arXiv:2602.19602v1 [math.LO] 23 Feb 2026

带有幂谓词的 Presburger 算术公理化

PHILIPP HIERONYMI、MICHAEL REITMEIR 和 XIAODUO WANG

Abstract. 我们给出结构 $(\mathbb{Z},+,(\ell^{\mathbb{N}})_{\ell\in L})$ 的完整一阶公理化，其中 $L\subseteq\mathbb{Z}_{\geq 2}$ 是一组两两乘法独立的整数，且 $\ell^{\mathbb{N}}=\{\ell^n:\ n\in\mathbb{N}\}$。利用 Karimov 等人的近期成果 [11], ，我们得到该公理化在 $|L|=2$ 下是可计算的，这证明了 $(\mathbb{Z},+,k^{\mathbb{N}},\ell^{\mathbb{N}})$ 在 k、 $\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$ 下是可判定的。此外，我们给出结构 $(\mathbb{Z},+,<,(\ell^{\mathbb{N}})_{\ell\in L})$ 的全称理论的一种公理化。

1. 引言

1929 年，Presburger [15] 给出了结构 $(\mathbb{Z},+,<)$ 的一阶理论的完整且可计算公理化，从而证明了其可判定性。事实上，这一理论如今称为 Presburger 算术，可由离散有序阿贝尔群的公理以及同余公理完整刻画；后者表达的是，在 n 个连续整数中，恰有一个能被 n 整除。本文聚焦于 Presburger 算术的扩张。这至今仍是一个活跃的研究主题；关于这一领域的详尽综述，读者可参阅 B`es [2] 。本文关注通过幂集 $\ell^{\mathbb{N}}=\{\ell^n$ 的谓词进行的扩张： $n\in\mathbb{N}\}$对于 $\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$。根据 B¨uchi 关于结构 $(\mathbb{N},+1)$ 的弱单子二阶理论可判定性的定理 [5] ，对于任意 $\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$，结构 $(\mathbb{Z},+,<,\ell^{\mathbb{N}})$ 的一阶理论，乃至表达能力更强的结构 $(\mathbb{Z},+,<,V_\ell)$ 的一阶理论，都是可判定的，其中 $V_\ell\colon\ \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ 将 0 映射到 1，并将 $n\neq 0$ 映射到整除 n 的最大 ℓ 的幂。证明见 Bruy`ere 等人 [4, 3]。

用两个或更多幂集扩张 Presburger 算术的研究进展较为缓慢。设 k、$\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$ 乘法独立。此时，B¨uchi 定理并不适用。事实上，结构 $(\mathbb{Z},\ +,\ <,\ V_k,\ V_\ell)$ 可以定义乘法（Villemaire [19] ），因此其一阶理论不可判定。B`es [1], 进一步强化了这一结果，证明结构 $(\mathbb{Z},\ +,\ <,\ V_k,\ \ell^{\mathbb{N}})$ 本身就能定义乘法。直到最近，Hieronymi 和 Schulz [10], 才证明结构 $(\mathbb{Z},\ +,\ <,\ k^{\mathbb{N}},\ \ell^{\mathbb{N}})$ 的一阶理论不可判定，部分原因是该结构不能定义乘法（Schulz [16]）。本文证明，去掉序关系后，其一阶理论是可判定的。

分析 Presburger 算术扩张的另一种方式，是考察其模型论驯性。对于任意 $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$，结构 $(\mathbb{Z},\ +,\ <,\ \ell^{\mathbb{N}})$ 都具有 NIP 性质，见 Lambotte 和 Point [12]。与可判定性类似，加入多个幂谓词会破坏这种驯性，因为根据 [10]，结构 $(\mathbb{Z},\ +,\ <,\ k^{\mathbb{N}},\ \ell^{\mathbb{N}})$ 具有 IP 性质。然而，若省略序关系，情况便有所不同：根据 Conant [7],，对于任意有限子集 $L \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 2}$，结构 $(\mathbb{Z},\ +, (\ell^{\mathbb{N}})_{\ell\in L})$ 是 U-秩为 ω 的超稳定结构；而由所有正整数的幂扩张得到的结构 $(\mathbb{Z},\ +,\ (\ell^{\mathbb{N}})_{\ell\geq 2})$ 是稳定的。

我们的贡献如下：设 $L \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 2}$ 是一个两两乘法独立的整数集合。我们给出（$\mathbb{Z},\ +,\ -,\ 0,\ 1,\ (\ell^{\mathbb{N}})_{\ell\in L}$）的公理化，并利用 Karimov、Luca、Nieuwveld、Ouaknine 和 Worrell [11], 最近的可判定性结果，证明这组公理对于 $|L| = 2$是可计算的。因此，（$\mathbb{Z},\ +,\ k^{\mathbb{N}},\ \ell^{\mathbb{N}}$）的一阶理论是可判定的。此外，我们证明了（$\mathbb{Z},\ +,\ (\ell^{\mathbb{N}})_{\ell\in L}$）的相对量词消去，从而得到（$\mathbb{Z},\ +,\ (\ell^{\mathbb{N}})_{\ell\geq 2}$）的超稳定性。

如果重新加入序关系，那么一阶理论的不可判定性意味着，对于 $|L| \geq 2$，我们无法期待（$\mathbb{Z},\ +,\ <,\ (\ell^{\mathbb{N}})_{\ell\in L}$）存在可计算公理化。然而，对于 $|L| = 2$，该结构是存在可判定的 [11],，因此也是全称可判定的。这里我们给出（$\mathbb{Z},\ +,\ -,\ 0,\ 1,\ <,\ (\ell^{\mathbb{N}})_{\ell\in L}$）的全称理论的一种公理化。当 $|L| = 2$ 时，这种公理化是可计算的。

在第 3 节详细定义这些公理之前，我们先简要概述一下。整数 ℓ 的幂满足的性质中，或许最直观的一条是

$$1 \in \ell^{\mathbb{N}} \wedge \forall x \left(x \in \ell^{\mathbb{N}} \leftrightarrow \ell \cdot x \in \ell^{\mathbb{N}} \right).$$

除了这一条以及 Presburger 的公理外，我们还需要另外三个更复杂的公理模式。它们秉承 Presburger 算术中量词消去的思路，描述幂所满足的方程、同余式和不等式。令 $\ell, \ell_1, \ldots, \ell_m \in L$。

- 令 $a_1, \ldots, a_m, b \in \mathbb{Z}$。众所周知，一个数论事实是，像 $a_1x_1 + \cdots + a_mx_m = b$这样的线性方程只有有限多个非退化解（$x_1,\ \ldots,\ x_n$）$\in \ell_1^{\mathbb{N}} \times \cdots \times \ell_m^{\mathbb{N}}$，也就是说，满足对所有非空 $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ 都有 $\sum_{i\in I} a_i x_i \neq 0$ 的解。***Mann*** 公理 将这些有限多个解硬编码进去。
- 对于 $m \in \mathbb{N}$，$\ell^{\mathbb{N}}$ 中的每个元素，除了 ℓ^0、ℓ^1、.....、ℓ^{m-1} 之外，都能被 ℓ^m整除。另一方面，如果考察 $\ell^{\mathbb{N}}$ 模某个与 ℓ互素的 $n \in \mathbb{N}$ 的同余式，那么序列 $(\ell^m)_{m\in\mathbb{N}}$ 具有周期性，且不会取某些模 n的值（例如 0）。***Carmichael*** 公理 刻画了这些现象。
- 在 $(\mathbb{Z}, +, <, (\ell^{\mathbb{N}})_{\ell\in L})$ 中，不等式公理 将所有在 $\ell_1^{\mathbb{N}} \times \cdots \times \ell_m^{\mathbb{N}}$ 中无解的严格齐次线性不等式系统都硬编码了。如果 $|L| = 2$，那么，按照判定此类不等式是否有解的算法，我们证明只需这些公理中的一个小子集即可。这些基本不等式公理 指出：

对于每个 $x \in \ell^{\mathbb{N}}$，都有 $x > 0$，并且不存在满足 $x < y < \ell \cdot x$ 的 $y \in \ell^{\mathbb{N}}$。

在第 2 节中，我们将确定本文其余部分所使用的语言和记号。随后在第 3 节中，我们将精确定义上述三种公理模式，讨论其用法，并证明它们对 $|L| = 2$ 是可计算的。在第 4 节中，我们将证明，Mann 公理蕴含幂集在某种技术意义上是小的。接着在第 5 节中，我们将定义理论 $T(L)$，并证明它将 $(\mathbb{Z}, +, (\ell^{\mathbb{N}})_{\ell \in L})$ 的一阶理论公理化。为此，我们将给出一个来回系统，并用它证明相对量词消去。最后，在第 6 节中，我们将定义理论 $T_\forall(L)$，并证明它将 $(\mathbb{Z}, +, <, (\ell^{\mathbb{N}})_{\ell \in L})$ 的全称理论公理化。

致谢。作者获得德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）通过德国卓越战略资助，项目编号 GZ 2047/1，项目 ID 390685813。作者感谢豪斯多夫数学研究所在“可定义性、可判定性与可计算性”三学期项目期间提供的热情接待。在本研究的早期阶段，P.H. 获得了美国国家科学基金会（NSF）DMS-1654725 号拨款的部分资助。本文所呈现结果的初步版本曾刊载于 M.R. 和 X.W. 的硕士论文中。作者感谢 Toghrul Karimov 向他们讲解了来自 [11] 的算法。

2. Notation and Preliminaries

令 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$。下文中，可定义是指带参数可定义。从现在起，所有理论均为一阶理论。

对于 $L \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 2}$，我们定义 $\mathcal{L} := \{+, -, 0, 1\} \cup \{U_\ell \colon \ell \in L\}$ 为带有常元符号 1 的加法群语言，并且对每个 $\ell \in L$ 都有一个一元关系符号 U_ℓ，其标准解释为 $\ell^{\mathbb{N}}$。此外，令 $\mathcal{L}_< := \mathcal{L} \cup \{<\}$。

为方便起见并使表述清晰，我们引入以下缩写，但不向我们的语言中添加新符号。我们所考虑的每个 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}$ 都将是一个无挠阿贝尔群，这意味着我们可以并且将把由 $1^{\mathcal{M}}$ 生成的子群与 $\mathbb{Z}$ 等同起来。对于 $n \in \mathbb{Z}$，令 $n \cdot x$ 将 $x + \cdots + x$ 缩写为带有 $n \geq 0$ 个加数的 n，并将 $-x - \cdots - x$ 缩写为带有 $n < 0$ 个加数的 $-n$。我们直接写 n，而不写 $n \cdot 1$。对于 $n \in \mathbb{Z}$，令 D_n 为这样的一元关系符号：当且仅当 $\exists y (n \cdot y = x)$ 时，将其解释为 $D_n(x)$。为避免冗余，我们通常将一个 $\mathcal{L}$-结构（分别为一个 $\mathcal{L}_<$-结构）$\mathcal{M}$ 写作 $(\mathcal{M}, (A_\ell)_{\ell \in L})$，而不写作 $(M, +, -, 0, 1, (A_\ell)_{\ell \in L})$（分别为 $(M, +, -, 0, 1, <, (A_\ell)_{\ell \in L})$）。如果 $(\mathcal{M}, (A_\ell)_{\ell \in L})$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构，我们定义 $A := \bigcup_{\ell \in L} A_\ell$。最后，如果 $x = (x_1, \dots, x_n)$，那么我们定义 $x > 0$，其含义是：对所有 $i \in \{1, \dots, n\}$，$x_i > 0$。

定义 2.1. 设 G 为无挠阿贝尔群，$H \leq G$ 为其子群。若对所有情况均成立，则称 H 在 G 中是可除闭 的（也称为纯的）：

$n \in \mathbb{N}$和 $g \in H$，若存在 $x \in G$使得 $n \cdot x = g$成立，则存在 $y \in H$使得 $n \cdot y = g$成立。我们将 H^{div}定义为 G中包含 H且在 G中可除闭的最小子群。

定义 2.2。令 $\mathcal{M} = (M, +, -, 0, 1)$为一个群，并令 $g \in M$。我们称该部分类型为

$$d_{\mathcal{M}}(g) := \{D_{p^m}(x-u) : p \text{ prime}, m > 0, 0 \leq u < p^m, \mathcal{M} \models D_{p^m}(g-k)\}$$

g 在 $\mathcal{M}$中的同余类型。如果 $(g_i)_{i\in I}$ 是 M中元素的一个族，那么我们将其同余类型定义为

$$d_{\mathcal{M}}((g_i)_{i\in I}) := \{D_{p^m}(x_i-u) : i \in I, p \text{ prime}, m > 0, 0 \leq u < p^m, \mathcal{M} \models D_{p^m}(g_i-u)\}.$$

请注意，$d_{\mathcal{M}}(g)$只包含形如 $D_{p^m}(x-k)$的正公式，而不包含形如 $\neg D_{p^m}(x-k)$的否定公式，这一点很重要。如果 $\mathcal{M}$ 满足 Presburger 算术的同余公理，这就没有区别。在这种情况下，若 g、$h \in M$ 使得 h 满足 $d_{\mathcal{M}}(g)$（换句话说，$d_{\mathcal{M}}(g) \subseteq d_{\mathcal{M}}(h)$），那么 $d_{\mathcal{M}}(g) = d_{\mathcal{M}}(h)$。但是，如果 $\mathcal{M}$ 只是 Presburger 算术模型的一个子群（这是我们将在第 6 节中考察的情形），那么可能存在 g、$h \in M$，使得 $d_{\mathcal{M}}(g)$是 $d_{\mathcal{M}}(h)$的真子集。

我们通常假设 $L \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 2}$中的元素两两乘法独立。如下述引理所示，这一假设主要是为了方便，并非出于一般性的考虑。

引理2.3。设 $k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ 乘法相关。则 $\ell^{\mathbb{N}}$ 在$(\mathbb{Z}, +, k^{\mathbb{N}})$中可定义。

证明。根据假设，对于某些 $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，我们有 $k^m = \ell^n$ 。注意，1可由公式 $U_k(x) \wedge \neg D_k(x)$在$(\mathbb{Z}, +, k^{\mathbb{N}})$中定义。利用这一点，我们可以在$(\mathbb{Z}, +, k^{\mathbb{N}})$中定义$(k^m)^{\mathbb{N}}$，如下所示：

$$U_k(x) \wedge D_{k^m-1}(x-1).$$

最后，$\ell^{\mathbb{N}}$可在$(\mathbb{Z}, +, (\ell^n)^{\mathbb{N}})$中定义，如下所示：

$$\exists y \left(U_{\ell^n}(y) \wedge \bigvee_{t=0}^{n-1} \ell^t \cdot x = y \right).$$

□

3. 公理

在本节中，我们列出所用的公理模式，以便在第 5 节公理化 $(\mathbb{Z}, +, -, 0, 1, (\ell^{\mathbb{N}})_{\ell\in L})$ 的一阶理论，以及在第 6 节公理化 $(\mathbb{Z}, +, -, 0, 1, <, (\ell^{\mathbb{N}})_{\ell\in L})$ 的全称理论。

3.1. **Mann 公理**。

定义 3.1 (Mann性质)。设 K 是一个域，G 是 $K^\times$的子集。对于 a_1、……、a_n、$b \in \mathbb{Z}$，考虑方程

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b. \tag{1}$$

该方程在 G中的一个解是一个元组（g_1，……，g_n）$\in G^n$，满足 $a_1g_1 + \cdots + a_ng_n = b$。如果对于每个非空 $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$，$g_1$，……，$g_n$中的解（$g_1$，……，$g_n$）都满足$\sum_{j\in J} a_jg_j \neq 0$，则称其为非退化 解。若对于每个 $n \geq 2$和 a_1，……，a_n，$b \in \mathbb{Z}$，方程（1）在 G中只有有限多个非退化解，则称 G具有*Mann*性质 。

Mann性质最早由 van den Dries 和 G¨unaydin[17] 引入。我们对其进行了略微改写，使其更适合我们在$\mathbb{Z}$上的工作。特别地，我们还对集合 $G \subseteq K^\times$定义了该性质，而在 [17] 中只考虑子群 $G \leq K^\times$ 。Mann性质得名于 Henry B. Mann，他证明了 $\mathbb{C}$ 中的单位根群具有这一性质 [14]。

