tau \in \mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))$，我们有

$$\Theta(\hat{b}')(\rho_0 \circledast \tau) = \frac{1}{2}(\Theta^r(\hat{b}')_*(\rho_0 \star \tau) - \Theta^r(\hat{b}')_*(\tau \bullet \rho_0)).$$

ˆ ˆ 由于 $\Theta^r(b')_* \in {}_{\star}\mathrm{CB}(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G})))$ [16, 定理 4.1] 且 $\Theta^r(b')_* \in \mathrm{CB}_{\bullet}(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G})))$ [5, 命题 4.2], ，我们看到

$$\Theta(\hat{b}')(\rho_0 \circledast \tau) = \frac{1}{2}(\rho_0 \star \Theta^r(\hat{b}')_*(\tau) - \Theta^r(\hat{b}')_*(\tau) \bullet \rho_0) = \rho_0 \circledast \Theta(\hat{b}')(\tau).$$

$\widehat{\Theta}(b')$、 $b' \in M_{cb}^r(L^1(\widehat{\mathbb{G}}))$ 的模性质的推导完全类似，利用以下事实： $\widehat{\Theta}^r(b')_* \in {}_{\bullet}\mathrm{CB}(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G})))$ 以及 $\widehat{\Theta}^r(b')_* \in \mathrm{CB}_{\star}(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G})))$。□

现在我们在可和性假设下刻画这些映射的值域。

ˆ定理 5.2。 设 $\mathbb{G}$ 和 $\mathbb{G}$ 均为余可和的。那么

(1) if $\mathbb{G}$ is not compact, ${}_{\circledast}\mathcal{CB}(\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))) = \Theta(M_{cb}^r(L^1(\mathbb{G})))$;
(2) if $\mathbb{G}$ is compact with Haar state φ, ${}_{\circledast}\mathcal{CB}(\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))) = \Theta(M_{cb}^r(L^1(\mathbb{G}))) + \mathbb{C}\lambda(\varphi)\mathrm{tr}(\cdot)$;
(3) if $\widehat{\mathbb{G}}$ is not compact, $\mathcal{CB}(\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G})))_{\circledast} = \widehat{\Theta}(M_{cb}^r(L^1(\widehat{\mathbb{G}})))$;
(4) if $\widehat{\mathbb{G}}$ is compact with Haar state $\widehat{\varphi}$, $\mathcal{CB}(\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G})))_{\circledast} = \widehat{\Theta}(M_{cb}^r(L^1(\widehat{\mathbb{G}}))) + \mathbb{C}\widehat{\lambda}(\widehat{\varphi})\mathrm{tr}(\cdot)$.

证明。 设 $\theta \in {}_{\circledast}\mathrm{CB}(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G})))$。展开乘积后，很容易看出

$$\theta(\rho_0 \star \omega) - \rho_0 \star \theta(\omega) = \theta(\omega \bullet \rho_0) - \theta(\omega) \bullet \rho_0 \tag{18}$$

对所有 $\rho_0 \in \mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0$ 和 $\omega \in \mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))$ 均成立。

由于 $\mathbb{G}$ 是余可和的，引理 4.9 和推论 4.10 表明存在一个由单位向量构成的网 (η_i)，其元素属于 $L^2(\mathbb{G})$并满足

(a) $\|V(\xi \otimes \eta_i) - \xi \otimes \eta_i\| \to 0$, $\xi \in L^2(\mathbb{G})$;
(b) $\|\omega_{\eta_i} \star \rho - \rho \bullet \omega_{\eta_i}\| \to 0$, $\rho \in \mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))$;
(c) $J\eta_i = \eta_i$.

