arXiv:2602.19757v1 [math.CO] 23 Feb 2026

球面5和7-设计的显式构造

RYUTARO MISAWA

Abstract. 本文提出一种明确且可实现的框架，通过从紧融合框架提升点集来构造球面设计。结合已有方法，我们在每个维数下都得到了显式的球面5-设计，其规模为 $|X| = \mathcal{O}(d^3)$。作为该方法的核心组成部分，我们给出了单纯形 3-设计的一种显式构造，使其成为对称群的轨道。以这些单纯形设计为输入，我们进一步在任意偶数维数下构造球面 7-设计；更确切地说，对于每个偶整数 $d \geq 6$，我们都能得到维数为 d的球面 7-设计；若 $\frac{d}{2} - 1$是素数幂，则点数为 $\mathcal{O}(d^6)$。

1. Introduction

球面 t-设计是逼近理论、代数组合学及相关领域中的基本对象（例如参见 [1, 6]）。单位球面上的有限子集 X

$$S^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d \mid ||x|| = 1\}$$

如果对于每个全次数至多为 t 的函数，其在 X 上取值的（加权）平均值都与关于归一化表面测度 σ 的积分一致，则称其为一个（加权）球面 t 设计。当所有权重相等时，简称为球面 t 设计；当允许使用任意正实数权重时，称为加权球面 t 设计。

球面 t 设计由 Delsarte–Goethals–Seidel [10] 引入。令 $N(d,\ t)$ 表示球面 t 设计在 S^{d-1}上的最小基数。利用线性规划，Delsarte–Goethals–Seidel [10] 得到了以下下界。

命题 1.1 ([10])。设自然数 $d,\ t$。则 $N(d,\ t)$ 满足

$$N(d,t) \geq \begin{cases} \binom{d+\frac{t}{2}-1}{d-1} + \binom{d+\frac{t}{2}-2}{d-1} & \text{if } t \text{ is even}, \\ 2\binom{d+\frac{t-1}{2}-1}{d-1} & \text{if } t \text{ is odd}. \end{cases} \tag{1.1}$$

在 S^{d-1} 上达到 (1.1) 中等号的球面 t 设计称为紧致 t设计。在 S^1上，已知正（$t+1$）边形是一个紧致 t 设计（例如参见 [10]）。然而，对于满足 $d \geq 3$ 的 S^{d-1}，紧致 t 设计极为罕见。Bannai–Damerell [7, 8] 证明，可能存在紧致球面 t 设计的 t 只有 $t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11\}$。此外，$t = 1$，2、 3、 11 的分类已经完成，而 $t = 4$、 5、 7 的情形长期以来一直悬而未决（参见 [6]）。

如果固定 t 且 $d \to \infty$，那么界（1.1）表明，若紧 t-设计存在，它应满足

$$|X| = \mathcal{O}\big(d^{\lfloor t/2 \rfloor}\big).$$

在本文中，对于函数 $f(d)$ 和 $g(d)$，若存在常数 $C > 0$ 和 $d_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $g(d) = \mathcal{O}(f(d))$ $d \to \infty$，则记作

$$|g(d)| \leq C\,|f(d)| \qquad (\forall\, d \geq d_0).$$

当 t 固定时，常数 C 和 d_0 可能依赖于 t。因此，一个自然的目标是获得一种显式构造，使其接近这种阶最优行为。

问题 1.2. 固定 $t \in \mathbb{N}$。给出球面 t-设计 $X_d \subset S^{d-1}$ 的一种显式构造，使得

$$|X_d| = \mathcal{O}(d^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}).$$

由于从显式构造的角度来看， $t = 1$、2、3 这些情形已经得到了充分研究，我们将重点关注其余最简单的情形，即 $t = 4$、5、7，并概述问题 1.2 的当前进展。需要注意的是，根据文献的不同，论述中常常会混淆球面 t-设计与加权球面 t-设计。特别是在数值分析中，加权设计也称为强度为 t 的求积公式，而等权设计有时称为切比雪夫型求积公式 [9, 24, 22]。下文仅讨论存在于无限多个维数中的设计族。

(1) $t = 4$ 和 $t = 5$。加权球面设计长期以来一直从数值分析的角度得到研究。特别是，Stroud [24] 为较小的 t构造了许多加权设计。作为一种通用框架，Victoir [25]提出了利用正交数组的方法，可在高维情形下以较少的点实现显式构造，并由此得到含有 $\mathcal{O}(d^2)$个点的加权球面 5-设计。对于等权情形，Bajnok [3] 证明，当N 充分大时，可以在 S^{d-1} 上构造含有 N 个点的球面5-设计。Baladram [5] 还利用低维例子给出了一种归纳构造，不过其点数仍为指数级。此外，Mohammadpour–Waldron [19]证明，若假设 Zauner 猜想成立，则可以在偶数维数 d 中构造含有 $6d^2$ 个点的球面 5-设计。Levenshtein [16] 为 $d = 4^m$ 构造了含有 $d(d+1)$ 个点的球面 4-设计。Kuperberg [15] 构造了含有 $\mathcal{O}(d^2)$ 个点的球面 5-设计，其中 $d = 2^m$。

(2) $t = 7$. Kuperberg [14] 为所有 d 在 S^{d-1} 上构造了加权球面7-设计的显式方法，并指出点数为 $\mathcal{O}(d^4)$。另一方面，与 $t = 4$,5 的情形相比，构造球面7-设计的一般理论要少得多。Sidelnikov[23] 构造了点数随 $d = 2^m$ 呈指数增长的实例。之后，Kuperberg [14] 证明，在存在阶为 d 的 Hadamard 矩阵的维数 d 中，可以构造包含 $\mathcal{O}(d^6)$ 个点的球面7-设计。

本文采用以下构造方案，该方案源自 K¨onig [13] 和 Kuperberg[15], ，并由 Okuda [21], 、Lindblad [17], 和 Misawa [18]进一步发展。对于整数 $d > k$，我们选取有限多个 k 维子空间 $V \subset \mathbb{R}^d$ ，并在每个子空间内的单位球面$S(V) \simeq S^{k-1}$ 上配置合适的设计。通过将这些构形提升为 $\mathbb{R}^d$ 的单位球面S^{d-1} 上的点集，我们得到球面设计。作为主要结果，我们在这一框架下给出了以球面 5-设计和球面 7-设计为主的显式构造。此外，聚焦于情形 $(d, k) = (2d', 2)$ $(d' \in \mathbb{N})$，我们结合了几种相关的类比对象——单纯形设计、射影环面设计和区间设计，并以显式且可实施的形式给出这些构造。

特别地，我们介绍单纯形设计，它是我们方法的核心组成部分。在设计理论中，单纯形设计是球面设计在单纯形上的类比；Baladram [4]以系统化的方式重新表述了它们。对于正整数 d，定义 $\mathbb{R}^d$ 中的标准单纯形如下：

$$\Delta^{d-1} := \left\{ (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \sum_{i=1}^{d} x_i = 1, \;\; x_i \geq 0 \ (1 \leq i \leq d) \right\}.$$

若有限子集 $X \subset \Delta^{d-1}$ 满足：对于每个全次数至多为 t的函数 $f(x) = f(x_1, \ldots\ldots, x_d)$，在 X 上对 f 取平均的结果都等于在 Δ^{d-1}中相对于归一化的（$d-1$）维勒贝格测度对 f 积分的结果，则称其为单纯形 t-设计。人们可以针对单纯形设计提出与球面设计类似的问题，但单纯形设计的构造理论发展得远不够充分。事实上，当 $t = 1$时， Δ^{d-1} 的重心给出一个单纯形1-设计；而当 $t = 2$时，Baladram [4]构造了点数为 d 的单纯形2-设计，适用于每个 d。然而，对于 $t \geq 3$，一般情况下尚无已知的显式构造。本文利用次数为 d的对称群的自然作用构造单纯形 3-设计，记作 S_d。

