范畴重构理论

学位论文

提交论文以申请自然科学博士（Dr. rer. nat.）学位

提交给德累斯顿工业大学数学与自然科学学院

Tony Zorman，理学硕士

于2025年4月1日

由 Prof. Dr. rer. nat. Ulrich Krähmer、Prof. Dr. rer. nat. Catharina Stroppel 评审

于2021年11月至2025年9月在几何研究所完成

关于 arXiv 版本的信息

由于编译时间限制，这只是PDF 版本的论文。不过，源代码可通过以下网址：
codeberg.org/slotThe/dissertation/src/branch/arXiv

献给 Isabell 和
我的父母

我几乎希望自己当初没有掉进那个兔子洞——可又——可又——这种生活方式还真是奇妙，你知道吧！

Lewis Caroll，《爱丽丝梦游仙境》

也许我可以先从致谢开始……

Mike Slackenerny，博士漫画#149

致谢

写学位论文时，肯定不可能不与许多优秀的人有所交集——事实上，也必然受过他们的帮助。这份不完全名单当然包括

Uli，因为你是我所能期待的最好的导师、教师和人生导师——感谢你包容我所有愚蠢的问题；

Isabell、妈妈和爸爸，感谢你们一路给予我力量，也感谢我总是想太多数学问题时你们对我的耐心；

Catharina，感谢你同意担任这篇论文的第二评审人，也感谢你组织永无止境的波恩—德累斯顿研讨会；

Sebastian，感谢你不仅容忍我做你的办公室同事，还容忍我成为你的第一位合著者——把 Emacs 强加给你，我一点也不后悔；

Matti，感谢你成为世上最好的伙伴，也感谢你和我聊霍普夫单子，尽管你更想思考顶层；

Zbiggi，感谢你耐心教我表示论的方方面面，也感谢你让我们的办公室不仅增加了 85% 的易燃性，还增添了 100% 的乐趣；

Benny、Florian、Julius 和 Lukas，感谢你们占据我们的办公室，提出并回答了许多关于数学和人生的问题；

Anna，感谢你在短短两个小时内学会了双幺半范畴的一切；

Marcel 和 Sven，感谢你们总是乐意来一场老派的兄弟较量；

Florian，感谢你鼓励我尽早动笔撰写，因为“哪怕只是理顺记号，所花的时间也比你想的要多”——你说得对；

Ivan 和 Myriam，感谢你们在需要时成为办公室里的成年人；

Philip，感谢你——几乎无所不知——与我就数学、哲学、音乐、电影、排版乃至 Emacs 进行的许多启发性交谈；以及

Yue，感谢你——即便是现在——总能让我微笑。

我谨此感谢德意志研究联合会（Deutsche Forschungsgemeinschaft）的经费支持，该机构通过项目 kr 5036/2–1“余交换余幺半群”于2022年10月至2025年9月期间资助了我。

目录

1 引言 1
1.1 Summary 3

2 预备知识 9
2.1 双范畴.92.2 单子与伴随.132.2.1 比较函子.162.2.2 分配律.182.3 弦图.192.4 幺半范畴与模范畴.212.4.1 编织.262.4.2 闭性.272.4.3 刚性与枢纽性.282.4.4 Drinfeld 中心.342.5 线性与阿贝尔范畴.352.5.1 有限与局部有限阿贝尔范畴 . . . . . 362.5.2 张量范畴与环范畴.372.6 代数与模对象.382.7 幺半双范畴.432.7.1 幺半双范畴中的弦图 . . . . . 462.8 余端.482.9 （余）完备化.51

3 幺半范畴的对偶理论57
3.1 张量可表性.593.1.1 格罗滕迪克–韦尔迪耶对偶.613.1.2 自由张量可表范畴并非刚性 . . . 653.2 函子范畴.693.2.1 柯西完备化.763.3 应用.803.3.1 布尔代数.813.3.2 Mackey 函子.853.3.3 交叉模.86

4 扭曲中心 91
4.1 堆.924.2 枢轴结构与扭曲中心.944.2.1 扭曲中心及其皮卡堆.944.2.2 拟枢轴性.984.2.3 Drinfeld 中心的枢纽性.100

5 单子 Tannaka–Krein 重构 117
5.1 双单子.1185.2 霍普夫单子.1225.3 余模单子.1225.3.1 余模单子的重构.129

6 单子扭曲中心 137
6.1 交叉积与分配律.1386.2 可中心化函子与中心双单子 . . . . . 140 6.3 中心化子与余模单子.1446.4 霍普夫单子的 Drinfeld 双与反 Drinfeld 双 1496.5 霍普夫单子的对合对.151

7 双幺半 R-矩阵 157
7.1 双幺半范畴.1587.1.1 双强幺半单子.1607.2 R-矩阵.1627.2.1 从 R-矩阵到双幺半结构及其逆向过程 1667.3 线性分配单子.171

8 无限与非刚性重构 177
8.1 扩展模结构.1798.1.1 可扩张单子.1848.1.2 半单单子.1848.1.3 通过多作用范畴得到的 Linton 余等化子 . . . . . 1868.2 内部投射对象与内射对象.1968.3 松弛模自函子的重构.1988.3.1 刚性幺半范畴与（有限）张量范畴 . . . . . 2018.4 松弛模单子的 Eilenberg–Watts 定理 202

9 Hopf 三模213
9.1 双余模及其图形演算.215

9.2 从 Hopf 三模到松弛模函子.2169.3 Hopf 三模代数上的反模重构 .
2269.3.1 反模的 Morita 等价.2309.4 非刚性重构的一个半单例子 . . . . . .
2319.5 构造纤维函子的一个 Hopf 三模代数 . . . . 2339.6 Hopf 模基本定
理.2379.7 Hopf 单子的融合算子.241

参考文献 245

图目录 261

这取决于你想去哪里；“嗯，其实去哪儿都无所谓——”；那么你走哪条路也就无所谓了。

Lewis Caroll，《爱丽丝梦游仙境》

引言

1

本学位论文将经典代数中的若干重构结果推广到幺半范畴、模范畴和单子的语言中。我们首先简要回顾相关历史，并在下文第 1.1 节概述本文的主要贡献。

幺半群范畴与模范畴广泛存在于数学的许多领域。简而言之，幺半范畴是一个范畴 $\mathscr{C}$，它配备了张量积函子 $\otimes\colon \mathscr{C}\times\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{C}$ 和一个单位 $1\in\mathscr{C}$，并满足结合律和单位性条件。反过来，一个关于 $\mathscr{C}$ 的（左）模范畴 M 配备了一个结合且满足单位性的作用函子 $\triangleright\colon \mathscr{C}\times\mathrm{M}\longrightarrow\mathrm{M}$。这些结构的一个启发性例子来自线性代数。域 $\Bbbk$ 上的向量空间范畴 Vect 是幺半范畴，而一个 $\Bbbk$-代数 A 上的右模构成一个左 Vect-模范畴。给定 $V\in\mathrm{Vect}$ 和一个右 A-模 M，张量积 $V\otimes_{\Bbbk}M$ 仍是一个右 A- 模，其作用由 $(v\otimes m).a \mathrel{..}= v\otimes m.a$ 给出，对所有 $a\in A$、$m\in M$ 和 $v\in V$ 均成立。

幺半范畴与模范畴的语言和理论已应用于多个领域，包括量子场论 [FRS02；表示论中的范畴化07],Day [Str23；LMGRSW24；SW24], 代数几何 [BZFN10；BZBJ18；Pas24], ，以及霍普夫代数和张量范畴理论的诸多方面 [Sch00a；KK14；EGNO15；FGJS22；Shi23b；Str24b]。关于模范畴在应用范畴论和计算机科学中的作用综述（在这些领域中，模范畴也称为 Actegories），请参见 [CG22]。

与向量空间范畴中的情形一样，给定一个代数对象 $A\in\mathscr{C}$，范畴 $\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A)$（由 $\mathscr{C}$ 中的右 A-模构成）自然是一个左 $\mathscr{C}$-模范畴。反过来，考虑给定的 $\mathscr{C}$-模范畴 M 时，寻找并研究 $\mathscr{C}$ 中的一个代数对象 A 往往很有用，使得存在一个 $\mathscr{C}$-模范畴等价 $\mathrm{M}\simeq\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A)$。这种重构过程是本论文第8章和第9章的核心。此类早期结果之一是 [Ost03，定理 1], ：有限张量范畴 $\mathscr{C}$ 上一个“良好”的模范畴——即与有限维代数上的有限维

模——可表示为 $\mathcal{C}$中的一个代数对象，见第A 章定理8。此后出现了许多推广和变体；例如 [EGNO15，定理 7.10。1], [DSPS19，定理 2。24],[MMMT19，定理 4。7],以及 [BZBJ18，定理 4。6]。