然后，如4.11的证明中所示，我们有 $\|\rho - \rho \star \omega_{\eta_i}\| \to 0$ 以及 $\|\omega_{\eta_i} \bullet \rho - \rho(1)\omega_{\eta_i}\| \to 0$对所有 $\rho \in \mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))$均成立。特别地，当 $\rho_0 \in \mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))_0$, 时，利用模性质（18）可得

$$\theta(\rho_0) = \lim_i \theta(\rho_0 \star \omega_{\eta_i})$$

$$= \lim_i \rho_0 \star \theta(\omega_{\eta_i}) + \theta(\omega_{\eta_i} \bullet \rho_0) - \theta(\omega_{\eta_i}) \bullet \rho_0$$
$$= \lim_i \rho_0 \star \theta(\omega_{\eta_i}) - \theta(\omega_{\eta_i}) \bullet \rho_0.$$

那么，对于一个 $\tau \in \mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))$（不一定属于 $\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))_0$），公式（10）表明

$$\begin{aligned}\tau \star \theta(\rho_0) &= \lim_i \tau \star (\rho_0 \star \theta(\omega_{\eta_i})) - \tau \star (\theta(\omega_{\eta_i}) \bullet \rho_0) \\ &= \lim_i \tau \star \rho_0 \star \theta(\omega_{\eta_i}) \\ &= \lim_i (\tau \star \rho_0) \star \theta(\omega_{\eta_i}) - \theta(\omega_{\eta_i}) \bullet (\tau \star \rho_0) \\ &= \theta(\tau \star \rho_0)\end{aligned}$$

（最后一个等式由于 $\tau \star \rho_0 \in \mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0$，上面的等式随即成立）。总而言之，我们有

$$\theta(\tau \star \rho_0) = \tau \star \theta(\rho_0), \quad \tau \in \mathcal{T}(L^2(\mathbb{G})),\ \rho_0 \in \mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))_0.$$

特别地，若 $i : \mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0 \hookrightarrow \mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))$ 是（左 $(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G})), \star)$-模）包含映射，则复合映射 $\theta \circ i : \mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0 \to \mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))$ 是左 $(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G})), \star)$-模映射。其伴随 $(\theta \circ i)^* = i^* \circ \theta^* : \mathrm{B}(L^2(\mathbb{G})) \to \mathrm{B}(L^2(\mathbb{G}))/\mathbb{C}1$ 因而是右 $(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G})), \star)$-模映射。设 $m \in L^\infty(\mathbb{G}) \star L^1(\mathbb{G})^*$ 是一个不变平均，并固定一个态 $f \in L^1(\widehat{\mathbb{G}})$。由下式定义的映射 $\Theta^r(m) : \mathrm{B}(L^2(\mathbb{G})) \to \mathrm{B}(L^2(\mathbb{G}))$

$$\langle \Theta^r(m)(T), \rho \rangle := \langle m, T \star \rho \rangle, \quad T \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{G})),\ \rho \in \mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))$$

是映至 $L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$ 的右 $(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G})), \star)$-模条件期望。[4, 定理 4.2]。由此可得，态 $\tilde{m} := f \circ \Theta^r(m) \in \mathrm{B}(L^2(\mathbb{G}))^*$ 满足

$$\langle \tilde{m}, T \star \rho \rangle = \rho(1) \langle \tilde{m}, T \rangle, \quad T \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{G})),\ \rho \in \mathcal{T}(L^2(\mathbb{G})).$$

将 $\tilde{m}$ 视为右 $(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G})), \star)$-模映射 $\tilde{m} : \mathrm{B}(L^2(\mathbb{G})) \to \mathbb{C}1$（其值域包含于 $\mathrm{B}(L^2(\mathbb{G}))$），可知 $(\mathrm{id} - \tilde{m}) : \mathrm{B}(L^2(\mathbb{G})) \to \mathrm{B}(L^2(\mathbb{G}))$ 诱导出一个定义良好的右 $(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G})), \star)$- 模映射 $(\mathrm{id} - \tilde{m}) : \mathrm{B}(L^2(\mathbb{G}))/\mathbb{C}1 \to \mathrm{B}(L^2(\mathbb{G}))$。复合映射 $(\mathrm{id} - \tilde{m}) \circ i^* \circ \theta^* : \mathrm{B}(L^2(\mathbb{G})) \to \mathrm{B}(L^2(\mathbb{G}))$ 属于 $\mathrm{CB}_\star(\mathrm{B}(L^2(\mathbb{G})))$，并满足

$$(\mathrm{id} - \tilde{m}) \circ i^* \circ \theta^*(T) = \theta^*(T) - \langle \tilde{m}, \theta^*(T) \rangle 1, \quad T \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{G})).$$