本文的贡献总结如下。

贡献。

(1) 针对问题 1.2，通过结合已有构造，我们为 $t = 4$ and $t = 5$ and 对**每个** d给出具有 $|X| = \mathcal{O}(d^3)$ 的显式球面 t-设计。(2) 对于**每个** d，我们给出单纯形 3-设计的显式构造。(3) 对于 $t = 7$，我们提供任意偶数维数下球面 7-设计的构造；特别地，对于 $d = 2q$ 且 q 为素数幂的情形，我们在 S^{d-1} 上得到具有$|X| = \mathcal{O}(d^6)$的球面 7-设计。

本文的组织结构如下。第 2 节介绍我们构造中使用的设计。第 3 节构造球面5-设计。第 4 节构造作为次数为 d 的对称群轨道的单纯形 3-设计，然后利用它们构造球面 7-设计。

2. Preliminaries

本节介绍构造中所需的设计概念，并在必要时回顾其基本性质。首先介绍允许正权重的球面设计。令 σ 为 S^{d-1}上的归一化表面测度。

定义 2.1。令 $t, d \in \mathbb{N}$。由有限集 $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset S^{d-1}$和正权重 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$组成的一对 (X, λ) 称为加权球面 t-设计，如果对于每个全次数至多为 t 的函数 $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$,

$$\int_{S^{d-1}} f(x)\, d\sigma(x) = \frac{1}{\Lambda} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, f(x_j),$$

成立，其中 $\Lambda := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$。

注 2.2. 在定义 2.1 中，

(i) 如果所有权重都相等（即 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$），则 (X, λ) 是球面 t-设计。(ii) 允许一般的正实权重 $\lambda_j > 0$，便得到加权球面t-设计的概念。

下面，我们将定义几个与球面设计相类似的相关概念：区间设计、单纯形设计、射影环面设计和复射影设计。

2.1. 区间 t-设计。

定义 2.3 ([20, 第 1] 节)。 设 $d \geq 2$，并令 $w_d(x) := (1-x^2)^{\frac{d-2}{2}}$ 于 $[-1,1]$。有限集 $X \subset [-1,1]$ 是关于 w_d 的区间 t-设计，如果对于每个次数满足 $\deg f \leq t$ 的多项式 f，

$$\frac{1}{\alpha_d}\int_{-1}^{1} f(x)\, w_d(x)\, dx = \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} f(x), \qquad \alpha_d := \int_{-1}^{1} w_d(x)\, dx.$$

在贝塔函数 $B(a,\ b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\, dt$ 的定义中进行变量替换 $u^2 = t$，可得

$$\int_{-1}^{1} u^{2m}(1-u^2)^{d-1}\, du = B\big(m+\tfrac{1}{2}, d\big) \qquad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

因此

$$\frac{1}{\alpha_{2d}}\int_{-1}^{1} u^2(1-u^2)^{d-1}\, du = \frac{B(\frac{3}{2}, d)}{B(\frac{1}{2}, d)} = \frac{1}{2d+1}, \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{\alpha_{2d}}\int_{-1}^{1} u^4(1-u^2)^{d-1}\, du = \frac{B(\frac{5}{2}, d)}{B(\frac{1}{2}, d)} = \frac{3}{(2d+1)(2d+3)}. \tag{2.2}$$

2.2. **单　纯形 t-设计**。令 ρ 为 Δ^{d-} 中归一化的（$d-1$）维勒贝格测度 [1].

定义 2.4 ([4, 公式 (1.1)])。称有限集 $X \subset \Delta^{d-1}$ 为 单纯形 t-设计，如果

$$\int_{\Delta^{d-1}} f(x)\, d\rho(x) \ = \ \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} f(x)$$

对每个全次数不超过 t 的多项式 $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$ 均成立。

多元贝塔函数定义为

$$B(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) := \frac{\prod_{i=1}^{d}\Gamma(\alpha_i)}{\Gamma\Big(\sum_{i=1}^{d}\alpha_i\Big)}, \qquad (\alpha_i > 0),$$

其中伽马函数 Γ 定义为

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\, dt, \qquad (\alpha > 0).$$

由线性性，只需对满足 $k_1 + \cdots + k_d \leq t$ 的单项式 $x_1^{k_1}\cdots x_d^{k_d}$ 验证定义 2.4。此外， B 在单纯形上的积分表示（见 [4, 式（2.2）]）给出以下矩公式。

命题 2.5 ([4, 式（2.2）和式（2.3）])。 设 $d \in \mathbb{Z}_{>0}$。那么，对任意非负整数$k_1, \ldots, k_d$,

$$\int_{\Delta^{d-1}} x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_d^{k_d}\, d\rho(x) = (d-1)!\, B(k_1+1, \ldots, k_d+1).$$

推论 2.6。对于 $d \in \mathbb{Z}_{>0}$，我们有

$$\int_{\Delta^{d-1}} p_2(x)\, d\rho(x) = \frac{2}{d+1}, \tag{2.3}$$

$$\int_{\Delta^{d-1}} p_3(x)\, d\rho(x) = \frac{6}{(d+1)(d+2)}. \tag{2.4}$$

证明。 由于 $p_2(x) = \sum_{i=1}^{d} x_i^2$ 且 ρ 关于坐标置换是对称的,

$$\int_{\Delta^{d-1}} p_2(x)\, d\rho(x) = d\int_{\Delta^{d-1}} x_1^2\, d\rho(x).$$

将命题 2.5 应用于 $(k_1,k_2,\dots,k_d)=(2,0,\dots,0)$，我们得到

$$\int_{\Delta^{d-1}} x_1^2\,d\rho(x) = (d-1)!\,B(3,1,\dots,1) = (d-1)!\,\frac{\Gamma(3)\Gamma(1)^{d-1}}{\Gamma(d+2)} = \frac{2}{d(d+1)}.$$

因此，(2.3) 得证。

类似地，由于 $p_3(x)=\sum_{i=1}^d x_i^3$，

$$\int_{\Delta^{d-1}} p_3(x)\,d\rho(x) = d\int_{\Delta^{d-1}} x_1^3\,d\rho(x).$$

将 $(k_1,k_2,\dots,k_d)=(3,0,\dots,0)$ 代入命题 2.5，可得

$$\int_{\Delta^{d-1}} x_1^3\,d\rho(x) = (d-1)!\,B(4,1,\dots,1) = (d-1)!\,\frac{\Gamma(4)\Gamma(1)^{d-1}}{\Gamma(d+3)} = \frac{6}{d(d+1)(d+2)}.$$

因此，(2.4) 成立。 □

2.3. **射影环面设计**。本小节遵循 [12, 第 2 节、定义 2.4–2.5], ，定义射影环面上的设计。令 $d\in\mathbb{N}$ 并考虑 d 维环面

$$\mathrm{T}^d := (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^d.$$

Let

$$\mathrm{T} := \{\,(\theta,\dots,\theta)\in\mathrm{T}^d \mid \theta\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\,\}$$

为对角子群，并将商 $P(\mathrm{T}^d):=\mathrm{T}^d/\mathrm{T}$ 称为射影环面。令 μ 为 $P(\mathrm{T}^d)$ 上的归一化 Haar 测度。接下来，我们定义射影环面上的单项式。令 $s\in\mathbb{N}$并设 $I_d:=\{1,\dots,d\}$。对于 $a=(a_1,\dots,a_s)$ $b=(b_1,\dots,b_s)\in I_d^s$和 $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_d)\in\mathrm{T}^d$，定义

$$m_{a,b}(\varphi) := \exp\Big(i\sum_{k=1}^{s}(\varphi_{a_k}-\varphi_{b_k})\Big).$$

此函数在对角平移 $\varphi\mapsto\varphi+(\theta,\dots,\theta)$ 下保持不变，因此它可良好地定义为 $P(\mathrm{T}^d)$ 上的函数（仍记作 $m_{a,b}$）。