众所周知，特征零域的乘法群的每一个有限秩子群都具有Mann性质；参见van der Poorten与Schlickewei [18], Evertse [9] 以及Laurent [13]。（事实上，由Evertse、Schlickewei与Schmidt [8], 可知，非退化解的个数甚至存在一个仅依赖于变量个数与该群的秩的显式上界。）这正是我们在公理化中所利用的。

设 L 为 $\mathbb{Z}_{\geq 2}$的一个子集。Mann 公理背后的想法，是将(1)在 $\bigcup_{\ell\in L} \ell^{\mathbb{Z}}$ 中的有限多个解硬编码。然而，由于我们无法在我们的语言中表达除法，需要在右端再添加一个变量，并关注形如

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = by \tag{2}$$

的方程，其中我们感兴趣的是 $\bigcup_{\ell\in L} \ell^{\mathbb{N}}$中的解。这些方程是齐次的，因而可能有无穷多个解：例如，若 s_1，……，s_n，$t \in \ell^{\mathbb{N}}$ 满足 $a_1s_1 + \cdots + a_ns_n = bt$，则对任意 $k \in \mathbb{N}$，$\ell^k s_1$，……，$\ell^k s_n$，$\ell^k t$ 也同样满足。然而，Mann性质保证，这些可能无穷多的整数解 s_1，……，s_n，t 仅对应于有限多个有理解 $\frac{s_1}{t}$，……，$\frac{s_n}{t}$。若 L的元素两两乘法独立，我们甚至可以做得稍好一些：

引理 3.2. 设 $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{Z}$ 满足 $b \neq 0$，并设 $L \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 2}$ 为一组两两乘法独立数。若 $\ell_1, \ldots, \ell_n, \ell_{n+1} \in L$ 不全相等，则仅存在有限多个非退化元组$(s_1, \ldots, s_n, t)$使得 $a_1s_1 + \cdots + a_ns_n = bt$ 且 $s_1 \in \ell_1^{\mathbb{N}}, \ldots, s_n \in \ell_n^{\mathbb{N}}$, $t \in \ell_{n+1}^{\mathbb{N}}$。

证明。 如上所述，我们将

- $(s_1, \ldots, s_n, t)$ with $a_1s_1 + \cdots + a_ns_n = bt$ and $s_1 \in \ell_1^{\mathbb{N}}, \ldots, s_n \in \ell_n^{\mathbb{N}}$, $t \in \ell_{n+1}^{\mathbb{N}}$ as *integral solutions*, and

- 称为 $(r_1,\dots,r_n)$ 的 $a_1r_1+\cdots+a_nr_n=b$ 和 $r_i\in\{\ell_i^j/\ell_{n+1}^k:\ j,k\in\mathbb{N}\}$ 关于 $i\in\{1,\dots,n\}$ 的有理解。

Mann性质表明，非退化的有理解只有有限多个。因此，只需证明两个不同的整数解会导出不同的有理解。

设 $(s_1,\dots,s_n,t)$ 与 $(s_1',\dots,s_n',t')$ 为整数解，且

$$\left(\frac{s_1}{t},\dots,\frac{s_n}{t}\right)=\left(\frac{s_1'}{t'},\dots,\frac{s_n'}{t'}\right).$$

根据假设，存在 $j\in\{1,\dots,n\}$ 使得 $\ell_j\neq\ell_{n+1}$，故 ℓ_j 与 ℓ_{n+1} 乘法独立。因此，$s_j/t=s_j'/t'$ 蕴含 $s_j=s_j'$ 与 $t=t'$。后者蕴含对所有 $i\in\{1,\dots,n\}$ 有 $s_i=s_i'$。□

因此，对于 Mann 公理，我们区分两种情形：

- 若 ℓ_1、……、ℓ_n、$\ell_{n+1}\in L$ 并非全部相同，则我们将有限多个非退化的整数解硬编码。
- 若 $\ell_1=\cdots=\ell_n=\ell_{n+1}$，则我们将有限多个非退化的有理解硬编码。

为了以规范方式做到后者，我们称 $(s_1,\dots,s_n,t)\in(\ell^{\mathbb{N}})^{n+1}$ 是本原的，如果对于 $i\in\{1,\dots,n\}$，分数 s_i/t 中至少有一个是既约的，换言之，如果对某个 $i\in\{1,\dots,n\}$ 或 $t=1$ 有 $s_i=1$。

定义 3.3 (Mann 公理)。设 $L\subseteq\mathbb{Z}_{\geq 2}$ 为一组两两乘法独立的数，并设 $n\geq 1$、a_1、……、a_n、$b\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ 以及 ℓ_1、……、ℓ_n、$\ell_{n+1}\in L$。我们将 $a=(a_1,\dots,a_n)$、$\ell=(\ell_1,\dots,\ell_{n+1})$ 以及 $x=(x_1,\dots,x_{n+1})$ 加以简记，后者是一个变量元组。设 $\theta_{a,\,b,\,\ell}(x)$ 为公式

$$\bigwedge_{i=1}^{n+1}U_{\ell_i}(x_i)\wedge\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=bx_{n+1}\wedge\bigwedge_{J}\sum_{j\in J}a_jx_j\neq 0,$$

其中，合取是对所有非空的 $J\subseteq\{1,\dots,n\}$ 取的。

- 假设 ℓ_1、…、ℓ_n、ℓ_{n+1} 并非全都相等，并令

$$(s_{11},\dots,s_{1n},t_1),\dots,(s_{m1},\dots,s_{mn},t_m)$$

为 $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=by$ 在对所有 $i\in\{1,\dots,m\}$ 均满足 $(s_{i1},\dots,s_{in},t_i)\in\ell_1^{\mathbb{N}}\times\cdots\times\ell_{n+1}^{\mathbb{N}}$ 的条件下的有限多个非退化解。于是我们将 Mann$(a,\ b,\ \ell)$ 定义为如下语句

$$\forall x\left[\theta_{\bar{a},b,\bar{\ell}}(x)\to\bigvee_{i=1}^{m}\left(\left(\bigwedge_{j=1}^{n}x_j=s_{ij}\right)\wedge x_{n+1}=t_i\right)\right].$$

- 假设 $\ell:=\ell_1=\cdots=\ell_{n+1}$，并令

$$(s_{11},\dots,s_{1n},t_1),\dots,(s_{m1},\dots,s_{mn},t_m)$$

为方程 $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = by$ 在 $(s_{i1}, \ldots, s_{in}, t_i) \in (\ell^{\mathbb{N}})^{n+1}$ 对所有 $i \in \{1, \ldots, m\}$成立时的有限个非退化本原解。在此情形下，我们将 Mann(a, b, ℓ) 定义为句子

$$\forall x \left[\theta_{\bar{a},b,\bar{\ell}}(x) \to \bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n} t_i x_j = s_{ij} x_{n+1} \right].$$

我们将 Mann(a, b, ℓ) 称为与 a、 b、 ℓ 对应的*Mann* 公理，并将 Mann(L) 定义为公理模式，其中包含所有 $n \geq 1$、$a \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^n$、 $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$、 $\ell \in L^{n+1}$ 对应的 Mann(a, b, ℓ)。

继续之前，我们先简要说明 Mann 公理的一种用法。设 $(\mathcal{M}, (A_\ell)_{\ell \in L}) \models$ Mann(L)。取 a_1、……、 a_n、 $b \in \mathbb{Z}$ 以及 g_1、……、 $g_n \in A \setminus \mathbb{Z}$。那么，只有在 $b = 0$ 的情况下， $a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n = b$ 才能成立。事实上，如果 $b \neq 0$, 我们就可以从左边逐项移除加数，直到得到一个非退化解。现在，如果不存在满足对所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 都有 $g_i \in A_\ell$ 的 $\ell \in L$ ，那么 Mann 公理告诉我们，$(g_1, \ldots, g_n, 1)$ 是有限个硬编码解之一。但这些解都是整数，这与我们的假设 g_1、……、 $g_n \notin \mathbb{Z}$ 矛盾。因此，对于某个 $\ell \in L$，有 g_1、……、 $g_n \in A_\ell$；在这种情况下，Mann 公理告诉我们，对于每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，都存在 s、 $t \in \ell^{\mathbb{N}}$ 使得 $t \cdot g_i = s \cdot 1$。由此得到 $g_i \in \mathbb{Z}$，这再次导出矛盾。[1]

利用 [11], 我们现在证明，对于 $L = \{k, \ell\}$，集合 Mann(L) 可以有效计算，其中 k和 $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ 是乘法独立的。

定义3.4 （[11, 定义 7]）。如果集合 $X \subseteq \mathbb{N}^n$ 可以写成以下形式，则称其属于类 $\mathfrak{U}$

$$X = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J_i} X_j$$

其中，对于每个 $i \in I$， I 和 J_i 都是有限的，并且每个 X_j 或者具有以下形式

$$X_j = \left\{ (e_1, \ldots, e_n) \in \mathbb{N}^n : e_{\mu(j)} = e_{\sigma(j)} + c_j \right\} \tag{3}$$

或者具有以下形式

$$X_j = \left\{ (e_1, \ldots, e_n) \in \mathbb{N}^n : e_{\xi(j)} = b_j \right\} \tag{4}$$

其中 $\xi(j)$ $\mu(j)$ $\sigma(j)$ $\in \{1, \ldots, n\}$，且 b_j， $c_j \in \mathbb{N}$。

引理3.5 ([11, 定理 8])。 设 k, $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ 是乘法独立的整数，设 $z_1, \ldots,$ $z_n \in \{k, \ell\}$，并设 $C \in \mathbb{Z}^{s \times n}$, $d \in \mathbb{Z}^s$。令$\mathcal{S}$为方程 $Cz = d$的解 $(e_1, \ldots,$ $e_n) \in \mathbb{N}^n$ 的集合，其中$z = (z_1^{e_1}, \ldots, z_n^{e_n})$。那么 $\mathcal{S} \in \mathfrak{U}$，并且可以有效地计算出定义*3.4*中的表示 $\mathcal{S} = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J_i} X_j$，此外还满足以下性质：对于每个形如(3)的 X_j，都有 $z_{\mu(j)} = z_{\sigma(j)}$。

[1]注意，这一论证隐含地使用了以下附加假设： $\mathcal{M}$ 是一个无挠阿贝尔群，对于所有 $\ell \in L$都有 $1 \in A_\ell$，并且在 $\mathbb{Z}$ 中不能被 $t \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ 整除的任何 $s \in \mathbb{Z}$，在 $\mathcal{M}$ 中也不能被 t 整除（即 $\mathcal{M} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$）。这些假设在我们所考虑的结构中始终成立。

为了证明 Mann公理 Mann($\{k,\ell\}$)是可计算的，剩下的唯一任务是从 $\mathcal{S}$ 中有效筛除退化解。正如我们将在下面引理的证明中看到的，定义3.4中的表示已经非常便于完成这一任务：每个 $\bigcap_{j\in J_i} X_j$ 要么只包含退化解，要么恰好包含一个（本原的）非退化解。

引理3.6。设 k 是乘法独立的，设 z_1、……、 z_n、$z_{n+1}\in\{k,\ell\}$，并设 a_1、……、 a_n、 $b\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$。

(i) 如果 z_1，……， z_{n+1} 不全相等，那么 $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=by$ 在 $z_1^{\mathbb{N}}\times\cdots\times z_{n+1}^{\mathbb{N}}$ 中的有限个非退化解可以有效地计算出来。*(ii)* 如果 $z:=z_1=\cdots=z_{n+1}$，那么 $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=by$ 在 $(z^{\mathbb{N}})^{n+1}$ 中的有限个非退化本原解可以有效地计算出来。

证明。设 $\mathcal{S}$ 是方程的解集（e_1，……， e_{n+1}）$\in\mathbb{N}^{n+1}$。

$$a_1z_1^{e_1}+\cdots+a_nz_n^{e_n}=bz^{e_{n+1}}.$$

根据引理3.5，我们可以有效地计算定义3.4中的 $\mathcal{S}=\bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J_i}X_j\in\mathfrak{U}$。由于 I 是有限的，只需证明对于每个 $i\in I$，来自 $\bigcap_{j\in J_i}X_j$ 的非退化解都可以有效地计算。为简便起见，我们省略下标 i，并记作 $X:=\bigcap_{j\in J}X_j$。我们可以假设$X\neq\emptyset$。为方便记号，令 $a_{n+1}:=-b$。

将定义3.4中的表示改写如下：把集合 $\{1,\dots,n+1\}$ 划分为两两不相交的子集 I_1、……、 I_d， K，并选取 c_1、……、 $c_{n+1}\in\mathbb{N}$，使得元组(e_1、……、 e_{n+1}) $\in X$ 恰好是满足以下条件的元组

$$\begin{aligned} e_i+c_i&=e_j+c_j && \text{for all } m\in\{1,\dots,d\}, i,j\in I_m, \text{ and}\\ e_i&=c_i && \text{for all } i\in K.\end{aligned}$$

注意，这种新的 X 表示可以从（X_j）$_{j\in J}$有效地计算出来。

假设存在一个 $m\in\{1,\dots,d\}$，使得 $\emptyset\neq I_m\neq\{1,\dots,n+1\}$。定义 e_i'：$=e_i+1$（当 $i\in I_m$ 时），否则定义 e_i'：$=e_i$。由于

$$e_i'+c_i=e_i+1+c_i=e_j+1+c_j=e_j'+c_j$$

对于所有 i、 $j\in I_m$，我们也有（e_1'，……， e_{n+1}'）$\in X$。这意味着

$$\sum_{i\in I_m}a_iz_i^{e_i}=-\sum_{i\notin I_m}a_iz_i^{e_i}=-\sum_{i\notin I_m}a_iz_i^{e_i'}=\sum_{i\in I_m}a_iz_i^{e_i'}=\sum_{i\in I_m}a_iz_i^{e_i+1}.$$

根据引理3.5给出的附加性质，我们知道存在$z\in\{k,\ell\}$，使得对于所有 $i\in I_m$，都有 $z=z_i$。因此

$$0=\sum_{i\in I_m}a_iz^{e_i+1}-\sum_{i\in I_m}a_iz^{e_i}=(z-1)\sum_{i\in I_m}a_iz^{e_i}.$$

由于 $z\neq1$，我们得出，在这种情况下， X 中的每个解都是退化的。

剩余的情况是，对于某个 m， $I_m = \{1, \ldots, n+1\}$；或者 $K = \{1, \ldots, n+1\}$。在后一种情况下， $X = \{(c_1, \ldots, c_{n+1})\}$，我们可以轻松检查这个唯一的解是否退化。因此，假设$I_m = \{1, \ldots, n+1\}$。引理3.5中的附加性质再次告诉我们，存在 $z \in \{k, \ell\}$，使得对于所有 $i \in \{1, \ldots, n+1\}$，都有 $z = z_i$，这意味着我们处于情形 (ii)。现在，对于每个 $(e_1, \ldots, e_{n+1})$、$(e'_1, \ldots, e'_{n+1}) \in X$，我们有

$$e_i - e_{n+1} = c_{n+1} - c_i = e'_i - e'_{n+1}$$

对所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$。这意味着所有 $(e_1, \ldots, e_{n+1}) \in X$ 都得到相同的有理数解

$$\left(z^{c_{n+1}-c_1}, \ldots, z^{c_{n+1}-c_n}\right).$$

相应的本原整数解为

$$\left(z^{c_{n+1}-c_1+c}, \ldots, z^{c_{n+1}-c_n+c}, z^c\right),$$

其中 $c := -\min(c_{n+1} - c_1, \ldots, c_{n+1} - c_n, 0)$。同样，我们可以轻松判断这个唯一解是否为退化解。□

3.2. **Carmichael 公理**。在 [6], 中，Carmichael 将 λ 定义为 $\mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$；如今称为*Carmichael* 函数，定义如下：对于素数 p，定义

$$\lambda(p^v) := \begin{cases} 2^{v-2} & \text{if } p = 2, v \geq 3 \\ p^{v-1}(p-1) & \text{else,} \end{cases}.$$

现在，对于一般的 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$，定义

$$\lambda(n) := \lambda(p_1^{v_1}) \cdots \lambda(p_m^{v_m}),$$

其中 $n = p_1^{v_1} \cdots p_m^{v_m}$是 n 的素因数分解。 $\lambda(n)$ 的关键性质是，它是满足对每个与 n 互素的 $\ell \in \mathbb{Z}$，都有 $\ell^{\lambda(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ 的最小正整数。这意味着，对于 ℓ 且 n 互素的情形，只需计算 ℓ^1、 ℓ^2、.....、 $\ell^{\lambda(n)} \pmod{n}$，便能知道 ℓ 的幂模 n的所有可能余数。

定义 3.7 （Carmichael 公理）。对于 $L \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 2}$，令 Carmichael($L$) 表示一个公理模式，其中包含对每个 $\ell \in L$ 的以下公理:

- 对于 $m \in \mathbb{N}$，公理

$$\forall x \left[U_\ell(x) \to \left(\left(\bigvee_{j=0}^{m-1} x = \ell^j \right) \vee \left(\bigwedge_{k=1}^{\ell^m - 1} \neg D_{\ell^m}(x-k) \right) \right) \right]. \tag{5}$$

- 对于与 ℓ互质的 $n \in \mathbb{N}$，添加公理

$$\forall x \left[U_\ell(x) \to \bigwedge_{k \in E} \neg D_n(x-k) \right] \tag{6}$$

其中 $E := \{k \in \{1, \ldots, n\} : \forall m \in \{1, \ldots, \lambda(n)\} : \ell^m \not\equiv k \pmod{n}\}$.