由于 $\mathbb{G}$ 是余可和的，根据命题 6.5]，$\mathrm{CB}_\star(\mathrm{B}(L^2(\mathbb{G}))) = \Theta^r(L^\infty(\mathbb{G}) \star L^1(\mathbb{G})^*)$ [14，，因此存在某个 $n \in L^\infty(\mathbb{G}) \star L^1(\mathbb{G})^*$，使得

$$\theta^*(T) = \Theta^r(n)(T) + \langle \tilde{m}, \theta^*(T) \rangle 1, \quad T \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{G})).$$

利用 $\mu \in M(\mathbb{G})$ 和 $n_\perp \in C_0(\mathbb{G})^\perp$ [14，对 $n = \mu + n_\perp$ 进行分解，再结合命题 6.1]，以及 $\tilde{m} \circ \theta^* = \omega + m_\perp$（其中 $\omega \in \mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))$ 和 $m_\perp \in \mathrm{B}(L^2(\mathbb{G}))^* \cap \mathrm{K}(L^2(\mathbb{G}))^\perp$），可得

$$\theta^* = (\Theta^r(\mu) + \omega(\cdot)1) + (\Theta^r(n_\perp) + m_\perp(\cdot)1).$$

$m_\perp(\cdot)$ 的奇异性和 $\Theta^r(n_\perp)$ 的奇异性，结合定理 3.1]，，以及 $\theta^*, \Theta^r(\mu)$ 和 $\omega(\cdot)$ 的正规性，推出 $\theta^* = \Theta^r(\mu) + \omega(\cdot)1$。在预对偶层面，我们看到

$$\theta(\rho) = \Theta^r(\mu)_*(\rho) + \langle \rho, 1 \rangle \omega, \quad \rho \in \mathcal{T}(L^2(\mathbb{G})).$$

由于 θ and $\Theta^r(\mu)_*$ 是左 $\circledast$-模映射，我们必有

$$0 = \langle \rho_0 \circledast \rho, 1 \rangle \omega = \rho_0 \circledast \omega \langle \rho, 1 \rangle$$

对所有 $\rho_0 \in \mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0$ 以及 $\rho \in \mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))$均成立，从而迫使 ω 满足 $\rho_0 \circledast \omega = 0$，等价地，

$$\rho_0 \star \omega = \omega \bullet \rho_0, \quad \rho_0 \in \mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))_0.$$

观察到 θ 的 $\circledast$-模性质迫使 ω 在 $\mathbb{G}$ 不紧时为零，或者在 $\mathbb{G}$ 紧时属于 $\mathbb{C}\lambda(\varphi)$，即可完成证明。

无论如何，由于 $\widehat{\mathbb{G}}$ 是余可和的，存在由 $L^2(\mathbb{G})$ 中单位向量构成的网 (ξ_j)，满足

(a') $\|\widehat{V}(\xi\otimes\xi_j)-\xi\otimes\xi_j\|\to 0,\ \xi\in L^2(\mathbb{G})$;
(b') $\|\omega_{\xi_j}\bullet\rho-\rho\star\omega_{\xi_j}\|\to 0,\ \rho\in\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))$;
(c') $\widehat{J}\xi_j=\xi_j$.

如定理 4.11 的证明中所示，令 $\rho_{i,j}:=\omega_{\xi_j}-\omega_{\eta_i}\in \mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0$。由于 $2\rho_{i,j}\circledast\omega=0$ 对所有i,j,ω $\bullet\ \omega_{\xi_j}\to\omega$ 和 $\omega_{\eta_i}\star\omega-\omega\bullet\omega_{\eta_i}\to 0$均成立，我们得到

$$0=\lim_j\lim_i 2\rho_{i,j}\circledast\omega=\lim_j\omega_{\xi_j}\star\omega-\omega\bullet\omega_{\xi_j},$$