接着，我们定义以下函数空间：

$$\mathrm{Pol}_t\big(P(\mathrm{T}^d)\big) := \mathrm{span}\{\,m_{a,b}\mid 0\le s\le t,\ a,b\in I_d^s\,\}.$$

定义 2.7 ([12, 定义 2.5])。令 $t\in\mathbb{N}$。称 $X\subset P(\mathrm{T}^d)$ 的有限子集为射影托里t-设计，若对于每个 $f\in\mathrm{Pol}_t\big(P(\mathrm{T}^d)\big)$,

$$\int_{P(\mathrm{T}^d)} f(x)\,d\mu(x) = \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} f(x)$$

成立。

此外，Iosue等人 [12] 明确构造了投影托里克 t设计，其点数为 $\mathcal{O}(d^t)$，适用于每个 d当 t 固定时：

命题 2.8 ([12, 第 3 节。1])。固定 $t\in\mathbb{N}$。

(1) 若 $d-1$ 是素数幂，则存在一个射影环面 t-设计 $X\subset P(\mathrm{T}^d)$，它同构于循环群 $\mathbb{Z}_{|X|}$，其阶由下式给出

$$|X| = \frac{(d-1)^{t+1}-1}{d-2} = 1+(d-1)+\cdots+(d-1)^t.$$

(2) 对于一般的 d，设 $m \geq d$ 是使得 $m-1$ 为素数幂的最小整数。则存在一个射影环面 t-设计 $X \subset P(\mathrm{T}^d)$，满足

$$|X| = \frac{(m-1)^{t+1}-1}{m-2}.$$

特别地，若固定 t，则 $|X| = \mathcal{O}(d^t)$。

2.4. **复射影 t-设计**。令 $d \in \mathbb{N}$。令

$$\mathbb{CP}^{d-1} := \{V \leq \mathbb{C}^d \mid \dim_{\mathbb{C}} V = 1\}$$

表示赋有归一化富比尼–施图迪测度 μ_{FS} 的复射影空间。对每个$k \geq 0$，定义

$$\mathrm{Hom}_{k,k}(\mathbb{C}^d) := \Big\{ P(z,\overline{z}) \in \mathbb{C}[z_1,\dots,z_d,\overline{z}_1,\dots,\overline{z}_d] \;\Big|\; \deg_z P = \deg_{\overline{z}} P = k \Big\},$$

表示双次数为 (k,k) 的双齐次多项式空间。对于 $P \in \mathrm{Hom}_{k,k}(\mathbb{C}^d)$ 和 $[x] \in \mathbb{CP}^{d-1}$，选取一个单位代表元 $x \in \mathbb{C}^d$ 并定义

$$P([x]) := P(x,\overline{x}).$$

此值与单位代表元的选取无关，因此定义良好。定义

$$\mathrm{Pol}_t(\mathbb{CP}^{d-1}) := \mathrm{span}\Big\{ P|_{\mathbb{CP}^{d-1}} \;\Big|\; P \in \mathrm{Hom}_{k,k}(\mathbb{C}^d),\ 0 \leq k \leq t \Big\}.$$

定义 2.9 ([11])。有限集 $X \subset \mathbb{CP}^{d-1}$ 称为一个**复射影 t-设计**，如果对每个$f \in \mathrm{Pol}_t(\mathbb{CP}^{d-1})$,

$$\int_{\mathbb{CP}^{d-1}} f(x)\, d\mu_{\mathrm{FS}}(x) \;=\; \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f(x)$$

成立。

此外，Kuperberg [15] 和 Iosue等人 [12] 证明，可以由一个单纯形 t-设计和一个射影环面 t-设计构造出 $\mathbb{CP}^{d-1}$ 上的 t-设计：

命题 2.10 ([12, 第 4 节1])。设 Y 是单纯形 Δ^{d-1}上的一个 t-设计，且 X 是射影环面 $P(\mathrm{T}^d)$上的一个 t-设计。考虑映射

$$\pi :\ \Delta^{d-1} \times P(\mathrm{T}^d) \longrightarrow \mathbb{CP}^{d-1}, \qquad (p,[\varphi]) \longmapsto \Big[\sum_{n=1}^{d} \sqrt{p_n}\, e^{i\varphi_n} |n\rangle \Big].$$

那么 $Z := \pi(Y \times X)$ 是 $\mathbb{CP}^{d-1}$上的一个 t-设计。这里，$\{|n\rangle\}_{n=1}^d$ 表示 $\mathbb{C}^d$的标准正交基。

2.5. **紧 t-融合框架**。最后，我们定义紧 t-融合框架，它们作为提升构造的输入，并陈述相应的提升定理。设 $d,\ k \in \mathbb{N}$ 满足 $1 \leq k \leq d$，并设

$$G_{k,d} := \{\, V \leq \mathbb{R}^d \mid \dim V = k \,\}$$

表示 $\mathbb{R}^d$中 k维子空间的格拉斯曼流形。

定义 2.11. [2, 定义 4.1] 设 $\{V_j\}_{j=1}^n \subset G_{k,d}$ 为一个有限集，并设 $\{\omega_j\}_{j=1}^n$ 为正权重。对每个 j，令 $P_{V_j} :\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 表示到 V_j 上的正交投影。若存在常数

$A, B > 0$ 使得对所有 $x \in \mathbb{R}^d$,

$$A \|x\|^{2t} \le \sum_{j=1}^{n} \omega_j \|P_{V_j} x\|^{2t} \le B \|x\|^{2t},$$

则称 $\{(V_j, \omega_j)\}_{j=1}^n$ 为 t-融合框架。特别地，若 $A = B$，则称其为加权紧t-融合框架。在等权情形下，我们称 $\{(V_j, \omega_j)\}_{j=1}^n$ 为紧 t-融合框架（TFF$_t$），并且通常省略权重，直接写作 $\{V_j\}_{j=1}^n$。

我们可以由 $G_{k,d}$ 上的紧 t-融合框架以及 S^{k-1}上的球面 $(2t+1)$-设计，得到 S^{d-1} 上的球面 $(2t+1)$-设计。

定理 2.12 ([18, 定理 3.4])。设 $t, s \in \mathbb{N}$。设 $\mathcal{F} \subset G_{k,d}$ 为一个带有正权重 $\{\omega_V\}_{V\in\mathcal{F}}$ 的有限集，并假设 $(\mathcal{F}, \{\omega_V\})$ 是一个加权紧 t-融合框架。对每个 $V \in \mathcal{F}$，设 $(Y_V, \{\lambda_{V,z}\}_{z\in Y_V})$ 是 $S(V)$ 上的加权球面 s-设计，并假设

$$\sum_{z\in Y_V} \lambda_{V,z}$$

与 V 无关。如下定义 S^{d-1} 上的加权有限集 (Z, w):

$$Z := \bigcup_{V\in\mathcal{F}} Y_V \subset S^{d-1}, \qquad w(z) := \sum_{\substack{V\in\mathcal{F}\\ z\in Y_V}} \omega_V \lambda_{V,z} \quad (z \in Z).$$

那么，(Z, w) 是 S^{d-1} 上的加权球面 r-设计，且 $r = \min\{s, 2t+1\}$.