上述所有重构结果都涉及刚性幺半范畴：其中每个对象都有一个对偶。例如，对于每个有限维向量空间 V，都存在典范的求值映射和余求值映射 $\mathrm{ev}\colon V^* \otimes_{\Bbbk} V \longrightarrow \Bbbk$和$\mathrm{coev}\colon \Bbbk \longrightarrow V \otimes_{\Bbbk} V^*$，其中 $V^* = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, \Bbbk)$是其对偶空间。然而，在 [DSPS19的例 2 中20]表明，缺乏刚性时，存在一些 $\mathcal{C}$-模范畴，无法从中重构出 $\mathcal{C}$中的代数对象。这迫使我们进一步推广到单子。

从历史上看，（余）单子的研究源于（余）同调和同伦论，

“单子”一词最早见于印刷出版物，是在 [Bén67]的第 5.4 节中。其他名称还包括“三元组”、“标准构造”或“三元组”。

在此可以用余单子构造单纯形分解，参见 [God58；Hub61]。在 [Hub61] 中已经指出，单子与伴随理论之间存在深刻联系：每一个伴随都会产生一个单子，而反过来，每一个单子都来自某个伴随。事实上，存在一个由实现给定单子的所有伴随构成的范畴。其中的始对象与终对象——该单子的 Kleisli 范畴与 Eilenberg–Moore 范畴， [EM65；Kle65]——在本工作中起着主轴作用。

进一步的应用多种多样，包括范畴论 [Bec69; Str72; BKP89; LS02; AM24], 范畴表示理论 [Moe02; BLV11; Str24b; BHV24], Hopf 代数与量子群 [BV07; AC12; KKS15; HL18], 泛代数 [Lin66; Wal70; HP07], 形式语义 [Mog89; Mog91; TP97], 函数式编程 [Wad92; Wad93; PJW93], 以及代数效应 [BHM02; PP02; PP09; BP15]。

对于本论文而言，单子的最重要之处在于单子重构理论——它将单子上的附加结构 T 与 $\mathcal{C}$ 其 Eilenberg–Moore 范畴上的结构联系起来 $\mathcal{C}^T$。与伴随理论的联系给出了典范遗忘函子 $U^T\colon \mathcal{C}^T \longrightarrow \mathcal{C}$。因此，这种关系可以视为 *Tannaka–Krein* 对偶 [Tan38;Kre49], 的推广；在该对偶中，人们从一个紧群的表示范畴重构出这个紧群。此类结果的推广已在许多不同背景下提出，参见 [SR72; Wor88; Del90; Lur04; Szl09; Sch13]。

所有这些论述的一个关键特征是都涉及一个纤维函子：一个到良好底层范畴的遗忘严格幺半函子，例如向量空间范畴，或环上的双模范畴。

在单子情形下，针对双单子已经获得了 Tannaka–Krein 型重构结果 [Moe02；McC02]，霍普夫单子 [BV07]，以及线性分配的和 $*$-自治单子 [PS09；Pas12]。我们从模的范畴论视角出发，为这一已经十分广泛的结果领域增添了新的见解，沿着在代数版本中考虑双代数上的余理想子代数这一思路，为双单子上的余模单子提供了一个新的重构结果。

1.1 摘要

现在我们将给出一个简短的概要；更详细的描述和引言将在各自章节的开头提供。本论文的所有原创成果均已包含在以下文章或预印本中的至少一篇之中。

此处列出的文章，其顺序与上传至 arXiv 的顺序一致。

- [HZ24b]：Sebastian Halbig 和 Tony Zorman。《主轴性、扭曲中心与霍普夫单子的反双》。载于：Theory Appl. Categ. 41（2024），第 86–149 页。国际标准连续出版物号：1201-561x。
- [HZ24a]：Sebastian Halbig 与 Tony Zorman。余模单子的图式方法。载于：应用范畴结构 32（2024）。编号 27，第 17 页。国际标准连续出版物号：0927-2852。数字对象标识符：10.1017/cbo9781139542333。
- [HZ23]：Sebastian Halbig 与 Tony Zorman。幺半范畴中的对偶；2023。arXiv：2301.03545。
- [SZ24]：Mateusz Stroiński 与 Tony Zorman。无限情形与非刚性情形下模范畴的重构；2024。arXiv：2409.00793。
- [Zor25]：Tony Zorman。双幺半 R-矩阵；2025。arXiv：2503.03445。

为保持共同的主题焦点，文章 [CSZ25]——尽管完成于作者的博士研究期间——将不构成本工作的一部分。

为求简洁，我们不再引用以下任何文章 [HZ23；HZ24a；HZ24b；SZ24；Zor25] 的更多内容。

章节2：预备知识

本章汇集了所有文章中的预备知识，统一了记号，并回顾了若干基本性质，例如 2-范畴、幺半群范畴与模范畴、Drinfeld 中心、线性与阿贝尔范畴、余端以及单子。此外，我们还介绍了全文计算中采用的一种主要工具——图形演算。

章节 3：幺半范畴的对偶理论

本章主要基于 [HZ23]，，我们研究幺半范畴的各种对偶及其相互作用：刚性、张量可表性、Grothendieck–Verdier 对偶和闭性。这些概念构成一个层级：闭性是限制最少的一种对偶，处于一端；刚性则处于另一端。然而，所有包含映射是否都是严格的，并不显然。综合命题3.7、3.12和3.16；例3.15和3.17；以及定理3.23可得

$$\text{刚性} \subsetneq \text{张量可表示} \subsetneq \text{Grothendieck–Verdier} \subsetneq \text{闭合},$$

回答了 Heunen 提出的问题。

接下来，我们更细致地研究赋予 Day 卷积作为其张量积的有限维函子范畴上的对偶结构。直观地说，这推广了交换代数上模的张量积，见例2.123。给定一个良好的基范畴，闭性与 Grothendieck–Verdier 对偶可提升到这一设定中。

命题 3.27。 设 $\mathscr{C}$ 为一个 $\Bbbk$-线性 *Hom*-有限 *Grothendieck–Verdier* 范畴。在假设3.25的条件下，有限维函子范畴$[\mathscr{C},\mathsf{vect}]$ 是一个 *Grothendieck–Verdier* 范畴。

受表示论问题的启发，范畴的柯西完备化对我们而言也起着重要作用。例如，环上投射模的全子范畴是所有自由模的全子范畴的柯西完备化。我们发现，柯西完备化完全反映了其基范畴的对偶行为。

推论 3.43。 设 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ 是一个 $\Bbbk$-线性右闭幺半范畴。那么，当且仅当其柯西完备化 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ 是右刚性（张量可表示）时，$\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ 才是右刚性（张量可表示）的。此外，$(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, d)$ 是右格罗滕迪克–韦尔迪耶范畴，当且仅当 $(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, よ_d)$ 也是。

章节4：扭曲中心

本章主要依据 [HZ24b]，，我们将定理 4.1从霍普夫理论世界提升到幺半范畴的领域，为后续的单子式推广奠定基础。

定理 4.23。 设 $\mathcal{C}$ 是一个刚性范畴。在以下对象之间存在双射：

(i) $\mathcal{C}$ 上拟枢轴结构的等价类；*(ii)* 反中心的 *Picard* 堆；以及 *(iii)* 中心与反中心之间模范畴等价的同构类。

随后，我们将进一步研究反中心的堆结构，并回答 Shimizu 关于其与底层范畴上的拟枢轴结构之间关系的问题。

定理 4.50。 存在一个范畴 $\mathcal{C}$，其上存在一种枢轴结构，但它并非由 $\mathcal{C}$的反中心的 *Picard* 堆中的任何元素诱导。。

章节5：单子 *Tannaka–Krein* 重构

本章主要基于 [HZ24a；HZ24b；SZ24]，，我们按照 [AC12]的含义研究余模单子。这些结构可以看作是双代数上的余模代数的推广，参见例5.14。随后，我们以 [Moe02定理 7.1]和 [McC02推论 3.13]的思路，证明关于余模单子的主要 Tannaka–Krein 重构结果。

定理5.31。设 B 是幺半范畴 $\mathcal{C}$上的一个双单子，且 T 是右 $\mathcal{C}$-模范畴M上的一个单子。 B 在 T 上的余作用与 $\mathcal{C}^B$ 在M^T 上的右作用构成双射，且满足 U^T 是一个 U^B上的严格余模函子。