这意味着 $\omega=\lim_j\omega_{\xi_j}\star\omega$。但 $\omega_{\xi_j}\star\omega-\omega(1)\omega_{\xi_j}\to 0$，因此 $\omega=\lim_j\omega(1)^{\omega_{\xi_j}}$ 在迹范数下成立。

因此，要么 $\omega\in\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0$，，此时 $\omega=0$，因为 $\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0$ 有有界近似恒等元；要么 $\omega(1)\neq 0$。在后一种情况下，$\lim_j\omega_{\xi_j}=\omega(1)^{-1}\omega\in\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))$。但此时 $\omega(1)^{-1}\omega$ 是 $(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G})),\bullet)$ 的右恒等元，并且由命题 3.7可知，$\widehat{\mathbb{G}}$ 必为离散的（等价地，$\mathbb{G}$ 是紧的）。回顾 ξ_j 的构造（见引理 4.9），我们知道每个 $\xi_j\in\mathrm{P}_{\hat{\varphi}}$都属于与 $L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$ 上的左 Haar 权相关联的（闭）锥。由于$L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$在 $L^2(\mathbb{G})$ 上标准表示，Powers–Størmer 不等式 [11, 引理 2.10]对所有 $\xi,\eta\in\mathrm{P}_{\hat{\varphi}}$均成立：

$$\|\xi-\eta\|^2\leq\|\omega_\xi-\omega_\eta\|\leq\|\xi-\eta\|\|\xi+\eta\|.$$

因此，(ξ_j) 在 $L^2(\mathbb{G})$ 中是柯西列，故收敛到某个 $\xi\in\mathrm{P}_{\hat{\varphi}}$。于是 $\omega(1)^{-1}\omega=\omega_\xi$ 在 $L^1(\widehat{\mathbb{G}})$ 中限制为一个右恒等元。但 $\omega_{\Lambda_{\hat{\varphi}}(\lambda(\varphi))}$ 是 $L^1(\widehat{\mathbb{G}})$ 中的双侧单位元，因此必有 $\omega_\xi|_{L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})}=\omega_{\Lambda_{\hat{\varphi}}(\lambda(\varphi))}|_{L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})}$。由 $\mathrm{P}_{\hat{\varphi}}$ 中向量代表的唯一性可知，$\xi=\Lambda_{\hat{\varphi}}(\lambda(\varphi))$，从而 $\omega(1)^{-1}\omega=\omega_{\Lambda_{\hat{\varphi}}(\lambda(\varphi))}$；将其视为迹类算子，它无非就是 $\lambda(\varphi)$。

关于 $\mathrm{CB}_\circledast(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G})))$ 的对偶命题，注意到

$$\mathcal{CB}_\circledast(\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G})))=_{-\circledast^{op}}\mathcal{CB}(\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))),$$

因此，只需将上述论证与以下事实结合起来：$-\circledast^{op}$ 是对偶乘积$\circledast$（根据注4.3(2)）。证明完毕。□

注记5.3. 上述证明的一个推论是，对于 $\mathbb{G}$和 $\widehat{\mathbb{G}}$ 余可和的情形，左侧 $(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0,\circledast)$-模 $\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))$ 是忠实的，当且仅当 $\mathbb{G}$ 不是紧的。

推论5.4. 设 $\mathbb{G}$ 是余可和的局部紧量子群，且 $\mathbb{G}$ 是余-可和的，并且 $\mathbb{G}$和 $\widehat{\mathbb{G}}$ 均非紧。那么映射

$$\Theta: M_{cb}^r(L^1(\mathbb{G}))\ni\mu\mapsto\Theta^r(\mu)_*\in{}_\circledast\mathcal{CB}(\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G})))$$
$$\widehat{\Theta}: M_{cb}^r(L^1(\widehat{\mathbb{G}}))\ni\hat{\mu}\mapsto\widehat{\Theta}^r(\mu)_*\in\mathcal{CB}_\circledast(\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))).$$