特别地，在等权情形下，我们得到以下结论。

推论 2.13 ([18, 推论 3.5 和注 3.6])。设 $t, s \in \mathbb{N}$。假设 $\mathcal{F} \subset G_{k,d}$ 是一个紧 t-融合框架，并且对每个 $V \in \mathcal{F}$，$Y_V \subset S(V)$ 都是一个球面 s-设计，其中 $|Y_V|$ 与 V 无关。那么，对每个 $V \in \mathcal{F}$，存在 $g_V \in O(V)$，使得集合 $g_V Y_V$两两不相交，并且

$$Z = \bigsqcup_{V\in\mathcal{F}} g_V Y_V \subset S^{d-1}$$

是一个普通的球面 $\min\{s, 2t+1\}$-设计。

此外，Bachoc–Ehler [2] 证明，$\mathbb{CP}^{d-1}$ 上的一个 t-设计可以构造出 $G_{2,2d}$ 上的紧 t-融合框架。

命题 2.14 ([2, 定理 6.4])。设 $Y \subset \mathbb{CP}^{d-1}$ 为一个 t-设计。通过以下方式将 $\mathbb{C}^d$ 与 $\mathbb{R}^{2d}$ 等同

$$\mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{2d}, \qquad z = x + iy \longmapsto (x, y).$$

Then

$$\mathcal{F} := \{\, \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{v, iv\} \mid [v] \in Y \,\} \subset G_{2,2d}$$

是 G_2 中的一个紧 t-融合框架$_{,\,2d}$。

3. Construction of spherical 5-designs on S^{d-1}

本节将说明本文采用的构造方法，并在 S^{d-1} 上显式构造具有 $|X| = \mathcal{O}(d^3)$.的球面5-设计。

3.1. **关于构造方法**。 首先，根据推论 2.13，为了在S^{d-1}上获得一个$(2t+1)$-设计，只需构造：

(1) S^{k-1} 上的 $(2t+1)$-设计，以及
(2) G_k 上的紧致 t- 融合框架 $_{,d}$。

在本小节中，我们取 $(d,k)=(2d',2)$ 来表示 $d'\in\mathbb{N}$。在这种情况下，(1) 由 S^1 上正则 $(2t+2)$ 边形的顶点给出。因此，如果我们能够构造 (2)，即对任意 d'，在 G_2 上构造紧致 t-融合框架$_{,2d'}$，那么我们就得到一个 $S^{2d'-1}$ 上的 $(2t+1)$-设计。在 $(d,k)=(2d',2)$ 的情况下，本文所考虑的构造可以按图 1 所示的示意方式组织，并且本质上归结为构造单纯形 t- 设计。这里，我们用 (M,t) 表示一个空间 M，并附带参数 t，该参数规定了 M 上相关的设计（或紧致 t-融合框架）概念。

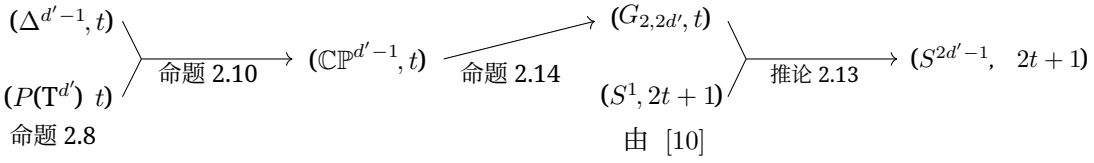


FIGURE 1. 在 $(d,\ k)=(2d',\ 2)$ 情形下的构造流程。

此外，Rabau–Bajnok [22] 给出了一种构造方法：由一个区间 t-设计和一个球面 t-设计，构造高一维的球面 t-设计：

定理 3.1 ([22, 定理 4.1])。 设 $t\in\mathbb{N}$ 和 $d\geq 2$。设 Y 是 $S^{d-1}\subset\mathbb{R}^d$上的一个球面 t-设计，$U\subset[-1,1]$ 是关于权重 w_d的一个区间 t-设计。那么

$$X:=\left\{(u,\sqrt{1-u^2}\,y)\in S^d\ \middle|\ u\in U,\ y\in Y\right\}$$

是 $S^d\subset\mathbb{R}^{d+1}$上的一个球面 t-设计。

注 3.2。 Rabau–Bajnok 方法通常用于由 S^1 上的一个球面 t-设计和一个区间 t-设计，构造 S^{d-1} 上的球面 t-设计。然而，由于以下原因，仅使用这种方法很难为所有满足 t 固定条件的 d 构造基数较小的球面 t-设计：

(1) 每一步都需要一个关于 Gegenbauer 测度的显式区间 t-设计，但这类通用的显式构造仅在非常有限的情形下已知。(2) 即使每一步都能得到一个区间 t-设计，每当维数增加 1，点数就会增加“前一步球面 t-设计中的点数乘以区间 t-设计中的点数”。因此，最终点数会随 d 呈指数增长（见 [15, 5]）。

将定理 3.1 应用于我们的构造，只要能够相对于权重 w_d 构造一个区间 t-设计，就可以通过图 1 由 $S^{2d'-1}$ 上的一个 $(2t+1)$-设计得到 $S^{2d'}$ 上的一个 $(2t+1)$-设计。

3.2. **球面 5-设计的构造（在 S^{d-1} 上）**。如图 1（第 3.1 小节）所示，要在 S^{2d-1} 上构造球面 5-设计，只需构造一个单纯形 2-设计。Baladram [4] 已经在 Δ^{d-1}上构造了一个含 d 个点的单纯形 2-设计。

命题 3.3 ([4, 推论 4.1])。 对于 $d \geq 2$，令 C_d 为一个阶为 d 的循环群，它通过坐标置换作用于 Δ^{d-1}。令 $x = (a, \ldots\ldots, a, 1-(d-1)a) \in \Delta^{d-1}$ 满足

$$a \in \left\{ \frac{1}{d} \pm \frac{1}{d\sqrt{d+1}} \right\}.$$

那么， $C_d \cdot x$ 是 Δ^{d-1}上的一个 d点单纯形 2-设计。

因此，我们得到如下结果。

Pro命题 3.4. 对于每个 $d \geq 2$，都可以构造一个G_2上的 $\mathrm{TFF}_{2,2d}$，其点数为 $\mathcal{O}(d^3)$ s.

证明。 由命题 3.3，设 Y 是 Δ^{d-1} 上的一个 d点单纯形 2-设计；由命题 2.8，设 X 是P上的一个 2-设计（T^d），有 $|X| = \mathcal{O}(d^2)$个点。将命题 2.10 应用于 Y和 X，得到一个 2-设计 $Z := \pi(Y \times X) \subset \mathbb{CP}^{d-1}$，其

$$|Z| \leq |Y||X| = \mathcal{O}(d^3).$$

最后，由命题 2.14，我们得到G_2上的一个 $\mathrm{TFF}_{2,2d}$，其点数至多为 $\mathcal{O}(d^3)$。 □

最后，应用推论 2.13，我们得到如下结论。

定理 3.5. 存在一个球面 5-设计 $X_d \subset S^{2d-1}$ 使得 $|X_d| = \mathcal{O}\left(d^3\right)$.

证明. 由命题 3.4，存在一个 TFF_2 $\mathcal{F} \subset G_{2,2d}$ 满足 $|\mathcal{F}| = \mathcal{O}(d^3)$。对于每个 $V \in \mathcal{F}$，令$Y_V \subset S(V) \simeq S^1$ 为一个正六边形的顶点集。于是， Y_V是 $S(V)$ 上的一个球面 5-设计，因此推论 2.13 给出一个球面 5-设计

$$X_d := \bigsqcup_{V \in \mathcal{F}} g_V Y_V \subset S^{2d-1}$$

对于适当的 $g_V \in O(V)$。特别地， $|X_d| = 6|\mathcal{F}| = \mathcal{O}(d^3)$。 □

根据第 3.1 小节，要在奇数维中构造球面 5-设计，只需对每个 $d \in \mathbb{N}$，构造关于权函数 $w_{2d}(u) = (1-u^2)^{d-1}$. 的区间 5-设计。等价地，无需构造关于权函数 $(1-u^2)^{\frac{d-1}{2}}$ 的区间 5-设计；只需针对这一特定族进行构造即可。

命题 3.6. 令 $d \in \mathbb{N}$ 并设

$$A_d = \frac{1}{4(2d+1)}, \quad B_d = \frac{13\sqrt{2d+3} + \sqrt{330d-177}}{8(2d+1)\sqrt{2d+3}}, \quad C_d = \frac{13\sqrt{2d+3} - \sqrt{330d-177}}{8(2d+1)\sqrt{2d+3}}.$$

Then

$$V_d := \left\{ 0, \pm\sqrt{A_d}, \pm\sqrt{B_d}, \pm\sqrt{C_d} \right\} \subset (-1, 1)$$

