arXiv:2602.19765v1 [math.AG] 23 Feb 2026

单纯形托里克预簇的相关映射与代数骨架

FELIX GÖBLER

摘要。由多重分次环产生的概形之间的态射，对于理解代数几何中的几何关系至关重要，但一直缺乏针对这类映射的系统理论。本文通过引入若干关于其底层多重分次环之间映射的概念，为多重分次 Proj 概形之间的有理映射建立了全面的框架。一项关键挑战在于，要诱导出实际的态射（而不仅仅是有理映射），环同态 $\varphi\colon R \to S$必须命中 S中的每一个相关元素。为此，我们引入相关子集 $B \subseteq S_+$ 的用法（其中 S_+ 是由所有相关元素生成的理想）， $B \trianglelefteq S$, 从而更灵活地控制这一条件。

作为应用，我们证明多重分次诺特多项式环能够自然地编码组合数据，进而产生扇系，并由此得到环面预簇。借助我们提出的有理映射概念及这些相关子集，我们证明，三元组范畴（$(D,\ S,\ B)$——其中 D 是有限生成阿贝尔群，S 是一个 D-分次诺特多项式环，而 $B \trianglelefteq S$ 是 S_+ 的一个子集——连同锥环的有理映射）与单纯形托里克预簇范畴反等价。

目录

引言 1

1. 多重分次 Proj 的函子性 3
1.1. 相关映射 3
1.2. 锥形环与函子性 7
2. 单纯形托里克（预）簇 11
2.1. 极大锥 12
2.2. 扇系 15
2.3. 扇系映射 21
2.4. 子环面作用 24
参考文献 25

引言

环面簇以其丰富的结构著称，并且凭借用扇给出的组合描述而易于入手。1992年，David Cox构造了坐标

为环面簇构造的环，并表明环面簇的坐标环 X_Σ 是一个多项式环，由有限生成阿贝尔群分次（即X_Σ的除子类群，参见 [C]）。大约十年后，Brenner–Schröer针对由有限生成阿贝尔群分次的环提出了Proj 构造，并证明对于有限多项式环，所得概形是托里克预簇（参见 [BS]）。

本文的目标有两个方面：一方面，我们希望理解多项式环（带有无关理想）与扇系之间的双向转换；另一方面，我们希望利用这本词典从代数角度理解环面簇，即用它们的坐标环来描述。为此，我们必须考虑若干种在有限生成阿贝尔群分次的环之间的“可许可”映射。

设 D 为有限生成阿贝尔群， S 为交换含单位的 D分次环。若齐次元素 $f \in S$ 满足： D中单位元的次数群 D^f 在S_f 中的指数有限，则称其为相关元素。关于相关元素的基本性质，以及关于多重分次 *Proj*构造的结构定理

$$\operatorname{Proj}^D(S) = \bigcup_{f \text{ relevant}} \operatorname{Spec}(S_{(f)}),$$

参见我们之前的论文 [G1], [G2],和 [G3]。

为了描述 Proj 概形之间的态射，我们分析多重分次环中的相关元素何时会被映射为相关元素。由于定义多重分次谱的态射或有理映射所需的条件甚至更低，我们也将进一步考察这些特殊情形。

作为这些映射概念的一个应用，我们希望从代数上描述单纯形托里克预簇的范畴。给定一个诺特多重分次多项式环 S， [BS]证明$\operatorname{Proj}^D(S)$是一个单纯形托里克预簇，其环面为 $G = \operatorname{Spec}(S_0[D_F])$（$D_F$ 是 D的自由部分，另见定理2.12）。将 [C]的思想推广到环面预簇，我们证明一个单纯形托里克预簇 X 给出一个多重分次多项式环 S，该环与*Cox* 环——即属于 X者——相关，但未必与之相同。

如果我们将多重分次多项式环 S 的数据用一个“无关子集”加以扩充，即一个子集 $B \trianglelefteq S$，它含于整个无关理想 S_+之中，则上述函子给出范畴反等价。特别地，锥环是所谓簇环的推广，这一概念由 [ADHL]引入。

定理 A (定理 2.31)。 设 S 是一个定义在代数闭域上、诺特、阶乘且有效 D-分次的多项式环。那么，单纯形托里克预簇的范畴（以托里克预簇的态射为态射）$\mathrm{ToricPrev_S}$ 反等价于由诺特多项式环上的锥环及其间的锥环有理映射构成的范畴 RatConRing 。特别地，多重分次诺特多项式环可作为环面预簇的坐标环。

当然，人们此前已经研究过环面映射和 Cox 环的某些方面，但据我们所知，尚无一份基于多重分次环的详细论述，也没有将 Brenner–Schröer 的相关性概念纳入其中的论述。我们通常假设环面（预）簇是正规的，正如 [CLS]中所述。

文章结构。 在第 1 节中，我们将快速回顾相关元素的定义，然后深入讨论多重分次环之间的若干相关映射概念。首先，我们将考察这些映射，而暂不把无关理想作为额外数据加以考虑。第 2 节主要致力于从多重分次环构造仿射扇系，反之亦然。这些思想已经出现在 [C] 和 [BS], 中，但这种对应关系尚未得到确立。最后，我们将证明，环面预簇的 Chow 商仍然是环面预簇。

致谢。 我要感谢我的（前任）导师 Alex Küronya，感谢他给予我的巨大支持和富有见地的反馈。我也非常感谢 Johannes Horn、Andrés Jaramillo Puentes、Kevin Kühn、Jakob Stix、Martin Ulirsch 和 Stefano Urbinati，感谢他们参与了许多有益的讨论并提出宝贵意见。

本研究部分由德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）TRR 326 均化结构的几何与算术项目（项目编号 444845124）以及 LOEWE 资助项目 代数与几何中的均化结构资助。

1. 多重分次 Proj 的函子性

设 D 是一个有限生成阿贝尔群。首先，我们需要回顾此前论文中的若干定义。一个带有限生成阿贝尔群分次的交换含幺环 S 称为多重分次环。我们通常假设多重分次环是有效分次的，即分次群由其支撑生成（参见[G1], 例 1.12）。

定义 1.1. 设 R 是 D_R分次环， S 是 D_S分次环，其中 D_R 和 D_S 是有限生成阿贝尔群。多重分次环的态射 是一个对 (φ,α_φ)，其中 φ 是环同态 $\varphi\colon R \to S$，而 α_φ 是群同态$\alpha_\varphi\colon D_R \to D_S$，满足对所有 $d \in D_R$都有 $\varphi(R_d) \subseteq S_{\alpha_\varphi(d)}$。如果 $D_R = D_S$，我们也称 φ 为 D_R分次环的态射。如果 φ 是同构，但 $D_R \neq D_S$，则称 φ（或者更确切地说，称诱导映射$\alpha_\varphi\colon D_R \to D_S$）为 S的重新分次。

对于齐次的 $f \in S_d$，其权锥为

$$\mathrm{C}_D(f) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Cone}(\{\deg_D(g) \mid g \text{ 是 } f^k \text{的齐次因子，对某个 } k \geq 0\})$$

于 $D_{\mathbb{R}} = D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$中。回忆一下，若 $f \in S_d$ 满足例如 $\mathrm{int}(\mathrm{C}_D(f)) \subseteq D_{\mathbb{R}}$非空，或者 S_f的单位群 D^f在 D 中具有有限指数（见 [G1], 引理 1.15），则称其为相关的。由 S 中所有相关元素生成的理想 S_+ 称为无关理想，相关元素的集合记为 $\mathrm{Rel}^D(S)$。如果 S 是阶乘分次且诺特的，我们可以选取 S 的一个由 D-素元素构成的极小生成系，从而通过这些 D-素元素的单项式构造 S_+ 的极小生成元。我们将 S_+ 的相应极小生成集记为 $\mathrm{Gen}^D(S)$。更多细节请参见 [G1],第 1.2 节。

1.1. 相关映射。

在经典Proj情形中，环是 $\mathbb{N}$分次的，因此，只需研究 $\mathbb{N}$分次环的态射。

例 1.2. 考虑多重分次环 $R = \mathbb{C}[x, y, z]$，其中 $D_R = \mathbb{Z}^2$，$\deg(x) = (1, 0)$，$\deg(y) = (0, 1)$，$\deg(z) = (1, 1)$，以及 $S = \mathbb{C}[x, y, z, w]$，其中 $D_S = \mathbb{Z}^3$，$\deg(x) = (1, 0, 0)$，$\deg(y) = (0, 1, 1)$，$\deg(z) = (0, 0, 1)$，$\deg(w) = (1, 1, 0)$。于是$R_+ = xy、\ xz、\ yz$，且 $S_+ = xyz、\ xyw、\ yzw、\ xzw$。现在，$\mathrm{Proj}^{\mathbb{Z}^2}(R)$ 对应于一个带有双原点的 $\mathbb{P}^1$（参见 [G1], 例 1.28），而 $\mathrm{Proj}^{\mathbb{Z}^3}(S)$ 对应于一个带有双原点和无穷远点的 $\mathbb{P}^1$（参见 [ANH],例 2.4）。

显然，这两个概形之间存在直接的包含映射和投影。因此，我们确实需要考虑分次群不同的多重分次环态射。但这并非我们需要考虑的唯一复杂之处。例如，态射 $\varphi\colon R \to S, x \mapsto x,\ y \mapsto y,\ z \mapsto wz$ 是一个多重分次环的单射态射，它诱导出 $\alpha_\varphi\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^3,\ e_1 \mapsto e_1$ 和 $e_2 \mapsto e_2 + e_3$。但是$\varphi(R_+) = xy,\ xwz,\ ywz \notin \mathrm{Rel}^{D_S}(S)$，因为 xy在 S中不是相关元素。不过，我们可以将 xy视为 $\varphi(R)$ 中按 $\mathbb{Z}^2$ 分次的元素。因此，在这种情况下，xy 是相关的!

这个问题的一个直观解法是，只考虑仍然相关的元素。在 S 的所有相关元素都属于 φ 的像这一特殊情形下，这将诱导出一个概形态射 $\mathrm{Proj}^D(S) \to \mathrm{Proj}^D(R)$。但是请注意，我们只要求多重分次环的局部态射 $R_{(g)} \to S_{(f)}$ 存在，因为只要 f 在 S 中是相关的，或者 f 整除满足 $S_{(f)} = S_{(h)}$ 的相关元素 h，它们就会诱导出一个概形态射。因此，我们需要多种态射概念，以反映所有这些情形。

定义 1.3 (相关态射)。设 $\varphi\colon R \to S$ 是一个多重分次环态射。

(1) 我们将 φ 的相关轨迹 定义为

$$\mathrm{Rel}(\varphi) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Rel}^{D_S}(S) \cap \varphi(\mathrm{Rel}^{D_R}(R))$$

并类似地定义一般轨迹

$$\mathrm{Gen}(\varphi) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Gen}^{D_S}(S) \cap \varphi(\mathrm{Gen}^{D_R}(R)).$$

(2) 如果满足以下条件，我们称 φ 是一个相关 多重分次环态射:

$$\mathrm{Rel}^{D_S}(S) \subseteq \varphi(\mathrm{Rel}^{D_R}(R)).$$

(3) 我们将有理轨迹定义为

$$\mathrm{Rat}(\varphi) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Rel}^{D_R}(R) \cap \varphi^{-1}(\mathrm{Rel}^{D_S}(\varphi(R)))$$

φ 中在 φ 作用下仍保持相关的所有相关元素所构成的集合，并将一般有理轨迹 $\mathrm{Rat}(\varphi) \cap \mathrm{Gen}^{D_R}(R)$记作 $\mathrm{Gen}(\mathrm{Rat})$。