是完全压缩巴拿赫代数之间的完全等距反同构。

研究 $(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0,\circledast)$ 的完全有界乘子与 $M_{cb}^r(L^1(\mathbb{G})_0)$ 及 $M_{cb}^r(L^1(\widehat{\mathbb{G}})_0)$ 之间的关系，是很自然的。我们将把这一问题，以及 $(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0,\circledast)$ 的相关巴拿赫代数性质留待今后研究。

6. $L^p(G)$上的核算子

设 G 是一个局部紧群，$p \in (1,\infty)$，并令 $\mathrm{N}(L^p(G))$ 表示 $L^p(G)$ 上的核算子。在第二作者的论文 [23]，中，定义了乘法 $\star_a$ 的一个类似形式，它作用于 $\mathrm{T}(L^2(G)) = \mathrm{N}(L^2(G))$ 上，并通过以下方式定义在 $\mathrm{N}(L^p(G))$ 上

$$\omega \star \tau = \int_G \rho_p(s^{-1})\omega\rho_p(s)\pi(\tau)(s)ds, \quad \omega,\tau \in \mathcal{N}(L^p(G)),$$

其中，ρ_p 是 $L^p(G)$上的右正则表示，而 $\pi : \mathrm{N}(L^p(G)) \to L^1(G)$表示在标准同构识别 $\mathrm{N}(L^p(G)) = L^p(G)\widehat{\otimes}L^{p'}(G)$下的逐点乘法；其中 p' 是 p的共轭变量，而 $\widehat{\otimes}$ 在本节中表示Banach空间射影张量积。

存在一个基本的（可逆）等距映射 $V_p : L^p(G\times G) \to L^p(G\times G)$，其定义为

$$V_p\xi(s,t) = \Delta(t)^{1/p}\xi(st,t), \quad \xi \in L^p(G\times G),$$

由此导出 一个弱*–弱*连续的余乘积 $\Gamma^r : \mathrm{B}(L^p(G)) \to \mathrm{B}(L^p(G\times G))$，定义为

$$\Gamma(T) = V_p(T\otimes 1)V_p^{-1}, \quad T \in \mathcal{B}(L^p(G)).$$

如 [7, §2.1], $\mathrm{N}(L^p(G)) \otimes \mathrm{N}(L^p(G))$ 中所见，通过 $(\xi\otimes\xi')\otimes(\eta\otimes\eta') \mapsto (\xi\otimes\eta)\otimes(\xi'\otimes\eta')$，它自然地构成 $\mathrm{N}(L^p(G\times G))$ 的稠密子空间。注意到 $V_p^* = V_{p'}^{-1}$，类似于 [7, (2.1)] 的计算表明，前伴随的限制

$$\Gamma_*|_{\mathcal{N}(L^p(G))\otimes\mathcal{N}(L^p(G))} : \mathcal{N}(L^p(G))\otimes\mathcal{N}(L^p(G)) \ni \omega\otimes\tau \to \omega\star\tau \in \mathcal{N}(L^p(G)).$$

对偶基本等距映射 $\widehat{V}_p : L^P(G\times G) \to L^p(G\times G)$ 满足

$$\widehat{V}_p\xi(s,t) = \xi(s,s^{-1}t), \quad \xi \in L^p(G\times G),$$

并且在 [7] 的记号下与 W_p^{-1} 一致。因此，如 [7], 所示

$$\widehat{\Gamma} : \mathcal{B}(L^p(G)) \ni T \mapsto \widehat{V}_p(T\otimes 1)\widehat{V}_p^{-1} \in \mathcal{B}(L^p(G\times G))$$

定义了一个满足 $\widehat{\Gamma}(\lambda_p(s)) = \lambda_p(s)\otimes\lambda_p(s)$、$s \in G$ 的余乘积，其中 λ_p 是作用在 $L^p(G)$ 上的左正则表示。此外，

$$\widehat{\Gamma}_*|_{\mathcal{N}(L^p(G))\otimes\mathcal{N}(L^p(G))} : \mathcal{N}(L^p(G))\otimes\mathcal{N}(L^p(G)) \ni \omega\otimes\tau \to \widehat{\Gamma}_*(\omega\otimes\tau) \in \mathcal{N}(L^p(G))$$