特别地，我们证明了与 Kelly 的教义伴随结果相似的命题，适用于余模单子和 $\mathcal{C}$-模单子；后者在章节8 和9中。

定理 5.28 及推论 5.29。 设 $F\colon\ \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}\colon U$是一个 *oplax* 幺半伴随。将普通伴随 $G\colon \mathrm{M} \rightleftarrows \mathcal{N}\colon V$ 提升为余模伴随的方式，与将 $V\colon\ \mathcal{N} \longrightarrow \mathrm{M}$ 提升为强余模函子的方式一一对应。

范畴 $F\colon\ \mathrm{M} \rightleftarrows \mathcal{N}\colon U$之间的 $\mathcal{C}$-模范畴上的伴随，在 F 上诱导出 *oplax* $\mathcal{C}$-模结构与 U上的 *lax* $\mathcal{C}$-模结构之间的双射。

章节6：单子扭曲中心

本章节主要基于 [HZ24b]，，对第 4 章作出单子解释。基于霍普夫单子的 Drinfeld 双，我们发展出反双的概念，它将同上 的反中心实现为其 Eilenberg–Moore 范畴，并给出定理 4.23 的单子性变体。

定理6.44。 设 $\mathscr{C}$ 是一个刚性幺半范畴。对于一个定义在 H 上且 $\mathscr{C}$ 具有双和反双的霍普夫单子，以下陈述等价：

(i) $\mathscr{C}$ 的幺半单位可提升为反双上的一个模，*(ii)* H 的双和反双作为余模单子同构，以及 *(iii)* H 的双和反双作为单子同构。

若 $\mathscr{C}$ 是主轴的，则上述陈述成立当且仅当 H 具有一个对合对。

通过考察双与反双之间的相互作用，我们得到了一个判据，可用于判断刚性幺半范畴何时为主轴的。

推论 6.45。 设 $\mathscr{C}$ 是一个刚性幺半范畴。若 $\mathscr{C}$ 具有一个中心霍普夫单子$\mathfrak{D}(\mathscr{C})$和一个反中心余模单子$\mathfrak{Q}(\mathscr{C})$，则当且仅当$\mathfrak{D}(\mathscr{C}) \cong \mathfrak{Q}(\mathscr{C})$作为单子时，它是主轴的。

章节7：双幺半 R-矩阵

本章主要基于 [Zor25]，，介绍双幺半范畴中的 R-矩阵，将其推广到双代数的著名 R-矩阵以及双单子的 R-矩阵 [BV07]。结果表明，适当单子上的 R-矩阵与其 Eilenberg–Moore 范畴上的双幺半结构相对应。

定理 7.21。 设 $\mathfrak{D}$ 是一个具有幺半结构 $\circ$ 和 $\bullet$，且 T 是 $\mathfrak{D}$ 上的一个单子，$\circ$-*oplax* 幺半结构和一个 $\bullet$-*oplax* 幺半结构。则 T 上的拟三角结构与 $\mathfrak{D}^T$上的双幺半结构一一对应。

接着，我们探讨正规双幺半范畴与（非平面）线性分配范畴之间的联系 [CS97；GLF16]。后者可以看作是格罗滕迪克–韦尔迪耶范畴的一种类似物，但没有明确的对偶概念。在命题 7.31中，我们将双幺半单子的余交换版本与 [Pas12] 中的线性分配单子联系起来。

章节*8*：无限与非刚性重构

本章节主要基于 [SZ24]，研究不借助纤维函子的重构，例如 [Ost03中的定理 1]。

由于模范畴 M 上的每个对象 m 都会导出一个强$\mathscr{C}$-模函子 $-\triangleright m\colon \mathscr{C}\longrightarrow \mathrm{M}$，并且在良好的情形下，该函子有一个右伴随，因此得到的单子自然是一个宽松的 $\mathscr{C}$-模单子。然而，原则上并不清楚一个（右正合）宽松 $\mathscr{C}$-模单子的 Eilenberg–Moore 范畴是否具有典范的 $\mathscr{C}$-模结构。我们运用多范畴技巧，确立了何时存在这样的扩张 。

定理 *8.25* 和 *8.26*。设 $\mathscr{C}$ 是一个阿贝尔幺半范畴，M 是一个阿贝尔 $\mathscr{C}$-模范畴。假设作用函子 $\triangleright\colon \mathscr{C}\otimes_{\Bbbk} M\longrightarrow M$ 在两个变量上都是右正合的，并设 $T\colon M\longrightarrow M$ 是一个右正合的宽松 $\mathscr{C}$-模单子。那么，M^T上存在本质上唯一的 $\mathscr{C}$-模结构，使得典范包含映射 $\iota\colon M_T\longrightarrow M^T$ 是一个强 $\mathscr{C}$-模函子。

利用构造出的 $\mathscr{C}$-模结构，我们随后在温和的附加假设下建立了一个重构与分类结果。

定理 8.48 至 8.50。假设 $\mathscr{C}$ 和 M 有足够多的投射对象（内射对象），并且存在一个对象$l\in \mathrm{M}$ 满足：

- 存在一个从 $\lfloor l,-\rfloor$ 到 $-\triangleright l$ 的右伴随 $\lceil l,-\rceil$（左伴随）；
- 对于投射（内射）对象 $x\in\mathscr{C}$，对象 $x\triangleright l$ 是投射（内射）的；
- M 的任意投射（内射）对象都是形如 $x\triangleright l$ 的对象的直和项，其中 x 为投射（内射）对象。

设 T 为单子 $\lfloor l,\ -\triangleright l\rfloor$。则存在 $\mathscr{C}$-模范畴的等价 $\mathrm{M}\simeq\mathscr{C}^T$，其中 T-模的范畴的 $\mathscr{C}$-模结构由 *Kleisli* 范畴延拓而来。此外，这给出一个双射

$$
\begin{aligned}
\{(\mathscr{M},\ell)\ \textit{as above}\}/(\mathscr{M}\simeq\mathscr{N}) &\leftrightarrow \begin{Bmatrix}\textit{Right exact lax } \mathscr{C}\textit{-module}\\ \textit{monads on } \mathscr{C}\end{Bmatrix}/(\mathscr{C}^T\simeq\mathscr{C}^S)\\
(\mathscr{M},\ell)&\longmapsto \lfloor \ell,-\triangleright\ell\rfloor\\
(\mathscr{C}^T,T1)&\longmapsfrom T
\end{aligned}
$$

章节9：霍普夫代数三模

最后一章节主要基于 [SZ24], 进一步发展了第8章节在若干例子情形下的非刚性重构结果。

对于霍普夫代数 B，*Hopf* 模基本定理指出，Hopf 模范畴 ${}^B_B\mathsf{Vect}$ 与向量空间范畴 [LS69]自然等价。同样，霍普夫代数三模 ${}^B_B\mathsf{Vect}^B$ 的范畴与右余模范畴等价。与普通 Hopf 模相比，Hopf 三模可以推广到拟 Hopf 代数领域。

如果 B 只是一个双代数——也就是说，它没有对极——那么我们仍然可以 1 从这类模中提取出有趣的结构。

定理 9.2。 对于双代数 B *and* $\mathcal{V} := {}^B\mathsf{Vect}$，存在一个幺半等价

$$ {}^B_B\mathsf{Vect}^B \simeq \mathsf{LexfLax}\mathcal{V}\mathsf{Mod}(\mathcal{V},\mathcal{V}) $$

在 *Hopf* 三模范畴与 $\mathcal{V}$ 上左正合有限宽松$\mathcal{V}$-模自函子范畴之间。

这使我们能够对上述 Hopf 模基本定理给出范畴论解释。

命题 9.38 和推论 9.45。 函子 ${}^B\mathsf{Vect} \longrightarrow {}^B_B\mathsf{Vect}^B$ 对应于强 ${}^B\mathsf{Vect}$-模自函子到宽松 ${}^B\mathsf{Vect}$-模自函子范畴的包含映射。当且仅当 ${}^B\mathsf{vect}$ 是左刚性的，它才是一个等价；而当且仅当 B 具有扭曲反极时， ${}^B\mathsf{vect}$ 才是左刚性的。

我们还讨论了半群代数情形下的应用，见第 9.4 节和 9.5节。这可以视为一个非刚性范畴的例子，其中 [EGNO15第 7]章中描述的重构过程失效。

最后，双单子的融合算子可以用其典范模结构来表示。

引理 9.47 和命题 9.49。 设 $F\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : U$ 是一个反强幺半伴随。 U 的强幺半结构使 $\mathcal{C}$ 成为一个 $\mathcal{D}$-模范畴，定义为 $- \triangleright = := U(-) \otimes =$。相对于这一 $\mathcal{D}$-模结构， $\mathcal{C}$ 上的双单子 $T := UF$ 成为一个 *oplax* $\mathcal{D}$-模单子。右融合算子由在一个自由 T-模处对 $\mathcal{D}$-模相干态射求值给出；此外， T 是右 *Hopf* 当且仅当它是一个强 $\mathcal{C}^T$-模单子。