(4) 我们称 φ 为有理相关，如果

$$\mathrm{Rel}^{D_R}(R) \subseteq \varphi^{-1}(\mathrm{Rel}^{D_S}(\varphi(R)).$$

(5) 我们定义一个多重分次环的有理映射 $\varphi_r\colon R \dashrightarrow S$ 由以下内容构成

(i) 一个映射 $R_+ \to h(S)$，使得对于所有相关的 $g \in R_+$，存在一个相关的 $f \in S$，使得 $\varphi_r(g) \mid f$满足 $S_{(f)} = S_{(\varphi_r(g))}$。

(ii) 一组相容的多重分次环态射 $S_{(g)} \to S_{(f)}$ 对所有 $g \in R_+$均成立。

术语轨迹在定义1.3（1）中是合理的，因为Rel(φ) 以及Gen(φ) 给出开子集。具体而言，

$$U_{\mathrm{Rel}} \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{f \in \mathrm{Rel}(\varphi)} \mathrm{Spec}(S_{(f)}) \subseteq \mathrm{Proj}^D(S) \text{ and}$$
$$U_{\mathrm{Gen}} \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{f \in \mathrm{Gen}(\varphi)} \mathrm{Spec}(S_{(f)}) \subseteq \mathrm{Proj}^D(S).$$

有理轨迹定义了$\mathrm{Proj}^{D_R}(R)$的一个开子集，它是

$$U_{\mathrm{Rat}} \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{g \in \mathrm{Rat}(\varphi)} \mathrm{Spec}(S_{(g)} \subseteq \mathrm{Proj}^{D_R}(R).$$

同样 e，有理轨迹在 φ 下的像定义了$\mathrm{Proj}^{D_S}(S)$的一个开子集。

注 1.4. 一个有理相关态射 $\varphi\colon R \to S$ 产生一个有理映射 $r\colon \mathrm{Proj}^{D_S}(S) \dashrightarrow \mathrm{Proj}^{D_R}(R)$，因为它在 $\mathrm{Proj}^{D_S}(S)$ 的开子集$\bigcup_{f \in \mathrm{Rel}^D(S) \cap \varphi(R_+)} \mathrm{Spec}(S_{(f)})$ 上定义了一个态射，该态射由所有诱导的局部映射$S_{(\varphi(g))} \to R_{(g)}$给出。特别地，每个多重分次环的有理相关映射都会产生一个多重分次环的有理映射。

例 1.5. 在例 1.2的情形下，有 $\varphi\colon R \to S$ 是有理的，但既非相关也非有理相关。不过，如果我们将 φ 视为 $\varphi\colon R \to \varphi(R)$，它就是相关的。

每个相关映射同时也是有理相关映射（因此也会产生多重分次环的有理映射），这并不令人意外：

引理 1.6. 设 $\varphi\colon R \to S$ 是一个多重分次环态射，且 $f \in S$ 相关。若存在齐次 $g \in R$ 使得 $\varphi(g) = f$，则 g 在 R中相关。特别地，若 S 的所有相关元素都被命中，则 R 的所有相关元素都映射为 S中的相关元素。

注 1.7. 注意，相容性条件 $\varphi(R_d) \subseteq S_{\alpha_\varphi(d)}$ 意味着，对于所有相关的 $g \in R$，都存在相关的 $f \in S$ 使得 $\varphi(g) \mid f$。

证明。 我们有一个诱导映射 $\varphi_g\colon R_g \to S_f$，其中 α_{φ_g} 是满射，因为 S_f是周期的。因此，deg(h) 中的所有元素（其中 $h \in (S_f)^\times$）在 D_R中都有原像。相应的元素 $g' \in (S_g)^\times$映射到 $(S_f)^\times$，即 $D^f \subseteq \alpha_{\varphi_g}(D^g) \subseteq D_S$。因此， $D^g \subseteq D_R$必须具有有限指数，且 g 是相关的。□

映射的相关性的实际定义有些不尽如人意，因为它等同于映射是满射这一条件。但我们只关心无关理想包含在像中的情况。不过，我们或许只需更改无关理想就能实现这一点。为捕捉这一细微差别，我们将在第锥环范畴1.2节中定义。

推论 1.8。 设 $\varphi\colon R \to S$ 是一个多重分次环态射。

(i) φ 视为态射 $R \to \varphi(R)$时是相关的。

(ii) 当且仅当 φ 是满射时， φ 是相关的。

证明。 我们只需证明相关映射必定是满射。假设存在一个齐次的 $g \in S$，它在 R 中没有原像。设 $f \in S$ 是相关元素，使得 $g \mid f$。现在（由于假设 φ 相关），存在一个 $f' \in R$ 相关元素，使得 $\varphi(f') = f$。由于 φ 是多重分次环态射， f' 的某个因子（记作 g'）必定映射到 g。因此， φ 是满射。□

在本节余下部分，我们将讨论何时可以确保相关元素映射为相关元素。在这种情况下，我们总是可以将目标中的无关理想限制为那些仍然相关的相关元素的像（从而得到一个有理相关映射）。

命题 1.9。 设 $\varphi\colon R \to S$ 是多重分次环态射。那么， φ 将相关元素映射为相关元素，当且仅当 α_φ 是满射。

证明。 '⇐' 设 $g \in R$ 是相关的。我们要证明 $f = \varphi(g) \in S$ 也是相关的。 g 的齐次因子的次数生成一个极大维锥。现在由满射性

$$\dim_{\mathbb{R}}(\underbrace{\alpha_{\varphi,\mathbb{R}}(C_{D_R}(g))}_{=C_{\alpha_\varphi}(f)}) = \operatorname{rank}(D_S),$$

因此 f 是相关的。
'⇒'设 $g \in R$ 和 $f = \varphi(g) \in S$ 是相关的。若能证明 f 的齐次因子的次数属于 α_φ 的像，我们便完成了证明。由分次的相容性条件，且由于 φ 是环同态， f 的齐次因子是 g 的齐次因子的像。特别地， $\mathrm{C}_{D_S}(f)$ 的生成元恰好是 $\mathrm{C}_{D_R}(g)$ 中不属于 $\ker(\alpha_\varphi)$ 的生成元。因此 $\alpha_{\varphi,\mathbb{R}}$ 将极大维锥映射到极大维锥，故 α_φ 是满射的 □

对于分次群相同的多项式环，这一结果可简化为：

推论 1.10。 设 R、 S 是变量有限、且都由群 D 分次的多重分次多项式环。设 $\varphi\colon R \to S$ 是 D-分次环的态射。那么 α_φ 是满射的。特别地，每个 D-分次环的态射都会将相关元素映射为相关元素。

证明。 设 $f \in R$ 是相关的。那么 $C_D(f)$ 由 [G1], 引理 1.20 可知是多面体的，设其由 c_1、……、 $c_r \in \mathbb{Z}^r$ 生成。由于 $\varphi(R_{c_i}) \subseteq S_{\alpha_\varphi(c_i)}$， $\mathrm{C}_D(\varphi(f))$ 必须由 $c_i' = \alpha_\varphi(c_i)$ 生成，也就是说， $\mathrm{C}_D(\varphi(f))$ 必须具有最大维数。特别地， $\varphi(f)$ 是相关的。□

例 1.11. 在例 1.2 的情形中，显然 $\varphi\colon R \to S$ 不会将相关元素映射为相关元素，而 α_φ 不是满射。但将其视为映射 $\varphi'\colon R \to \varphi(R)$，其中 $S' = \varphi(R) = \mathbb{C}[x, y, zw]$，我们可以看出 $\alpha_{\varphi'}$ 是满射，因为 S' 可视为 $\mathbb{Z}^2$-分次环，且作为分次环与 R 同构。特别地， $\operatorname{Proj}^{D_S}(S)$ 和 $\operatorname{Proj}^{D_R}(R)$ 是双有理的。

1.2. 锥形环与函子性。 显然，$\varphi\colon R \to S$ 是否相关取决于无关理想 R_+ 和 S_+。如果我们考虑完整无关理想的某些子集，即满足 $\varphi(B_R) \subseteq S_+$ 的理想 $B_R \trianglelefteq R$ 的子集 $B_R \subseteq R_+$，就能得到一种更灵活的概念。特别是，我们可以通过选取无关理想的一个子集，也就是选取相关元素的一个子集，来使 φ 成为相关的。

我们希望将这一选择纳入数据之中，以便区分环这一侧的对象。根据定义，所得空间总是相应 Proj 中的一个开子集，因为它是通过粘合 Proj 的基本仿射开子集得到的。由于与扇系相关联的环并不唯一，我们建立了所谓的锥环 及其有理映射，以描述这类情形。

这一术语的由来是这样的观察：当 $\operatorname{Spec}(S_{(f)})$ 时，每个对象都对应一个凸锥，而 S 是诺特多项式环。特别地，子集 $B \subseteq S_+$ 对应一个锥系，由此产生一个扇系（见第2.2节）；在特殊情形下，则产生一个扇。

据我们所知，本节所述内容此前尚未得到系统研究。我们将相关子集的选择纳入环数据，并在此背景下发展态射、有理映射和双有理性。

定义与命题 1.12(锥环范畴)。 设 S 是分次群为 D_S的多重分次环。回忆一下，$h(S)$ 表示多重分次环 S 的齐次元集合，而 $\operatorname{Rel}^D(S)$ 表示 S的相关元素集合。

(1) 若 $B \trianglelefteq S$ 是满足$B \subseteq S_+$的齐次理想，则称有序对 (S, B) 为一个锥环。*(2)* 我们将 B-相关元素的集合定义为

$$\operatorname{Rel}_B^{D_S}(S) \overset{def}{=} \operatorname{Rel}^{D_S}(S) \cap B.$$

(3) 设 $\varphi\colon R \to S$ 是多重分次环态射，且 (R, B_R)、(S, B_S) 是锥环。于是，我们将 φ 的 B_S-相关轨迹定义为

$$\operatorname{Rel}_{B_S}(\varphi) = \{f \in \operatorname{Rel}_{B_S}^{D_S}(S) \mid \exists g \in \operatorname{Rel}_{B_R}^{D_R}(R) : \varphi(g) = f\}.$$

(4) 我们称锥环 $\to (S, B_S)$ 到态射 $\Phi\colon (R, B_R)$ 的态射为多重分次环态射 $\varphi\colon R \to S$，若它是 B_S-相关的，即

$$B_S = \operatorname{Rel}_{B_S}(\varphi).$$

(5) 锥环同构是锥环的一个态射 $\Phi\colon (R, B_R) \to (S, B_S)$，它存在一个逆态射 $\Psi\colon (S, B_S) \to (R, B_R)$，且该逆态射也是锥环的态射。

(6) 我们将锥环 $\Phi\colon (R, B_R) \to (S, B_S)$之间的一个有理相关态射 定义为多重分次环态射 $\varphi\colon R \to S$，满足$\operatorname{Rat}(\varphi) = B_R$。换言之，$\Phi$ 定义了一个锥环态射 $\Phi'\colon (R, B_R) \to (\varphi(R), \varphi(B_R))$。

(7) 我们将锥环的一个有理映射 $\Phi\colon (R, B_R) \dashrightarrow (S, B_S)$ 定义为：*(i)* 一个映射 $\varphi\colon B_R \to h(S)$，使得对于所有相关的 $g \in B_R$，都存在一个相关的$f \in B_S$满足 $\varphi(g) \mid f$ 和 $S_{(f)} = S_{(\varphi(g))}$。*(ii)* 一组多重分次环态射 $\varphi_g : R_{(g)} \to S_{(f)}$，对所有相关的 $g \in B_R$都成立，并且在交叠处相容。

(8) 锥环的有理映射 $\Phi\colon (R, B_R) \dashrightarrow (S, B_S)$ 称为双有理的，如果存在 $B'_S \subseteq S_+$，使得对于所有相关的 $g \in B_R$，都存在唯一的相关的 $f \in B'_S$满足 $\varphi(g) = f$，并且所有局部映射 φ_g 都是同构（即，如果 φ 导出某个子环 $S' \subseteq S$上的同构$(R, B_R) \to (S', B'_S)$）。