因此，Carmichael 公理特别排除了没有任何 ℓ 的幂属于其中的同余类。注意，根据 Presburger 算术的同余公理，公式 (5) 等价于

$$\forall x \left[U_\ell(x) \to \left(\left(\bigvee_{j=0}^{m-1} x = \ell^j \right) \vee D_{\ell^m}(x) \right) \right]$$

这表示 ℓ^0、...、 ℓ^{m-1} 是 ℓ 的唯一一些不被 ℓ^m 整除的幂。此外，在 Presburger 算术模意义下，(6) 等价于

$$\forall x \left[U_\ell(x) \to \bigvee_{m=1}^{\lambda(n)} D_n(x - \ell^m) \right].$$

之所以用 $\bigwedge_k \neg D_n(x-k)$ 而不是 $D_n(x)$ 来定义公理，是因为 $\neg D_n(x-k)$ 是一个全称公式，而 $D_n(x)$ 含有一个存在量词。这样，我们也可以将 Carmichael(L) 用作对 $(\mathbb{Z},\ +,\ -,\ 0,\ 1,\ <,\ (\ell^{\mathbb{N}})_{\ell\in L})$ 的全称理论进行公理化的一部分。

我们指出，对于可计算的 $L \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 2}$，可以按照本小节第一段所述，使用 Carmichael 函数计算集合 Carmichael(L)。

Carmichael 公理将按以下方式使用：

引理 3.8。 设 $L \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 2}$，且设 $\mathcal{M} = (M, +, -, 0, 1, (A_\ell)_{\ell\in L})$ 是一个无挠阿贝尔群，并满足 $\mathcal{M} \models \mathrm{Carmichael}(L)$。设 $\ell \in L$, $a \in A_\ell \setminus \ell^{\mathbb{N}}$，并设 $\Delta \subseteq d_{\mathcal{M}}(a)$ 为有限集。则存在无穷多个 $n \in \mathbb{N}$，使得 ℓ^n 满足 Δ。特别地，Δ 等价于

$$\{D_{d_1}(x - \ell^n), \ldots, D_{d_m}(x - \ell^n)\}$$

对于某些素数幂 d_1、.....、 d_m 以及某个 $n \in \mathbb{N}$。

证明。 我们将 Δ 划分为两个子集：

$$\Delta_1 := \{D_{p^m}(x-k) : D_{p^m}(x-k) \in d_{\mathcal{M}}(a), p \mid \ell\}$$
$$\Delta_2 := \{D_{p^m}(x-k) : D_{p^m}(x-k) \in d_{\mathcal{M}}(a), p \nmid \ell\}$$

由于 $a \in A_\ell \setminus \ell^{\mathbb{N}}$，Carmichael 公理 (5) 表明， Δ_1 只包含形如 $D_{p^m}(x)$ 的公式，其中 $p \mid \ell$ 为素数且 $m \in \mathbb{N}$。取 $\mu \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $D_{p^m}(x) \in \Delta_1$，都有 $p^m \mid \ell^\mu$。

根据中国剩余定理， Δ_2中的所有公式的合取等价于某个 $d, k \in \mathbb{N}$ 的 $D_d(x-k)$。根据 Carmichael 公理（6），存在某个 $s \in \mathbb{N}$，使得 $\ell^s \equiv k$ (模 d)。现在，对于每个 $t \in \mathbb{N}$，我们也有 $\ell^{s+\lambda(d)t} \equiv k$ (模 d)，这意味着 $\ell^{s+\lambda(d)t}$ 满足 Δ_2。选取足够大的t，使得 $\lambda(d)t + n \geq \mu$，我们便得到 $\ell^{s+\lambda(d)t}$ 也满足Δ_1，从而完成证明。□

3.3. **不等式公理**。 最后，我们讨论全称理论所需的序关系公理 $(\mathbb{Z}, +, -, 0, 1, <, (\ell^{\mathbb{N}})_{\ell\in L})$。自然地，我们将使用离散有序群的公理。此外，我们还需要描述 $(\ell^{\mathbb{N}})_{\ell\in L}$ 中哪些不等式有解的公理。

定义 3.9 （不等式公理）。 对于 $L \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 2}$，令 Inequ($L$) 表示由以下语句组成的公理模式

$$\forall x \left[\left(\bigwedge_{i=1}^{n} U_{\ell_i}(x_i) \right) \to \neg \left(Cx > 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} D_d(x_i - k_i) \right) \right]$$

对于所有 $n \geq 1$、ℓ_1、……、$\ell_n \in L$、$C \in \mathbb{Z}^{m\times n}$、$d \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ 和 k_1、……、$k_n \in \{1, \ldots, d\}$，满足不存在 $x = (x_1, \ldots\ldots, x_n) \in \ell_1^{\mathbb{N}} \times \cdots \times \ell_n^{\mathbb{N}}$，使得对所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$，都有 $Cx > 0$ 且 $x_i \equiv k_i$（模 d）。

我们需要同时公理化不等式和同余式，原因在于幂中的不等式可能蕴含某些同余条件。例如，若 x、$y \in 2^{\mathbb{N}}$ 和 $x < y < 4x$，则要么 $x \equiv 1$、$y \equiv 2$（模 3），要么 $x \equiv 2$、$y \equiv 1$（模 3）。使用这些公理的方式是：如果 $(\mathcal{M}, (A_\ell)_{\ell\in L}) \models$ Inequ(L)，那么对于任意 ℓ_1、……、$\ell_n \in L$，一个线性齐次不等式与同余式系统在 $A_{\ell_1} \times \cdots \times A_{\ell_n}$中有解，当且仅当它在 $\ell_1^{\mathbb{N}} \times \cdots \times \ell_n^{\mathbb{N}}$中有解。

特别是，不等式公理蕴含以下更简单得多的性质：

定义 3.10 （基本不等式公理）。 对于 $L \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 2}$，令 BInequ($L$) 为由以下语句组成的公理模式

$$\forall x \forall y \left[\Big(U_\ell(x) \wedge U_\ell(y) \Big) \to \Big(x > 0 \wedge \neg(x < y < \ell \cdot x) \Big) \right]$$

对每个 $\ell \in L$。

我们指出，根据 [11], ，对于乘法独立的 k、$\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$，集合 Inequ($\{k, \ell\}$) 是可计算的。事实上，我们将在第 6.1 节证明，BInequ($\{k, \ell\}$) 和 Carmichael($\{k, \ell\}$) 已经共同蕴含 Inequ($\{k, \ell\}$)（在其他公理成立的前提下）。证明将紧密遵循前面提到的判定算法。我们猜想，对于 $|L| > 2$，类似结论也成立。[2]

4. Smallness

我们的公理化完备性的证明中，一个要素是：幂集在以下意义下是小的。

[2]这很可能需要额外假设 $(\log(\ell)^{-1})_{\ell\in L}$ 是 $\mathbb{Q}$-线性无关的，因为这是应用克罗内克逼近定理的必要条件。

定义 4.1（小性）。设 $\mathcal{L}$ 是一种语言， $\mathcal{M}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构。设 $X \subseteq M^m$ 和 $Y \subseteq M$。

- 对于 $n \in \mathbb{N}$，我们记
$$f\colon X \overset{n}{\to} Y$$
表示 f 是一个从 X 到 $\mathcal{P}(Y)$的函数，并且对每个 $x \in X$，都有 $|f(x)| \leq n$。我们称 f 为一个多值函数。
- 对于任意 $f\colon X \to \mathcal{P}(Y)$，我们将 f 的图定义为
$$G_f := \{(x, y) \in X \times Y : y \in f(x)\}$$
以及集合 $S \subseteq X$ 的像为
$$f(S) := \bigcup_{x \in S} f(x).$$
- 若 X 与 Y 在 $\mathcal{M}$中可定义，则称 f 在 $\mathcal{M}$ 中可定义，如果G_f 在 $\mathcal{M}$中可定义。
- 设 $S \subseteq M$。若对某个 m、 $n \in \mathbb{N}$以及某个可定义多值函数 $f\colon M^m \overset{n}{\to} M$，有 $f(S^m) = M$，则称 S在 $\mathcal{M}$中大 。否则，称 S 在 $\mathcal{M}$中小 。

小性这一概念也最早在 [17]中引入。他们证明：若 K 是代数闭域，且 $G \leq K^\times$ 满足Mann性质，则 G 在 K [17, 中为小，见引理6.1]。本节的主要目标是对$\mathrm{Th}(\mathbb{Z}, +)$的模型证明同样的陈述。首先，我们利用量词消去来找出小性的一个更具体的条件。

引理 4.2. 设 $\mathcal{M}$ 是$\mathrm{Th}(\mathbb{Z}, +, -, 0, 1, (D_n)_{n\geq 2})$的模型，并设 $S \subseteq M$在 $\mathcal{M}$中为大。则 M 是形如下列形式的集合的有限并
$$\{y \in M : \exists x_1, \ldots, x_m \in S\colon a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m = by + c\},$$
其中 $m \geq 1$, $a_1, \ldots, a_m, b \in \mathbb{Z}$满足 $b \neq 0$，且 $c \in M$。

证明。由于 S 是大集，存在一个可定义多值函数 $f\colon \mathbb{Z}^m \overset{n}{\to} \mathbb{Z}$，满足 $f(S^m) = \mathbb{Z}$。令 $\varphi(x, y, d)$ 为定义 f 的图的公式，其中 d 是 M 中的一个参数元组。这意味着对于所有 $s \in M^m$ 和 $t \in M$，当且仅当 $\mathcal{M} \models \varphi(s, t, d)$ 时，有 $t \in f(s)$。由于 $\mathcal{M}$ 具有量词消去性质，我们可以假设 $\varphi(x, y, d)$ 具有如下形式：$\bigvee_i \bigwedge_j \theta_{i,j}(x, y, d)$，其中每个 $\theta_{i,j}$ 都是一个原子公式或一个原子公式的否定。因此，每个 $\theta_{i,j}(x, y, d)$ 都等价于以下三种形式之一，其中 $a_1, \ldots, a_m, b \in \mathbb{Z}$ 和 $c \in M$：

(i) $\sum_{k=1}^m a_k \cdot x_k = b \cdot y + c$
(ii) $\sum_{k=1}^m a_k \cdot x_k \neq b \cdot y + c$
(iii) $D_p(\sum_{k=1}^m a_k x_k + by + c)$

请注意，我们无需单独考虑 (iii) 的否定，因为
$$\mathcal{M} \models \neg D_p(x + k) \leftrightarrow \bigvee_{\substack{1 \leq u < p \\ u \neq k}} D_p(x + u).$$

定义 $f_{i,\ j}(s) := \{t \in M : \mathcal{M} \models \theta_{i,\ j}(s,\ t)\}$ 且 $f_i(s) = \bigcap_j f_{i,\ j}(s)$，其中 $s \in S^m$。因此我们有 $\bigcup_i f_i(s) = f(s)$。我们可以假设，对于每个 i，都存在某个 $s \in S^m$ 使得 $f_i(s) \neq \emptyset$，否则这个指标 i 就无关紧要。

对于固定的 i，设 J_1, J_2, J_3 分别为使得 $\theta_{i,j}$ 分别具有形式 (i)、(ii)、(iii) 的指标 j 的集合。为推出矛盾，假设 $J_1 = \emptyset$。选取某个 $s \in S^m$，使得 $f_i(s) \neq \emptyset$。则对于 $j \in J_2$，集合 $f_{i,j}(s)$ 是余有限的，因此 $\bigcap_{j\in J_2} f_{i,j}(s)$ 也是余有限的。此外，集合 $\bigcap_{j\in J_3} f_{i,j}(s)$ 由某个线性同余方程组的解组成，因而为空或无限。所以 $f_i(s) = \bigcap_{j\in J_2\cup J_3} f_{i,j}(s)$ 为空或无限。由于 $f_i(s) \subseteq f(s)$ 且 $|f(s)| \leq n$，集合 $f_i(s)$ 必定有限，从而为空，这与我们的假设矛盾。此外，假设对所有 $j \in J_1$，公式 $\theta_{i,j}$ 中的b都等于零。则对所有j 以及所有 $s \in S^m$，$f_{i,j}(s)$ 为空或无限，这意味着我们得到类似的矛盾。

因此，我们已经证明，对于每个 i，都存在某个 $j(i)$，使得 $\theta_{i,\ j(i)}(x,\ y)$ 等价于 $\sum_{k=1}^m a_{i,\ k}x_k = b_i y + c_i$，其中 $b_i \neq 0$。因此，

$$\begin{aligned} M = f(S^m) &= \bigcup_{x\in S^m} \bigcup_i \bigcap_j \{y \in M : \mathcal{M} \models \theta_{i,j}(x, y, c_{i,j})\} \\ &\subseteq \bigcup_{x\in S^m} \bigcup_i \{y \in M : \mathcal{M} \models \theta_{i,j(i)}(x, y, c_{i,j(i)})\} \\ &= \bigcup_i \left\{ y \in M : \exists x_1, \ldots, x_m \in S\colon \sum_{k=1}^m a_{i,k}x_k = b_i y + c_i \right\} \subseteq M. \end{aligned}$$

□

接下来，我们要证明，在 $(\mathbb{Z},\ +)$ 上，小性等价于以下来自 [7] 的概念。

定义 4.3 ([7, 定义 2.4])。设 $S \subseteq \mathbb{Z}$。定义

$$\textstyle\sum_n(S) := \{s_1 + \cdots + s_k : k \leq n, s_1, \ldots, s_k \in S\}$$

对于 $n \geq 1$。如果对所有 $n \geq 1$，S ($\pm S$) 都不包含 $\mathbb{Z}$ 的任何非平凡子群，其中 $\pm S := \{x, -x\colon\ x \in S\}$，则称集合 S 是充分稀疏的。

引理 4.4。设 $S \subseteq \mathbb{Z}$ 充分稀疏，且 $z \in \mathbb{Z}$。那么 $S \cup \{z\}$ 充分稀疏。

证明。假设 $S\cup\{z\}$ 不充分稀疏，因此对于某些 b、$n > 0$，有 $b\mathbb{Z} \subseteq \sum_n(\pm(S\cup\{z\}))$。这意味着，对于每个 $y \in \mathbb{Z}$，都存在 k_1、……、k_m、$k \in \mathbb{Z}$，以及 x_1、……、$x_m \in S$，使得 $|k_1| + \cdots + |k_m| + |k| \leq n$，并且

$$by = k_1x_1 + \cdots + k_mx_m + kz.$$

结论显然对 $S \subseteq \{0\}$ 成立，因此假设存在 $s \in S \setminus \{0\}$。那么，上述方程等价于

$$(bs) \cdot y = (k_1s) \cdot x_1 + \cdots + (k_ms) \cdot x_m + (kz) \cdot s.$$

令 $k'_i := k_i s$ 对于 $i \in \{1,\dots,m\}$，并令 $k'_{m+1} := kz$ 以及 $x_{m+1} := s$，这表明对于每个 $y \in \mathbb{Z}$，都存在 k'_1、……、$k'_{m+1} \in \mathbb{Z}$、x_1、……、$x_{m+1} \in S$，使得

$$(bs)\cdot y = k'_1 x_1 + \dots + k'_{m+1} x_{m+1}.$$

因此，对于 $N := n \cdot \max(|s|, |z|)$，我们有 $bs\mathbb{Z} \subseteq \sum_N(\pm S)$，这意味着$S$并非充分稀疏。□