轮子属于机器的一部分；你可以转动它，而其他部分却不会随之运动。

路德维希·维特根斯坦；《哲学研究》

预备知识

我们假定读者熟悉 基本的范畴论概念，以及幺半范畴和 2-范畴理论的主要特征，例如 [ML98； EGNO15； Rie17； JY21]中所讨论的内容。尽管如此，我们还是先简要回顾最重要的术语和记号。

2.1 双范畴

双范畴理论至关重要，它是我们全文将要使用的图形演算的基础，参见第2.3节；此外，它也适用于我们将要采用的一些形式化论证。按照 [JY21], 我们来回顾最重要的定义。

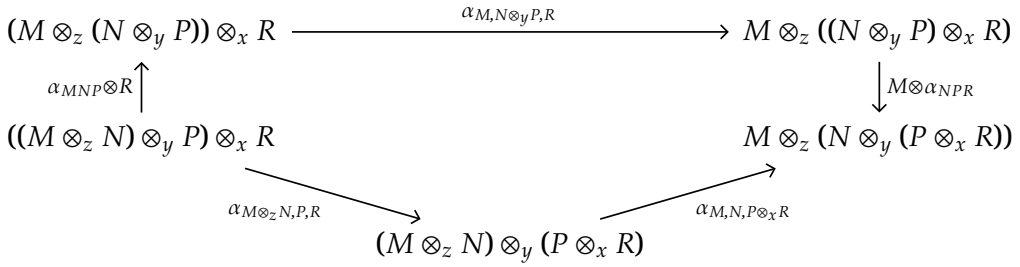
定义 2.1。一个双范畴 $\mathbb{B}$具有以下数据：

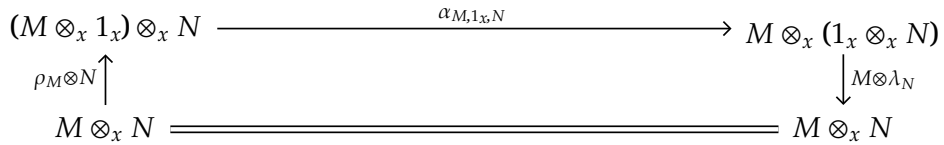
- 一组对象 $\mathrm{Ob}\ \mathbb{B}$，我们常将 $x \in \mathbb{B}$ 写作 $x \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{B}$；
- 对所有 $x,\ y \in \mathbb{B}$都有一个同态范畴 $\mathbb{B}(x,\ y)$，其对象称为*1*-胞 （或 1-态射），其态射称为*2*-胞 （或 2-态射）；
- 对所有 $x, y, z \in \mathbb{B}$ ，都有一个 水平复合函子

$$\otimes_y : \mathbb{B}(y,z) \times \mathbb{B}(x,y) \longrightarrow \mathbb{B}(x,z);$$

- 对所有 $x \in \mathbb{B}$ 都有一个恒等态射 $1_x \in \mathbb{B}(x,\ x)$；
- 一个自然同构 $\alpha_{M,\ N,\ P}$: $(M \otimes_y N) \otimes_x P \longrightarrow M \otimes_y (N \otimes_x P)$；
- 自然同构 λ_M: $1_y \otimes_y M \longrightarrow M$ 和 ρ_M: $M \longrightarrow M \otimes_x 1_x$。

这些数据须满足以下图表的交换性，对所有合适的 1-胞腔 M， N， P， R:





如果 α、 λ 和 ρ 都是恒等态射，我们就称 $\mathbb{B}$ 为一个 *2-范畴*。

范畴 $\mathbb{B}(x,\ y)$ 中态射的复合称为垂直复合。我们用 ♥ 表示由单个对象、单个 1-态射和单个 2-态射构成的终端双范畴。

例 2.2. 由（小）范畴、函子和自然变换构成的范畴 $\mathbb{C}$at 是一个 2-范畴。水平复合由函子和自然变换的水平复合给出。

在本文中，双范畴的例子比比皆是。在介绍更多必要的记号之前，我们暂不在此详述这些例子，但请参见例2.103、2.111和2.113，以及注4.8 和5.2

注 2.3. 将 $\otimes$ 用于水平复合并非标准用法，这一做法受到 [Gar22]的启发。我们在此采用这种记号，以突出它与幺半范畴定义之间的相似之处，参见定义2.31。

记号 2.4. 为了在语法上区分双范畴与普通范畴，我们通常会用黑板粗体字母作为双范畴名称的开头。例如，在讨论由所有（小）范畴及其函子构成的 1-范畴时，我们写作Cat ，而不是 $\mathbb{C}$at。

与幺半范畴类似，参见定理2.40，双范畴也有相干性 和严格化 定理，即每个双范畴都与某个 2-范畴双等价，例如参见 [JY21，定理 8.4.1 和推论 8.4。2]。

定义 2.5。一个松函子 $F\colon \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ 从双范畴 $\mathbb{B}, \mathbb{C}$ 出发，其数据包括：

- 一个对象指派 $F\colon \mathrm{Ob}\ \mathbb{B} \longrightarrow \mathrm{Ob}\ \mathbb{C}$;
- 对所有 $x,\ y \in \mathbb{B}$，一个函子 $F_{x,\ y}\colon \mathbb{B}(x,\ y) \longrightarrow \mathbb{C}(Fx,\ Fy)$;
- 一族自然变换 $F_2\colon F\otimes F \Longrightarrow F\circ\otimes$，其分量为$F_{2,\ M,\ N}$：$F_{yz}M\otimes_{Fy}F_{xy}N \longrightarrow F_{xz}(M\otimes_y N)$，对所有 $x,\ y,\ z \in \mathbb{B},\ M \in \mathbb{B}(y,\ z)$，以及 $N \in \mathbb{B}(x,\ y)$；并且
- 对所有 $x \in \mathbb{B}$，箭头 $F_{0,\ x}\colon 1_{Fx} \longrightarrow F1_x$。

这些数据分别在 $\mathbb{C}(Fw,\ Fz)$ 和 $\mathbb{C}(Fx,\ Fy)$ 中满足以下公理，对所有可容许的 $M,\ N,\ P$:

$$\begin{array}{ccc}
(FM \otimes_{Fy} FN) \otimes_{Fx} FP & \xrightarrow{\alpha} & FM \otimes_{Fy} (FN \otimes_{Fx} FP) \\
{\scriptstyle F_{2;M,N}\otimes\mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes F_{2;N,P}} \\
F(M \otimes_y N) \otimes_{Fx} FP & & FM \otimes_{Fy} F(N \otimes_x P) \\
{\scriptstyle F_{2;M\otimes N,P}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_{2;M,N\otimes P}} \\
F((M \otimes_y N) \otimes_x P) & \xrightarrow[F\alpha]{} & F(M \otimes_y (N \otimes_x P))
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
1_{Fy} \otimes_{Fy} FM & \xrightarrow{\lambda} & FM & \xrightarrow{\rho} & FM \otimes_{Fx} 1_{Fx} \\
{\scriptstyle F_{0;y}\otimes\mathrm{id}}\downarrow & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes F_{0;x}} \\
F1_y \otimes_{Fy} FM & & \| & & FM \otimes_{Fx} F1_x \\
{\scriptstyle F_{2;1_y,M}}\downarrow & & \| & & \downarrow{\scriptstyle F_{2;M,1_x}} \\
F(1_y \otimes_y M) & \xrightarrow[F\lambda]{} & FM & \xrightarrow[F\rho]{} & F(M \otimes_x 1_x)
\end{array}$$

如果所有 F_2 和 F_0 都可逆，则称松函子为伪函子；如果它们全都是恒等，则称其为*2*-函子。

类似地，也可以定义 2-范畴之间的反松函子。

定义 2.6. 两个松函子 (F, F_2, F_0)、$(G, G_2, G_0)\colon \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ 之间的一个反松变换 $\omega\colon F \Longrightarrow G$ 由以下数据组成：对于每个 $x \in \mathbb{B}$，有一个 1-胞腔 $\omega_x\colon Fx \longrightarrow Gx$，位于 $\mathbb{C}$ 中；并且对于所有 $x, y \in \mathbb{B}$，有一个自然变换

$$\omega\colon \omega_y \otimes F(-) \Longrightarrow G(-) \otimes \omega_x\colon \mathbb{B}(x,y) \longrightarrow \mathbb{C}(Fx, Gy)$$