锥环以及锥环态射构成一个范畴，我们记作ConRing。更重要的是，以有理映射作为态射的锥环也构成一个范畴，我们记作 RatConRing。

注记 1.13. 给定有理映射 $\Phi : (R, B_R) \dashrightarrow (S, B_S)$，由 (i) 可为每个相关的 $g \in B_R$ 固定一个元素 $f_g \in B_S$，使得

$$\varphi(g) \mid f_g \quad \text{and} \quad S_{(f_g)} = S_{(\varphi(g))}.$$

若 $\Psi\colon (S, B_S) \dashrightarrow (T, B_T)$ 是第二个有理映射，则对每个 $f_g \in B_S$应用 Ψ 的 (i)，可得到元素 $h_{f_g} \in B_T$，使得

$$\psi(f_g) \mid h_{f_g} \quad \text{and} \quad T_{(h_{f_g})} = T_{(\psi(f_g))}.$$

因此，对每个 $g \in B_R$，局部复合映射 $R_{(g)} \xrightarrow{\varphi_g} S_{(f_g)} \xrightarrow{\psi_{f_g}} T_{(h_{f_g})}$都有定义；交叠处的相容性保证它们可以粘合起来。

证明。我们需要证明态射的复合有定义且满足结合律。设 $\Phi\colon (R, B_R) \to (S, B_S)$ 和 $\Psi\colon (S, B_S) \to (T, B_T)$ 是锥环态射，使得 $\varphi\colon R \to S$ 和 $\psi\colon S \to T$ 是多重分次环态射。对 $\mathrm{h} \in B_T$，我们找到 $f \in B_S$，并可找到 $g \in B_R$，使得 $\varphi(g) = f$ 且 $\psi(f) = \mathrm{h}$。特别地，$\mathrm{h} = (\psi \circ \varphi)(g)$，即 $\psi \circ \varphi$ 相关。结合律源于锥环态射也是环态射这一事实。α_φ 和 α_ψ 的函子性显然。

有理映射的复合可由注记 1.13 立即得出。结合局部映射的相应性质，结合律和恒等映射显然成立。由于局部映射可复合，且交叠处的相容性得以保留，RatConRing 构成一个范畴。□

定义 1.14。设 (S, B) 是一个锥环，其中 $B \subseteq S_+$ 是 S 中的一个理想。于是我们定义开子概形

$$\mathrm{Proj}^D_B(S) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{f \in \mathrm{Rel}^D_B(S)} \mathrm{Spec}(S_{(f)}) \subseteq \bigcup_{f \in \mathrm{Rel}^D(S)} \mathrm{Spec}(S_{(f)}) = \mathrm{Proj}^D(S).$$

此外，若 $B \cap \mathrm{Rel}^D(S)$ 存在极小生成系，我们将其记为 $\mathrm{Gen}^D_B(S)$。

注记 1.15。(1) 在 $\mathbb{N}$-分次标准情形下，即对于 $S = \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$，我们无需增加这一额外的复杂层次，因为分次态射 $\varphi\colon S \to R$ 会自动确定 $S_+ = (x_0, \ldots, x_n)$ 的像。由于相关元素恰好是次数为 d 的 $d \neq 0$ 的元素，我们看到，要定义环的分次态射，只需确保 $\varphi(R_+) \subseteq S_+$。
(2) 对于 $B_R = R_+$ 与 $B_S = S_+$，锥形环的态射 $\Phi\colon (R, B_R) \to (S, B_S)$ 不过是多重分次环的满态射。另一方面，相应的多重分次环态射 φ 为了成为相关的，不再必须是满射的。

(3) 若存在不止一个 $f \in B_S$ 使得 $\varphi(g) \mid f$ 在 (7) 中成立，则对 f 的每一种选择（若其尚未在像中），分别定义一个有理相关态射，相应地定义一个有理映射。

(4) 若 $\varphi\colon R \to S$ 有理相关，且对于所有相关的 $g \in B_R$，都存在唯一相关的 $f \in S$ 满足 $\varphi(g) = f$ 且 $S_{(f)} = \varphi(R)_{(\varphi(g))}$，则相应的映射 $\Phi\colon (R, B_R) \to (S, \varphi(B_R))$ 是锥形环的态射。注意，若 φ 是单射，则 φ 限制为一个锥环同构 $(R, B_R) \to (\varphi(R), \varphi(B_R))$。

(5) 若 S 阶乘分次且诺特，则定义 1.12 中 (4)、(6) 和 (7) 的条件只需在一般轨迹或有理轨迹上检验。

(6) 双有理性定义了一个等价关系，其中有

$$(S_1, B_1) \sim (S_2, B_2) \iff \mathrm{Proj}_{B_1}^{D_1}(S_1) = \mathrm{Proj}_{B_2}^{D_2}(S_2).$$

下面的引理极为重要。它使我们能够将一个锥环 (S, B)（其中 $B \subsetneq S_+$ 被真包含）与一个子环 $S' \subseteq S$ 及其无关理想 $S'_+ = B$ 对应起来。

引理 1.16。 设$(S、\ B)$ 是一个锥环，且 $B \subsetneq S_+$ 是一个真子集。则存在一个子环 $S' \subseteq S$，满足 $S'_+ = B$ 和 $S_{(f)} = S'_{(f)}$ 对所有相关的 $f \in B$ 均成立。特别地，

$$\mathrm{Proj}_B^D(S) = \mathrm{Proj}^D(S').$$

因此，$(S'、\ S_+) \to (S、\ B)$ 是锥环的单射态射。

证明。 我们需要以这样的方式构造 S'： 它包含所有以 $f \in B$ 为分母的次数为零元素的所有可能分子（其中许多因子可能会约去）。因此，我们定义

$$S' \overset{\mathrm{def}}{=} S_0\left[\left\{g \in S \mid \deg\left(\frac{g}{f'}\right) = 0 \text{ for some } f \in B \text{ such that } f' \mid f\right\}\right],$$

其中我们假设所有 $\frac{g}{f'}$ 要么处于既约分式形式，要么属于 $\frac{f}{f}$类型。于是，根据构造， $B \subset S'$。由于 S' 包含所有 $f \in B$的齐次因子，因此显然，每个 $S'_{(f)}$都包含与 $S_{(f)}$相同的次数为零有理函数。因此有

$$\mathrm{Proj}_B^D(S) = \bigcup_{f \in \mathrm{Rel}^D(S) \cap B} \mathrm{Spec}(S_{(f)}) = \bigcup_{f \in S'_+} \mathrm{Spec}(S'_{(f)}) = \mathrm{Proj}^D(S').$$

□

注记 1.17。 请注意，满足此性质的子环可能有很多。例如，取按 e_1, e_2 和 $e_1 + e_2$ 分次的 $S = \mathbb{C}[x, y, z]$，其中 $S_+ = (xy,\ xz,\ yz)$。取 $B = (xy,\ xz)$（因此 $\mathrm{Proj}_B^D(S) = \mathbb{P}^1$）。那么对于 $S、\ S' = \mathbb{C}[xy, x, z]$ 以及 $S'' = \mathbb{C}[xy, xz]$，我们可以看到，在 $f = xy,\ xz$ 处的零次局部化相同。

由于多重分次环态射会导出子环结构，前述引理说明：

推论 1.18。 设 $\Phi\colon (R, R_+) \to (S, B)$ 是锥环的一个单射态射，其中 $B = \varphi(R_+)$。那么

$$\operatorname{Proj}^{D_R}(R) = \operatorname{Proj}_B^{D_S}(S).$$

特别地，每个锥形环的态射 $\Psi\colon (A, B_A) \to (S, B_S)$ 都会导出一个态射 $\Psi^*\colon \operatorname{Proj}^{D_R}(R) \to \operatorname{Proj}_{B_A}^{D_A}(A)$。

我们还必须考虑那些给出类似例 1.2 中情形的映射。

推论 1.19. 设 $\varphi\colon R \to S$ 是一个多重分次环态射，且存在一个子集 $B_S \subseteq S_+$ 使得 $S_{(f)} = \varphi(R)_{(f)}$ 对所有相关的 $f \in B_S$ 和 $\varphi^{-1}(B_S) = R_+$ 均成立。那么 $\Phi\colon (R, R_+) \to (S, B_S)$ 是一个锥环态射，它诱导出一个同构

$$\operatorname{Proj}_B^D(S) \cong \operatorname{Proj}^D(\varphi(R)).$$

接下来，我们定义 Proj_B^D 函子，它将概形赋给锥环，将概形态射赋给锥环的态射；更重要的是，它给出了锥多项式环的有理映射与环面预簇的态射之间的等价关系（我们将在第 2 节讨论）。

命题 1.20。 存在一个到概形范畴的函子

$$\boldsymbol{Proj}\colon \boldsymbol{ConRing} \longrightarrow \boldsymbol{Sch},\ (S, B) \mapsto \bigcup_{f \in \operatorname{Rel}_B^{D_S}(S)} \operatorname{Spec}(S_{(f)}),$$

其中 $\operatorname{Spec}(S_{(f)})$ 和 $\operatorname{Spec}(S_{(g)})$ 沿开子概形 $\operatorname{Spec}(S_{(fg)})$ 粘合（参见[MR], 命题 *1*）。若 S 是阶乘分次且诺特的，我们可以取所有 $f \in \operatorname{Gen}_B^D(S)$ 的并。

锥环的态射 $\Phi\colon (R, B') \to (S, B)$ 导出一个概形态射

$$\boldsymbol{Proj}(\Phi)\colon \bigcup_{f \in \operatorname{Rel}_B^{D_S}(S)} \operatorname{Spec}(S_{(f)}) \to \bigcup_{g \in \operatorname{Rel}_{B'}^{D_R}(R)} \operatorname{Spec}(S_{(g)}).$$

有理相关态射 $\Phi\colon (R, R_+) \to (S, B),\ B \subsetneq S_+$, 导出一个概形态射

$$\boldsymbol{Proj}^*(\Phi)\colon \operatorname{Proj}_{B_S}^{D_S}(S) = \bigcup_{f \in \varphi(\operatorname{Rel}^{D_R}(R))} \operatorname{Spec}(S_{(f)}) \to \bigcup_{g \in \operatorname{Rel}^{D_R}(R)} \operatorname{Spec}(S_{(g)}) = \operatorname{Proj}^{D_R}(R).$$

锥环的有理映射 $\Phi\colon (R, B_R) \dashrightarrow (S, B_S)$ 导出一个概形态射

$$\boldsymbol{Proj}_{rat}(\Phi)\colon \bigcup_{f \in \varphi(B_R)} \operatorname{Spec}(S_{(f)}) \to \bigcup_{g \in B_R} \operatorname{Spec}(S_{(g)}).$$

证明。 在每种情况下，该态射都是通过粘合由 $R_{(g)} \to S_{(\varphi(g))}$ 诱导的相容局部态射得到的。□

借助迄今建立的理论，我们现在可以在（公共）开子集上给出态射。

例1.21。这个例子建立在我们先前论文中的计算之上，这些计算也可见于作者的学位论文 [1]。对于 $S=\mathbb{C}[x,y,z,w]$，其次数为e_1、 e_1、 e_1+e_2和 e_2，我们发现子集 $B=(xz,yz,xw,yw)\subseteq S_+$给出了点 $\mathbb{P}^2$ 处的爆破，即 $\mathrm{Bl}_P(\mathbb{P}^2)=\mathrm{Proj}_B^D(S)$（参见 [G 2], 例 2.4）。我们希望用引理 1.16 计算一个子环 $S'\subseteq S$，使得 $\mathrm{Bl}_P(\mathbb{P}^2)=\mathrm{Proj}^D(S')$。我们知道，对于 $R=\mathbb{C}[a,b,c,d,e]$，$\mathrm{Bl}_P(\mathbb{P}^2)\subseteq\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^1=\mathrm{Proj}^{\mathbb{Z}^2}(R)$，其中 $\deg(a)=\deg(b)=(1,0)$，且 $\deg(c)$、$\deg(d)$、$\deg(e)=(1,1)$。因此，我们定义映射

$$\varphi\colon R\to S,\ a\mapsto x, b\mapsto y, c\mapsto z, d\mapsto xw, e\mapsto yw,$$