命题4.5。 集合 $S \subseteq \mathbb{Z}$ 在 $(\mathbb{Z}, +, -, 0, 1)$ 中是小的，当且仅当它充分稀疏。

证明。 假设 S 是小的。令 $f\colon \mathbb{Z}^m \xrightarrow{n} \mathbb{Z}$ 为如下给出的多值函数

$$f(x_1,\dots,x_n) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i : k \le n, \varepsilon_i \in \{1,-1\} \right\}.$$

显然，这在多值意义下是可定义的，并且 $f(S) = \sum_n(\pm S)$。S 的小性意味着 $\sum_n(\pm S)$也很小。由于 $\mathbb{Z}$ 的每个非平凡子群都是大的，集合 $\sum_n(\pm S)$不可能包含其中任何一个。因此，S 充分稀疏。

现在假设 S 是大集。那么根据引理 4.2，存在$a_{i,j}, b_i, c_i \in \mathbb{Z}$，满足 $b_i \neq 0$，对于 $i \in \{1,\dots,n\}$, $j \in \{1,\dots,m\}$，使得 $\mathbb{Z} = \bigcup_{i=1}^n S_i$，其中

$$S_i = \left\{ y \in \mathbb{Z} : \exists x_1,\dots,x_m \in S\colon \sum_{j=1}^{m} a_{i,j}x_j = b_i y + c_i \right\}.$$

令 $d_i := |c_i| + \sum_{j=1}^m |a_{i,j}|$ 且 $S' := S \cup \{1\}$。那么对每个 $i \in \{1,\dots,n\}$，都有 $b_i S_i \subseteq \sum_{d_i}(\pm S')$。因此，令 $b := \prod_{i=1}^n b_i$ 且 $d := |b| \cdot \max_i d_i$，可得

$$b\mathbb{Z} = \bigcup_{i=1}^{n} bS_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \frac{b}{b_i} \sum\nolimits_{d_i}(\pm S') \subseteq \sum\nolimits_{d}(\pm S').$$

因此，S' 并非充分稀疏。根据引理 4.4，S 也并非充分稀疏。□

推论 4.6. 如果 $S \subseteq \mathbb{Z}$ 具有*Mann*性质，那么 S 在$(\mathbb{Z}, +, -, 0, 1)$中是小集。特别地，对于任意 $\ell_1, \dots, \ell_m \in \mathbb{Z}$，集合 $\bigcup_{i=1}^m \ell_i^{\mathbb{N}}$在$(\mathbb{Z}, +, -, 0, 1)$ 中是小集。

证明。 根据 [17, 推论5.7], , Mann性质蕴含以下统一版本的Mann性质，称为[7, 定义3.2]中的加权和性质： 对于所有 $k \ge 1$，都存在某个 $n \ge 0$，使得对于任意$r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$，方程 $x_1 + \dots + x_k = r$ 在 S中至多有 n 个非退化解。因此，根据 [7, 引理3.3], ， S 是充分稀疏的，从而根据命题4.5，它在$(\mathbb{Z}, +, -, 0, 1)$中是小的。□

小性的概念的优势在于，它对于定义域大于 $\mathbb{Z}$的模型也有意义。我们证明，在这种情况下，小性可由 Mann 公理推出。

引理4.7. 设 $S \subseteq \mathbb{Z}$，并设 $\mathcal{M} = (M, +, -, 0, 1)$ 为一个无挠阿贝尔群。此外，设 $A \subseteq M$ 满足：对于所有的 $a_1, \ldots, a_m, b \in \mathbb{Z}$ 和 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in A$，若 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ 是 $a_1x_1 + \cdots + a_mx_m = b$的一个非退化解，则 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in S$。那么对于任意 $c \in M$，集合

$$\langle A \setminus \mathbb{Z} \rangle^{\mathrm{div}} \cap (c + \mathbb{Z})$$

至多包含一个元素。

证明。设

$$a_1\alpha_1 + \cdots + a_m\alpha_m = b(c + k)$$
$$a'_1\alpha'_1 + \cdots + a'_n\alpha'_n = b'(c + k')$$

对某些 $a_1, \ldots, a_m, a'_1, \ldots, a'_n, b, b'\ k, k' \in \mathbb{Z}$，满足 $b, b' \neq 0$ 且 $k \neq k'$，以及某些 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_n \in A \setminus \mathbb{Z}$。那么，从第二个方程的 b 倍中减去第一个方程的 b' 倍，得到

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b' \alpha_i - \sum_{j=1}^{n} a'_j b \alpha'_j = bb'(k' - k) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

这与我们的假设矛盾（去掉所有和为零的部分后，即可得到一个非退化解）。
□

命题 4.8. 设 $S \subseteq \mathbb{Z}$ 满足 *Mann*性质，并设 $\mathcal{M}$ 是$\mathrm{Th}(\mathbb{Z}, +, -, 0, 1)$的一个模型。此外，设 $A \subseteq M$满足：对于所有$a_1, \ldots, a_m, b \in \mathbb{Z}$和 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in A$，若 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$是 $a_1x_1 + \cdots + a_mx_m = b$的一个非退化解，则 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in S$。那么， A在 $\mathcal{M}$中是小的。

证明。 如果 A在 $\mathcal{M}$中是大的，那么根据引理 4.2，存在 $a_{ij} \in \mathbb{Z}$、 $b_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$和 $c_i \in M$，使得

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ y \in M : \exists x_1, \ldots, x_{m_i} \in A \colon \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}x_j = b_i y + c_i \right\}.$$

特别地,

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ y \in \mathbb{Z} : \exists x_1, \ldots, x_{m_i} \in A \colon \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}x_j = b_i y + c_i \right\}.$$

要生成一个整数 y，我们需要 $\sum_j a_{ij}x_j \in c_i + \mathbb{Z}$。令

$$I := \left\{ i \in \{1, \ldots, n\} : \langle A \setminus \mathbb{Z} \rangle^{\mathrm{div}} \cap (c_i + \mathbb{Z}) \neq \emptyset \right\}.$$

对于每个 $i \in I$，令 s_i 为 $\langle A \setminus \mathbb{Z} \rangle^{\mathrm{div}} \cap (c_i + \mathbb{Z})$ 中唯一的元素（参见引理4.7）。这意味着，对于所有 $y \in \mathbb{Z}$，若

$$\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\alpha_j = b_i y + c_i$$

对于某些 α_1、...、 $\alpha_{m_i} \in A$，则存在一个子集 $J \subseteq \{1, \dots, m_i\}$，即 $J = \{j : \alpha_j \in \mathbb{Z}\}$，使得

$$\sum_{j \notin J} a_{ij}\alpha_j = s_i \quad \text{and} \quad \sum_{j \in J} a_{ij}\alpha_j = b_i y + c_i - s_i.$$

因此我们已经证明

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{i,J} \left\{ y \in \mathbb{Z} : \exists \overline{x} \in S^{|J|} \colon \sum_{j \in J} a_{ij}x_j = b_i y + (c_i - s_i) \right\}$$

其中的并集遍历所有 $i \in I$ 和所有 $J \subseteq \{1, \dots, m_i\}$。由于对于所有 $i \in I$，$c_i - s_i \in \mathbb{Z}$，这与 S 在（$\mathbb{Z}$，$+$，$-$，0，1）中是小的这一点相矛盾，见推论 4.6。□

5. Complete Theory Without Order

在本节中，固定一个由两两乘法独立数构成的集合 $L \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 2}$ 。

定义 5.1。令 $T(L)$ 为包含以下公理模式的 $\mathcal{L}$-理论：

(A1) 无挠阿贝尔群的公理，以及 $0 \neq 1$，(A2) Presburger 同余公理：

$$\forall x \bigvee_{j=1}^{n} \left(D_n(x+j) \wedge \bigwedge_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \neg D_n(x+k) \right) \quad \text{for every } n \geq 2,$$

(A3) $U_\ell(1) \wedge \forall x(U_\ell(x) \leftrightarrow U_\ell(\ell \cdot x))$ 对每个 $\ell \in L$ 都成立，(A4) Mann 公理 Mann(L)（见定义 3.3），(A5) Carmichael 公理 Carmichael(L)（见定义 3.7）

.

如第 3 节所述，我们有 $(\mathbb{Z}, +, -, 0, 1, (\ell^{\mathbb{N}})_{\ell \in L}) \models T(L)$。

5.1. **来回法**。现在我们通过构造一个来回系统，证明这种公理化是完备的。

引理 5.2。设 $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$（$L$）是某个不可数基数 κ 下的 κ-饱和结构。此外，设 $M' \subseteq M$和 $N' \subseteq N$是基数小于 κ 的子集，且 f： $M' \to N'$是一个部分同构。那么，对于任意 $\ell \in L$ 和任意 $\alpha \in A_\ell \setminus \mathbb{Z}$，部分类型

$$p(x) := d_{\mathcal{M}}(\alpha) \cup \{U_\ell(x)\} \cup \{x \neq f(g) \colon g \in M'\}$$

在 $\mathcal{N}$ 中实现。

证明。由于 $\mathcal{N}$是 κ-饱和的，且 $p(x)$ 是一个带有 $|M'| < \kappa$ 个参数的类型，因此只需证明 $p(x)$ 是有限可满足的。设 Δ为 $d_{\mathcal{M}}(g)$ 的一个有限子集，并设 Ψ 为 $p(x)$ 的一个有限子集，且 $\Psi \cap d_{\mathcal{M}}(\alpha) = \emptyset$。如果在 $\ell^{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{N}$ 中存在 Δ 的无穷多个实现 $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$，那么由于 Ψ 仅包含有限多个形如 $x \neq f(g)$ 的公式，除有限多个之外的所有 α_i

都必须满足 Ψ。因此，只需每个有限的 $\Delta \subseteq d_{\mathcal{M}}(\alpha)$ 都被 $\ell^{\mathbb{N}}$ 中的无穷多个元素所满足。根据引理 3.8，这可由 Carmichael 公理得出。□

引理 5.3。设 $\mathcal{M} \models \mathrm{Th}(\mathbb{Z}, +)$，设 κ 为一个不可数基数，并设$(\mathcal{N}, (B_\ell)_{\ell \in L}) \models T(L)$ 是 κ-饱和的。设 $\alpha \in M$，且设 $N' \subseteq N$ 是一个基数小于 κ 的子集。那么存在 $\beta \in N \setminus \langle N', B\rangle^{\mathrm{div}}$，实现同余类型 $d_{\mathcal{M}}(\alpha)$。

证明。设 $p(x)$ 是由以下公式组成的类型

$$\nexists y_1, \ldots, y_n \left(\bigwedge_{i=1}^{n} U_{\ell_i}(y_i) \wedge a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n = bx + c \right)$$

对所有 $n \geq 1$, $\ell_1, \ldots, \ell_n \in L$, $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 和 $c \in N'$ 均成立。于是 $N \setminus \langle N', B\rangle^{\mathrm{div}}$ 恰好是 $\mathcal{N}$ 中 $p(x)$ 的实现集合。根据命题 4.8 和引理 4.2，$\mathcal{N}$ 中 $p(x)$ 的每个有限子集都可实现。因此，由饱和性可知，$p(x)$ 在 $\mathcal{N}$ 中实现，这表明 $N \setminus \langle N', B\rangle^{\mathrm{div}} \neq \emptyset$。

我们想要找到 $\beta \in N$ $d_{\mathcal{M}}(\alpha) \cup p(x)$ 的一个实现。令 $\Delta \subseteq d_{\mathcal{M}}(\alpha)$ 和 $\Psi \subseteq p(x)$ 为有限集。取 $\beta' \in N \setminus \langle N', B\rangle^{\mathrm{div}}$。由于 $\langle N', B\rangle^{\mathrm{div}}$ 是包含 1 的 N 的真子群，因此对于每个 $k \in \mathbb{Z}$，都有 $\beta' + k \notin \langle N', B\rangle^{\mathrm{div}}$；换句话说，对于每个 $k \in \mathbb{Z}$，$\beta' + k$ 都满足 Ψ。根据同余公理 (A2)，存在某个 $k \in \mathbb{Z}$，使得 $\beta' + k$ 满足 Δ。这说明 $d_{\mathcal{M}}(\alpha) \cup p(x)$ 有限可满足，因而由饱和性实现。□

定义 5.4。令 $(\mathcal{M}, (A_\ell)_{\ell \in L}) \models T(L)$，并令 κ 为一个不可数的 e 基数。然后我们将 $\mathrm{Sub}_\kappa(\mathcal{M})$ 定义为满足以下性质的 $\mathcal{M}$ 的所有子群 M' 的集合：

(i) $1 \in M'$。(ii) $|M'| < \kappa$。(iii) M' 在 $\mathcal{M}$ 中是可除闭的。(iv) 对任意 a_1、……、$a_m \in A \setminus M'$ 以及 c_1、……、$c_m \in \mathbb{Z}$，若 $\sum_{i=1}^{m} c_i a_i \in M'$，则有 $\sum_{i=1}^{m} c_i a_i = 0$。

命题 5.5。设 κ 是一个不可数基数，并设 $(\mathcal{M}, (A_\ell)_{\ell \in L})$, $(\mathcal{N}, (B_\ell)_{\ell \in L})$ 是 $T(L)$ 的 κ-饱和模型。那么

$$\mathcal{I} := \left\{ f : \quad M' \to N' \text{部分同构：} \quad M' \in \mathrm{Sub}_\kappa(\mathcal{M}) \quad N' \in \mathrm{Sub}_\kappa(\mathcal{N}) \right\}$$

是一个非空的来回系统。

证明。我们首先证明 $\mathcal{I} \neq \emptyset$。我们有 $\mathbb{Z} \in \mathrm{Sub}_\kappa(\mathcal{M})$ 和 $\mathbb{Z} \in \mathrm{Sub}_\kappa(\mathcal{N})$，其中定义 5.4 的性质 (i)–(iii) 显然成立，而性质 (iv) 则由 Mann 公理推出。因此，恒等映射 $\mathrm{id} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 是 $\mathcal{I}$的一个元素。

现在我们给出前向方向的证明；后向方向的证明类似。设 $M' \in \mathrm{Sub}_\kappa(\mathcal{M})$ 且 $N' \in \mathrm{Sub}_\kappa(\mathcal{N})$，并设 $f : M' \to N'$

是 $\mathcal{I}$ 中的一个部分同构。设 $\alpha \in M \setminus M'$。通过令 $F(\alpha) = \beta$，我们可以按以下方式自然地将 f 扩展为映射 F：

$$\begin{aligned} F\colon \langle M', \alpha\rangle^{\mathrm{div}} &\to \langle N', \beta\rangle^{\mathrm{div}} \\ \frac{g + k\alpha}{n} &\mapsto \frac{f(g) + k\beta}{n} \qquad \text{for } g \in M', k, n \in \mathbb{Z}, n > 0. \end{aligned}$$

只要 $f(g) + k\beta$ 在 $\mathcal{N}$ 中能被 n 整除，当且仅当 $g + k\alpha$ 在 $\mathcal{M}$ 中能被 n 整除，这个映射就是良定义且满射的。由于 f 是一个部分同构，我们有 $d_{\mathcal{M}}(g) = d_{\mathcal{N}}(f(g))$，因此只需满足$d_{\mathcal{M}}(\alpha) = d_{\mathcal{N}}(\beta)$。我们的目标是证明，可以选取 $\beta \in N \setminus N'$，使得这个同余类型的等式成立，并且得到的 F在 $\mathcal{I}$中是一个部分同构。显然，若 F良定义，它就是一个群同态。它也是单射：设 a 属于 F 的核。令$a = \frac{g+k\alpha}{n}$表示某个 $g \in M'$，且 $k,\ n \in \mathbb{Z}, n > 0$。现在

$$F(a) = \frac{f(g) + k\beta}{n} = 0$$

这意味着 $f(g) = -k\beta$。如果 k 不为零，就会得到矛盾$\beta \in N'$，因为 $f(g) \in N'$，且 N' 在 N 中可除闭。因此 $k = 0$，这意味着 $f(g) = 0$，进而得到 $g = 0$，因为 f 是部分同构。总之，我们有 $a = 0$，这表明 F 是单射，因而是群同构。