在 $\mathrm{N}(L^p(G))$ 上定义了一个结合的（巴拿赫代数）乘积，记为 ●。

对偶等距映射（为清晰，省略 p下标）满足与希尔伯特空间情形相同的交换关系：对所有 $\xi \in L^p(G\times G\times G)$,

$$\begin{aligned} V_{12}\widehat{V}_{13}\xi(r,s,t) &= \Delta(s)^{1/p}\widehat{V}_{13}\xi(rs,s,t) \\ &= \Delta(s)^{1/p}\xi(rs,s,s^{-1}r^{-1}t) \\ &= \Delta(s)^{1/p}\widehat{V}_{23}\xi(rs,s,r^{-1}t) \\ &= V_{12}\widehat{V}_{23}\xi(r,s,r^{-1}t) \\ &= \widehat{V}_{13}V_{12}\widehat{V}_{23}\xi(r,s,t). \end{aligned}$$

也就是说，$V_{12}\widehat{V}_{13} = \widehat{V}_{13}V_{12}\widehat{V}_{23}$。那么，在典范三元嵌入下

$$\mathcal{N}(L^p(G))\otimes\mathcal{N}(L^p(G))\otimes\mathcal{N}(L^p(G)) \subseteq \mathcal{N}(L^p(G\times G\times G)),$$

我们有

$$\begin{aligned}\langle(\rho\star\omega)\bullet\tau,T\rangle&=\langle\rho\star\omega\otimes\tau,\widehat{V}(T\otimes 1)\widehat{V}^{-1}\rangle\\&=\langle\rho\otimes\omega\otimes\tau,V_{12}\widehat{V}_{13}(T\otimes 1\otimes 1)\widehat{V}_{13}^{-1}V_{12}^{-1}\rangle\\&=\langle\rho\otimes\omega\otimes\tau,\widehat{V}_{13}V_{12}\widehat{V}_{23}(T\otimes 1\otimes 1)\widehat{V}_{23}^{-1}V_{12}^{-1}\widehat{V}_{13}^{-1}\rangle\\&=\langle\rho\otimes\omega\otimes\tau,\widehat{V}_{13}V_{12}(T\otimes 1\otimes 1)V_{12}^{-1}\widehat{V}_{13}^{-1}\rangle\\&=\langle\rho\otimes\tau\otimes\omega,\widehat{V}_{12}V_{13}(T\otimes 1\otimes 1)V_{13}^{-1}\widehat{V}_{12}^{-1}\rangle\\&=\langle(\rho\bullet\tau)\otimes\omega,V(T\otimes 1)V^{-1}\rangle\\&=\langle(\rho\bullet\tau)\star\omega,T\rangle,\end{aligned}$$

对所有 $\rho,\ \omega,\ \tau\in\mathcal{N}(L^p(G)),\ T\in\mathcal{B}(L^p(G))$。换言之，命题 4.2 的条件 (2) 成立。将两个乘积限制到子空间

$$\mathcal{N}_0(L^p(G)):=\{\omega\in\mathcal{N}(L^p(G))\mid\langle\omega,1\rangle=0\},$$

命题 4.2 的条件 (1) 同样成立。事实上，交换关系

$$\widehat{V}_{23}V_{12}\xi(r,s,t)=V_{12}\xi(r,s,s^{-1}t)=\Delta(s)^{1/p}\xi(rs,s,s^{-1}t)=V_{12}\widehat{V}_{23}\xi(r,s,t),\quad \xi\in L^p(G\times G\times G),$$

implies that

$$\begin{aligned}\langle\rho\star(\omega\bullet\tau),T\rangle&=\langle\rho\otimes(\omega\bullet\tau),V(T\otimes 1)V^{-1}\rangle\\&=\langle\rho\otimes(\omega\bullet\tau),V(T\otimes 1)V^{-1}\rangle\\&=\langle\rho\otimes\omega\otimes\tau,\widehat{V}_{23}V_{12}(T\otimes 1\otimes 1)V_{12}^{-1}\widehat{V}_{23}^{-1}\rangle\\&=\langle\rho\otimes\omega\otimes\tau,V_{12}\widehat{V}_{23}(T\otimes 1\otimes 1)\widehat{V}_{23}^{-1}V_{12}^{-1}\rangle\\&=\langle\rho\otimes\omega\otimes\tau,V_{12}(T\otimes 1\otimes 1)V_{12}^{-1}\rangle\\&=\langle\rho\otimes\omega\otimes\tau,\Gamma(T)\otimes 1\rangle\\&=\tau(1)\langle\rho\star\omega,T\rangle\\&=0\end{aligned}$$