这显然是一个多重分次环态射，从而得到 $S'=\varphi(R)=\mathbb{C}[x,y,z,xw,yw]\subsetneq S$。接着， S' 的相关元素由以下元素生成：(xz,yz,xw,yw) 因此$\mathrm{Proj}^D(S')=\mathrm{Proj}_B^D(S)=\mathrm{Bl}_P(\mathbb{P}^2)$根据推论 1.19。

特别地， S' 可视为 $\mathrm{Bl}_P(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ 的 Cox 环的一种细化，因此也可视为实际的坐标环。注意到，我们可能会预期 $\mathrm{Proj}^D(S')$ 由一个$\mathbb{N}$-分次 Proj 构造给出，或者至少由加权射影空间的乘积给出，因为它是分离的。根据上述构造，我们看到

$$\mathrm{Bl}_p(\mathbb{P}^2)\ =\ \mathrm{Proj}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}(\mathbb{C}[a,b,c,d,e]/(ae-bd)).$$

2. 单纯形托里克（预）簇

经典的 $\mathbb{N}$-分次 Proj 构造是深入理解射影空间的重要工具。尽管 Brenner–Schröer 于 2000 年推广了这一构造，但此后相关论文寥寥无几（值得注意的有 [KU,KSU,MR]），探讨多重分次 Proj 构造。我们将精确刻画逆Cox对应：多重分次多项式环 S 与无关子集 B 共同编码了与单纯形扇系 $\mathcal{S}$相同的数据。我们将分析诺特多重分次多项式环 S 如何导出单纯形扇系 $\mathcal{S}$，以及反过来，单纯形托里克预簇如何导出多重分次诺特多项式环。

尽管后者本质上是 Cox 构造的一种细化（参见 [C], 第1节），但前者可以看作某种逆向构造。我们想强调，引理 1.16 使我们能够将每个带有给定无关理想 S 的 Cox 环 $B\subseteq S_+$识别为一个子环 S'，使得 $(S')_+=B$。特别是， S' 可以看作 Cox 环 S 的一种细化（因此也可以看作实际的坐标环），在这种情况下，上述对应关系互为逆运算。

或者，我们证明可以将完整无关理想 S_+ 的子集与 $\mathcal{S}$ 的扇子系统相对应。这意味着，单纯形托里克预簇 X 完全由三元组 (D,S,B)确定，其中 (D,S) 是一个多重分次多项式环，而$B\subseteq S_+$ 是 S 中的一个理想（见推论2.34）。

[1] https://sites.google.com/view/felixgoebler/home/research

在本章中， $S = \mathbb{C}[T_1, \ldots, T_n]$ 始终表示一个多重分次多项式环，其分次群为有限生成阿贝尔群 D，其中 $n > r = \operatorname{rank}(D)$，而$X$ 是一个正规环面簇，并且通常假设它是单纯的。

2.1. 极大锥。我们已经知道，相关的 $f \in S$ 会在向量空间 $D_{\mathbb{R}}$ 中产生最大维数的锥 $\mathrm{C}_D(f)$。特别地，我们证明了这些权锥的交在 [G2], Corollary 2.12 中定义了 $\sigma(S)$ 上的壁室结构。本节将定义另一个极大锥 σ_f，它与多项式环的相关 f 相对应，并且位于一个与分次相关的格中：设$\gamma\colon \mathbb{Z}^n \to D, e_i \mapsto \deg(T_i)$ 为 $\mathbb{Z}$-线性的，且 $M_S := \ker(\gamma)$。接着取 N_S 为其对偶，即 $N_S := \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_S, \mathbb{Z})$。若无歧义，我们可能会省略下标中的环。以下构造出自 [BS]（参见注 3.7）。本章将用很大篇幅详细阐述这一构造，并从中得出结论。

定义 2.1。 设 $I = \{1, \ldots, n\}$。对每个子集 $J \subseteq I$，令 $\sigma_J \subseteq N_{\mathbb{R}}$ 为由限制在 $M, i \in J$ 上的投影 $\mathrm{pr}_i|_M\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z} \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$ 生成的凸锥。

现在，根据 [G1], 引理 1.20（另见 [ADHL], 命题 2.1.3.4），每个元素$f \in \operatorname{Gen}^D(S)$ 都有唯一分解

$$f = T_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot T_n^{\varepsilon_n},$$

其中 $\varepsilon_i \in \{0,1\}$，且 $\varepsilon_i \neq 0$ 恰好有 r 个指标；若 1 相关，则所有 $\varepsilon_i = 0$ 均满足。因此存在良定义的支撑 $J_f := \{i \in I \mid \varepsilon_i \neq 0\}$。注意，根据 [BS], 命题 3.4, 仿射片 $\operatorname{Spec}(S_{(f)})$ 是由单纯的环面簇 $\operatorname{Spec}(\mathbb{C}[M_{J_f}])$ 给出的，其中

$$M_{J_f} \overset{\text{def}}{=} (\mathbb{Z}^J \oplus \mathbb{N}^{I-J}) \cap M \subseteq \mathbb{Z}^n.$$

特别地，我们有

$$M_{J_f} = \sigma_{I-J_f}^{\vee} \cap M, \tag{2.1}$$

并记 $\sigma_f := \sigma_{I-J_f}$。

注 2.2。 设 $\{m_1、\ldots\ldots、 m_k\}$ 是 M 的一个基（换言之， m_i 构成具有最大维锥 σ_f 的环面簇的希尔伯特基）。基的不同选择只会置换这些锥。于是

$$\sigma_{I-J_f} = \operatorname{Cone}\left((\mathrm{pr}_i(m_1), \ldots, \mathrm{pr}_i(m_k)) \mid i \in I - J_f\right).$$

注 2.3。锥 σ_f 和 $\mathrm{C}_D(f)$（ $f \in \operatorname{Gen}^D(S)$）之间的关系如下。设 $m_1、\ldots\ldots、 m_s$ 是 M 的一组极小生成元，并定义 D 为由 S 的次数构成的矩阵，即 A 的每一列对应于 S 中一个变量的次数。设 B 为列为 m_i 的矩阵。则 $\mathrm{DB} = 0$。这是盖尔对偶性的一个特殊情形（参见 [ADHL], 注 2.2.1.4，另见 [CLS], §14.3）。

例 2.4. 我们想计算一些之前讨论过的例子（此处或我们先前论文中的例子）的极大锥。

(1) 设 $S = \mathbb{C}[x, y, z, w]$ 和 $D = \mathbb{Z}^2$，其中 $\deg(x) = \deg(y) = (1, 0)$，$\deg(z) = (1, 1)$，$\deg(w) = (0, 1)$。选取生成元 $M = [(1, 0, -1, 1), (0, 1, -1, 1)]$,，我们得出极大维锥为

$$\begin{aligned}\sigma_{xw} &= \mathrm{Cone}(e_2, -e_1 - e_2),\\ \sigma_{yw} &= \mathrm{Cone}(e_1, -e_1 - e_2),\\ \sigma_{zw} &= \mathrm{Cone}(e_1, e_2),\\ \sigma_{xz} &= \mathrm{Cone}(e_2, e_1 + e_2),\\ \sigma_{yz} &= \mathrm{Cone}(e_1, e_1 + e_2).\end{aligned}$$

注意，$\sigma_{zw} = \sigma_{xz} \cup \sigma_{yz}$ 并且所有锥都与 σ_{wz}有一个公共面。

(2) 令 $S = \mathbb{C}[x, y, z]$ 和 $D = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，其中 $\deg(x) = (1, 0)$，$\deg(y) = (0, 1)$，$\deg(z) = (1, 1)$。与 (2) 相比，我们在 D中有更多的方程，即

- $\deg(xy) = \deg(z)$（这是 (2) 中唯一的方程），
- $\deg(x^2) = \deg(z^2)$,
- $\deg(y^2) = 0$（此方程可由第一和第二个方程推出），
- $\deg(x) = \deg(yz)$（将第一个方程乘以 $\deg(y)$，并使用 $\deg(y^2) = 0$ 即可推出）。

因此，我们计算得 $M_S = [(1, 1, -1), (2, 0, -2)]$，这些锥为

$$\sigma_x = \mathrm{Cone}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}\right) \text{ and } \sigma_z = \mathrm{Cone}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right).$$

注释 2.5. (a) 注意，对于 $R = \mathbb{C}[x, y, z]$，$M_S = M_R$ in (1)，其中 $\deg(x) = (2, 1)$、$\deg(y) = (1, 2)$，且 $\deg(z) = (3, 3)$。因此，我们预期存在无穷多个分次，使得对应的格与 M, N 同构。还要注意，(R, R_+) 和 (S, S_+) 作为锥环是同构的。特别地，$\mathrm{Proj}^D(S)$ 不依赖于 $\deg(T_i)$ 的具体数值，而取决于线性依赖类型（见 [G3], 定理 3.10），该类型由 $\ker(\gamma)$ 编码。

(b) 根据 [G1], 例 1.28，我们还知道 $M = [(1,2,-2)]$ 对应于 S' 以及$\mathrm{Proj}^D(S') = \mathrm{Proj}^D(S)$，因此 $\mathrm{Proj}^D(S)$ 也不依赖于$\ker(\gamma)$的具体生成元。相反，我们只需知道哪些项为正、为零或为负。

(c) 另请注意，φ 由例 1.2 诱导出一个映射 $G\colon M_R \to M_S$ 格之间的态射，将 M_R 的生成元映射到 M_S的生成元。因此，诱导出映射$F\colon N_R \to N_S$ 格之间的态射。下一节中，我们将更深入地探讨分次环态射与格态射之间的联系。

例 2.6。我们希望在分次群有限的情形下计算最大维锥。设分次由映射 $\gamma\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1 \mapsto \overline{1}$ (参见[G3], 例 1.5)给出，因此 $M_S = 2\mathbb{Z}$。由于 1 是相关的且 $J_1 = \varnothing$，我们有 $\sigma_1 = 2\mathbb{N}$。于是$M_{J_1} = 2\mathbb{Z} \cap 2\mathbb{N} = 2\mathbb{N}$。特别地，$\mathrm{Proj}^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(S) = \mathrm{Spec}(M_{J_1}) = \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[x^2]) = \mathbb{A}^1_{S_0}$是仿射的，因而是分离的。

引理 2.7。设 $f \in \mathrm{Gen}^D(S)$ 是相关的。则 $\sigma_f \subseteq (N_S)_{\mathbb{R}}$ 具有最大维数。

证明。根据备注 2.3，σ_f 由 $|I \setminus J_f|$ 个元素生成。特别地，由于所有$f \in \mathrm{Gen}^D(S)$ 具有相同的长度，$|I \setminus J_f|$是常数。因此，所有 σ_f都具有相同的

维数。根据构造，$|I \setminus J_f| = n - r$ =的秩为M_S，因此σ_f是极大的。□

注记 2.8. 设 S 的极大锥构成单纯扇 Δ，使得 $\Delta(1)$ 张成$(N_S)_{\mathbb{R}}$。则σ_f（其中 f 是 S_+的一个生成元）与给出~单项式 x^{σ_f}（在 [C]中）的锥重合。特别地，Cox 构造正是 [BS] 构造，只是无关理想（可能）不同。

锥 $\mathrm{C}_D(f)$ 与 $\sigma(f)$ 的联系如下。

引理 2.9. 设 $f \in S$ 为齐次的。则 $\mathrm{int}(C_D(f)) \neq \emptyset$ 当且仅当$\mathrm{int}(\sigma_f) \neq \emptyset$。