在接下来的论证中，我们分三种情况讨论：

情况 1。 $\alpha \in A_\ell$ 对某个 $\ell \in L$成立。

由引理 5.2，我们可以找到 $\beta \in B_\ell \setminus N'$，使得 $d_{\mathcal{M}}(\alpha) = d_{\mathcal{N}}(\beta)$。令 $a \in \langle M', \alpha\rangle^{\mathrm{div}}$，并像之前一样将其记作 $a = \frac{g+k\alpha}{n}$。令 $j \in L$。接下来只需证明，$a \in A_j$ 当且仅当 $F(a) \in B_j$。我们只需证明一个方向，另一个方向将 F 替换为 F^{-1}后可类似证明。设 $a \in A_j$。若 $k = 0$，则 $a \in M'$，因此结论成立，因为 f 是部分同构。现在设 $k \neq 0$。于是 $k\alpha - na = -g \in M'$，而 α，$a \in A \setminus M'$。因此，根据定义 5.4 (iv)，我们有 $g = 0$，从而$na = k\alpha$。现在若 $j \neq \ell$，则 Mann公理意味着 a 和 α 是 $j^{\mathbb{N}}$ 和 $\ell^{\mathbb{N}}$中的一些硬编码解，这与 a，$\alpha \notin \mathbb{Z}$矛盾。因此$j = \ell$；此时 Mann公理意味着存在 $s, t \in \ell^{\mathbb{N}}$，使得 $sa = t\alpha$。因此，由 (A3) 可得 $F(a) = \frac{t}{s}\beta \in B_\ell$。

因此，我们已经证明 F 是一个部分同构。最后，为了证明 $F \in \mathcal{I}$，我们需要验证 $\langle M',\ \alpha\rangle^{\mathrm{div}} \in \mathrm{Sub}_\kappa(\mathcal{M})$。定义 5.4 的条件 (i)–(iii) 显然成立。为了验证条件 (iv)，设 $a_1, \dots,\ a_m \in A \setminus \langle M',\ \alpha\rangle^{\mathrm{div}}$ 以及 $c_1, \dots,\ c_m \in \mathbb{Z}$，不失一般性，我们可以假设对所有非空的 $I \subseteq \{1, \dots, m\}$，都有 $\sum_{i\in I} c_i a_i \neq 0$。假设 $\sum_{i=1}^m c_i a_i \in \langle M',\ \alpha\rangle^{\mathrm{div}}$，于是可写作 $\sum_{i=1}^m c_i a_i = \frac{g+k\alpha}{n}$，其中

$g \in M'$ 以及 $k, n \in \mathbb{Z}$，满足 $n \neq 0$。重新整理可得

$$\left(\sum_{i=1}^{m} n c_i a_i\right) - k\alpha = g.$$

由于 $g \in M'$和 $\alpha \notin M'$，我们可以对$M' \in \mathrm{Sub}_\kappa(\mathcal{M})$应用定义 5.4 的条件 (iv)，从而得到 $g = 0$，因此

$$\sum_{i=1}^{m} n c_i a_i = k\alpha.$$

若 $k \neq 0$，则 Mann 公理蕴含：对于所有 $i \in \{1, \ldots, m\}$，都存在s，$t \in \mathbb{Z}$使得 $t a_j = s\alpha$。因此我们有 $a_i = \frac{s}{t}\alpha \in \langle M',\ \alpha\rangle^{\mathrm{div}}$，这与我们的假设矛盾。因此，$k = 0$ 且 $\sum_{i=1}^{m} c_i a_i = 0$，如所求。

情形 2。 $\alpha \in \langle M', A\rangle^{\mathrm{div}}$。

此情形是前一情形的简单推广。选取 $a_1, \ldots, a_m \in A \setminus M'$使得 $\alpha \in \langle M',\ a_1,\ \ldots,\ a_m\rangle^{\mathrm{div}}$。现在，我们可以将第一种情形应用于 $a_1, \ldots, a_m$共 m次，从而得到一个从$\langle M',\ a_1,\ \ldots,\ a_m\rangle^{\mathrm{div}}$到 $\mathcal{N}$的部分同构 $F \in \mathcal{I}$。

情形 3。 $\alpha \notin \langle M', A\rangle^{\mathrm{div}}$。

由引理 5.3，存在 $\beta \in N \setminus \langle N',\ B\rangle^{\mathrm{div}}$，使得 $d_{\mathcal{M}}(\alpha) = d_{\mathcal{N}}(\beta)$。还需证明所得的 F属于 $\mathcal{I}$。令 $a \in \langle M',\ \alpha\rangle^{\mathrm{div}}$，我们仍将其记作 $a = \frac{g + k\alpha}{n}$。假设 $a \in A_\ell$。那么，~~若 $k \neq 0$~~，便会得到矛盾 $\alpha = \frac{na - g}{k} \in \langle M',\ A\rangle^{\mathrm{div}}$。因此 $k = 0$，这意味着~~ a~~ $\in M'$，从而有 $F(a) = f(a) \in B_\ell$，因为 f是一个部分同构。反向蕴含，即 $F(a) \in B_\ell$蕴含 $a \in A_\ell$，同样可通过考察 F^{-1}得出。

还需证明 $\langle M',\ \alpha\rangle^{\mathrm{div}} \in \mathrm{Sub}_\kappa(\mathcal{M})$。定义 5.4 的条件 (i)–(iii) 同样显然。为验证 (iv)，设 a_1、…、 $a_n \in A \setminus \langle M',\ \alpha\rangle^{\mathrm{div}}$以及 c_1、…、 $c_n \in \mathbb{Z}$ 满足 $\sum_{j=1}^{m} c_j a_j \in \langle M',\ \alpha\rangle^{\mathrm{div}}$。这意味着存在 $g \in M'$ 和 k、 $n \in \mathbb{Z}$、 $n \neq 0$，使得 $\sum_{j=1}^{m} c_j a_j = \frac{g + k\alpha}{n}$。同样， $k \neq 0$ 将意味着

$$\alpha = \frac{-ng + \sum_{j=1}^{m} c_j a_j}{k} \in \left\langle M', A\right\rangle^{\mathrm{div}},$$

这与矛盾相悖。因此 $k = 0$，从而 $\sum_{j=1}^{m} c_j a_j \in M'$，这意味着 $\sum_{j=1}^{m} c_j a_j = 0$，因为 $M' \in \mathrm{Sub}_\kappa(\mathcal{M})$。□

推论 5.6. 理论 $T(L)$ 是完备的。

证明. 设 $\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{N}$ 为 $T(L)$ 的 κ-饱和模型。由命题 5.5， $\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{N}$之间存在一个来回系统，这意味着 $\mathcal{M}$与 $\mathcal{N}$ 是初等等价的。

现在令 $\mathcal{M}'$、 $\mathcal{N}' \models T(L)$ 任意。则存在 κ-饱和的，$\mathcal{N} \models T(L)$，使得 $\mathcal{M}'$ 是 $\mathcal{M}$ 的初等子结构，且 $\mathcal{N}'$ 是 $\mathcal{N}$ 的初等子结构。由于 $\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{N}$ 初等等价，因此 $\mathcal{M}'$ 与 $\mathcal{N}'$ 也初等等价。□

推论 5.7。 令 k、 $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ 乘法独立。则结构 $(\mathbb{Z}, +, k^{\mathbb{N}}, \ell^{\mathbb{N}})$ 是可判定的。

证明。 根据推论 5.6，理论 $T(\{k, \ell\})$ 完全公理化了 $(\mathbb{Z}, +, -, 0, 1, k^{\mathbb{N}}, \ell^{\mathbb{N}})$ 的理论。正如第 3 节（尤其是引理3.6）所示，理论 $T(\{k, \ell\})$ 也是可计算的。因此，$(\mathbb{Z}, +, -, 0, 1, k^{\mathbb{N}}, \ell^{\mathbb{N}})$ 是可判定的。□

5.2. **量词消去**。 令 Σ 为所有形如以下形式的 $\mathcal{L}$-公式的布尔组合

$$\exists y \left(\bigwedge_{i=1}^{n} U_{\ell_i}(y_i) \wedge \varphi(x, y) \right),$$

其中 x 和 $y = (y_1, \ldots, y_n)$ 是变量元组， $\ell_1, \ldots, \ell_n \in L$，而 $\varphi(x, y)$ 是语言 $\{+, -, 0, 1\} \cup \{D_k$ 中的无量词公式： $k \in \mathbb{N}\}$。

定理 5.8。 模去 $T(L)$后，每个 $\mathcal{L}$-公式都等价于一个属于 Σ 的公式。

证明。 设 κ 是一个不可数基数，设 $(\mathcal{M}, (A_\ell)_{\ell \in L})$、$(\mathcal{N}, (B_\ell)_{\ell \in L})$ 是 κ-饱和模型，它们都是 $T(L)$ 的模型；再设 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in M^m$ 和 $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m) \in N^m$ 是满足来自 Σ 的相同公式的元组。我们需要证明 α 和 β 具有相同的无参数类型。根据命题 5.5，只需找到 $M' \in \mathrm{Sub}_\kappa(\mathcal{M})$、 $N' \in \mathrm{Sub}_\kappa(\mathcal{N})$ 以及一个部分同构 $f\colon M' \to N'$，使得对于每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$， $\alpha_i \in M'$、 $\beta_i \in N'$ 且 $f(\alpha_i) = \beta_i$。

通过重新排列元组 α 和 β，我们可以假设前 r 个坐标 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ 构成 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ 中关于 A 线性无关的极大子集，其中 $r \in \{0, \ldots, m\}$。现在， $\{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$ 是 $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ 中关于 B 线性无关的极大子集，因为这可以用 Σ 中的公式来表达。令 $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ 满足

$$1, \alpha_1, \ldots, \alpha_r, a_1, \ldots, a_n \text{ are linearly independent}$$

并且对每个 $i \in \{r+1, \ldots, m\}$，都有

$$\alpha_i = \frac{z_i + c_{i1}\alpha_1 + \cdots + c_{ir}\alpha_r + d_{i1}a_1 + \ldots d_{in}a_n}{e_i},$$

其中 z_i、 c_{i1}、……、 c_{ir}、 d_{i1}、……、 $d_{in} \in \mathbb{Z}$，且 $e_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$。令 $p(y)$ 为由 $d_{\mathcal{M}}(a)$ 以及以下公式构成的类型

$$\beta_i = \frac{z_i + c_{i1}\beta_1 + \cdots + c_{ir}\beta_r + d_{i1}y_1 + \ldots d_{in}y_n}{e_i} \quad \text{and}$$

$$0 \neq z + s_1\beta_1 + \cdots + s_r\beta_r + t_1y_1 + \cdots + t_ny_n$$

对于每个 $i \in \{r+1, \ldots, m\}$ 以及每个 $(z, s, t) \in \mathbb{Z}^{1+r+n} \setminus \{0\}$。此外，令 $\ell_1, \ldots, \ell_n \in L$ 满足对于每个 $a_i \in A_{\ell_i}$，并令 $\theta(y)$ 为公式 $\bigwedge_{i=1}^{n} U_{\ell_i}(y_i)$。现在，若 $\varphi(\beta, y)$ 是 $p(y)$ 中有限多个公式的合取，那么定义公式 $\psi(x)$ 如下

$$\exists y \big(\theta(y) \wedge \varphi(x, y) \big)$$

属于 Σ。因此，由于 $\mathcal{M} \models \varphi(\alpha,\ a)$，我们有 $\mathcal{M} \models \psi(\alpha)$，进而有 $\mathcal{N} \models \psi(\beta)$。这表明类型 $p(y) \cup \{\theta(y)\}$ 在 $\mathcal{N}$ 中有限可满足。根据饱和性，它有一个实现 $b = (b_1,\ \ldots, b_n) \in B^n$。

现在令

$$M' := \langle 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_r, a_1, \ldots, a_n \rangle^{\mathrm{div}},$$
$$N' := \langle 1, \beta_1, \ldots, \beta_r, b_1, \ldots, b_n \rangle^{\mathrm{div}},$$

并定义群同态 $f\colon\ M' \to N'$，使得 $f(1) = 1$，$f(\alpha_i) = \beta_i$，当 $i \in \{1, \ldots, r\}$ 时，以及 $f(a_i) = b_i$，当 $i \in \{1, \ldots, n\}$时。由于 b 满足 $p(y)$，我们还有

$$\beta_i = \frac{z_i + c_{i1}\beta_1 + \cdots + c_{ir}\beta_r + d_{i1}b_1 + \ldots d_{in}b_n}{e_i}$$

因此 $f(\alpha_i) = \beta_i$，当 $i \in \{r+1, \ldots, m\}$时。由于两者都

$$(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_r, a_1, \ldots, a_n) \quad \text{and} \quad (1, \beta_1, \ldots, \beta_r, b_1, \ldots, b_n)$$

线性无关，f 是一个群同构。现在证明 f 也是一个 $\mathcal{L}$-同态。令 $g \in M'$，记作

$$g = \frac{z + u_1\alpha_1 + \cdots + u_r\alpha_r + v_1a_1 + \cdots + v_na_n}{w}$$

其中 z、u_1、……、u_r、v_1、……、$v_n \in \mathbb{Z}$ 和 $w \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$。如果对某个 $\ell \in L$有 $g \in A_\ell$，那么

$$u_1\alpha_1 + \cdots + u_r\alpha_r = wg - z - v_1a_1 - \cdots - v_na_n \in \langle A \rangle .$$

由于 α_1、……、α_r 在 A上线性无关，因此有 $u_1 = \cdots = u_r = 0$，从而 $wg = z + v_1a_1 + \cdots + v_na_n$。如果 $g \in \mathbb{Z}$，那么 $f(g) = g \in B_\ell$，于是证毕。否则，必有某个 $i \in \{1, \ldots, n\}$使得 $v_i \neq 0$。应用 Mann 公理可得，对某个 $t \in \mathbb{Z}$ 有 $g = \ell^t a_i$，从而 $f(g) = \ell^t b_i$。因此，(A3) 蕴含 $g \in B_l$，正如所求。反向蕴含可通过考察 f^{-1}类似地证明。

最后，我们证明 $M' \in \mathrm{Sub}_\kappa(\mathcal{M})$。定义 5.4 的前三个性质显然成立。证明 (iv) 的方法与前面的论证类似：若 $g_1, \ldots,\ g_k \in A \setminus M'$ 和 $s_1, \ldots,\ s_k \in \mathbb{Z}$，那么 $s_1g_1 + \cdots + s_kg_k \in M'$ 意味着

$$s_1g_1 + \cdots + s_kg_k = \frac{z + u_1\alpha_1 + \cdots + u_r\alpha_r + v_1a_1 + \cdots + v_na_n}{w}$$

对于某些 $z, u_1, \ldots,\ u_r, v_1, \ldots,\ v_n \in \mathbb{Z}$ 和 $w \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$。由于 $\alpha_1, \ldots,\ \alpha_r$ 在 A 上线性无关，我们再次得到 $u_1 = \cdots = u_r = 0$。若 $s_j \neq 0$，则应用 Mann 公理可得 $g_j \in M'$。因此，对所有 $j \in \{1, \ldots, k\}$，必有 $s_j = 0$。类似地可以证明 $N' \in \mathrm{Sub}_\kappa(\mathcal{N})$，由此完成证明。□

推论5.9。 理论 $(\mathbb{Z}, +, (\ell^{\mathbb{N}})_{\ell \geq 2})$ 是超稳定的。

证明。 根据引理2.3和推论 5.6，只需证明对于一个其元素两两乘法独立的极大 $L \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 2}$，$T(L)$是超稳定的。设 $\kappa \geq 2^{\aleph_0}$，并令$(\mathcal{M},\ (A_\ell)_{\ell \in L}) \models T(L)$，其中