其分量 2-胞为 $\omega_f\colon \omega_y \otimes_{Fy} Ff \Longrightarrow Gf \otimes_{Gx} \omega_x$，对所有 $f\colon x \longrightarrow y$（位于 $\mathbb{B}$ 中）均成立。图示地，我们将这些 2-胞画成如下形式：

$$\begin{array}{ccc} Fx & \xrightarrow{Ff} & Fy \\ {\scriptstyle \omega_x}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle \omega_f} & \downarrow{\scriptstyle \omega_y} \\ Gx & \xrightarrow[Gf]{} & Gy \end{array}$$

如果所有 ω_f 都是同构，则称反松变换为 **伪自然变换**[1] 都是同构；如果它们都是恒等态射，则称为**2-自然变换** 。

[1] 伪自然变换在 强变换中称为 [JY21]。

类似地，可以定义懒函子之间的宽松 变换，以及反松函子之间的宽松变换和反松变换。

定义 2.7 ([Lac10])。设 F，G：$\mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ 是双范畴之间的松函子。一个 **图标** 从 F 到 G 由以下断言组成：$Fx = Gx$对所有$x \in \mathbb{B}$成立；以及一个反松变换 ω：$F \Longrightarrow G$，使得对所有 $x \in \mathbb{B}$，1-胞腔 ω_x：$Fx \longrightarrow Gx$ 是恒等态射。

定义 2.7乍看之下或许有些刻意，但这是一个重要概念：不存在这样一个 2-范畴，其 0-胞是（小）双范畴，1-胞是宽松函子（甚至伪函子），2-胞是 2-自然变换。相反，图标为这一构造提供了“恰当”类型的 2-胞，参见 [JY21，第4节。6] 了解更全面的介绍。

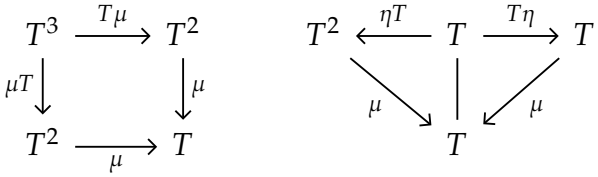
定义 2.8。设 $\mathbb{B}$ 和 $\mathbb{C}$ 为双范畴，F，G：$\mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ 为松函子，并设 α，β：$F \Longrightarrow G$ 为反松变换。一个修正Υ：$\alpha \Rrightarrow \beta$ 从 α 到 β 由每个 $x \in \mathbb{B}$对应的一个 2-胞 $\Upsilon_x\colon \alpha_x \Longrightarrow \beta_x$ 组成，并满足对所有 1-胞 $f \in \mathbb{B}(x,\ y)$，下图均交换：

$$\begin{array}{ccc} Fx & \xrightarrow{Ff} & Fy \\ {\scriptstyle \beta_x}\Big(\Leftarrow{\scriptstyle \Upsilon_x}\Big){\scriptstyle \alpha_x} & \swarrow{\scriptstyle \alpha_f} & \downarrow{\scriptstyle \alpha_y} \\ Gx & \xrightarrow[Gf]{} & Gy \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} Fx & \xrightarrow{Ff} & Fy \\ {\scriptstyle \beta_x}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle \beta_f} & {\scriptstyle \beta_y}\Big(\Leftarrow{\scriptstyle \Upsilon_y}\Big){\scriptstyle \alpha_y} \\ Gx & \xrightarrow[Gf]{} & Gy \end{array}$$

事实上，双范畴、松函子、松自然变换以及它们之间的修改构成一个三范畴。这里不提供正式定义，详情请参见 [GPS95；Gur06] 和 [JY21，第 11]章。

2.2 单子与伴随

定义 2.9。范畴 $\mathcal{C}$ 上的一个单子由一个自函子 T 在 $\mathcal{C}$上以及两个自然变换 μ: $T^2 \Longrightarrow T$和 η: $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Longrightarrow T$构成，分别称为 T的乘法和单位，并满足结合律和单位性公理:



定义 2.10. 一个伴随由一对函子组成 F: $\mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}$:$U$，以及两个自然变换，即单位 η:$\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Longrightarrow UF$和余单位 ε: $FU \Longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$，并满足蛇形或三角恒等式；例如参见 [Rie17，定义 4.2。5]。

或者，也可以将 F: $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ and$G$: $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ 之间的伴随定义为要求存在一个自然同构

$$\mathcal{D}(F(-),=) \cong \mathcal{C}(-,U(=)),$$

由此可以恢复单位和余单位，参见 [Rie17，命题 4.2。6]。请注意，先验地，不同的自然同构会导出同一对函子之间不同的伴随。不过，例如固定 G后，对于两个左伴随 F 和 F'，存在唯一的同构 Θ: $F \Longrightarrow F'$，它与相应的单位和余单位相容；参见 [Rie17，命题4.4。1]。

例 2.11. 若 F: $\mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}$:$U$是一个伴随，其单位为 η，余单位为 ε，则UF: $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$是一个单子；其乘法 μ^T: $UFUF \Longrightarrow UF$由$U\varepsilon F$给出，单位 η^T: $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Longrightarrow UF$等于 η。

定义 2.12. 给定范畴 $\mathcal{C}$上的一个单子 (T, μ, η)，一个 T-代数 由一个对象 $x \in \mathcal{C}$和一个态射 α: $Tx \longrightarrow x$组成，并满足

$$\alpha \circ T\alpha = \alpha \circ \mu_x \qquad \text{and} \qquad \alpha \circ \eta_x = \mathrm{id}_x.$$

给定两个 T-代数（x，α）和（y，β），它们之间的一个态射 由一个态射 f: $x \longrightarrow y$ in $\mathcal{C}$构成，并满足 $\beta \circ Tf = f \circ \alpha$。

注 2.13. 对于任意单子 T，T-代数及其态射构成一个范畴：T 的*Eilenberg–Moore* 范畴 。我们将其记为 $\mathscr{C}^T$。

我们对 Eilenberg–Moore 范畴的记号已赋予它某种“终端”特质；参见注 2.23。

的 Eilenberg–Moore 范畴 T 也常称为 T-代数范畴，或者按照例如 [BV07], 的说法，称为模范畴（定义在 T 上）。这三种称谓我们交替使用。

单子与其 Eilenberg–Moore 范畴密切相关。

例 2.14。有一个2-范畴 $\mathbb{M}$，其对象为($\mathbb{C}$上的) 单子构成的 $\mathbb{C}$范畴， [Str72，§ 1]。包含 2-函子将一个范畴映射为其恒等单子：

$$\mathbb{C}\mathrm{at} \longrightarrow \mathbb{M}\mathrm{on}(\mathbb{C}\mathrm{at}), \qquad \mathscr{C} \longmapsto (\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}, \mathrm{id}_{\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}}, \mathrm{id}_{\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}}).$$

根据假设， $\mathbb{C}\mathrm{at}$ 具有代数构造：存在上述函子的一个右伴随函子：

$$\mathbb{M}\mathrm{on}(\mathbb{C}\mathrm{at}) \longrightarrow \mathbb{C}\mathrm{at}, \qquad (T\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}, \mu, \eta) \longmapsto \mathscr{C}^T,$$

其中， $\mathscr{C}^T \in \mathbb{C}\mathrm{at}$ 是 T的 Eilenberg–Moore 范畴。利用前述 2-伴随，可以证明，对于 $\mathscr{C}$ 上的每个单子（T， μ， η），都存在一个*Eilenberg–Moore* 伴随 F^T: $\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}^T$ 以及 $U^T\colon \mathscr{C}^T \longrightarrow \mathscr{C}$，使得

$$T = U^T F^T, \qquad \mu = F^T \varepsilon U^T, \qquad \eta = \eta,$$

其中， $\eta\colon 1_{\mathscr{C}} \Longrightarrow U^T F^T$和 $\varepsilon\colon F^T U^T \Longrightarrow 1_{\mathscr{C}^T}$分别是 Eilenberg–Moore 伴随的单位和余单位。我们分别称 F^T 和 U^T 为与 T相关联的自由函子和遗忘函子。

对于以下定义，我们遵循 [BV07；TV17]。

定义 2.15. 设 T 和 S 是范畴 $\mathscr{C}$上的两个单子。T 和 S 之间的单子态射 是一个自然变换 $f\colon T \Longrightarrow S$，使得下列图表交换。

(2.2.1)

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Id} & \xrightarrow{\eta^T} & T \\ & \searrow^{\eta^S} & \downarrow f \\ & & S \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccccc} TT & \xrightarrow{Tf} & TS & \xrightarrow{fS} & SS \\ \downarrow{\scriptstyle \mu^T} & & & & \downarrow{\scriptstyle \mu^S} \\ T & & \xrightarrow[f]{} & & S \end{array}$$