相对于权函数 w_{2d}，这是一个 7 点区间 5-设计。

证明。 由于 $V_d = -V_d$，对于每个 $j \in \mathbb{N}, \sum_{v \in V_d} v^{2j+1} = 0.$，我们有。因此，对于 $t = 5$，只需验证偶数阶矩（次数为 2,4）：

$$\frac{1}{7} \sum_{v \in V_d} v^2 = M_2(d), \quad \frac{1}{7} \sum_{v \in V_d} v^4 = M_4(d),$$

其中

$$M_2(d) := \frac{1}{\alpha_{2d}} \int_{-1}^{1} u^2 w_{2d}(u)\, du, \qquad M_4(d) := \frac{1}{\alpha_{2d}} \int_{-1}^{1} u^4 w_{2d}(u)\, du.$$

由（2.1）、（2.2），

$$M_2(d) = \frac{1}{2d+1}, \qquad M_4(d) = \frac{3}{(2d+1)(2d+3)}.$$

接下来，令

$$T_d := \frac{7}{2}M_2(d) - A_d = \frac{13}{4(2d+1)}, \qquad P_d := \frac{T_d^2 - \left(\frac{7}{2}M_4(d) - A_d^2\right)}{2} = \frac{2d+171}{16(2d+1)^2(2d+3)},$$

然后， B_d 和 C_d 是 $z^2 - T_d z + P_d = 0$的根。我们证明 $V_d \subset (-1,1)$。显然， $A_d \in (0,1)$。此外，由于 $T_d > 0$ 和 $P_d > 0$，我们有 $B_d, C_d > 0$。对于 $d \geq 2$，我们有

$$B_d \leq B_d + C_d = T_d = \frac{13}{4(2d+1)} < 1,$$

因此 $0 < C_d < B_d < 1$。对于 $d = 1$,

$$B_1 = \frac{13\sqrt{5} + \sqrt{153}}{24\sqrt{5}} < 1, \qquad C_1 = \frac{13\sqrt{5} - \sqrt{153}}{24\sqrt{5}} > 0,$$

所以再次得到 $0 < C_1 < B_1 < 1$。因此，对于所有 $d \in \mathbb{N}$， $0 < A_d, B_d, C_d < 1$，从而 $V_d \subset (-1,1)$。

由 $B_d + C_d = T_d$ 和 $B_d C_d = P_d$，我们有

$$B_d^2 + C_d^2 = T_d^2 - 2P_d = \frac{7}{2}M_4(d) - A_d^2.$$

因此,

$$A_d + B_d + C_d = \frac{7}{2}M_2(d), \qquad A_d^2 + B_d^2 + C_d^2 = \frac{7}{2}M_4(d).$$

由此可得

$$\frac{1}{7}\sum_{v \in V_d} v^2 = \frac{2(A_d + B_d + C_d)}{7} = M_2(d), \qquad \frac{1}{7}\sum_{v \in V_d} v^4 = \frac{2(A_d^2 + B_d^2 + C_d^2)}{7} = M_4(d),$$

因此， V_d 是关于权函数 w_{2d}的区间 5-设计。 □

因此，我们得到如下结论。

定理 3.7. 存在一个球面 5-设计 $X \subset S^{2d}$，使得 $|X| = \mathcal{O}(d^3)$。

证明。 根据定理 3.5，存在一个球面 5-设计 $Y \subset S^{2d-1}$，满足 $|Y| = \mathcal{O}(d^3)$。根据命题 3.6，集合 $U := V_d \subset [-1,1]$ 是关于权函数 w_{2d}的 7 点区间 5-设计。将定理 3.1 应用于 Y和 U，我们得到一个球面 5-设计

$$X := \left\{ (u, \sqrt{1-u^2}\, y) \in S^{2d} \;\middle|\; u \in U,\ y \in Y \right\}.$$

特别地， $|X| = |U||Y| = \mathcal{O}(d^3)$。 □

结合定理 3.5 和定理 3.7，我们得到如下结论。

定理 3.8. 存在一个球面 5-设计 $X \subset S^{d-1}$ 使得 $|X| = \mathcal{O}(d^3)$。

4. Construction of spherical 7-designs on S^{2d-1}

如图 1（第 3.1 小节）所示，要在 S^{2d-1} 上构造球面 7-设计，只需在 Δ^{d-1}中构造单纯形 3-设计。本节将明确构造单纯形 3-设计，将其作为 Δ^{d-1} 中点在对称群 S_d 对 $\mathbb{R}^d$ 的自然作用下形成的轨道，其中该作用通过置换

坐标实现。尽管所得设计通常规模很大，我们稍后将证明，当 $d-1$ 是素数幂时，可以减少点的数量。

对于每个非负整数 k，我们将第 k 次幂和定义为

$$p_k(x_1,\dots,x_d) := \sum_{i=1}^{d} x_i^k,$$

并且对于 $1 \le k \le d$，将第 k 个初等对称多项式定义为

$$e_k(x_1,\dots,x_d) := \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le d} x_{i_1}\cdots x_{i_k}.$$

众所周知，$\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]$ 中的每一个对称多项式都可以表示为关于 e_1，……，e_d 的多项式。

下面的引理将对 S_d-不变集的单纯形 3-设计性质的验证简化为仅检验 p_2 和 p_3。

引理 4.1 . 假设有限集合 $X \subset \Delta^{d-1}$ 在 S_d 作用下保持不变。则以下条件等价 t:

(1) X 是单纯形 3-设计。

(2)

$$\frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} p_2(x) = \frac{2}{d+1} \quad \text{and} \quad \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} p_3(x) = \frac{6}{(d+1)(d+2)}.$$

证明。 假设 (1) 成立。将 $t=3$ 应用于 $f=p_2$ 和 $f=p_3$，并利用定义 2.4、(2.3) 和 (2.4)，可得 (2)。因此，只需证明 (2)⇒(1)。对于任意次数为 ≤ 3 的多项式 $f \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]$，定义

$$f^{\mathrm{sym}}(x) := \frac{1}{d!}\sum_{\sigma\in S_d} f(\sigma x).$$

由于 X 在 S_d 作用下保持不变，我们有

$$\sum_{x\in X} f(x) = \sum_{x\in X} f^{\mathrm{sym}}(x).$$

此外，命题 2.5 的右侧在 (k_1、……、k_d) 的置换下保持不变。因此，对于任意 $\sigma \in S_d$ 和任意多项式 f,

$$\int_{\Delta^{d-1}} f(\sigma x)\,d\rho = \int_{\Delta^{d-1}} f(x)\,d\rho,$$

因此

$$\int_{\Delta^{d-1}} f\,d\rho = \int_{\Delta^{d-1}} f^{\mathrm{sym}}\,d\rho.$$

因此，要证明 X 是一个单纯形 3-设计，只需证明对于每个次数为 ≤ 3的对称多项式 g ，

$$\frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} g(x) = \int_{\Delta^{d-1}} g\,d\rho.$$

如果 g 是一个次数为 ≤ 3的对称多项式，那么 g 是关于 p_1、p_2、p_3的多项式。由于 $p_1 \equiv 1$ 属于 Δ^{d-1}，任何这样的 g 都可以写成

$$g(x) = a + b\,p_2(x) + c\,p_3(x) \qquad \text{for some } a,b,c\in\mathbb{R}.$$

另一方面，由 (2.3) 和 (2.4) 以及假设 (2)，所需的等式对 p_2 和 p_3 成立，因此由线性性可知，对所有此类 g 也成立。因此， X 是一个单纯形 3-设计。□