证明. $\mathrm{C}_D(f)$ 的极大性应当诱导 σ_f 的极大性，反之亦然。设 $\mathrm{int}(\mathrm{C}_D(f)) \neq \emptyset$，即 $\mathrm{C}_D(f)$ 是一个极大锥。因此它有 r 个生成元 $d_{i_1}, \ldots\ldots, d_{i_r} \in \{d_1, \ldots\ldots, d_n\}$。特别地，$\sigma_f = \sigma_{I \setminus J_f}$ 对 $J = \{i_1, \ldots\ldots, i_r\}$ 成立，也就是说，$\dim(\sigma_f) = n - r$ =$\mathrm{rank}(M_S)$ 是极大的。反之，设 $\mathrm{int}(\sigma_f) \neq \emptyset$。则 σ_f 是维数为 $n - r$ 的极大锥。特别地，$|J_f| = r$，并且 $\mathrm{C}_D(f)$ 是极大的。□

特别地，对于每一个相关的集合 $(f_i)_{i \in I}$，使得 $\sigma(f_i)$的并构成一个扇，则相应的 *GIT* 锥，即所有 $C_D(f_i)$ 的交（参见 [G2],定义 2.3 (2)），由下述结果可知是极大维数的：

命题 2.10. 设 f、$g \in \mathrm{Gen}^D(S)$，$f \neq g$。则 $\mathrm{int}(C_D(f) \cap C_D(g)) \neq \emptyset$ 当且仅当 $\mathrm{int}(\sigma_f \cap \sigma_g) = \emptyset$。

证明。‘⇒’设 $\mathrm{int}(\mathrm{C}_D(f) \cap \mathrm{C}_D(g)) \neq \emptyset$，其中 $f = \prod_{i \in I} T_i$ 与 $g = \prod_{j \in J} T_j$ 使得 I 与 J 是 $\{1, \ldots, n\}$ 的基数为 r 的子集。则存在一个元素$d' \in \mathrm{int}(\mathrm{C}_D(f) \cap \mathrm{C}_D(g))$ 以及元素 f'，$g' \in S$，使得 $f \mid f'$且 $g \mid g'$ 且 $\deg(f') = d' = \deg(g')$。因此存在 ε_i，$\delta_j \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，使得

$$\sum_{i \in I} \varepsilon_i \cdot \deg(T_i) = \sum_{j \in J} \delta_j \cdot \deg(T_j).$$

特别地，这个方程在 M_S 中产生一个元素：对于相关的 $f = T_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot T_n^{\varepsilon_n}$，其中 $\varepsilon_i \in \mathbb{N}$，考虑向量 $v_f = \{\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n\}$。根据构造，$m' = v_{f'} - v_{g'} \in M_S$，因此我们可以将它视为 M_S 的一个生成元。特别地，对于所有 $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus I$，存在一个 $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus J$，使得 $\mathrm{pr}_i(m') = \mathrm{pr}_j(m')$，因此 m' 的像要么是 σ_f 和 σ_g 的共同生成元，要么 m' 位于 σ_f 或 σ_g 的边界上。特别地，$\mathrm{int}(\sigma_f \cap \sigma_g) = \emptyset$

‘⇐’ 反过来，设 $\mathrm{int}(\sigma_f \cap \sigma_g) = \emptyset$，不失一般性，$M_S = m_1, \ldots, m_{n-r}$，并设 A 是列为 m_i 的矩阵。

于是，要么σ_f 与σ_g 恰好共享一个生成元，要么σ_f 与σ_f的生成元互不相交。在第一种情形中，我们知道 f 与 g 至少有一个公共齐次因子 x，从而在 f 的齐次因子与 g 的齐次因子之间产生一个（可能平凡的）线性依赖（参见 [G3], 定义 3.7）。因此 $\mathrm{int}(\mathrm{C}_D(f) \cap \mathrm{int}(\mathrm{C}_D(g)) \neq \emptyset$。在第二种情形中，$J_f$与 J_g不相交，或者

换言之，我们可以假设 $J_g \subseteq I \setminus J_f$。由于 M_S 并非平凡， f 与 g的齐次因子之间必定存在一个线性依赖，并且同样地，$\mathrm{int}(C_D(f)) \cap \mathrm{int}(C_D(g)) \neq \varnothing$。□

2.2. **扇系**。 我们首先概述扇系的标准理论，主要依据 [ANH]。

当我们提到锥 σ in N_S 时，总是指 $(N_S)_{\mathbb{R}}$ 中的严格凸有理多面单纯锥。我们用 $\tau \preceq \sigma$ 表示 σ 的一个面 τ。如果 Δ' 是 Δ 的子扇，我们记作 $\Delta' \preceq \Delta$。如果一个扇由单个锥的所有面组成，则称其为不可约。

定义 2.11. 设 I 为有限指标集。在 $(N_S)_{\mathbb{R}}$ 中的扇的集合 $\mathrm{S} = (\Delta_{ij})_{i,j\in I}$ 称为扇系，如果对所有 $i, j, k \in I$:

(i) $\Delta_{ij} = \Delta_{ji}$,
(ii) $\Delta_{ij} \cap \Delta_{jk} \preceq \Delta_{ik}$.

给定一个扇系，可以用一种自然的方式将其与一个环面预簇关联起来。为此，只需令 X_i 为与扇 Δ_{ii} 对应的环面簇，而 (ii) 则确保粘合 $X_S = \cup_{i\in I} X_i$ 性质良好。

现在令 Δ_f，其中 $f \in$生成元$_B^D(S)$是 σ_f的面扇，并且对于 f， $g \in$生成元$_B^D(S)$ 其交集总是 $\Delta_{fg} = \{\{0\}\}$。于是有（参见 [BS], 命题 3.4）：

定理 2.12（多重分次环产生单纯形托里克预簇）。令 $\mathcal{S}_B = (\Delta_f, \Delta_{fg})_{f,\ g\in$生成元$_B^D}$为与锥环 (S, B)相关联的单纯形扇系。于是$\mathrm{Proj}_B^D(S) = X_{\mathcal{S}_B}$ 是一个单纯形托里克预簇。

证明。 根据相关元素的定义，σ_f 自动是单纯的。然后应用[ANH], 定理 3.6。 □

若一个扇系退化为单个扇，则该扇系就是一个扇。我们可以立即得出结论。

推论 2.13。 设 S 是域上的诺特多项式环， $B \subseteq S_+$。当且仅当$\mathrm{Proj}_B^D(S)$ 是分离的，$\mathcal{S}_B$ 才是一个扇。

特别地，将命题 2.10 应用于 [G2],命题 1.1 得到：

推论 2.14。 设 (S, B) 为一个锥环，且 $f, g \in \mathrm{Gen}_B^D(S)$。则以下陈述等价：

(a) $\mu_{(fg)}$ 是满射。*(b)* $\mathrm{int}(C_D(f)) \cap C_D(g)) \neq \varnothing$。*(c)* $\mathrm{int}(\sigma_f \cap \sigma_g) = \varnothing$。

注记 2.15。 设 X 是一个具有满维凸支撑的拟射影环面预簇。则推论 2.14 意味着，每个 GIT 锥 $\lambda(d)$ 都对应于 X中的一个开环面子簇。

接下来，我们证明 $\mathrm{Proj}^D(S)$ 是符合 [ANH], 定义 6.1意义下的良好预商：

定义 2.16。 设 k 是一个代数闭域， X 是定义在k 上的代数预簇，且群 $\mathbb{G}$ 通过正则映射 $\mathbb{G} \times X \to X$作用于 X。若一个 $\mathbb{G}$-不变正则映射 $p\colon X \to Y$到预簇 Y 上是满射，则称其为$\mathbb{G}$在 X上的作用的良好预商，如果

(1) p 是一个仿射映射。(2) 对所有开 $V \subseteq Y$,
$\mathrm{O}_Y(V) = \mathrm{O}_X(p^{-1}(V))^G$。

应用 [ANH], 命题 6.4 和推论 6.5。， $\mathrm{Proj}^D(S)$ 甚至是环面预簇范畴中的良好预商，即一个托里克预商(参见 [ANH], 定义 7.1)。

推论 2.17 (GIT 商)。$\mathrm{Proj}^D(S)$ 是 G 在$\mathrm{Spec}(S)$上的作用的良好预商。事实上，它甚至是一个托里克预商。

证明。 根据 $\mathrm{Proj}^D(S)$ 的构造，我们已经知道

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}^D(S)}(V) = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(S)}(p^{-1}(V))^G$$

对于 $V \subseteq \mathrm{Proj}^D(S)$开且 $p = \pi_+$ (见 [G1])，并且 p 由 [G1], 命题 2.13 (a)可知是满射。$\mathrm{Proj}^D(S)$ 的一个基本仿射开子集由 $\mathrm{Spec}(S_{(f)})$ 给出，其中$f \in S$是某个相关对象。因此 $p^{-1}(\mathrm{Spec}(S_{(f)})) = \mathrm{Spec}(S_f)$是仿射的。特别地，$\mathrm{Proj}^D(S)$是 G 在 $\mathrm{Spec}(S)$上的作用的良好预商。由 p的泛性质可知，显然每个从 $\mathrm{Spec}(S)$ 到某个预概形的G-不变正则映射都唯一地经由 p分解。因此，$\mathrm{Proj}^D(S)$甚至是一个范畴预商（另见 [ANH], 命题 6.4 和推论 6.5）。由于根据定理 2.12，$\mathrm{Proj}^D(S)$是一个单纯的环面预簇，故结论成立。□

有不同的图表可以给出同一个环面预簇，即由极大的 G-稳定分离图表构成的覆盖，以及由极大的 G-稳定仿射图表构成的覆盖。后者对应于一个系统$\mathcal{S}$，其中每个扇都是不可约的。这样的系统称为仿射系统。显然，定理 2.12 中的系统是仿射的，也就是说，由集合 $f \in \mathrm{Gen}_B^D(S)$ 给出的图表构成一个仿射系统。

例 2.18。 我们想要计算例 2.4 中仿射系统所对应的（部分）环面预簇。首先注意，对于 $B_1 = \{xw, yw, zw\}$ 和$B_2 = \{xw, yw, xz, yz\}$， 有

$$X_{\mathcal{S},B_1} = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \text{ and } X_{\mathcal{S},B_2} = \mathrm{Bl}_p(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}),$$

其中 $p = (1:0:0)$。因此，我们可以将 $X_{\mathcal{S}}$ 看作是一个 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$，它与 $\mathrm{Bl}_0(\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}})$ 沿 $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ 粘合（参见 [CLS],例 3.1.14）；也可以将其看作 $\mathrm{Bl}_p(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ 与 $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ 沿 $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ 粘合而成（即，这是由极大的 G-稳定仿射图表构成的覆盖）。注意，我们也可以将 $X_{\mathcal{S}}$看作 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 与 $\mathrm{Bl}_p(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ 沿 $U_1 \cup U_2$粘合而成，其中 $p \in U_0$ 和 U_i 是 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 的标准开仿射子集（这是由极大的 G-稳定分离图表构成的覆盖）。