注 2.16。定义2.15 中的术语略有些非标准。我们所称的单子态射，通常称为 *oplax* （或 colax）单子态射，参见例如 [Str72，§ 1]。

注 2.17. 通过考虑 (C, t, η, μ)，可以在任意双范畴 $\mathbb{B}$ 中定义一个单子，其中 $C \in \mathbb{B}$ 是一个对象，$t\colon C \longrightarrow C$ 是一个 1-胞腔，而 $\eta\colon \mathrm{Id}_C \Longrightarrow t$ 和 $\mu\colon tt \Longrightarrow t$ 是 2-胞，并满足类似于定义 2.9 的关系。从 (C, t, η^t, μ^t) 到 (D, s, η^s, μ^s) 的单子的反松态射由一个 1-胞腔 $u\colon C \longrightarrow D$ 和一个 2-胞 $\phi\colon ut \Longrightarrow su$ 组成，并满足类似于图表 (2.2.1) 中恒等式的条件。单子的松态射则由一个 1-胞腔 $u\colon C \longrightarrow D$ 和一个 2-胞 $\phi\colon su \Longrightarrow ut$组成，并满足类似的性质。

下面的例子为这一术语提供了进一步的说明。

例 2.18. 单子也可以定义为从终2-范畴 $\heartsuit$ 到 $\mathbb{C}\mathrm{at}$ 的懒函子——其含义见定义 2.5。展开这一定义，一个松函子 $\mathfrak{T}\colon \heartsuit \longrightarrow \mathbb{C}\mathrm{at}$ 由以下部分组成：

- 一个对象指派 $\mathfrak{T}\colon \mathrm{Ob}\,\heartsuit \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathbb{C}\mathrm{at}$，将唯一对象 $*$映到一个范畴 $\mathscr{C}$;
- 一个函子 $\mathfrak{T}(*,*) : \heartsuit(*,*) \longrightarrow \mathbb{C}\mathrm{at}(\mathscr{C}, \mathscr{C})$，它从终1-范畴 $\heartsuit(*,*)$ 映到 $\mathscr{C}$ 上的自函子范畴，将唯一的 1- 态射 $\mathrm{id}_*\colon * \longrightarrow *$ 映到 $T\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$，并将唯一的 2-态射$1_{\mathrm{id}_*}\colon \mathrm{id}_* \Longrightarrow \mathrm{id}_*$ 映到恒等自然变换 $T \Longrightarrow T$;
- 一个 2-胞 $\mathfrak{T}_2 : \mathfrak{T}\mathrm{id}_* \otimes \mathfrak{T}\mathrm{id}_* \Longrightarrow \mathfrak{T}\mathrm{id}_*$，我们将其记作 $\mu\colon TT \Longrightarrow T$；并且
- 一个 2-胞 $\mathfrak{T}_0 : 1_{\mathfrak{T}(*)} \Longrightarrow \mathfrak{T}\mathrm{id}_*$，我们将其记作 $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \Longrightarrow T$。

回顾一下，$\otimes$ 是 $\mathbb{B}$ 中的水平复合。

定义 2.5 中关于 $\mathfrak{T}_2$ 和 $\mathfrak{T}_0$ 的性质转化为 μ 和 η的结合律和单位性。在此情形下，单子态射成为定义 2.6意义下的反松变换。

例 2.19。 集合范畴 $\mathscr{C}$ 上的单子 T 还关联着另一个典范范畴：其 *Kleisli* 范畴 $\mathscr{C}_T$。在对象上，它定义为 $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}_T) \mathrel{..}= \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$，而对于 $x, y \in \mathscr{C}_T$，有 $\mathscr{C}_T(x, y) \mathrel{..}= \mathscr{C}(x, Ty)$。复合定义为

$$\circ\colon \mathscr{C}_T(y,z) \times \mathscr{C}_T(x,y) \longrightarrow \mathscr{C}_T(x,z)$$
$$(g, f) \longmapsto \left(x \xrightarrow{f} Ty \xrightarrow{Tg} T^2 z \xrightarrow{\mu_z} Tz\right).$$

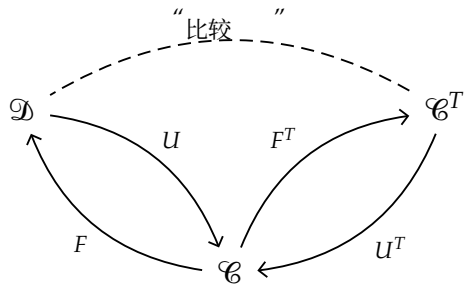
命题 2.20. 设 T 是范畴 $\mathscr{C}$上的一个单子。存在一个伴随

$$\mathscr{C} \underset{U_T}{\overset{F_T}{\rightleftarrows}} \mathscr{C}_T$$

其中 F_T 在对象上为恒等态射，并将 $f \in \mathscr{C}(x, y)$ 映到 $\eta_y \circ f$，且 U_T 将 x 映到Tx，并将 $f \in \mathscr{C}(x, y)$ 映到 $\mu_y \circ Tf$。

2.2.1 比较函子

给定由伴随 $F\colon \mathscr{C} \rightleftarrows \mathscr{D}\colon U$ 导出的单子 T，我们可以问函子 F 与 U 与 T 的自由函子和遗忘函子 $F^T\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}^T$ 以及 $U^T\colon \mathscr{C}^T \longrightarrow \mathscr{C}$ “相差”多少。大致概括而言，我们关注如下内容：



命题 2.21 ([Fre69，定理 2])。设 T 和 S 是范畴 $\mathscr{C}$上的单子。那么，从 T 到 S 的单子态射与函子$F\colon \mathscr{C}^S \longrightarrow \mathscr{C}^T$之间存在一个双射，这些函子作用于它们的代数范畴之间，并且满足 $U^T F = U^S$。

请注意，如果我们将单子态射定义为宽松变换，那么命题 2.21 将给出一个协变对应。

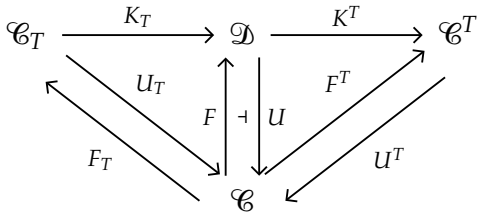
引理 2.22 ([Str72，定理 3])。设 $F\colon \mathscr{C} \rightleftarrows \mathscr{D}\colon U$是一个伴随，并令 $T ..= UF$。存在唯一的函子 $K^T\colon \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}^T$满足 $K^T F = F^T$和$U^T K^T = U$。对于所有 $d \in \mathscr{D}$，其在对象上的定义为 $K^T d = (Ud, U\varepsilon_d)$。

我们称引理 2.22 中的唯一函子为比较函子。如果一个伴随的比较函子是等价，则称该伴随是单子性的。

对于单子的 Kleisli 范畴，也有一个类似于引理 2.22 的版本 T。在这种情况下，比较函子由下式给出

$$K_T\colon \mathscr{C}_T \longrightarrow \mathscr{D}, \qquad x \longmapsto Fx, \qquad f \in \mathscr{D}(x, Ty) \longmapsto \varepsilon_{Fy} \circ Ff.$$

注 2.23. 事实上，Eilenberg–Moore 范畴和 Kleisli 范畴分别是适当定义的伴随范畴中的终端对象和始对象$F\colon \mathscr{C} \rightleftarrows \mathscr{D}\colon U$它们产生单子 T。因此，图表



是交换的，而其交换性完全刻画了 K^T 和 K_T。

复合 $K^T \circ K_T$ 是全忠实的，其满像由自由模构成。我们将 $\mathscr{C}_T$ 到 $\mathscr{C}^T$ 的典范包含记为

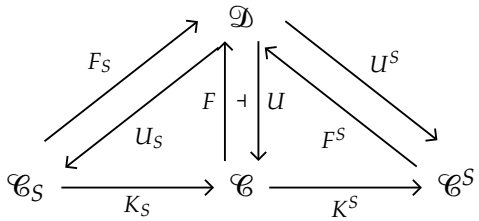
$$\iota\colon \mathscr{C}_T \hookrightarrow \mathscr{C}^T, \qquad x \longmapsto (Tx, \mu_x), \qquad f \in \mathscr{C}(x, Ty) \longmapsto \mu_y \circ Tf. \tag{2.2.2}$$

例 2.24。一个余单子在一个范畴上 $\mathscr{C}$ 由一个自函子组成 S 在$\mathscr{C}$以及自然变换组成 $\Delta\colon S \Longrightarrow S^2$和 $\varepsilon\colon S \Longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$，并满足与定义2.9对偶的公理。