现在，我们将显式构造单纯形 3-设计，将其表示为 S_d 的自然坐标置换作用下的轨道 $S_d \cdot x \subset \Delta^{d-1}$。对于实数 α 和整数 $m \geq 0$，我们用 $\alpha^{(m)}$ 表示 m 元组 $(\alpha, \ldots, \alpha)$。例如，

$$(a, b^{(q)}, c^{(q)}) := \big(a, \underbrace{b, \ldots, b}_{q \text{ times}}, \underbrace{c, \ldots, c}_{q \text{ times}}\big) \in \mathbb{R}^{2q+1},$$

and

$$(a, b^{(q-1)}, c^{(q-1)}, 0) := \big(a, \underbrace{b, \ldots, b}_{q-1 \text{ times}}, \underbrace{c, \ldots, c}_{q-1 \text{ times}}, 0\big) \in \mathbb{R}^{2q}.$$

定理 4.2。设 $d \geq 3$。定义一个点 $x \in \Delta^{d-1}$ 和 S_d-轨道 $X_d := S_d \cdot x$ 如下。

(i) 若对某个 $q \geq 1$有 $d = 2q+1$，定义

$$P(s) = (q+1)^2(2q+1)(2q+3)\, s^3 - 6(q+1)^2(2q+3)\, s^2 + 3(2q+3)^2\, s - 2(2q+5).$$

and

$$s_- := \frac{2(q+1) - \sqrt{2(q+1)}}{(2q+1)(q+1)}.$$

取 $P(s) = 0$的一个根 $s \in \big(s_-, \frac{1}{q+1}\big)$，并令

$$a := 1 - qs, \qquad t := \frac{((q+1)s-1)^2}{2(q+1)}, \qquad D := s^2 - 4t, \qquad b := \frac{s+\sqrt{D}}{2}, \quad c := \frac{s-\sqrt{D}}{2}.$$

令 $x := (a, b^{(q)}, c^{(q)})$.

(ii) 若对某个 $q \geq 3$有 $d = 2q$，定义

$$P(s) := q(q-1)(q+1)(2q-1)(2q+1)\, s^3 - 6q(q-1)(q+1)(2q+1)\, s^2 + 3(q+1)(4q^2-3)\, s - 2(q+2)(2q-1).$$

and

$$s_- = \frac{2(q-1)(2q+1) - \sqrt{2(q-1)(2q-3)(2q+1)}}{(q-1)(2q-1)(2q+1)}.$$

选取一个 $s \in \big(s_-, \frac{1}{q}\big)$ 的 $P(s) = 0$ 根，并令

$$a := 1 - (q-1)s, \qquad t = \frac{q(q-1)(2q+1)s^2 - 2(q-1)(2q+1)s + (2q-1)}{2(q-1)(2q+1)},$$

$$D := s^2 - 4t, \qquad b := \frac{s+\sqrt{D}}{2}, \quad c := \frac{s-\sqrt{D}}{2}.$$

令 $x := (a, b^{(q-1)}, c^{(q-1)}, 0)$。

(iii) 若 $d = 4$，令 $a \in (0, 1/2)$ 为以下表达式的一个根

$$120a^3 - 90a^2 + 18a - 1 = 0$$

使得下文定义的量 t 和 D 满足 $t > 0$ 和 $D > 0$。令 $s := 1 - 2a$ 并且

$$t := \frac{2a^2 + s^2 - \frac{2}{5}}{2}, \qquad D := s^2 - 4t, \qquad b := \frac{s+\sqrt{D}}{2}, \quad c := \frac{s-\sqrt{D}}{2},$$

并令 $x := (a, a, b, c)$。

则 $x \in \Delta^{d-1}$ 与 $X_d := S_d \cdot x$ 是单纯形 3-设计。

证明。在整个证明过程中，我们使用这些恒等式

$$b+c=s,\quad bc=t,\quad b^2+c^2=s^2-2t,\quad b^3+c^3=s^3-3st, \tag{4.1}$$

其中，b，c 是 $z^2-sz+t=0$的根。为证明之目的，我们将 $D=D(s)$ 视为关于 s 的二次函数。

(i) 设

$$s_+=\frac{2(q+1)+\sqrt{2(q+1)}}{(2q+1)(q+1)}.$$

直接计算可得 $D(s_+)=D(s_-)=0$。

接下来,

$$P\Big(\frac{1}{q+1}\Big)=\frac{2}{q+1}>0,$$

直接计算可得

$$P(s_-)=-\frac{(2q-1)\big((2q+3)\sqrt{2(q+1)}-4(q+1)\big)}{(q+1)(2q+1)^2}<0.$$

因此，根据介值定理，存在

$$s\in\Big(s_-,\frac{1}{q+1}\Big)\text{ with }P(s)=0.$$

此外,

$$s_+>\frac{2(q+1)}{(2q+1)(q+1)}>\frac{1}{q+1},$$

所以 $s\in(s_-,\ \frac{1}{q+1})\subset(s_-,\ s_+)$，从而 $D(s)>0$。

由于 $s>s_->0$ 和 $t>0$，我们有 $b,\ c>0$。由于 $s<\frac{1}{q+1}$,

$$a>1-\frac{q}{q+1}=\frac{1}{q+1}>0,\qquad a+q(b+c)=1,$$

所以 $x=(a,\ b^{(q)},\ c^{(q)})\in\Delta^{d-1}$。

最后，利用 (4.1)，我们得到,

$$p_2(x)=a^2+q(b^2+c^2)=(1-qs)^2+q(s^2-2t)=\frac{2}{d+1}.$$

此外,

$$p_3(x)=a^3+q(b^3+c^3)=(1-qs)^3+q(s^3-3st),$$

进一步计算可得

$$p_3(x)-\frac{6}{(d+1)(d+2)}=-\frac{q}{2(q+1)(2q+3)}P(s)=0.$$

因此 $p_3(x)=\frac{6}{(d+1)(d+2)}$。现在，由引理 4.1 可知 X_d 是一个单纯形 3-设计。

(ii) 令

$$s_+=\frac{2(q-1)(2q+1)\ +\ \sqrt{2(q-1)(2q-3)(2q+1)}}{(q-1)(2q-1)(2q+1)}.$$

直接计算可得 $D(s_-)=D(s_+)=0$。

接下来,

$$P\Big(\frac{1}{q}\Big)=\frac{(2q-1)(q-1)}{q^2}>0.$$

直接计算可得

$$P(s_-) = \frac{A(q) + \sqrt{2(q-1)(2q-3)(2q+1)}\, B(q)}{(q-1)(2q-1)^2(2q+1)}.$$

其中

$$A(q) = 2(q-1)(2q+1)(4q^2-12q+11), \qquad B(q) = -(q+1)(2q-3)^2.$$

对于 $q \geq 3$，我们有 $B(q) < 0$，因此要证明 $P(s_-) < 0$，只需证明

$$\sqrt{2(q-1)(2q-3)(2q+1)}\,(-B(q)) > A(q).$$

将两边平方（两边均为正数），可将问题化为

$$2(q-1)(2q-3)(2q+1)B(q)^2 - A(q)^2 = 2(q-1)(2q-1)^3(2q+1)\,F(q),$$

其中

$$F(q) = (2q^2-6q+1)^2 + q(7q-20) > 0.$$

因此，$P(s_-) < 0$。由介值定理可知，存在

$$s \in \left(s_-, \frac{1}{q}\right) \text{ with } P(s) = 0.$$

此外，

$$qs_+ - 1 = \frac{(q-1)(2q+1) \;+\; q\sqrt{2(q-1)(2q-3)(2q+1)}}{(q-1)(2q-1)(2q+1)} \;>\; 0,$$

因此 $s_+ > \frac{1}{q}$，从而 $s \in (s_-, \frac{1}{q}) \subset (s_-, s_+)$，这意味着 $D(s) > 0$。