$|M| = \kappa$。我们需要证明，在$\mathcal{M}$上只有 κ 个完备 1-型。令$(\mathcal{N}, (B_\ell)_{\ell\in L})$为 $\mathcal{M}$ 的一个 κ^+-饱和初等扩张，并设 $\alpha \in N$。根据定理 5.8，类型 $\mathrm{tp}(\alpha/M)$完全由 $d_{\mathcal{N}}(\alpha) = d_{\mathcal{M}}(\alpha)$以及所有满足以下条件的元组$(u, c, d, \ell)$所确定：$u \in M$、$n \in \mathbb{N}$、$c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{Z}^n$、$d \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$、$\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in L^n$并且

$$\exists b_1 \in B_{\ell_1}, \dots, b_n \in B_{\ell_n} \left(\alpha = \frac{u + c_1 b_1 + \cdots + c_n b_n}{d}\right). \tag{7}$$

固定这样的 u, c, d 和 ℓ。现在对于每个 $v \in M$，我们有

$$\exists b'_1 \in B_{\ell_1}, \dots, b'_n \in B_{\ell_n} \left(\alpha = \frac{v + c_1 b'_1 + \cdots + c_n b'_n}{d}\right)$$

当且仅当

$$\exists b_1, b'_1 \in B_{\ell_1}, \dots, b_n, b'_n \in B_{\ell_n} \Big(v - u = c_1(b_1 - b'_1) + \cdots + c_n(b_n - b'_n)\Big).$$

这表明，对于给定的 (c, d, ℓ)，满足 (7) 的一个 $u \in M$ 已经确定了所有这样的 u。因此，$\mathcal{M}$ 上完备 1-型的数量至多为同余类型的数量加上 $u \in M$ 的数量乘以如上所述的元组 (c, d, ℓ) 的数量，所以至多为

$$2^{\aleph_0} + \kappa \cdot \aleph_0 = \kappa. \qquad \square$$

6. Universal Theory With Order

在本节中，令 $L \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 2}$ 为一组两两乘法独立的整数，并令 $\mathcal{Z} := (\mathbb{Z}, +, -, 0, 1, <, (\ell^{\mathbb{N}})_{\ell\in L})$。

定义 6.1. 令 $T_\forall(L)$ 为包含以下公理模式的 $\mathcal{L}_<$ 理论：

($\forall$1) 有序阿贝尔群公理，($\forall$2) 全称同余公理

$$\forall x \bigvee_{j=1}^{n} \bigwedge_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \neg D_n(x + k) \qquad \text{for every } n \geq 2,$$

($\forall$3) $U_\ell(1) \wedge \forall x(U_\ell(x) \leftrightarrow U_\ell(\ell \cdot x))$，对每个 $\ell \in L$ 都成立；($\forall$4) 离散性公理 $0 < 1 \wedge \forall x(x \leq 0 \vee x \geq 1)$；($\forall$5) Mann 公理 Mann($L$)（见定义 3.3）；对 $|L| \geq 3$，不等式公理 Inequ(L)（定义 3.9）以及基本不等式公理 BInequ(L)（定义 3.10）；($\forall$7) 对于 $|L| \leq 2$，Carmichael 公理 Carmichael(L)（见定义 3.7），

注意，$T_\forall(L)$ 的所有公理都是全称的，并且 $\mathcal{Z} \models T_\forall(L)$。我们的目标现在是证明 $T_\forall(L)$ 完全公理化了 $\mathcal{Z}$ 的全称理论。为此，我们需要证明，对于每个 $\mathcal{M} \models T_\forall(L)$，都存在一个模型 $\mathcal{N} \models \mathrm{Th}(\mathcal{Z})$ 以及一个 $\mathcal{L}_<$-嵌入 $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$。

6.1. **求解不等式**。 现在我们证明，我们的公理 $T_\forall(L)$ 蕴含 y
即使对于 $|L| \le 2$，Inequ(L) 也成立。

事实 6.2 （克罗内克逼近定理）。设 $\lambda \in \mathbb{R}$ 是无理数。那么集合

$$\{\mathrm{frac}(n\lambda) : n \in \mathbb{N}\}$$

在 $[0,1)$ 中稠密，其中 $\mathrm{frac}(x) := x - \lfloor x \rfloor$ 表示$x \in \mathbb{R}$的小数部分。

引理 6.3。设 k、$\ell \in \mathbb{Z}_{\ge 2}$，且 $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ 是一个非空开区间。则存在一个非空开区间 $\mathcal{J} \subseteq (0,1)$，使得对于每个满足 $\mathrm{frac}(t\log_k(\ell)) \in \mathcal{J}$ 的$t \in \mathbb{N}$，都存在满足 $k^s/\ell^t \in \mathcal{I}$ 的 $s \in \mathbb{N}$。特别地，若 k 和 ℓ 乘法独立，则集合

$$\left\{\frac{k^s}{\ell^t} : s,t \in \mathbb{N}\right\}$$

在 $\mathbb{R}_{>0}$中稠密。

证明。必要时缩小 $\mathcal{I}$，我们可以假设 $a := \inf \mathcal{I} > 0$。注意到 $k^s/\ell^t \in \mathcal{I}$ 等价于 $s - t\log_k(\ell) \in \log_k(\mathcal{I})$，因此我们有$\mathrm{frac}(t\log_k(\ell)) \in \mathrm{frac}(\log_k(\mathcal{I}))$，当且仅当存在 $s \in \mathbb{Z}$ 使得$k^s/\ell^t \in \mathcal{I}$。接下来只需找到 $\mathcal{J} \subseteq \mathrm{frac}(\log_k(\mathcal{I}))$，使得我们得到的 $s \in \mathbb{Z}$非负。令 $t_0 \in \mathbb{N}$ 大于 $\log_k(a)$。现在，如果$s < 0$ 且 $t > t_0$，那么 $k^s/\ell^t < 1/\ell^{t_0} < a$。因此，只需选取一个非空开集 $\mathcal{J} \subseteq \mathrm{frac}(\log_k(\mathcal{I}))$，且不包含有限多个点$\mathrm{frac}(t\log_k(\ell))$（其中 $t \in \{0,\dots,t_0\}$）。

对于第二个断言，注意 k与 ℓ 的乘法独立等价于$\log_k(\ell)$为无理数。因此，事实 6.2告诉我们，对任意非空开 $\mathcal{J} \subseteq (0,1)$，存在 $t \in \mathbb{N}$ 使得$\mathrm{frac}(t\log_k(\ell)) \in \mathcal{J}$。于是稠密性由第一部分得出。□

推论 6.4. 设 k、$\ell \in \mathbb{Z}_{\ge 2}$ 乘法独立。考虑一个含两个变量 x 与 y、系数属于 $\mathbb{Q}$的严格线性齐次不等式组。若该不等式组有一个解$(u,v) \in \mathbb{R}^2_{>0}$，则它也有无穷多个解$(u,v) \in k^{\mathbb{N}} \times \ell^{\mathbb{N}}$。

证明. 设 $S \subseteq \mathbb{R}^2_{>0}$ 为 $\mathbb{R}^2_{>0}$中的解集。由于这些不等式是齐次的，我们有$(u,v) \in S$当且仅当$(\frac{u}{v},1) \in S$。由于这些不等式是严格且线性的，$S \cap \mathbb{R}_{>0} \times \{1\}$ 到第一坐标的投影是一个开区间。由于 $S \neq \emptyset$，该区间也是非空的。因此，引理 6.3蕴含存在无穷多个 $m,n \in \mathbb{N}$，使得$(\frac{k^m}{\ell^n},1) \in S$。□ —

下一个引理可以看作引理 6.3 在多于两个变量时的推广。下文中，为了使记号更加简洁，我们将元组写作 $x_{i:j}$，而不是 $(x_i, x_{i+1}, \dots, x_j)$。当 $\ell \in \mathbb{Z}_{\ge 2}$ 且$t_{i:j} \in \mathbb{N}^{j-i+1}$时，我们也将 $\ell^t_{i:j}$ 写作 $(\ell^{t_i}, \ell^{t_{i+1}}, \dots, \ell^{t_j})$。

引理 *6.5*（抽引引理，[11, 引理 13]）。设 $k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ 乘法独立，$u_{1:m} \in (k^{\mathbb{N}})^m$，$v_{1:n} \in (\ell^{\mathbb{N}})^n$，且 $h_1, \ldots, h_r$ 是关于 $m+n$ 个变量的 $\mathbb{Q}$-线性形式。记 $J = \{j : h_j(u_{1:m}, v_{1:n}) > 0\}$。那么，对任意 $\varepsilon > 0$，存在一个非空开区间 $\mathcal{I} \subseteq (0, 1)$，具有如下性质：对于所有满足 $\mathrm{frac}(t_1 \log_k(\ell)) \in \mathcal{I}$ 的 $t_1 \in \mathbb{N}$，存在 $s_{1:m} \in \mathbb{N}^{m-1}$, $t_{2:n} \in \mathbb{N}^n$，使得对所有 $j \in \{1, \ldots, r\}$，

(i) *if* $j \in J$, *then* $h_j(k^s_{1:m}, \ell^t_{1:n}) > 0$, *and*

(ii) $\left| \dfrac{h_j(k^s_{1:m}, \ell^t_{1:n})}{\ell^{t_1}} - \dfrac{h_j(u_{1:m}, v_{1:n})}{v_1} \right| < \varepsilon.$

定义 6.6。设 $(M, +, <)$ 是一个有序群，且 $a, b \in M_{>0}$。我们记 $a \gg b$，如果对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $a > n \cdot b$；如果 $b \gg a$，则记为 $a \ll b$。如果 $a \gg b$ 和 $a \ll b$ 均不成立，则记为 $a \sim b$。等价关系$\sim$在 $M_{>0}$ 上的等价类称为阿基米德类。

以下是非标准幂的基本不等式公理的关键推论。

引理 6.7。设 $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$，并假设$(\mathcal{M}, A_\ell)$ 满足$(\forall 1)$、$(\forall 3)$ 以及$\mathrm{BInequ}(\{\ell\})$。设 K 是 $\mathcal{M}$的一个阿基米德类。若 $K \cap A_\ell \neq \emptyset$，则对任意 $\alpha \in K \cap A_\ell$，都有 $K \cap A_\ell \subseteq \ell^{\mathbb{Z}} \cdot \alpha$。

证明。假设 $\alpha, \alpha' \in K \cap A_\ell$。由于 α 和 α' 属于同一个阿基米德类，存在 $m, n \in \mathbb{N}$ 使得 $\alpha < \ell^m \alpha' < \ell^n \alpha$。我们选取满足此性质的最小 n。因此，$\ell^{n-1}\alpha \leq \ell^m \alpha'$。根据（$\forall 3$），有 $\ell^m \alpha', \ell^{n-1}\alpha \in A_\ell$。因此，基本不等式公理告诉我们，在 A_ℓ 中，$\ell^{n-1}\alpha$ 和 $\ell^n \alpha$之间不存在严格介于两者之间的元素。因此，$\ell^m \alpha' = \ell^{n-1}\alpha$，进而 $\alpha' = \ell^{n-m-1}\alpha \in \ell^{\mathbb{Z}}\alpha$。□

接下来的证明沿用 [11, 第 6] 节中的算法，以判定幂的不等式是否可解。

引理 6.8。设 $k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ 乘法独立，设 $(\mathcal{M}, A_k, A_\ell)$满足公理 $(\forall 1)$、$(\forall 3)$ 和 $\mathrm{BInequ}(\{k, \ell\})$，并设 $C \in \mathbb{Q}^{r \times (m+n)}$。若存在 $\alpha \in (A_k)^m \times (A_\ell)^n$ 满足 $C\alpha > 0$，则存在无穷多个$z \in (k^{\mathbb{N}})^m \times (\ell^{\mathbb{N}})^n$ 满足 $Cz > 0$。

证明。该证明对变量的数量进行归纳。基本情形 $m \leq 1$ 和 $n \leq 1$ 包含于引理 6.4 中。设 $\alpha = (\alpha_{1:m}, \alpha'_{1:n})$ 满足 $\alpha_{1:m} \in (A_k)^m$，且 $\alpha'_{1:n} \in (A_\ell)^n$ 满足 $C\alpha > 0$。根据引理 6.7，如果 α_i 和α_j 属于同一个阿基米德类，则对于某个 $\nu \in \mathbb{Z}$有 $\alpha_j = k^\nu \alpha_i$，因此我们可以减少变量的数量并应用归纳法。因此，现在可以假设 $\alpha_1 \gg \alpha_2 \gg \cdots \gg \alpha_m$，类似地，$\alpha'_1 \gg \alpha'_2 \gg \cdots \gg \alpha'_n$。

不失一般性，假设 $\alpha_1 > \alpha'_1$。我们考虑不等式组 $C(x_{1:m}, y_{1:n}) > 0$。当 x_1 的系数非零时，将两边同时除以该系数，并把其余所有项移至另一边，我们可以将其改写为

如下形式

$$b_i^- y_1 + h_i^-(x_{2:m}, y_{2:n}) < x_1 < b_j^+ y_1 + h_j^+(x_{2:m}, y_{2:n}) \qquad \text{for } i \in I, j \in J, \text{ and } \psi(x_{2:m}, y_{1:n})$$

其中 I, J 是有限指标集，b_i^-, $b_j^+ \in \mathbb{Q}$, h_i^-, h_j^+ 是关于 $i \in I$, $j \in J$ 的 $\mathbb{Q}$-线性形式，而 ψ 是一个严格齐次 $\mathbb{Q}$-线性不等式组。这个 ψ 收集了所有关于 x_1 的系数为零的不等式。如果 $J = \emptyset$，那么我们可以通过归纳法找到 $(u_{2:m}, v_{1:n}) \in (k^{\mathbb{N}})^{m-1} \times (\ell^{\mathbb{N}})^n$，使其满足 $\psi(u_{2:m}, v_{1:n})$，并选取足够大的 $u_1 \in k^{\mathbb{N}}$，使得 $b_i^- v_1 + h_i^-(u_{2:m}, v_{2:n}) < u_1$ 对所有 $i \in I$ 都成立。因此从现在起设 $J \neq \emptyset$。根据假设，我们有

$$b_i^- \alpha'_1 + h_i^-(\alpha_{2:m}, \alpha'_{2:n}) < \alpha_1 < b_j^+ \alpha'_1 + h_j^+(\alpha_{2:m}, \alpha'_{2:n}). \tag{8}$$

由于 $J \neq \emptyset$，我们不可能有 $\alpha_1 \gg \alpha'_1$。因此，$\alpha_1 > \alpha'_1$ 蕴含 $\alpha_1 \sim \alpha'_1$。现在 $\alpha'_1 \gg \alpha_2$，α'_2 得出

$$|b_i^- \alpha'_1| \gg \left|h_i^-(\alpha_{2:m}, \alpha'_{2:n})\right| \qquad \text{and}$$
$$|b_j^+ \alpha'_1| \gg \left|h_j^+(\alpha_{2:m}, \alpha'_{2:n})\right|$$

对于任意 $i \in I, j \in J$，满足 $b_i^-, b_j^+ \neq 0$。因此，为使 (8) 成立，必有 $b_i^- \leq b_j^+$和 $b_j^+ > 0$，对任意 $i \in I, j \in J$ 均如此。对ψ 应用相同的推理可知，ψ 中的每个不等式里，y_1 的系数都必须非负。因此，我们可以将 $\psi(x_{2:m}, y_{1:n})$ 拆分为 $\psi^+(x_{2:m}, y_{1:n})$ 和 $\wedge\psi^0(x_{2:m}, y_{2:n})$，使得 ψ^+ 中的每个不等式里，y_1 的系数均为正。

现在为求解这些不等式，我们先考虑较简单的情形：对所有 $i \in I$，$j \in J$，$b_i^- < b_j^+$。根据归纳法，存在无穷多个解 $(u_{2:m}, v_{2:n}) \in (k^{\mathbb{N}})^{m-1} \times (\ell^{\mathbb{N}})^{n-1}$，它们满足 ψ^0。固定这样一个特定的 $(u_{2:m}, v_{2:n})$。根据引理 6.3，我们可以找到无穷多个 $u_1 \in k^{\mathbb{N}}$ 和 $v_1 \in \ell^{\mathbb{N}}$，使得对所有 $i \in I$，$j \in J$，都有 $b_i^- < u_1/v_1 < b_j^+$。这意味着，当 v_1足够大时，我们有

$$b_i^- + \frac{h_i^-(u_{2:m}, v_{2:n})}{v_1} < \frac{u_1}{v_1} < b_j^+ + \frac{h_j^+(u_{2:m}, v_{2:n})}{v_1} \qquad \text{for } i \in I, j \in J.$$