对于余单子 S 在 $\mathscr{C}$ 上的一个 S-余模 或 S-余代数 是一个对象 $x \in \mathscr{C}$ 以及一个态射 $x \longrightarrow Sx$，满足类似于定义2.12的公理。我们将 S-余模范畴记为 $\mathscr{C}^S$，并将 S 的 Kleisli 范畴记为 $\mathscr{C}_S$。它们也有类似定义的伴随

$$\mathscr{C}_S \underset{U_S}{\overset{F_S}{\rightleftarrows}} \mathscr{C} \qquad \text{and} \qquad \mathscr{C}^S \underset{U^S}{\overset{F^S}{\rightleftarrows}} \mathscr{C}.$$

余单子$S \mathrel{..=} FU$ 对应的 Eilenberg–Moore 范畴和 Kleisli 范畴分别可刻画为终端对象和始对象。这给出了函子 K_S 和 K^S，使得下图交换



与例 2.11 类似，给定一个伴随 $F\colon \mathscr{C} \rightleftarrows \mathscr{D} : U$，我们得到一个余单子 FU，其作用于 $\mathscr{D}$。

单子 T 在 $\mathscr{C}$ 上可能有一个右伴随函子 G——在这种情况下，可以自动为 G 赋予典范的余单子结构。

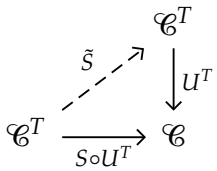
命题2.25 ([MLM92，定理V.8。2])。若 T 是范畴 $\mathscr{C}$ 上的一个单子，且G 是 T的右伴随函子，则 G 是一个余单子，并且 *Eilenberg–Moore* 范畴之间存在典范同构：$\mathscr{C}^T \cong \mathscr{C}^G$。

命题 2.26 ([Kle90，定理 3])。若 T 是 $\mathscr{C}$ 上的一个单子，且 S 是 T的左伴随函子，则 S 是一个余单子，并且存在典范同构 $\mathscr{C}_T \cong \mathscr{C}_S$。

一般来说，在命题 $\mathscr{C}^T \cong \mathscr{C}^S$ 2.26 所述的情形下，这种说法并不成立。

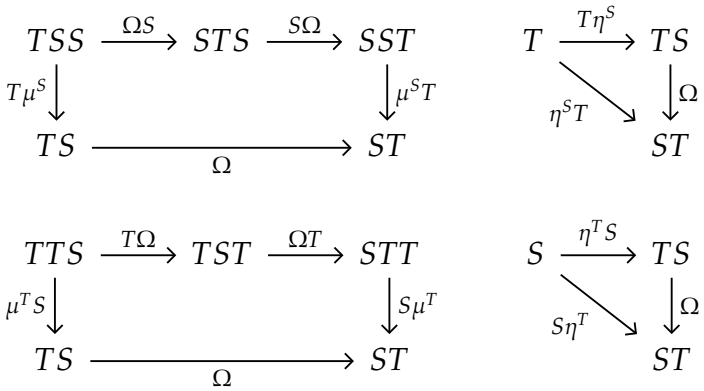
2.2.2 分配律

Beck 分配律理论探讨的问题是：给定一个定义在范畴 T 上的单子 $\mathscr{C}$，何时函子 $S\colon\ \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ 可以提升为定义在 T的 Eilenberg–Moore 范畴上的函子 [贝克69]。也就是说，存在某个 $\tilde{S}\colon\ \mathscr{C}^T \longrightarrow \mathscr{C}^T$，满足提升条件



如果 S 是一个单子，那么这又等价于 ST 本身是一个单子。因此，分配律为两个单子的可复合性提供了见证。Street 进一步发展了内蕴于某些性质良好的双范畴中的分配律理论，参见 [Str72]。

定义 2.27。设 T 和 S 是范畴 $\mathscr{C}$上的两个单子。一个分配律从 T 到 S 由一个自然变换 $\Omega\colon\ TS \Longrightarrow ST$ 构成，使得下列图表可交换：



类似地，可以定义两个余单子之间的分配律，以及单子与余单子之间的混合分配律。

定理 2.28 ([Bec69])。设 S 和 T 是范畴 $\mathscr{C}$上的单子。则下列条件等价：

(i) T 在 S上的分配律；*(ii)* $S \circ_\Omega T ..= (ST、\ \mu、\ \eta)$ 在 ST上的单子结构，使得 $S\eta^T$ 和 $\eta^S T$ 是单子态射，且 $1_{ST} = \mu\circ\ S\eta^T\eta^T T$；以及

(iii) 将 S 提升到 T的*Eilenberg–Moore* 范畴，且 S 在 $\mathscr{C}^T$上是一个单子 .

证明概要。我们概述主要构造。

给定两个定义在 $\mathscr{C}$ 上的单子之间的分配律 $\Omega\colon TS \Longrightarrow ST$， ST 上的单子结构由下式给出

$$\mu\colon STST \xrightarrow{S\Omega T} SSTT \xrightarrow{\mu^S\mu^T} ST \qquad \text{and} \qquad \eta\colon \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \xrightarrow{\eta^T} T \xrightarrow{\eta^S T} ST.$$

S 到 $\mathscr{C}^T$ 的提升 $\tilde{S}$ 定义为 $\tilde{S}(x,\ \nabla_x) \mathrel{..=} (Sx,\ TSx \xrightarrow{\Omega_x} STx \xrightarrow{S\nabla_x} Sx)$。其乘法和单位由 S 的乘法和单位给出。

给定单子结构 $(ST,\ \mu,\ \eta)$，可按下式定义一个分配律

$$TS \xrightarrow{\eta^S TS\eta^T} STST \xrightarrow{\mu} ST.$$

˜最后，若 S 是 S 的提升，则可通过下式得到一个分配律

$$TS \xrightarrow{TS\eta^T} TSU^TF^T = U^TF^TU^T\tilde{S}F^T \xrightarrow{U^T\varepsilon^T\tilde{S}F^T} U^T\tilde{S}F^T = ST. \qquad \square$$

2.3 弦图

回顾例 2.2 ， $\mathbb{C}\mathrm{at}$ 是由所有（小）范畴、函子和自然变换构成的 2-范畴。我们用并置表示 $\mathbb{C}\mathrm{at}$ 的水平复合；或者，若要强调复合的方向，

$$- \odot = \colon \mathbb{C}\mathrm{at}(\mathscr{B},\mathscr{C}) \times \mathbb{C}\mathrm{at}(\mathscr{A},\mathscr{B}) \longrightarrow \mathbb{C}\mathrm{at}(\mathscr{A},\mathscr{C}), \qquad \mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C} \in \mathbb{C}\mathrm{at}.$$

弦图将作为一种重要工具，用于进行计算。

对于 $\mathbb{C}$的情形，弦图由标记了范畴的区域、标记了函子的弦，以及位于弦之间并标记了自然变换的顶点构成。如果两个弦图可以相互变换——也就是说，如果它们是同痕的——那么它们所表示的自然变换相等。更详细的描述见 [JS91；Sel11]。我们的约定是从下往上、从右往左阅读图表。水平复合和垂直复合分别通过图表的水平拼接和垂直拼接给出。恒等自然变换用未标记的顶点表示。范畴的恒等函子的边不予绘出。如果上下文已明确涉及哪些范畴，我们就省略显式写出它们。图2.1 详细说明了我们的约定。

更一般地，我们对图形演算的应用可以在任何允许按照例 2.14 的含义构造代数的双范畴中表述。为便于表示，我们将沿用$\mathbb{C}\mathrm{at}$。

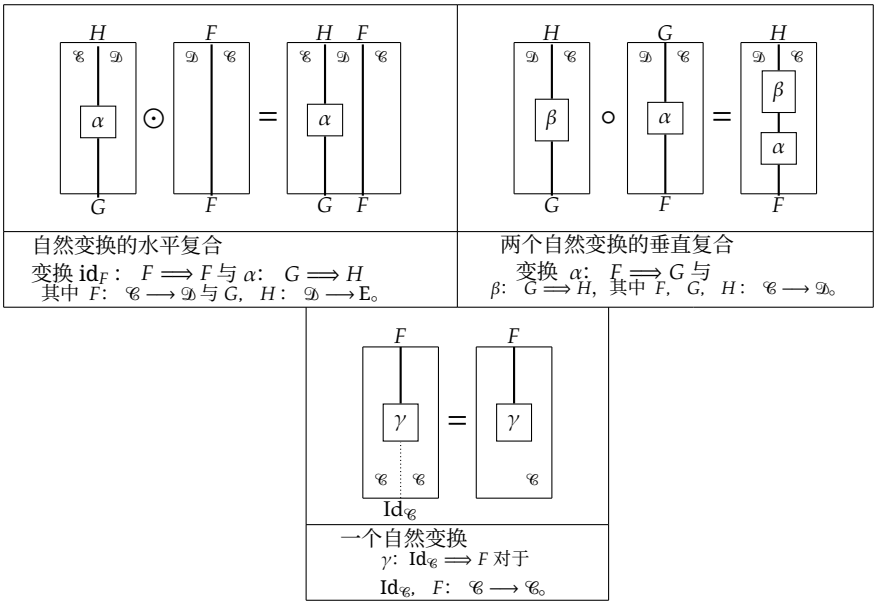
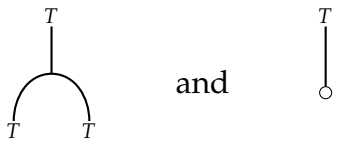
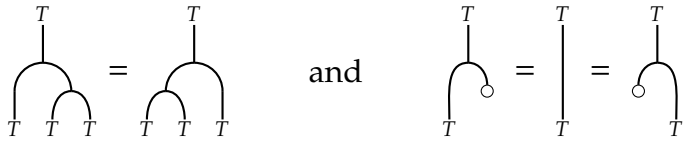