对所有 $\rho,\ \omega,\ \tau\in\mathrm{N}_0\ (L^p(G))$ 与 $T\in\mathcal{B}(L^p(G))$。于是命题 4.2 表明乘积 s

$$\rho\circledast\omega=\frac{1}{2}(\rho\star\omega-\omega\bullet\rho)$$

$$\rho\circledast^{+}\omega=\frac{1}{2}(\rho\star\omega+\omega\bullet\rho)$$

在 $\mathrm{N}_0(L^p(G))$ 上定义相伴的巴拿赫代数乘积。

7. 展望

我们的工作引出了许多自然的研究方向，下面将对此作一概述。

(1) 上一节概述的对偶余乘积，结合 [7] 以及 L^p-算子代数理论的发展（例如参见 [9,10,24,25]），表明量子群理论有可能拓展到 L^p-空间的情形。事实上，与$\frown p=2$的情形一样，对偶基本等距算子 $V_{12}V_{13}=\frown\quad\frown V_{13}V_{12}V_{23}$ 之间的交换关系可视为一种五边形关系。

(2) 何时 $(\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))_0, \circledast)$ （算子）是可和的？即使对于有限（量子）群，能否计算可容常数？参见 [2, 3] 关于有限群傅里叶代数可容常数的最新结果。(3) 与前一个问题相呼应，$(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0, \circledast)$的同调性质（例如平坦性、投射性）与 $\mathbb{G}$的性质有何关联？(4) 求中心 $\mathrm{Z}(\mathrm{T}(L^2(\mathbb{G}))_0, \circledast))$，即使对于有限量子群也是如此。

致谢

Jason Crann 部分得到了加拿大自然科学与工程研究委员会探索研究基金 RGPIN-2023-05133 的资助，Matthias Neufang 则得到了加拿大自然科学与工程研究委员会探索研究基金 RGPIN-2014-06356 的资助。本文在 Jason Crann 入驻瑞典于尔斯霍尔姆的米塔格-莱夫勒研究所期间完成，时间为 2026年算子代数与量子信息项目举办期间。他感谢瑞典研究理事会通过编号为 2021-06594 的基金给予的接待与支持。