此外，对于充分大的 v_1，$\psi^+(u_{2:m}, v_{1:n})$ 也将成立，这意味着在这种情况下我们已经找到了所需的解 $(u_{1:m}, v_{1:n})$。

现在考虑如下情形：$b := b_i^- = b_j^+$ 对某些 $i \in I$、$j \in J$。令$I' := \{i \in I : b_i^- = b\}$ 且 $J' := \{j \in J : b_j^+ = b\}$。则

$$b\alpha'_1 + h_i^-(\alpha_{2:m}, \alpha'_{2:n}) < \alpha_1 < b\alpha'_1 + h_j^+(\alpha_{2:m}, \alpha'_{2:n})$$

这意味着

$$h_i^-(\alpha_{2:m}, \alpha'_{2:n}) < h_j^+(\alpha_{2:m}, \alpha'_{2:n}) \qquad \text{for all } i \in I', j \in J'.$$

因此，由归纳法可知，存在无穷多个 $(u_{2:m}, v_{2:n}) \in (k^{\mathbb{N}})^{m-1} \times (\ell^{\mathbb{N}})^{n-1}$同时满足

$$h_i^-(u_{2:m}, v_{2:n}) < h_j^+(u_{2:m}, v_{2:n}) \qquad \text{for all } i \in I', j \in J'$$

以及 $\psi^0(u_{2:m},\ v_{2:n})$。固定一个这样的 $(u_{2:m},\ v_{2:n})$，并选取满足条件的 $\varepsilon > 0$

$$\frac{h_i^-(u_{2:m}, v_{2:n})}{v_2} + \varepsilon < \frac{h_j^+(u_{2:m}, v_{2:n})}{v_2} - \varepsilon \qquad \text{for all } i \in I', j \in J'.$$

根据引理 6.5，存在一个非空开区间 $\mathcal{I} \subseteq (0,\ 1)$，使得对于任意满足 $\operatorname{frac}(t_2 \log_k(\ell)) \in \mathcal{I}$ 的 $t_2 \in \mathbb{N}$，都存在 $s_{2:m} \in \mathbb{N}^{m-1}$ 和 $t_{3:n} \in \mathbb{N}^{n-2}$，使得

(9)
$$\frac{h_i^-(k^s_{2:m}, \ell^t_{2:n})}{\ell^{t_2}} < \frac{h_i^-(u_{2:m}, v_{2:n})}{v_2} + \varepsilon < \frac{h_j^+(u_{2:m}, v_{2:n})}{v_2} - \varepsilon < \frac{h_j^+(k^s_{2:m}, \ell^t_{2:n})}{\ell^{t_2}}$$

对所有 $i \in I'$、$j \in J'$ 和 ψ^0，$(k^s_{2:m},\ \ell^t_{2:n})$ 均成立。另一方面，我们可以利用引理 6.3 找到一个由非空开子区间组成的族 $(\mathcal{J}_w)_{w\in\mathbb{N}}$，这些子区间都属于 $(0,\ 1)$，使得对于满足 $\operatorname{frac}(t_1 \log_k(\ell)) \in \mathcal{J}_w$ 的任意 t_1、$w \in \mathbb{N}$，都存在$s_1 \in \mathbb{N}$，使得

$$(10) \quad b + \frac{1}{\ell^w}\left(\frac{h_i^-(u_{2:m}, v_{2:n})}{v_2} + \varepsilon\right) < \frac{k^{s_1}}{\ell^{t_1}} < b + \frac{1}{\ell^w}\left(\frac{h_j^+(u_{2:m}, v_{2:n})}{y_2} - \varepsilon\right)$$

对所有 $i \in I', j \in J'$。现在我们的目标是找到 $w \in \mathbb{N}$ 和 $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$，使得

$$(11) \qquad \operatorname{frac}(t_1 \log_k(\ell)) \in \mathcal{J}_w, \quad \operatorname{frac}(t_2 \log_k(\ell)) \in \mathcal{I} \quad \text{and} \quad w = t_1 - t_2,$$

因为此时 (9) 和 (10) 合起来可得

$$\begin{aligned} \frac{k^{s_1}}{\ell^{t_1}} &< b + \frac{1}{\ell^{t_1 - t_2}}\left(\frac{h_j^+(u_{2:m}, v_{2:n})}{v_2} - \varepsilon\right) \\ &< b + \frac{1}{\ell^{t_1 - t_2}} \frac{h_j^+(k^s_{2:m}, \ell^t_{2:n})}{\ell^{t_2}} \\ &= b + \frac{h_j^+(k^s_{2:m}, \ell^t_{2:n})}{\ell^{t_1}} \qquad \text{for all } j \in J' \end{aligned}$$

下界也同理。注意，(11) 等价于

$$\operatorname{frac}(t_1 \log_k(\ell)) \in \mathcal{J}_w \cap \operatorname{frac}(\mathcal{I} + w \log_k(\ell)) \quad \text{and} \quad t_2 = t_1 - w.$$

因此，我们需要找到 $w \in \mathbb{N}$，使得

$$\mathcal{J}_w \cap \operatorname{frac}(\mathcal{I} + w \log_k(\ell)) \neq \emptyset.$$

我们断言这样的对象有无穷多个 w （此证明部分的示意见图 1）。事实上，注意到若 $s_1, t_1 \in \mathbb{N}$ 满足 (10)，则由于 $w \to \infty$，我们有 $k^{s_1}/\ell^{t_1} \to b$，因此

$$\operatorname{frac}(t_1 \log_k(\ell)) \to \operatorname{frac}(-\log_k(b)).$$

因此，区间 $\mathcal{J}_w$ 不断缩小，并在$w \to \infty$趋近于点 $\mathrm{frac}(-\log_k(b))$。令 $\mathcal{J} \subseteq (0,1)$ 为一个以 $\mathrm{frac}(-\log_k(b))$ 为中心、长度至多为 $\mathcal{I}$ 长度一半的区间，并选取 $w_0 \in \mathbb{N}$，使得对所有$w \geq w_0$ 都有 $\mathcal{J}_w \subseteq \mathcal{J}$。令 ξ 为 $\mathcal{I}$的中点。根据事实 6.2，存在无穷多个 $w \in \mathbb{N}$ 使得 $\mathrm{frac}(\xi + w\log_k(\ell)) \in \mathcal{J}$，从而 $\mathcal{J} \subseteq \mathrm{frac}(\mathcal{I} + w\log_k(\ell))$。因此，对无穷多个 $w \geq w_0$，集合 $\mathrm{frac}(\mathcal{I} + w\log_k(\ell))$ 与 $\mathcal{J}_w$ 有非空交集。

因此，我们已经证明，存在无穷多个 $u_{1:m} \in (k^{\mathbb{N}})^m$ 和$v_{1:n} \in (\ell^{\mathbb{N}})^n$，满足关于 $(i,\ j) \in I' \times J'$和 ψ^0 的不等式。正如前文所解释的，对于足够大的 v_1，其他不等式也都将得到满足，从而完成证明。□

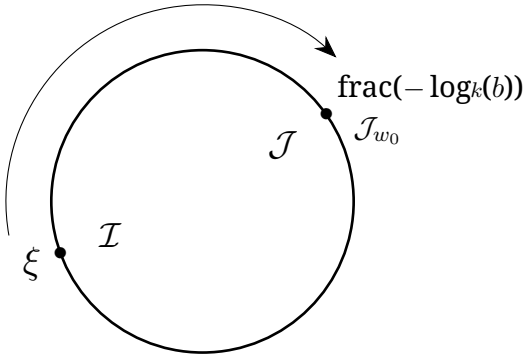

FIGURE 1. 引理 6.8 证明最后一部分的示意图

命题 *6.9.* 设 $(\mathcal{M}, A_k, A_\ell) \models T_\forall(\{k,\ell\})$，并设 $C \in \mathbb{Q}^{r\times(m+n)}$。设 $\alpha_{1:m} \in (A_k \setminus \mathbb{Z})^m$ 与 $\alpha'_{1:n} \in (A_\ell \setminus \mathbb{Z})^n$ 使得 $C(\alpha_{1:m}, \alpha'_{1:n}) > 0$，并设 $\Delta(x_{1:m}, y_{1:n}) \subseteq d_{\mathcal{M}}(\alpha_{1:m}, \alpha'_{1:n})$ 为有限。则存在 $u_{1:m} \in (k^{\mathbb{N}})^m$与 $v_{1:n} \in (\ell^{\mathbb{N}})^n$ 满足 $C(x_{1:m}, y_{1:n}) > 0$ 与 $\Delta(x_{1:m}, y_{1:n})$。

证明。 由 Carmichael 公理（引理 3.8），我们可以假设

$$\Delta = \left\{D_d(x_i - k^{s_i}), D_d(y_j - \ell^{t_j}) : d \in \mathcal{D}, i \in \{1,\dots,m\}, j \in \{1,\dots,n\}\right\}$$

对于某些 $s_{1:m} \in \mathbb{N}^m$、$t_{1:n} \in \mathbb{N}^n$，以及某个有限的素数幂集合 $\mathcal{D}$。选取 $\rho \in \mathbb{N}_{>0}$，使其能被所有 $d \in \mathcal{D}$ 的 $\lambda(d)$ 整除，且大于 s_i，并且对所有 $i \in \{1,\dots,m\}$、$j \in \{1,\dots,n\}$ 都有 t_j。现在，如果 $d \in \mathcal{D}$ 与 k 互素，那么 $k^\rho \equiv 1$（模 d），所以 $D_d(x_i - k^{s_i})$ 等价于 $D_d(k^{\rho-s_i}x_i - 1)$。另一方面，如果 $d \in \mathcal{D}$ 与 k 不互素，那么由于 d 是一个素数幂，存在某个 $e \in \mathbb{N}$ 使得 $d \mid k^e$。由于 $\alpha_i \notin \mathbb{Z}$，Carmichael 公理（定义 3.7 (5)）告诉我们 $\mathcal{M} \models D_{k^e}(\alpha_i)$，所以特别有 $\mathcal{M} \models D_d(\alpha_i)$。因此，$k^{s_i}$ 必须能被 d 整除。于是，$D_d(x_i - k^{s_i})$ 等价于 $D_d(x_i)$，而这对所有充分大的 $x_i \in k^{\mathbb{N}}$ 都成立。利用

对 ℓ 采用相同的推理，我们得到：如果 $\tilde{u}_{1:m} \in (k^{\mathbb{N}})^m$ 和 $\tilde{v}_{1:n} \in (\ell^{\mathbb{N}})^n$ 充分大且满足

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta}(\tilde{x}_{1:m}, \tilde{y}_{1:n}) := \quad & \{D_d(\tilde{x}_i - 1) : d \in \mathcal{D} \text{ coprime to } k, i \in \{1, \dots, m\}\} \\ & \cup \{D_d(\tilde{y}_j - 1) : d \in \mathcal{D} \text{ coprime to } \ell, j \in \{1, \dots, n\}\},\end{aligned}$$

那么，通过 $u_i = \tilde{u}_i / k^{\rho - s_i}$ 和 $v_j = \tilde{v}_j / \ell^{\rho - t_j}$ 得到的 $u_{1:m} \in (k^{\mathbb{N}})^m$ 和 $v_{1:n} \in (\ell^{\mathbb{N}})^n$ 满足 $\Delta(u_{1:m}, v_{1:n})$。

Let $\widetilde{C} \in \widetilde{\mathbb{Q}}^{r \times (m+n)}$ 是由 C 得到的矩阵：对 $i \in \{1, \dots, m\}$，将第 i 列中的元素乘以 $k^{\rho - s_i}$；对 $j \in \{1, \dots, n\}$，将第 $(m+j)$ 列中的元素乘以 $\ell^{\rho - t_j}$。只需找到足够大的 $\tilde{u}_{1:m} \in (k^{\mathbb{N}})^m$ 和 $\tilde{v}_{1:n} \in (\ell^{\mathbb{N}})^n$，使其满足 $\widetilde{C}(\tilde{u}_{1:m}, \tilde{v}_{1:n}) > 0$ 和 $\widetilde{\Delta}(\tilde{u}_{1:m}, \tilde{v}_{1:n})$。为此，令 $k := k^\rho$ 以及 $\ell := \ell^\rho$。由于 $(\tilde{k}^{\mathbb{N}})^m \times (\tilde{\ell}^{\mathbb{N}})^n$ 的所有元素都满足 $\widetilde{\Delta}$，只需找到足够大的 $(\tilde{x}_{1:m}, \tilde{y}_{1:n}) \in (\tilde{k}^{\mathbb{N}})^m \times (\tilde{\ell}^{\mathbb{N}})^n$，使其满足 $\widetilde{C}(\tilde{x}_{1:m}, \tilde{y}_{1:n}) > 0$。定义

$$A_{\tilde{k}} := \tilde{k}^{\mathbb{N}} \cup \bigcup_{i=1}^{m} (\tilde{k}^{\mathbb{Z}} \cdot k^{\rho - s_i} \alpha_i) \cap M \quad \text{and} \quad A_{\tilde{\ell}} := \tilde{\ell}^{\mathbb{N}} \cup \bigcup_{j=1}^{n} (\tilde{\ell}^{\mathbb{Z}} \cdot \ell^{\rho - t_j} \alpha'_j) \cap M.$$

现在，$(\mathcal{M}, A_{\tilde{k}}, A_{\tilde{\ell}})$ 满足 (∀1)、(∀3)（对于 $L = \{k, \ell\}$）以及 $\mathrm{BInequ}(\{k, \ell\})$。应用引理 6.8 即可完成证明。□

6.2. **构造一个嵌入。**

引理 6.10. 设 $(\mathcal{M}, (A_\ell)_{\ell \in L}) \models T_\forall(L)$，并设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A \setminus \mathbb{Z}$ 满足：对于每个 $\ell \in L$ 以及 $\mathcal{M}$ 的每个阿基米德类 K，至多存在一个 $i \in \{1, \dots, n\}$ 使得 $\alpha_i \in A_\ell \cap K$。那么，对于所有 $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$，都有 $\sum_{i=1}^n c_i \alpha_i \notin \mathbb{Z}$。

证明。当 $n = 1$ 时，该断言显然成立，因此以下设 $n \geq 2$。设 $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$。为导出矛盾，假设 $\sum_{i=1}^n c_i \alpha_i = b \in \mathbb{Z}$。现在，$b \neq 0$ 会立即与 Mann 公理矛盾，因此我们只能有 $b = 0$。这意味着可以将 Mann 公理应用于 $\sum_{i=1}^{n-1} c_i \alpha_i = c_n \alpha_n$。由此可得，对于某个 $\ell \in L$，有 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A_\ell$；并且对于每个 $i \in \{1, \dots, n-1\}$，存在 $s, t \in \ell^{\mathbb{N}}$ 使得 $s\alpha_i = t\alpha_n$。特别地，存在某些 $s, t \in \mathbb{Z}_{>0}$ 使得 $s\alpha_1 = t\alpha_n$，这与我们的假设矛盾：α_1 和 α_n 不属于同一个阿基米德类。□

引理 6.11. 设 $(\mathcal{M}, (A_\ell)_{\ell \in L}) \models T_\forall(L)$。此外，设 $\kappa > |M|$ 为一个基数，并且令 $(\mathcal{N}, (B_\ell)_{\ell \in L}) \models \mathrm{Th}(\mathcal{Z})$ 为 κ-饱和的。那么存在一个 $\mathcal{L}_<$-嵌入 $f : \langle A \rangle^{\mathrm{div}} \hookrightarrow \mathcal{N}$。

证明。对于每个 $\ell \in L$，令 $(\alpha_i^\ell)_{i \in I_\ell}$ 为一个族，其中对于满足 $K \cap A_\ell \neq \emptyset$ 的 $\mathcal{M}$ 的每个阿基米德类 $K \neq \mathbb{Z}$，恰好包含 $K \cap A_\ell$ 的一个元素。根据引理 6.7，如果 $K \neq \mathbb{Z}$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个阿基米德类，且 $\alpha_i^\ell \in K$，那么

$$K \cap A_\ell \subseteq \ell^{\mathbb{Z}} \cdot \alpha_i^\ell,$$

这意味着

$$\Big\langle \{1\} \cup \{\alpha_i^\ell : \ell \in L, i \in I_\ell\} \Big\rangle^{\mathrm{div}} = \langle A \rangle^{\mathrm{div}}.$$