另外，

$$t = \frac{q}{2}\Big(s - \frac{1}{q}\Big)^2 + \frac{1}{2q(q-1)(2q+1)} > 0.$$

因此 $b, c > 0$。由于 $s < \frac{1}{q}$，我们有

$$a > \frac{1}{q} > 0, \qquad a + (q-1)(b+c) + 0 = 1,$$

因此 $x = (a,\ b^{(q-1)},\ c^{(q-1)},\ 0) \in \Delta^{d-1}$。

最后，利用(4.1)，我们得到，

$$p_2(x) = a^2 + (q-1)(b^2+c^2) = \frac{2}{d+1}.$$

此外，条件 $P(s) = 0$ 等价于

$$p_3(x) = a^3 + (q-1)(b^3+c^3) = \frac{6}{(d+1)(d+2)}.$$

现在，由引理 4.1 可知，X_d 是一个单纯形 3-设计。

(iii) 显然，$2a+b+c = 2a+s = 1$ 和 $a > 0$。由于 $t > 0$ 和 $D > 0$，我们有 $b,\ c > 0$。因此 $x \in \Delta^3$。由于 X_4 是 S_4-不变的，根据引理 4.1，只需证明 $p_2(x) = \frac{2}{5}$ 和 $p_3(x) = \frac{1}{5}$。利用 (4.1)，我们得到

$$p_2(x) = 2a^2 + s^2 - 2t = \frac{2}{5}$$

根据 t的定义，并且

$$p_3(x) = 2a^3 + s^3 - 3st.$$

代入 $s = 1 - 2a$ 和 $t = \frac{2a^2+s^2-\frac{2}{5}}{2}$ 得到

$$p_3(x) - \frac{1}{5} = \frac{1}{10}\big(120a^3 - 90a^2 + 18a - 1\big) = 0,$$

因此 $p_3(x) = \frac{1}{5}$。所以 X_4 是一个单纯形 3-设计。 □

根据定理 4.2，我们得到每个维数 $d \geq 3$下单纯形 3-设计的显式构造。

定理 4.3。存在一个球面 7-设计 $X_d \subset S^{2d-1}$，使得

$$|X_d| = \mathcal{O}\Big(2^d d^{9/2}\Big).$$

证明。令 $Y \subset \Delta^{d-1}$ 为定理 4.2 中得到的单纯形 3-设计。令 $X \subset P(\mathrm{T}^d)$ 为命题 2.8 (2) 给出的射影托里克 3-设计，使得 $|X| = \mathcal{O}(d^3)$。按照命题 2.10 定义 $Z := \pi(Y \times X) \subset \mathbb{CP}^{d-1}$；则 Z 是一个复射影 3- 设计，并且

$$|Z| \leq |Y||X|.$$

将命题 2.14 应用于 Z，可得一个紧 3-融合框架 $\mathcal{F} \subset G_{2,\ 2d}$，其

$$|\mathcal{F}| \leq |Z| \leq |Y||X|.$$

对每个 $V \in \mathcal{F}$，令 $Y_V \subset S(V) \simeq S^1$ 为一个正八边形的顶点集。则 Y_V 是 $S(V)$ 上的一个球面 7-设计，因此由推论 2.13 可得一个球面 7-设计

$$X_d := \bigsqcup_{V \in \mathcal{F}} g_V Y_V \ \subset \ S^{2d-1}$$

对于适当的 $g_V \in O(V)$。特别地，$|X_d| = 8|\mathcal{F}|$。

剩下的任务是估计 $|Y|$。由于 Y 是一个 S_d-轨道，我们有

$$|Y| = \begin{cases} \dfrac{(2q+1)!}{(q!)^2} = (2q+1)\dbinom{2q}{q} & \text{if } d = 2q+1 \text{ is odd}, \\ \dfrac{(2q)!}{((q-1)!)^2} = 2q(2q-1)\dbinom{2q-2}{q-1} & \text{if } d = 2q \text{ is even}. \end{cases}$$

由斯特林公式，$\binom{2n}{n} = \mathcal{O}(4^n/\sqrt{n})$，因此无论 d 的奇偶性如何，

$$|Y| = \mathcal{O}\Big(2^d d^{3/2}\Big).$$

因此，

$$|X_d| = 8|\mathcal{F}| \leq 8|Y||X| = \mathcal{O}\Big(2^d d^{9/2}\Big).$$

□

注记 4.4。由于定理 4.3 的证明未涵盖例外情形 $d = 4$，我们将单独处理此情形。令 $Y \subset \Delta^3$ 为定理 4.2 (iii) 中的单纯形 3-设计。于是 $|Y| = 12$。由于 $d - 1 = 3$ 是素数幂，命题 2.8 (1) 给出一个射影托里克 3-设计 $X \subset P(\mathrm{T}^4)$，满足 $|X| = 40$。因此，$Z = \pi(Y \times X) \subset \mathbb{CP}^3$ 满足 $|Z| \leq |Y||X| = 480$，而命题 2.14 得到一个 TFF_3 $\mathcal{F} \subset G_{2,\ 8}$，满足 $|\mathcal{F}| \leq 480$。最后，在每个 $V \in \mathcal{F}$ 上取一个正八边形，应用推论 2.13，得到一个位于 S^7 上的球面 7-设计，满足

$$|X_4| = 8|\mathcal{F}| \leq 3840.$$

4.1. **通过一个 3-传递子群进行抽稀**。令

$$\Omega_k := \Big\{ (i_1, \dots, i_k) \in I_d^k \;\Big|\; i_r \neq i_s \text{ for all } 1 \leq r < s \leq k \Big\}.$$

Then

$$|\Omega_k| = (d)_k := d(d-1)\cdots(d-k+1).$$

引理4.5. 设 $1 \leq k \leq d$ 和 $G \leq S_d$ 在 I_d上是 k-传递的。那么对于任意函数 $\Phi : \Omega_k \to \mathbb{R}$以及任意 $\mathbf{i} \in \Omega_k$,

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \Phi(g^{-1}\mathbf{i}) = \frac{1}{(d)_k} \sum_{\mathbf{j} \in \Omega_k} \Phi(\mathbf{j}).$$

证明。 显然。 □

命题 4.6. 设 $d \geq 3$。假设 $x \in \Delta^{d-1}$ 且 S_d-轨道 $X := S_d \cdot x$ 是一个单纯形 3-设计。设 $G \leq S_d$ 是 I_d 上的一个 3-传递子群，并令 $Y := G \cdot x$。那么 Y是一个单纯形 3-设计。

证明。 只需证明，对于每个次数为 ≤ 3的多项式 $f \in \mathbb{R}[y_1, \dots, y_d]$，

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g \cdot y) = \frac{1}{|S_d|} \sum_{\sigma \in S_d} f(\sigma \cdot y).$$

由线性性可知，不妨设 $f = m$ 是次数为 ≤ 3的单项式。于是

$$m(y) = \prod_{t=1}^{k} y_{i_t}^{a_t}, \quad \text{for some } k \in I_3,\ \mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k) \in \Omega_k,\ a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ with } \sum_{t=1}^{k} a_t \leq 3.$$

定义 $\Phi\colon \Omega_k \to \mathbb{R}$ 如下

$$\Phi(j_1, \dots, j_k) := \prod_{t=1}^{k} x_{j_t}^{a_t}.$$

对于 $g \in S_d$，由于 $(g \cdot x)_{i_t} = x_{g^{-1}(i_t)}$，我们有 $m(g \cdot x) = \Phi(g^{-1}\mathbf{i})$。由于 G 是 3-传递的，且 $k \leq 3$，因此它是 k-传递的，故由引理4.5可得

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} m(g \cdot x) = \frac{1}{(d)_k} \sum_{\mathbf{j} \in \Omega_k} \Phi(\mathbf{j}).$$

类似地，将引理4.5应用于同样是 k-传递的 S_d，我们得到相同的右端，因此

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} m(g \cdot x) = \frac{1}{|S_d|} \sum_{\sigma \in S_d} m(\sigma \cdot x).$$

这证明了对所有次数为 ≤ 3 的 f，所需的恒等式均成立，因此 Y 是一个单纯形 3-设计。 □

推论 4.7。 假设 $d - 1 = q$ 是一个素数幂，并将 I_d 与 $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ 等同。设 $x \in \Delta^{d-1}$ 满足 $S_d \cdot x$ 是一个单纯形 3-设计。令 $G := \mathrm{PGL}(2, q) \leq S_d$ 自然作用，并设 $Y := G \cdot x$。则 Y 是一个单纯形 3-设计。特别地，$|Y| = \mathcal{O}(d^3)$。