参考文献

[1] E. Bédos 和 L. Tuset，局部紧量子群的可和性与余可和性。《国际数学杂志》14 (2003)，第 8 期，865-884。[2] Y. Choi，傅里叶代数可和性常数的一个显式下界函数。《国际数学研究通知》2023，第 22 期，19390-19430。[3] Y. Choi，有限群傅里叶反对角常数的小值与禁值。《澳大利亚数学会杂志》118 (2025)，第 3 期，297-316。[4] J. Crann 和 M. Neufang，局部紧量子群的可和性与协变内射性。《美国数学会汇刊》368 (2016)，495-513。[5] J. Crann，局部紧量子群的可和性与协变内射性 II。《加拿大数学杂志》69 (2017)，第 5 期，1064-1086。[6] J. Crann，局部紧量子群的内可容性与逼近性质。《印第安纳大学数学杂志》68 (2019)，第 6 期，1721-1766。[7] M. Daws 和 N. Spronk，关于 L^p空间上的卷积算子。《数学研究》245 (2019)，15-31。[8] K. Ebrahimi-Fard 和 F. Patras，洗牌群律：自由概率中的应用。《伦敦数学会会刊》(3) 119 (2019)，第 3 期，814-840。[9] E. Gardella 和 H. Thiel，作用于 L^p空间上的群代数。《傅里叶分析与应用杂志》21:6 (2015)，1310-1343。[10] E. Gardella 和 H. Thiel，作用于 L^p空间上的巴拿赫代数的商。《数学进展》296 (2016)，85-92。[11] U. Haagerup，冯·诺依曼代数的标准形式。《斯堪的纳维亚数学》37 (1975)，271-283。[12] Z. Hu、M. Neufang 和 Z.-J. Ruan，关于拓扑中心问题与 SIN量子群。《泛函分析杂志》257 (2009)，第 2 期，610-640。[13] Z. Hu、M. Neufang 和 Z.-J. Ruan，一类新巴拿赫代数上的乘子、局部紧量子群与拓扑中心。《伦敦数学会会刊》100 (2010)，429-458。[14] Z. Hu、M. Neufang 和 Z.-J. Ruan，局部紧量子群上的完全有界乘子。《伦敦数学会会刊》(3) 103 (2011)，第 1 期，1-39。[15] Z. Hu、M. Neufang 和 Z.-J. Ruan，局部紧量子群上的模映射。《数学研究》211 (2012)，第 2 期，111-145。[16] Z. Hu、M. Neufang 和 Z.-J. Ruan，局部紧量子群上的迹类算子卷积。《加拿大数学杂志》65 (2013)，第 5 期，1043-1072。[17] Z. Hu、M. Neufang 和Z.-J. Ruan，迹类卷积代数的阿伦斯不规则性。《伦敦数学会通报》45 (2013)，第 2 期，351-362。[18] M. Junge、M. Neufang 和 Z.-J. Ruan，局部紧量子群的表示定理。《国际数学杂志》 20 (2009)，第 3 期，377-400。[19] M. Kalantar 和 M. Neufang，局部紧量子群的对偶性、上同调与几何。《数学分析及其应用杂志》406 (2013)，第 1 期，22-33。

[20] J. Kustermans 和 S. Vaes，局部紧量子群。《高等师范学院科学年鉴》(4) 33 (2000)，第 6 期，837-934。[21] J. Kustermans 和 S. Vaes，冯·诺依曼代数框架中的局部紧量子群。《斯堪的纳维亚数学》92 (2003)，第 1 期，68-92。[22] A. T.-M. Lau，一类巴拿赫代数上的分析及其在局部紧群与半群调和分析中的应用。《基础数学》118 (1983)，161-175。[23] M. Neufang，冯·诺依曼代数上的抽象调和分析与模同态。博士论文，萨尔兰大学，萨尔布吕肯，德国 (2000)。[24] N. C. Phillips，作用于 L^p 看起来“像” C^* 代数的空间上的算子代数。讲义，GreatPlains 算子理论研讨会，2014，网址：https://tinyurl.com/gpotsphil。[25] N. C. Phillips 和 M. G. Viola，空间 L^p *AF*代数的分类。《国际数学杂志》31 (2020)，第 13 期，2050088，41 页。[26] A. Y. Pirkovskii，核算子卷积代数的双投射性与双平坦性。《加拿大数学通报》47 (2004)，第 3 期，445-455。[27] M. Takesaki，群代数的一种刻画：作为淡中–*Stinespring*–*Tatsuuma*对偶定理的逆命题。《美国数学杂志》91 (1969)，529-564。[28] M. Takesaki，算子代数理论 *II*。数学科学百科全书 125，Springer-Verlag，柏林–海德堡–纽约，2003。[29] S. Vaes 和 A. Van Daele，海森堡对易关系、交换方与局部紧量子群上的哈尔测度。《算子代数与数学物理》，379-400（康斯坦察，2001）（Theta，布加勒斯特，2003）。[30] A. Van Daele，局部紧量子群：冯·诺依曼代数方法。《SIGMA》10 (2014)，082，41 页。电子邮箱：jasoncrann@cunet.carleton.ca

电子邮箱：matthias.neufang@carleton.ca[1]数学与统计学院，卡尔顿大学，渥太华，安大略省，加拿大 H1S 5B6

[2]里尔第一大学——科学与技术，数学培训与研究单位，保罗·潘勒韦数学实验室——UMRCNRS 8524，59655 维尔纳夫达斯克 Cédex，法国