令 $\overline{\alpha}$ 为元组（α_i^ℓ：$\ell \in L$，$i \in I_\ell$），并令 $\overline{x}$ 为变量的（可能无限的）元组（x_i^ℓ：$\ell \in L$，$i \in I_\ell$）。将 $p(\overline{x})$ 定义为由以下公式组成的类型

$$\sum_{\ell \in L} \sum_{i \in I_\ell} c_i^\ell x_i^\ell > 0,$$

对于所有满足条件的整数族（c_i^ℓ：$\ell \in L$，$i \in I_\ell$），其中 $c_i^\ell \neq 0$ 仅对有限多个对（i，ℓ）成立，并且

$$\mathcal{M} \models \sum_{\ell \in L} \sum_{i \in I_\ell} c_i^\ell \alpha_i^\ell > 0.$$

此外，令

$$q(\overline{x}) := p(\overline{x}) \cup \Big\{ U_\ell(x_i^\ell) : \ell \in L, i \in I_\ell \Big\} \cup d_{\mathcal{M}}(\overline{\alpha}).$$

我们声称，$q(\overline{x})$ 的每个有限子集都在 $\mathcal{Z}$ 中得到实现。事实上，这直接由 $|L| \geq 3$ 的不等式公理以及 $|L| \leq 2$ 的命题 6.9 得出。由饱和性，存在一个实现 $\beta = (\beta_i^\ell : \ell \in L, i \in I_\ell)$，使 $q(\overline{x})$ 在 $\mathcal{N}$ 中得到实现。利用这一点，我们通过定义得到嵌入 $\overline{f} : \langle A \rangle^{\mathrm{div}} \to \mathcal{N}$

$$f\left(\frac{g + \sum_{i,\ell} c_i^\ell \alpha_i^\ell}{n} \right) := \frac{g + \sum_{i,\ell} c_i^\ell \beta_i^\ell}{n}$$

对于 $g \in \mathbb{Z}$、$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 和 $c_i^\ell \in \mathbb{Z}$，其中 $c_i^\ell \neq 0$ 只对有限多个 $\ell \in L$、$i \in I_\ell$ 成立。为确保该映射定义良好，我们需要验证两点：首先，我们有 $d(\alpha) \subseteq d(\beta)$，这意味着如果 $g + \sum c_i^\ell \alpha_i^\ell$ 可被 n 整除，那么 $g + \sum c_i^\ell \beta_i^\ell$ 也可被其整除。其次，每个元素 $a \in \langle A \rangle^{\mathrm{div}}$ 都有唯一的 $a = \frac{1}{n}(g + \sum c_i^\ell \alpha_i^\ell)$ 形式的表示，且只差一个整数倍。事实上，如果

$$\frac{g + \sum_{i,\ell} c_i^\ell \alpha_i^\ell}{n} = \frac{h + \sum_{i,\ell} d_i^\ell \alpha_i^\ell}{m},$$

然后将引理 6.10 应用于

$$\sum_{i,\ell} \left(m c_i^\ell - n d_i^\ell \right) \alpha_i^\ell = nh - mg \in \mathbb{Z}$$

可得，对于所有 $\ell \in L$，$i \in I_\ell$ 都有 $mc_i^\ell = nd_i^\ell$。因此，$nh = mg$ 也成立，从而

$$\frac{g + \sum_{i,\ell} c_i^\ell \beta_i^\ell}{n} = \frac{h + \sum_{i,\ell} d_i^\ell \beta_i^\ell}{m}.$$

显然，f 是一个群同态。现在我们来验证 f 严格递增。假设 $a = g + \sum_{i,\ell} c_i^\ell \alpha_i^\ell > 0$。如果对所有 $\ell \in L$，$i \in I_\ell$ 都有 $c_i^\ell = 0$，那么 $f(a) = a > 0$。否则，根据Mann公理（引理 6.10），我们有 $\sum c_i^\ell \alpha_i^\ell \notin \mathbb{Z}$。现在，离散性公理（$\forall 4$）意味着 $\sum c_i^\ell \alpha_i^\ell > \mathbb{Z}$ 或 $\sum c_i^\ell \alpha_i^\ell < \mathbb{Z}$。后者不可能成立，因为这将

意味着 $a < 0$。因此，我们特别有 $\sum c_i^\ell \alpha_i^\ell > 0$，进而有 $\sum c_i^\ell \beta_i^\ell > 0$，因为$\beta$ 满足 p（x）。由于 $\mathcal{N}$ 也满足Mann公理和离散性公理，我们得到 $\sum c_i^\ell \beta_i^\ell > \mathbb{Z}$，进而得到 f（a）$= g + \sum c_i^\ell \beta_i^\ell > 0$，这正是所需。

最后，我们验证 f 是一个 $\mathcal{L}$-同态。证明过程与 y
命题 5.5 类似：假设

$$a = \frac{g + \sum_{i,\ell} c_i^\ell \alpha_i^\ell}{n} \in A_k$$

对某个 $k \in L$成立。若$\sum c_i^\ell \alpha_i^\ell = 0$, 则 $f(a) = a \in B_k$。现在假设 $\sum c_i^\ell \alpha_i^\ell \neq 0$，因此由 Mann 公理可得 $a \notin \mathbb{Z}$。重新整理可得

$$na - \sum_{i,\ell} c_i^\ell \alpha_i^\ell = g \in \mathbb{Z}$$

因此，再次应用 Mann 公理可得 $g = 0$ 。将 Mann 公理应用于 $\sum c_i^\ell \alpha_i^\ell = na$，可知存在 $j \in I_k$和 s，以及 $t \in k^{\mathbb{N}}$，使得$c_j^k \neq 0$ 且 $s \cdot \alpha_j^k = t \cdot a$。于是，根据（$\forall 3$），$f(a) = \frac{s_i}{t} \beta_i^k \in B_k$，如所需。另一个方向的证明类似。□

引理 *6.12.* 设 $(\mathcal{M}, (A_\ell)_{\ell \in L}) \models T_\forall(L)$，设 $\kappa > |M|$ 为一个基数，且 $(\mathcal{N}, (B_\ell)_{\ell \in L}) \models Th(\mathcal{Z})$ 是 κ-饱和的。设 M'是 M的一个可除闭子群，且包含 1；设 $f\colon M' \to \mathcal{N}$ 是一个 $\mathcal{L}_<$-嵌入，并设 $\alpha \in M \setminus M'$。那么存在 $\beta \in N \setminus \langle f(M')\ B\rangle^{\mathrm{div}}$，使得 $d_{\mathcal{M}}(\alpha) \subseteq d_{\mathcal{N}}(\beta)$，并且

(12) $a < c\alpha < b \quad implies \quad f(a) < c\beta < f(b) \quad for\ all\ a, b \in M', c \in \mathbb{Z}_{>0}.$

证明。设 $p(x)$ 是由下列公式组成的类型

$$f(a) < c \cdot x < f(b)$$

对所有满足 $\mathcal{M} \models a < c\alpha < b$ 的 $a, b \in M', c \in \mathbb{Z}_{>0}$。此外，设 $q(x)$ 是由下列公式组成的类型

$$\neg U_\ell \left(\frac{f(g) + k \cdot x}{n} \right)$$

对所有 $\ell \in L$, $g \in M'$ 以及满足 $\mathcal{M} \models D_n(g + k\alpha)$ 的 k, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$。我们所需的 β 应当是类型 $d_{\mathcal{M}}(\alpha) \cup p(x) \cup q(x)$ 的一个实现。根据 $\mathcal{N}$ 的饱和性，只需证明该类型在 $\mathcal{N}$ 中有限可满足。设 $\Delta \subseteq d_{\mathcal{M}}(\alpha)$ 是有限的， $a_i, b_i \in M'$ 以及 $c_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ 满足

$$\mathcal{M} \models a_i < c_i \alpha < b_i$$

对于 $i \in \{1, \ldots, m\}$，并令 $g_i \in M'$、 k_i、 $n_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 满足

$$\mathcal{M} \models D_{n_i}(g_i + k_i \alpha)$$

对于 $i \in \{1, \ldots, r\}$。令 $c := c_1 \cdots c_m$ 且 $a := \max_i \frac{c}{c_i} a_i$, $b := \min_i \frac{c}{c_i} b_i$。则$f(a_i) < c_i x < f(b_i)$ 对所有 $i \in \{1, \ldots, m\}$ 等价于 $f(a) < cx < f(b)$。由于 M'是可除闭的且包含 1，我们对每个$k \in \mathbb{Z}$有 $c\alpha + k \notin M'$。这蕴含 $b - a > \mathbb{Z}$，这意味着 $f(b) - f(a) > \mathbb{Z}$ 在 $\mathcal{N}$ 中。因此存在 $\beta' \in N$ 使得 $f(a) < c(\beta' + \mathbb{Z}) < f(b)$。由于 $\mathcal{N}$ 是一个模型

Presburger 算术的， $\beta' + \mathbb{Z}$ 包含 Δ 的无穷多个实现。此外，对每个 $i \in \{1, \dots, r\}$，至多存在一个 $\beta \in \beta' + \mathbb{Z}$ 使得

$$\frac{f(g_i) + k_i\beta}{n_i} \in B,$$

因为 B 中两个不同的无穷大元素若相差有限，就会与 Mann 公理矛盾。这意味着我们可以选择 $\beta \in c\beta' + \mathbb{Z}$，使得 β 同时实现 Δ 并满足 $\frac{1}{n_i}(f(g_i) + k_i\beta) \notin B$，对每个 $i \in \{1, \dots, r\}$都如此，由此证明得证。□

定理6.13。 理论 $T_\forall(L)$ 公理化了 $\mathcal{Z}$ 的全称理论。

证明。 设 $(\mathcal{M}, (A_\ell)_{\ell \in L}) \models T_\forall(L)$。只需证明 $\mathcal{M}$ 可嵌入 $\mathrm{Th}(\mathcal{Z})$ 的一个模型中。为此，我们选取一个基数 $\kappa > |M|$，以及一个 κ-饱和的 $(\mathcal{N}, (B_\ell)_{\ell \in L}) \models \mathrm{Th}(\mathcal{Z})$。在引理 6.11 中，我们构造了一个嵌入 $f\colon \langle A \rangle^{\mathrm{div}} \hookrightarrow \mathcal{N}$。现在，我们通过归纳将其扩展为对整个 $\mathcal{M}$ 的嵌入。

假设我们有一个 $\mathcal{L}_<$-嵌入 $f\colon M' \hookrightarrow \mathcal{N}$，其定义在可除闭子群 $M' < M$ 上，且满足 $\langle A \rangle^{\mathrm{div}} \subseteq M'$；并假设 $\alpha \in M \setminus M'$。令 $\beta \in N$ 如引理 6.12 中所述。由此，我们将嵌入扩展为

$$\begin{aligned} F\colon \langle M', \alpha \rangle^{\mathrm{div}} &\to \mathcal{N} \\ \frac{g + k\alpha}{n} &\mapsto \frac{f(g) + k\beta}{n}. \end{aligned}$$

此映射定义良好，因为 $d_{\mathcal{M}}(\alpha) \subseteq d_{\mathcal{N}}(\beta)$。不难验证， F 是一个群同态。性质 (12) 确保 F严格递增。还需证明 F 是一个 $\mathcal{L}$-同态。设 $a \in \langle M', \alpha \rangle^{\mathrm{div}}$和 $\ell \in L$。若 $a \in A_\ell$，则 $a \in M'$，因为 $A \subseteq M'$，所以 $F(a) = f(a) \in B_\ell$。此外，若 $F(a) \in B_\ell$，则 $F(a) \in f(M')$，因为 $\beta \notin \langle f(M'), B \rangle^{\mathrm{div}}$。因此，由于 F 的单射性，我们有 $a \in M'$，从而 $F(a) = f(a) \in B_\ell$，这意味着 $a \in A_\ell$。所以 F确实是一个$\mathcal{L}_<$-嵌入。□

References

1. Alexis B ` *Undecidable extensions of Büchi arithmetic and Cobham-Semënov theo-* es, , *rem* **62** 1997 4, 1280 1296 《符号逻辑杂志》 （），第–期。MR 1617949

2 *A survey of arithmetical definability* 2001 。。，，Maurice Boffa 纪念文集，第 1–54 页。MR 1900397 3. V ´ ` *Cor-* eronique *rection to: “Logic and p-recognizable sets of integers”* Bruyere、Georges Hansel、Christian Michaux 和 Roger Villemaire，《比利时数学会西蒙·斯蒂文通报》**1** 1315840 4 1994 4，577（），第期。MR。。， *Logic and p-recognizable sets of integers*，第 1 卷，1994 年，Journ´ees Montoises（Mons, 1992 191 238 1318968），第–页。MR。J. Richard Buchi， *Weak second-order arithmetic and finite automata*，《数学逻辑与数学基础杂志》**6** 125010 6 1960 66 92（），–。MR。R. D. Carmichael， *Note on a new number theory function*，《美国数学会通报》**16** （1910），第 5 期，232–238。MR 1558896

7. Gabriel Conant, *Multiplicative structure in stable expansions of the group of integers*, 《伊利诺伊数学杂志》62 3922420 8 2018 1 4，341 364（），第—期。MR。J.-H. Evertse、H. P. Schlickewei 和 W. M. Schmidt, *Linear equations in variables which lie in a multiplicative group* 2 **155** 2002 3, 807 836 ，《数学年刊》（） （），第–期。MR 1923966 9. Jan-Hendrik Evertse, *On sums of S-units and linear recurrences*，《数学汇刊》53 766298 10 1984 2，225 244（），第–期。MR。Philipp Hieronymi 和 Chris Schulz, *A strong version of Cobham's theorem*，STOC ' 22——第 54 届 ACM SIGACT 计算理论年会论文集，ACM，纽约，2022， 1172 1179 4490070 第–页。MR。Toghrul Karimov、Florian Luca、Joris Nieuwveld、Joel Ouaknine 和 James Worrell, *On the decidability of Presburger arithmetic expanded with powers*，2025 年 ACM-SIAM 离散算法研讨会（SODA）论文集，SIAM，费城，2025 年，4863504 12 2755 2778 页。–。MR。Quentin Lambotte 和 Fran.coise Point, *On expansions of* (Z +, 0)，《纯逻辑与应用逻辑年刊》171（2020），第 8 期，102809，36 页。MR 4105601 13. Michel Laurent, *Équations diophantiennes exponentielles*，《数学发明》78（1984），第 2 期，299 767195 14 327–。MR。Henry B. Mann, *On linear relations between roots of unity*，Mathematika 12（1965），107–117。MR 191892 15. Moj˙zesz Presburger, *Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetikganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt*，《斯拉夫国家第一届数学家大会记录》（1929），92–101，16. Chris Schulz, *Undefinability of multiplication in Presburger arithmetic with sets of powers* **90** 2025 2, 872 886 ，《符号逻辑杂志》（），第–期。MR 17 4930401 。Lou van den Dries 和 Ayhan Gunaydın, *The fields of real and complex numbers with a small multiplicative group* 3 **93** 2006 1, 43 81 ，《伦敦数学会会刊》（） （），第–期。MR 2235481 18. A. J. van der Poorten 和 H. P. Schlickewei, *Additive relations in fields*，《澳大利亚数学会杂志》A 辑 **51** 1991 1, 154 170 1119694 （），第–期。MR。Roger Villemaire，N，，《理论计算机科学》106（1992），第 2 期，337–349。MR 1192774 19 *The theory of* ⟨ + V_k V_l⟩ *is undecidable*

Mathematical Institute, University of Bonn, Endenicher Allee 60, 53115Bonn, Germany*Email address*: hieronymi@math.uni-bonn.deMathematical Institute, University of Bonn, Endenicher Allee 60, 53115Bonn, Germany*Email address*: reitmeir@math.uni-bonn.deDepartment of Mathematics, University of Manchester, Oxford Road, Manc H-ester, M13 9PL, UK*Email address*: xiaoduo.wang@manchester.ac.uk