我们想强调， [C] 和 [BS] 所定义的无关理想通常并不相同。这是理解多重分次 Proj 与 Cox 环构造之间关系的一大难点。

例 2.19。根据 [CLS], 例 5.2.3，环面簇 $\mathrm{Bl}_0(\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}})$ 的仑坐标环为 $S = \mathbb{C}[x, y, z]$，其中 $\deg(x)$、$\deg(y) = 1$ 和 $\deg(z) = -1$。取 $M = \left[\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]$，我们看到 $\sigma_x = \mathrm{Cone}(e_1,$ $e_1 + e_2)$ 和 $\sigma_y = \mathrm{Cone}(e_2, e_1 + e_2)$ 给出
我们最初的环面簇。不过，由于 Brenner–Schröer Proj 将所有极大锥都纳入考量，因此我们还有 $\sigma_z = \mathrm{Cone}(e_1, e_2)$。特别地，Cox 构造与锥环 $(S, B = (x, y))$ 重合，而属于 Brenner–Schröer Proj 的锥环则为 $(S, S_+ = (x, y, z))$。由于后者包含一条带双重原点的射影直线（见 [G1], 例 1.28），$\mathrm{Proj}^D(S)$ 显然是非分离的。注意，$\mathrm{Bl}_0(\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}})$ 在例 2.18 中也表示为开子集 $\mathrm{Spec}(S_{(xz)}) \cup \mathrm{Spec}(S_{(yz)}) \subsetneq \mathrm{Spec}(S_{(z)})$，即对于 $R = \mathbb{C}[x, y, z, w]$ 如同前一个例子以及 $B' = (xz, yz)$ 中一样，我们可以识别出（利用推论 1.19）

$$\mathrm{Proj}^{\mathbb{Z}^2}_{B'}(R) = \mathrm{Bl}_0(\mathbb{A}^2) = \mathrm{Proj}^{\mathbb{Z}}_{B}(S).$$

为了看出相应的锥环同构，我们取多重分次环的态射 $\varphi\colon S \to R_z$, $x \mapsto x$, $y \mapsto y$ 和 $z \mapsto \frac{w}{z}$。现在只需取 S 在 R_z 中的像所给出的环，即 $S' := \mathbb{C}[x, y, \frac{w}{z}] \subset R_z$，显然 $\deg(x) = \deg(y) = 1$，且 $\deg(\frac{w}{z}) = \deg(w) - \deg(z) = -1$。因此，$\varphi$ 的逆由 $\psi\colon S' \to S$ 给出，其中 $x \mapsto x$、$y \mapsto y$ 和 $\frac{w}{z} \mapsto z$，即 $S \cong S'$。

注 2.20. 在前面的例子中，我们看到，似乎可以改写一种分次，使变量 T_i 满足 $\deg_D(T_i) < 0$（或者 $\deg(T_i) \in \mathbb{Z}^r$ 有一个负项）。一般而言，设有 f、$g \in S$ 使得 $\deg(f) = -\deg(g)$。那么，$\mathbb{C}[f, g] \to \mathbb{C}[f'$、$g'$、$\mathrm{h}],$，其中 $\deg(f') = (\deg(f), 0)$，$\deg(g') = (0, \deg(g))$ 且 $\deg(\mathrm{h}) = (\deg(f), \deg(g))$，给出了同构 $\mathbb{C}[f, g] \cong \mathbb{C}[f'$、$^{g'}\mathrm{h}']$。因此 $\deg(^{g}\mathrm{h}) = -\deg(f)$。

我们希望研究这一情形下的 **Proj** 函子（参见命题 1.20）。

推论 2.21. 设 S 是域上的阶乘分次诺特多项式环。那么 ***Proj*** 是一个函子，它将 D_S-分次锥环 (S, B) 映射为单纯形托里克预簇 $\mathrm{Proj}^D_B(S)$，并将锥环的有理映射映射为环面预簇的态射。

证明。第一条结论直接由定理 2.12 得出。设 $\Phi\colon (R, B_R) \dashrightarrow (S, S_+)$ 是一个锥环的有理映射，并设 $B_S := \{ f \in \mathrm{Gen}^{D_S}(S) \mid \exists g \in B_R\colon \varphi(g) \mid f\}$。于是，局部映射 $R_{(g)} \to S_{(f)} = S_{(\varphi(g))}$ 对所有 $f \in B_S$ 都导出一组态射 $\mathrm{Spec}(S_{(f)}) \to \mathrm{Spec}(R_{(g)})$，从而得到一个环面预簇的态射$\Phi^*\colon \mathrm{Proj}^{D_S}_{B_S}(S) \to \mathrm{Proj}^{D_R}_{B_R}(R)$。□

反过来，设 $\mathrm{S} \subseteq N_{\mathbb{R}}$ 是一个单纯形扇系，并令 $\mathrm{A} = (\Delta_{ii}, \Delta_{ij})$ 表示相应的仿射系统。设

$$\Omega_{(1)} \overset{\mathrm{def}}{=} \{(\rho, i) \mid \rho \in \Delta_{ii}(1)\}$$

为 S 的一维锥集合。我们希望当且仅当锥 Δ_{ii} 出现 k 次时，射线 ρ 也出现 k 次。带有额外重复项的一维锥集合记作 S (1)。令 $n = |\mathrm{S}(1)|$ 为 S 的变量数、$r = \operatorname{rank}(D)$，因此 $\dim(N_{\mathbb{R}}) = n - r$。

现在令 B 为一个矩阵，其行由 A 中一维锥的射线生成元给出，即 $\mathrm{B} \in \mathbb{Z}^{n\times(n-r)}$，视为一个映射

$$\varphi\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^{n-r},\ x \mapsto x^T\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{1\times(n-r)}$$

and

$$S \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C}[x_\rho \mid \rho \in \mathcal{S}(1)].$$

我们想要构造一个矩阵 D，使得 $\mathrm{DB} = 0$。显然，只需取所有位于 φ 的核中的向量即可。由于 φ 的秩为 $n - r$，其核是秩为 r 的自由群，因此 $\mathrm{D} \in \mathbb{Z}^{r\times n}$。

注 2.22（Cox 环）。在许多情况下，环 S 与和单纯形扇系 S 相关联的托里克预簇的所谓 Cox 环一致，它由有限生成阿贝尔群 $\mathrm{Cl}(X)$ 分次（参见 [C], §1）。然而，情况并非总是如此。取例 2.18 中的 $S = \mathbb{C}[x, y, z, w]$，我们看到 $S' = \mathbb{C}[x, y, z, xw, yw] \subseteq S$满足 $\operatorname{Proj}^{D_S}(S') = \mathrm{Bl}_P(\mathbb{P}^2)$。但最重要的是，按照 [HK], 定义 2.6 的含义，S' 并不是 $\mathrm{Bl}_P(\mathbb{P}^2)$ 的 Cox 环。

由于我们需要证明这样的矩阵 $\mathcal{D}$存在，因此我们采用[CLS] 中的 Cox 环证明。

命题 2.23。上述构造与 *Cox* 构造一致（参见 [CLS],定理*4.1.3*）。特别地，X_S 的类群同构于以下对象的核

$$\varphi_{\mathcal{B}}\colon \mathbb{Z}^{r\times n} \to \mathbb{Z}^{r\times(n-r)},\ \mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}\cdot\mathcal{B}.$$

证明。根据构造，S 是按 D 分次的，并且 $\operatorname{Proj}^D(S) = X_S$ 是一个托里克预簇。因此，X_S 的类群同构于与 D 对应的群 D。这里我们采用了与 [CLS], 定理4.1.3中相反的论证；在该定理中，类群被描述为余核而非核。按照托里克几何中的惯例，我们稍微滥用记号，将 G与其 S_0-点 $G(S_0) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(D, S_0^\times)$ 等同。结论由此得证。□

因此 S 按 $\mathcal{D}$分次，其中 x_{ρ_i} 的次数由 i-th 列给出 $\mathcal{D}$(因此采用此记号)。换言之，给定一个扇系，我们可以通过为每个一维锥选取一个变量（见上文），并采用使变量之间的线性依赖关系对应于 M的生成元的分次，来计算与之关联的锥环。特别地，无关理想中属于 S 的子集，由对应于 $\mathcal{S}$的极大锥的相关元素集合给出：对扇系 $\mathcal{S}$应用 Cox 构造即可得到无关理想；也就是说，我们取对应于仿射系统 $\mathcal{A}$ 的相关元素 $\mathcal{S}$ (即对应于 $\mathcal{S}$的极大锥的元素)，并将其记为$B_{\mathcal{A}}$ (参见注2.8)。

我们想强调，$\mathrm{Proj}^D(S)$ 实际上只刻画了环面（预）簇的单纯部分。这一点已可由 [G1], 命题 2.13 (1) 与 [C],定理 2.1 得出。

例 2.24. 令 $N=\mathbb{Z}^3$，并考虑锥 σ 的射线生成元 $v_1=(1,\ 0,\ 1)$、$v_2=(0,\ 1,\ 1)$、$v_3=(-1,\ 0,\ 1)$ 和 $v_4=(0,\ -1,\ 1)$。显然，U_σ 不是单纯形环面簇。其 Gale 对偶为

$$A \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

我们希望求出 $D:=\mathrm{Cl}(U_\sigma)$ 的生成元，从而可以将射线生成元写成这些基底的线性组合。$D=\mathrm{coker}(A^T)$ 的同构类（参见命题 2.23）由史密斯标准形（SNF）确定，该标准形通过计算 A 所有方形子式行列式的最大公约数得到。A^T 的 SNF 不变因子为 (1, 1, 2)，因此 $D=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。于是，我们需要在 D 中找到一个自由部分的生成元 r 和一个扭结部分的生成元 t。元素$r=(-1,1,-1,1)$ 满足 $Ar=0$，且对于所有整数 $m\neq 0$，都有 $mr\notin\mathrm{im}(A^T)$（方程$A^T(a,b,c)=m(-1,1,-1,1)$ 给出 $m=0$）。对于 t，有 $t\notin\mathrm{im}(A^T)$，并且$A^T(-1,-1,-1)=(-2,-2,0,0)=2t$，这表明存在扭结（即 $2t=0\in\mathbb{Z}^4/\mathrm{im}(A^T)$）。现在，我们可以将射线生成元写成关于 r 和 t的线性组合，并计算 $S=\mathbb{C}[x_1,。\ .\ .,x_4]$，其分次满足 $\deg(x_1)=\deg(x_3)=(-1,1)$，且 $\deg(x_2)=\deg(x_4)=(1,0)$。因此 $S_+=(x_1,\ldots,\ x_4)$ 且 $S_0=\mathbb{C}[x_1^2x_2^2,x_1^2x_4^2,x_3^2x_2^2,x_3^2x_4^2,x_1x_2x_3x_4]$。容易验证，与 $\mathrm{Spec}(S_{(x_i)})$ 对应的锥恰好是删去射线 v_i 后得到的锥，因此 $\mathrm{Spec}(S_{(x_i)})$ 是一个单纯形环面簇。根据定义 [，计算 $\mathrm{Cox}(U_\sigma)$ 中与 σ 相关的无关理想时，由于 σ 是包含所有射线的单个锥，该理想必由 1 生成。因此，根据定理 2.1 (ii)，仿射环面簇U_σ 可实现为范畴商 $\mathrm{Spec}(S)/\!/\mathrm{Spec}(S_0[D])$，其中群 [C], 作用于其上。另一方面，$\mathrm{Proj}^D(S)$ 是几何商 $D(S_+)/\!/\mathrm{Spec}(S_0[D])$，其中 $D(S_+)=\mathrm{Spec}(S)\setminus\{(0)\}$ 表示去掉原点。特别地，$\mathrm{Proj}^D(S)\subseteq U_\sigma$ 可视为 X 的极大单纯形开子集。

下一个 例子说明了如何从给定的扇系中“读出”分次 .