证明。 $\mathrm{PGL}(2,\ q)$ 在 $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ 上的自然作用是 3-传递的。因此，命题 4.6 适用，并表明 Y是一个单纯形 3-设计。此外，$|Y| \leq |G| = q(q^2-1) = d(d-1)(d-2)$。□

命题 4.8。 假设 $d \geq 3$，且 $d - 1$ 是一个素数幂。那么可以在$G_{2,\ 2d}$ 上构造基数为 $\mathcal{O}(d^6)$ 的 TFF_3。

证明。 对于定理 4.2 中使用的点 $x \in \Delta^{d-1}$，其轨道 $S_d \cdot x$ 是一个单纯形 3-设计。根据推论 4.7，存在一个单纯形 3-设计 Y，使得 $|Y| = \mathcal{O}(d^3)$。根据命题 2.8 (1)，取

一个射影托里克 3-设计 $X \subset P(\mathbb{T}^d)$，满足 $|X| = \mathcal{O}(d^3)$。将命题 2.10 应用于 Y 和 X，得到一个复射影 3-设计 $Z := \pi(Y \times X) \subset \mathbb{CP}^{d-1}$，满足 $|Z| \le |Y||X| = \mathcal{O}(d^6)$。最后，命题 2.14 产生一个 TFF$_3$ $\mathcal{F} \subset G_{2,\ 2d}$，满足 $|\mathcal{F}| \le |Z|$，因此 $|\mathcal{F}| = \mathcal{O}(d^6)$。□

备注 4.9。命题 4.8 给出了一个显式构造，可得到定义在 G_2 上的 TFF$_{3\ 2d}$，其中 $d-1$ 是素数幂。对于任意 $d \ge 3$，仍可通过将定理 4.2 中的单纯形 3-设计与命题 2.8(2) 中的射影托里克 3-设计相结合，再应用命题 2.10 和 2.14，构造定义在 G_2 上的 TFF$_{3\ 2d}$。

定理 4.10。假设 $d \ge 3$ 且 $d-1$ 是素数幂。那么可以构造一个球面 7-设计 $X_d \subset S^{2d-1}$，使得

$$|X_d| = \mathcal{O}\left(d^6\right).$$

证明。由命题 4.8 可得一个 TFF$_3$ $\mathcal{F} \subset G_{2,\ 2d}$，其中 $|\mathcal{F}| = \mathcal{O}(d^6)$。对于每个 $V \in \mathcal{F}$，令$Y_V \subset S(V) \simeq S^1$ 为一个正八边形的顶点集。由推论 2.13 可得一个球面 7-设计 $X_d \subset S^{2d-1}$，其中 $|X_d| = |Y_V|\,|\mathcal{F}| = 8|\mathcal{F}| = \mathcal{O}(d^6)$. □

致谢。作者谨向宗政昭弘教授致以诚挚的谢意，感谢他给予的指导与鼓励。他还感谢 Ayodeji Lindblad 提出的宝贵意见和富有帮助的讨论，尤其是关于通过射影映射和 Hopf映射构造设计的讨论。

References

[1] C. An、X. Chen、I. H. Sloan 和 R. S. Womersley，适用于二球面积分与插值的良态球面设计，*SIAM J. Numer. Anal.* **48** (2010)，第 6 期，2135–2157 页。[2] C. Bachoc 和 M. Ehler，紧 p融合框架，*Applied and Computational Harmonic Analysis* **35** (2013)，第 1 期，1–15 页。[3] B. Bajnok，球面 4-设计和 5-设计的构造，*Graphs and Combinatorics* **7**(1991)，第 3 期，219–233 页。[4] M. S. Baladram，关于单纯形 t设计的显式构造，*Interdisciplinary Information Sciences* **24** (2018)，第 2 期，181–184 页。[5] M. S. Baladram，*Explicit Constructions of Spherical Designs from Ball Designs and Simplex Designs*，博士论文，东北大学，2018。[6] E. Bannai 和 E. Bannai，球面设计与球面代数组合学综述，*European Journalof Combinatorics* **30**(2009)，第 6 期，1392–1425 页。doi:10.1016/j.ejc.2008.11.007。[7] E. Bannai 和 R. M. Damerell，紧球面设计（一），*J. Math. Soc. Japan* **31**(1979)，第 1 期，199–207 页。[8] E. Bannai 和 R. M. Damerell，紧球面设计（二），*J. London Math. Soc.*(2) 21 (1980)，13–30 页。[9] R. Cools，构造求积公式：艺术背后的科学，*Acta Numer.* **6**(1997)，1–54 页。[10] P. Delsarte、J. M. Goethals 和 J. J. Seidel，球面码与设计，*Geometriae Dedicata* **6** (1977)，第 3 期，363–388 页。[11] S. G. Hoggar，*t-designs in projective spaces*，*European Journal of Combinatorics* **3**(1982)，第 3 期，233–254 页。[12] J. T. Iosue、T. C. Mooney、A. Ehrenberg 和 A. V. Gorshkov，射影环面设计、量子态设计与互无偏基，*Quantum* **8** (2024)，1546。doi:10.22331/q-2024-12-03-1546。*arXiv*:2311.13479。[13] H. K¨onig，球面上的求积公式，载于 *Advances in Multivariate Approximation*，W. Haussmann、K. Jetter 和 M. Reimer（编），《数学研究》，第 107 卷，Wiley-VCH，柏林，1999 年，第 201–211 页。[14] G. Kuperberg，利用阿基米德帽盒定理进行数值求积，*SIAM J. Numer. Anal.* **44** (2006)，第 3 期，908–935 页。doi:10.1137/040615584。*arXiv*:math/0405366。[15] G. Kuperberg，利用纠错码进行数值求积，*SIAM J. Numer. Anal.* **44** (2006)，第 3 期，897–907 页。doi:10.1137/040615572。*arXiv*:math/0402047。[16] V. I. Leven˘ste˘ın，内积模有界的码的最大基数上界，*Soviet Math. Dokl.* **25** (1982)，526–531 页。

[17] A. Lindblad，与射影映射和霍普夫映射相关的设计， *Discrete Comput. Geom.*(2025)，2025 年 11 月 28 日在线发表。doi:10.1007/s00454-025-00805-7。 *arXiv*:2310.12091。[18] R. Misawa，利用紧 t融合框架构造球面设计，arXiv:2601.17294 (2026)。[19] A. Mohammadpour 和 S. Waldron，来自群轨道的复球面设计，*Linear Algebra and its Applica-tions* **438** (2013)，第 4 期，1649–1660 页。[20]S. Nishimura，球面 t设计与伯恩斯坦定理， *SUT J. Math.* **39** (2003)，第 1 期，1–14 页。doi:10.55937/sut/1059540776。[21] T. Okuda，通过霍普夫映射建立球面设计之间的关系，arXiv:1506.08414 (2015)。[22] P. Rabau 和 B. Bajnok，切比雪夫型求积公式节点数的上界，*Journal ofApproximation Theory* **67**(1991)，199–214 页。[23] V. M. Sidelnikov， 2^n维欧几里得空间中的球面7-设计，*J. Algebraic Combin.* **10** (1999)，第 3 期，279–288 页。[24] A. H. Stroud，*Approximate Calculation of Multiple Integrals*，Prentice–Hall，恩格尔伍德克利夫斯，新泽西州，1971 年。[25] N. Victoir，用少量点构造高维对称测度的非对称求积公式， *SIAM J.Numer. Anal.* **42** (2004)，第 1 期，209–227 页。

(R. Misawa) Graduate School of Information Sciences, Tohoku University, 6-3-09 Aramaki-Aza-Aoba, Aoba-ku, Sendai 980-8579, Japan

Email address: misawa.ryutaro.q2@dc.tohoku.ac.jp