例2.25。考虑例 2.4 中给出的托里克预簇 X [ANH],，其中X是一个 $\mathbb{P}^1$，其原点和无穷远点都被加倍。特别地，$M_S=[(1,1,-1,-1)]$。在这种情况下，我们可以看到 S 有 4 个变量，记作 x、y、z、w，使得 $\deg(xy)=\deg(zw)$（因为$1+1+(-1)+(-1)=0$）。因此，在 $\mathbb{R}^3$ 中任取 4 个向量，且其中任意 3 个都不线性相关，都会得到一个诱导出我们起初所给扇系的环。因此，$\deg(x)=(1,0,0)$，$\deg(y)=(0,1,1)$，$\deg(z)=(0,0,1)$，以及 $\deg(w)=(1,1,0)$ 是一个这种类型的环。不过，如果应用上述构造，我们会得到 D $=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

由于 D 的秩为 3，我们可以看出 D 等价于 D′，其中 D′ 由 D 构造而成

只需忘掉 D 的一行即可得到。如果选择删去第二行，就会发现 D′ 与上述分次一致。

注意，命题 n 和 r 中的选择是最小的，但我们始终可以改为 $n+1$ 和 $r+1$，并且仍然能找到一个模型。

例 2.26。设 $N=\mathbb{Z}^2$ 和 $S=\Delta$ 为 $\mathbb{P}^2$的扇，其中一维锥由 $\mathrm{Cone}(e_1)$、$\mathrm{Cone}(e_2)$ 和 $\mathrm{Cone}(-e_1-e_2)$ 给出。我们将对应的变量记为 x、y 和 z。因此得到 $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&-1\end{pmatrix}$。

但此时，A 必须有 3 行 1 列，因此 $D=(1,\ 1,\ 1)$。在这种情况下，我们通过经典 Proj 构造得到 $\mathbb{P}^2$（即 $R=\mathbb{C}[x,y,z]$，其中 $\deg(x)=\deg(y)=\deg(z)=1$）。然而，如果加入射线 $\mathrm{Cone}(e_1+e_2)$，并将对应的变量记为 w，则得到

$$\mathcal{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&-1\\1&1\end{pmatrix}\ \text{and}\ \mathcal{D}=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix},$$

也就是说，这是一个由 $\mathbb{Z}^2$ 给出的分次。于是 $S=\mathbb{C}[x,y,z,w]$ 和 $S_+=xw,yw,zw,xz,yz$，其中显然，xz 和 yz 是属于新锥 σ_{xz} 和 σ_{yz} 的相关元素（参见例 2.18），它们由新增的射线 w 产生。特别地，与 S 相关联的另一个锥环是 (S,B)，其中 $B=xw,yw,zw$。令 $\varphi\colon R\to S, x\mapsto xw, y\mapsto yw$ 和 $z\mapsto zw$。那么 $\Phi\colon (R,R_+)\to(\varphi(R),\ B)$ 是一个锥环同构。

接下来，我们想从一个由 $\mathbb{Z}^3$ 分次的环得到 $\mathbb{P}^2$。为此，我们只需再添加一条新的射线。首先，我们尝试 $v=\mathrm{Cone}(e_1-e_2)$。有

$$\mathcal{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&-1\\1&1\\1&-1\end{pmatrix}\ \text{and}\ \mathcal{D}=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\-1&1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

因此，令 $T=\mathbb{C}[x,y,z,w,v]$ 按 D 分次。则 $\mathbb{P}^2$ 由相关元素$xwv,\ ywv,\ zwv\in T_+$ 给出。特别地，存在锥环同构 $(R,\ R_+)\to(\varphi(R),\ B)\to(\psi(S),\ B')$，其中 $B'=xwv,\ ywv,\ zwv$，且 ψ 将 $xw,\ yw,\ zw$ 映射到$xwv,\ ywv,\ zwv$。

我们还可以找到一种不会出现负数的 $\mathbb{Z}^3$ 分次：令 $v'=\mathrm{Cone}(-e_2)$，即

$$\mathcal{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&-1\\1&1\\0&-1\end{pmatrix}\ \text{and}\ \mathcal{D}=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&0&1\end{pmatrix}.$$

与之前一样，$\mathbb{P}^2$ 因此由相关元素 xwv'、ywv' 和 zwv' 给出，因此给出 $\mathbb{P}^2$ 的子环之间仍存在锥环同构。

2.3. **扇系映射**。对于扇系 S，我们定义

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}) \overset{\text{def}}{=} \{(\sigma, i) \mid i \in I, \sigma \in \Delta_{ii}\}$$

并定义带标记锥上的一种等价关系，称为粘合关系

$$(\sigma, i) \sim (\sigma, j) \iff \sigma \in \Delta_{ij}.$$

我们将等价类的集合记为 $\Omega = \Omega(\mathrm{S})$，而 $(\sigma, i) \in \mathrm{F}(\mathrm{S})$ 的等价类记为 $[\sigma, i]$。

注 2.27。请注意，根据注 2。7 [ANH] 赋值 $[\sigma, i] \to G \cdot x_{[\sigma,i]}$ 在 $\Omega(\mathrm{S})$ 与 $X_{\mathcal{S}}$ 的 G-轨道集合之间定义了一个双射，其中 $X_i \ni x_{(\sigma,i)} \sim x_{(\tau,j)} \in X_j$ 当且仅当 $(\sigma, i) \sim (\tau, j)$。另请注意，对于特定点

$$x_{[\sigma,i]} \in \overline{G \cdot x_{[\tau,j]}} \text{ if and only if } [\tau, j] \preceq [\sigma, i], \tag{2.2}$$

其中 $\preceq$ 是 $\Omega(\mathrm{S})$ 上定义的偏序，定义如下

$$[\tau, j] \preceq [\sigma, i] \iff \tau \preceq \sigma \text{ is a face and } [\tau, i] = [\tau, j].$$

我们将 $\mathrm{Proj}^D(S)$ 中包含 $G \cdot x_{[\sigma,i]}$ 的开仿射 G-稳定子集记为 $X_{[\sigma,i]}$。显然，$X_{[\sigma,i]}$ 与 $\mathrm{Spec}(S_{(f)})$ 重合，其中 f 是与极大锥 (σ, i) 相对应的相关元素。

定义 2.28。设 $\mathrm{S} = (\Delta_{ij})_{i,\ j \in I}$ 且 $\mathrm{S}' = (\Delta'_{ij})_{i,\ j \in I'}$ 分别是格 N 和 N' 上的扇系。一个从 S 到 S′ 的扇系映射 是一个有序对 $(F,\ \mathfrak{f})$，其中 $F\colon N \to N'$ 是一个格同态，且 $\mathfrak{f}\colon \Omega(\mathrm{S}) \to \Omega(\mathrm{S}')$ 是满足以下性质的映射：

(i) 若 $[\tau, j] \preceq [\sigma, i]$，则 $\mathfrak{f}([\tau, j]) \preceq f([\sigma, i])$，也就是说，$\mathfrak{f}$ 是保序的。
(ii) 若 $\mathfrak{f}([\sigma, i]) = [\sigma', i']$，则 $F_{\mathbb{R}}(\sigma^\circ) \subset (\sigma')^\circ$。

注 2.29。若 S′ 是一个扇，且 $F_{\mathbb{R}}$ 将 S 的锥映射到 Δ' 的锥，则存在唯一的映射 $\mathfrak{f}$，使得 $(F,\ \mathfrak{f})$ 是一个扇系映射。
反过来，$\mathcal{S}$ 若是一个单独的扇，且 $F_{\mathbb{R}}$ 满足与之前相同的条件，则未必存在一个扇系映射 $(F, \mathfrak{f})$（参见 [ANH], 例 3.3）。
请注意，环面预簇的轨道-锥对应（[CLS], 定理 3.2.6）仍然成立。因此，我们可以用特定点来描述扇系映射。下面的引理根据 $\mathfrak{f}$ 扇系映射给出特定点在托里克态射下的像。

引理 2.30。设 $(F, \mathfrak{f})$，其中 $\mathfrak{f}\colon \Omega(\mathcal{S}) \to \Omega(\mathcal{S}')$，是一个扇系映射，其对应的托里克态射为 $f\colon X_{\mathcal{S}} \to X_{\mathcal{S}'}$。那么对每个 $[\sigma, i] \in \Omega(\mathcal{S})$，都有

$$f(x_{[\sigma,i]}) = x'_{\mathfrak{f}[\sigma,i]}.$$

证明。 [ANH], 引理 3.4。 □

总结前面的结果，我们可以陈述以下定理。回想一下，配备锥环的有理态射的锥环构成范畴 RatConring（参见定义1.12）。

定理 2.31. 设 S 是代数闭域上的诺特分解分次多项式环。对应关系

$$(S,B)\mapsto \mathcal{S}_B$$
$$(\Phi\colon (R,B_R)\dashrightarrow (S,S_+))\mapsto (\boldsymbol{Proj}_{rat}(\Phi)\colon \operatorname{Proj}^{D_S}_{B_S}(S)\to \operatorname{Proj}^{D_R}_{B_R}(R))$$
and
$$\mathcal{S}\mapsto (\mathcal{D},B_{\mathcal{A}}),$$
$$(\Phi^*\colon \operatorname{Proj}^{D_S}_{B_S}(S)\to \operatorname{Proj}^{D_R}_{B_R}(R))\mapsto (\mathfrak{f},(\varphi_f)_{f\in B_S})$$

互为逆映射，其中 $\mathfrak{f}\colon \operatorname{Rel}^{D_S}_{B_S}(S)\to \operatorname{Rel}^{D_R}_{B_R}(R)$ 和 $\varphi_f\colon R_{(\mathfrak{f}(f))}\to S_{(f)}$。因此，单纯形托里克预簇范畴ToricPrevs（以托里克预簇的态射为态射）与RatConRing范畴反等价。特别地，多重分次诺特多项式环可作为托里克预簇的坐标环。

证明。设 (S,B) 是一个锥环。根据定理 2.12，S_B 是与 (S,B) 相关联的仿射单纯形扇系。特别地，S_B 的极大锥由元素 $f\in \operatorname{Gen}^D_B(S)$ 参数化。因此，S_B 的射线生成元矩阵 B_B 由 S_B的射线给出，即 $\mathrm{D}_B=S$；而 $B_{\mathcal{A}}$ 则由根据构造与 S_B 对应的相关元素给出。因此 $(S,B)=(\mathrm{D}_B,B_{\mathcal{A}})$。
反之，设 S 为一个扇系，并设 $(\mathrm{D},B_{\mathcal{A}})$ 表示相应的锥环。由定义，D 的位于 $B_{\mathcal{A}}$ 中的相关元素对应于 S 的极大锥。特别地，$\mathrm{S}^{B_{\mathcal{A}}}$ 必须与 S 具有相同的极大锥，因而具有相同的射线生成元。因此 $\mathrm{S}=\mathrm{S}^{B_{\mathcal{A}}}$。

我们已经在推论 2.21 中证明，锥多项式环的有理映射产生˜出一个预概形态射。反之，设 $f\colon X\to Y$ 为环面预簇的一个态射。则存在锥环 (R,B_R) 与 (S,B_S)，使得 $X=\operatorname{Proj}^{D_S}_{B_S}(S)$ 且 $Y=\operatorname{Proj}^{D_R}_{B_R}(R)$，从而给出仿射系 S^{B_R} 与 S^{B_S}。特别˜地，f给出一个扇系映射 $(F,\mathfrak{f})$，其中 $F\colon N_S\to N_R$ 是一个格态射（并通过对偶性编码群同态 $\alpha_F\colon D_R\to D_S$ 的数据），且 $\mathfrak{f}\colon \Omega(\mathrm{S}^{B_S})\to\Omega(\mathrm{S}^{B_R})$。利用 [G1],引理 1.30，我们区分以下情形:

情形 1： 对于 $X_{\mathcal{S}_{B_S}}$ 的所有特定点 $x_{[\sigma,i]}$，均有

$$f(x_{[\sigma,i]})=x'_{\mathfrak{f}[\sigma,i]}=x_{[\sigma',i']},$$

其中 $[\sigma',i']$ 是 $\mathcal{S}^{B_R}$ 的极大锥。因此 $\mathfrak{f}$将极大锥映射到极大锥，也就是说，将相关元素映射到相关元素。我们也用 $\mathfrak{f}$ 表示相关元素上的映射，即 $\mathfrak{f}\colon \operatorname{Rel}^{D_S}_{B_S}(S)\to \operatorname{Rel}^{D_R}_{B_R}(R)$。根据命题 1.3，15 [CLS]和定义 2.28 (ii)，对于每个 $f\in B_S$，我们得到仿射托里克簇之间的态射 $\operatorname{Spec}(S_{(f)})\to\operatorname{Spec}(R_{(\mathfrak{f}(f))})$。根据标准代数几何，这对应于环的映射 $\varphi_f\colon R_{(\mathfrak{f}(f))}\to S_{(f)}$，如所要求。
情形2： </style}存在一个特定点$x_{[\sigma,i]}$ 属于 $X_{\mathcal{S}_{B_S}}$，使得

$$f(x_{[\sigma,i]})=x'_{\mathfrak{f}[\sigma,i]}=x_{[\tau',i']},$$

其中 $[\tau', i']$ 不是 S_{B_R}的极大锥。这与扇系映射的条件 (ii) 矛盾，因为在这种情况下，τ' 的内部为空。
只需证明这些构造在态射层面上互为逆映射，这一点由构造可知（参见 [ANH],定理 3.6）。□

前一个定理给出了对簇环的推广。

注 2.32 （簇环）。在他们的著作中， [ADHL] 构造了一种所谓的簇环，它是由数据 (R, F, Φ) 给出的对象，其中 R 是一个几乎自由的 D- 分次仿射 k- 代数，满足 $R^* = k^*$；F 是 R 的一组两两不相伴的 D-素生成元，而 Φ 是一个真正的 F-簇。他们在 §2.2 中证明，F-簇是某个扇的 Gale 对偶。由此我们很容易看出这种构造与锥环的关系：每个簇环都是锥环的一种特殊情形，其中 F 对应于 S 的变量（即 S_0上的 S 的生成元），而 Φ 则只是由 F 上构成的相关元素所产生的扇系。特别地，根据 [ADHL], 注 3.2.2.3，投影的 F-面对应于轨道锥；我们知道，轨道锥由相关 f对应的仿射片 $\mathrm{Spec}(S_{(f)}$给出。因此，锥环是簇环的一种推广。

推论 2.33. 若 S 是域上的正规诺特因子分次多项式环，则$\mathrm{Proj}^D(S)$ 是 $\mathbb{Q}$-阶乘的。

证明。 由于 $\mathrm{Proj}^D(S)$ 是单纯且正规的，我们可以应用 [CLS], 命题 4.2.7（另见 [ADHL], 推论 3.3.1.9）。 □

此外，定理2.21 给出了托里克（预）簇的代数描述 s.

推论 2.34. 设 $X = X_S$ 是一个托里克预簇。则存在一个子集 $B \subseteq \mathrm{Cox}(X)_+$, 使得三元组 $(D = \mathrm{Cl}(X), S = \mathrm{Cox}(X), B)$唯一确定该环面簇$X$。尽管$\mathrm{Cox}(X)$ 常被称为 X的“坐标环”，但应谨记，按 D 分次以及无关子集 B 也是不可或缺的数据。从这个意义上说，可以将三元组 (D, S, B) 视为 X的“坐标环”。

证明。 如果 X 是环面型的，令 $B \subseteq S_+$ 为在 [C]中构造的无关理想。一般来说，我们计算 S_+ 和 σ_f 对所有 $f \in \mathrm{Gen}^D(S)$。然后我们取 $B \subseteq S_+$ 使其恰好包含那些 f 其 σ_f 包含于扇系 $\mathcal{S}$中的对象。于是环面（预）簇 X 由其唯一确定

$$X = \bigcup_{f \in B} \mathrm{Spec}(S_{(f)}) \subseteq \mathrm{Proj}^D(S),$$

由于每个 $\mathrm{Spec}(S_{(f)})$ 都是单纯形托里克预簇（参见定理 2.12）。 □

上述讨论表明，对于锥环，Proj 构造与 Cox 环构造在典范同构的意义下互为逆（连同 $\mathrm{Cl}(X)$ 以及定义给定扇（系统）的无关理想 $B \subseteq S_+$ ）。特别地，我们可以陈述:

推论 *2.35.* 设 X为一个托里克预簇， $S = Cox(X)$， $D = Cl(X)$，并设 $B \subseteq S_+$为 *Cox* 所定义的无关理想（[C], §1）。则 $Proj_B^D(S) = X$。反之，设S 为一个具有有限多个变量、由 D 分次的多重分次多项式环。此外，设 $B \subseteq S_+$ 为一个子集，且 $X = Proj_B^D(S)$。则 $S = Cox(X)$， $D = Cl(X)$，并且 B恰好是 *Cox* 所定义的无关理想。

2.4. 子环面作用。本节将简要讨论托里克预簇上的子环面作用，并将其与所谓的 Chow 商联系起来。托里克（预）簇的 Chow 商，其特征是它是映射到所有几何不变量理论商上的最小托里克（预）簇。事实上，我们无需做太多工作，因为这基本上是已知结果的推论。根据 [ANH], 定理 7.2，我们已经知道，每个托里克预簇上的子环面作用都存在一个托里克预商。更进一步， [ANH],推论 8.3 指出，每个托里克预簇都是某个 k^s 开环面子簇的范畴预商之像。然而，根据推论 2.17，$\mathrm{Proj}^D(S)$ 是一个良好预商，因此我们实际上希望 [ANH],定理 6.7 的条件总能满足，从而可以将 $X//H =: \mathrm{Proj}^D(S, H)$ 与 [ANH], 第 6 节中构造的扇的商系统等同起来：

设 $X = \mathrm{Proj}^D(S)$ 是一个单纯形托里克预簇，它由格 N_S 中的一个单纯形扇系 S 和一个子环面给出。 $H \leq \mathrm{Spec}(S_0[D])$ 对应于一个本原子格$L \subseteq N_S$（参见 [CLS], 习题 1.1.9）。对于 $f \in \mathrm{Gen}^D(S)$，令 $\sigma_{f,L}$ 为 σ_f 的最大面，使得 $L_{\mathbb{R}} \cap \sigma_f^\circ$, $_L \neq \emptyset$。接下来，令 $L' = N_S \cap (L_{\mathbb{R}} + \sigma_{f,L})$，并考虑投影$P\colon N_S \to N_S/L'$。于是，$\sigma'_f = P_{\mathbb{R}}(\sigma_f)$ 是 N/L' 中的一个严格凸单纯锥。特别地，与 P 相关联的态射 $X_{\sigma_f} \to X_{\sigma'_f}$ 是 H 在 X_{σ_f} 上通过 [ANH],注记 6.6 所述作用的代数商。
以下结果很大程度上依赖于这样的假设：托里克预簇 X 由一个完整的 Proj 给出，即 $X = \mathrm{Proj}^D(S)$。特别是，我们已经知道，一般而言， S 不是 X 的 Cox 环。

定理 2.36. 设 $X = \mathrm{Proj}^D(S)$ 是一个单纯的托里克预簇，且 $H \leq \mathrm{Spec}(S_0[D])$是一个子环面。那么 H 在 X 上的作用存在一个良好预商。特别地，

$$\mathrm{Proj}^D(S, H) = \bigcup_{f \in \mathrm{Rel}^D(S)} \mathrm{Spec}((S_f)^H) = \bigcup_{f \in \mathrm{Rel}^D(S)} \mathrm{Spec}(S_f)//H,$$

对应于 N/L' 中的扇系，该扇系由 $f \in \mathrm{Gen}^D(S)$所对应的 σ'_f集合给出，其中 $\sigma'_{fg} = \{\{0\}\}$。

证明。根据第 2.2 节中 S 的构造，对于所有 f， $g \in \mathrm{Gen}^D(S)$，都有 $\sigma_{fg} = \{\{0\}\}$。因此， [ANH], 定理 6.7 中的条件显然成立。特别地， X 关于 H 的良好预商由 $f \in \mathrm{Gen}^D(S)$所对应的 σ'_f集合给出，其中$\sigma'_{fg} = \{\{0\}\}$。根据 [G1], 引理 1.15 (4) 和 [CLS], 命题 11.2.14，我们推知，与 σ'_f对应的环面簇是 $\mathrm{Spec}((S_f)^H)$。□

由此可直接得到以下推广： [KSZ],定理 2.1。

推论 2.37。 设 X 是一个单纯形托里克预簇， S 是一个 D-分次多项式环，且 $X = \mathrm{Proj}^D(S)$。考虑子环面 $H \leq \mathrm{Spec}(S_0[D])$。则 $\mathrm{Proj}^D(S, H)$ 与 X 关于 H 的 *Chow* 商相同。特别地，单纯形托里克预簇的 *Chow* 商仍是单纯形托里克预簇。

证明。 首先注意， S 并不是 X的 Cox 环，而且 S 从本质上包含了托里克预簇 X 的信息，该预簇由 S的相关谱给出。证明实质上归结为说明： [KSZ], §1 中的商扇构造，是 [ANH], 定理 6.7 中扇系商构造的一种特殊情形。但根据构造， σ'_f 对于 $f \in \mathrm{Rel}^D(S)$ 恰好是可容许向量等价类的闭包 $n \in \sigma$。由 Chow 商的泛性质以及对$\mathrm{Proj}^D(S, H)$ 商的显式描述可知，这两种构造是一致的。□

参考文献

[ANH] Annette A'Campo-Neuen 和 Jürgen Hausen，《环面预簇与子环面作用》，Geom. Dedicata 87 (2001)，第 1–3 期，35–64，DOI 10.1023/A:1012091302595。[ADHL] Ivan Arzhantsev、Ulrich Derenthal、Jürgen Hausen 和 Antonio Laface，《Cox 环》，Cambridge Studies in Advanced Mathematics，剑桥大学出版社，剑桥，2014。ISBN：978-1-107-02462-5。[BS] Holger Brenner 和 Stefan Schröer，《丰裕族、多齐次谱与形式概形的代数化》，Pacific J. Math. 208 (2003)，第 2 期，209–230，DOI 10.2140/pjm.2003.208.209。[CLS] D.A. Cox、J.B. Little 和 H.K. Schenck，《环面簇》，Grad. Stud. Math.，第 124 卷，普罗维登斯，RI：美国数学会（AMS），2011。ISBN：978-0-8218-4819-7。[C] David A. Cox，《〈环面簇的齐次坐标环〉勘误》，J. Algebraic Geom. 23 (2014)，第 2 期，393–398，DOI 10.1090/S1056-3911-2013-00651-7。[G1] F. Göbler，《 D-齐次谱的主丛与商表示》（2025）。https://arxiv.org/abs/2511.04624，预印本。[G2] ，《多分次环的稳定性条件》（2025），见 2512.05308。https://arxiv.org/abs/2512.05308，预印本。[G3] ，《D-分次 Proj 构造的拓扑与概形论性质》（2026），见 2602.12812。https://arxiv.org/abs/2602.12812，预印本。[HK] Yi Hu 和 Sean Keel，《Mori 梦空间与几何不变量理论》，Michigan Math. J. 48 (2000)，331–348，DOI 10.1307/mmj/1030132722。[KSZ] Mikhail Kapranov、Bernd Sturmfels 和 Andrei Zelevinsky，《环面簇的商》，Mathematische Annalen 290 (1991)，643–655，DOI 10.1007/BF01459264。[KSU] Alex Küronya、Pedro Souza 和 Martin Ulirsch，《环面预簇的热带化》（2021）。https://arxiv.org/abs/2107.03139，预印本。[KU] Alex Küronya 和 Stefano Urbinati，《多分次环的几何及其到环面簇中的嵌入》（2019）。https://arxiv.org/abs/1912.04374，预印本。[MR] Arnaud Mayeux 和 Simon Riche，《关于多分次 Proj 概形》（2024）。https://arxiv.org/abs/2310.13502，预印本。[SP] Stacks 项目作者，《Stacks 项目》，2025。https://stacks.math.columbia.edu。