图2.1：基本弦图约定。

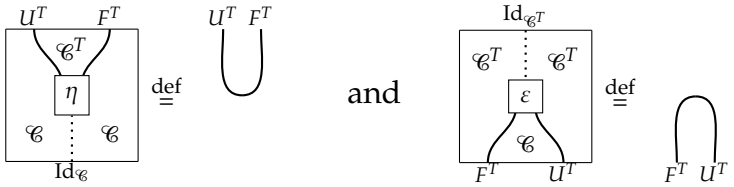
例 2.29。设 T 是 $\mathscr{C}$上的一个单子。我们用弦图表示 T 的乘法和单位：



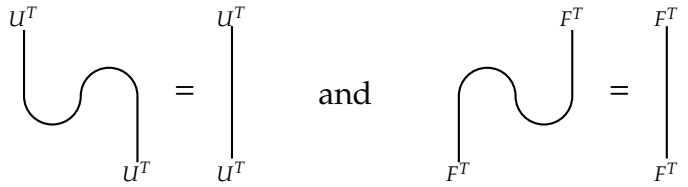
它们的结合律和单位性因此等同于



我们将 Eilenberg–Moore 伴随的单位和余单位表示为



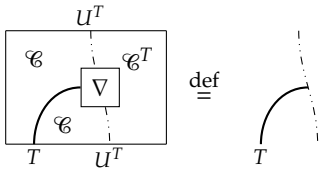
伴随的定义方程可转化为蛇形方程



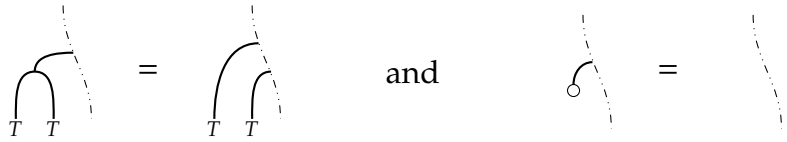
注 2.30。 给定一个单子 T，其代数范畴可以纳入图形演算，参见 [Wil08]。定义自然变换

$$\nabla\colon TU^T = U^T F^T U^T \xrightarrow{U^T\varepsilon} U^T. \tag{2.3.1}$$

现在，我们可以写成



由于这些恒等，我们将 $\nabla\colon TU^T \longrightarrow U^T$ 视为 T 在 U^T 上的作用



滥用记号时，我们常常只简单地说对象 $x \in \mathcal{C}^T$，而将作用 ∇_x 留作隐含。

2.4 幺半群范畴与模范畴

关于更详尽的论述，涉及幺半群范畴与模范畴的概念，我们请读者参阅 [EGNO15，第 2]章。

定义 2.31. 一个幺半范畴由一个范畴 $\mathcal{C}$ 以及一个张量积 函子 $\otimes$: $\mathcal{C}\times\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$、一个单位 $1 \in \mathcal{C}$，以及对所有 $x, y, z \in \mathcal{C}$ 的自然同构组成

$$\alpha_{x,y,z}\colon (x\otimes y)\otimes z \xrightarrow{\sim} x\otimes(y\otimes z), \qquad \lambda_x\colon 1\otimes x \xrightarrow{\sim} x, \qquad \rho_x\colon x\otimes 1 \xrightarrow{\sim} x,$$

满足 相干性公理；参见 [EGNO15，定义 2.1。1]。

若 α、λ 与 ρ 均为恒等，则称幺半范畴为严格 的。

例 2.32. 给定幺半范畴 $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$，我们用 $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$ 表示幺半范畴 $(\mathcal{C}, \otimes^{\mathrm{op}}, 1)$，其中对所有 $x, y \in \mathcal{C}$，令 $x \otimes^{\mathrm{op}} y \coloneqq y \otimes x$。

回顾斯威德勒记号：若 B 是Vect 中的双代数，其余乘法为$\Delta\colon B \longrightarrow B\otimes_{\Bbbk} B$，则对 $b \in B$ 我们记 $b_{(1)}\otimes b_{(2)} \coloneqq \Delta(b) \in B\otimes_{\Bbbk} B$。例如，在此记号下，余结合性可表述为

$$b_{(1)}\otimes (b_{(2)})_{(1)}\otimes (b_{(2)})_{(2)} = b_{(1)}\otimes b_{(2)}\otimes b_{(3)} = (b_{(1)})_{(1)}\otimes (b_{(1)})_{(2)}\otimes b_{(2)}.$$

这自然推广为 B 上的左余作用和右余作用，分别记作 $x \longmapsto x_{(-1)}\otimes x_{(0)}$ 和 $x \longmapsto x_{(0)}\otimes x_{(1)}$。

例 2.33 ([Yet90])。 设 $H \in \mathsf{Vect}$ 是一个双代数。范畴 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 由（左-左）*Yetter–Drinfeld* 模 构成，定义为那些 $Y \in \mathsf{Vect}$的范畴：它们是带有作用 $\triangleright$ 的左 H-模，同时也是带有余作用$y \longmapsto y_{(-1)} \otimes y_{(0)}$的左 H-余模，并且对所有$h \in H$ 和 $y \in Y$ 都满足以下相容条件：

$$h_{(1)}y_{(-1)} \otimes (h_{(2)} \triangleright y_{(0)}) = (h_{(1)} \triangleright y)_{(-1)}h_{(2)} \otimes (h_{(1)} \triangleright y)_{(0)} \tag{2.4.1}$$

于是 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 是幺半的：给定 Yetter–Drinfeld 模 Y 与 Z，它们的张量积 $Y \otimes_{\Bbbk} Z$ 可以配备 Yetter–Drinfeld 模的结构。对所有$h \in H$、 $y \in Y$与 $z \in Z$，定义

$$h \triangleright (y \otimes z) := (h_{(1)} \triangleright y) \otimes (h_{(2)} \triangleright z) \quad \text{and} \quad y \otimes z \longmapsto y_{(-1)}z_{(-1)} \otimes y_{(0)} \otimes z_{(0)}.$$

事实上，若 H 是具有可逆反极的霍普夫代数 S——例如，当 H 为有限维时——则方程（2.4.1）等价于

$$(h \triangleright y)_{(-1)} \otimes (h \triangleright y)_{(0)} = h_{(1)}y_{(-1)}S(h_{(3)}) \otimes (h_{(2)} \triangleright y_{(0)}), \tag{2.4.2}$$

参见 [Mon93，命题 10.6。16]。

定义 2.34. 一个松幺半函子（在幺半范畴 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$之间）由函子 $F\colon\ \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ 以及态射 $F_0\colon\ 1 \longrightarrow F1$ 和一个自然变换 $F_2\colon\ F(-) \otimes F(=) \Longrightarrow F(-\otimes =)$ 组成，并满足结合律与单位性条件，参见 [EGNO15，定义 2.4。1]。

类似地，一个反松幺半函子是一个函子 $G\colon\ \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$，连同态射 $G_0\colon\ G1 \longrightarrow 1$ 和 $G_2\colon\ G(-\otimes =) \Longrightarrow G(-) \otimes G(=)$，使得$G^{\mathrm{op}}\colon\ \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ 成为松幺半函子。若 F 强幺半，则称其为 F_0 且 F_2 且可逆；若它们是恒等，则称其为严格幺半。

注意，具有可逆相干态射的反松幺半函子会规范地定义出一个强幺半函子。

注 2.35。 设T是幺半范畴$\mathcal{C}$上的一个反松幺半自函子。由 T_2的余结合性，存在一个良定义的自然变换

$$T_3\colon T(-\otimes =\otimes \equiv) \Longrightarrow T(-) \otimes T(=) \otimes T(\equiv),$$

对于所有 x， y， $z \in \mathcal{C}$，其分量为

$$T_{3;x,y,z} := (T_{2;x,y} \otimes Tz) \circ T_{2;x\otimes y,z} = (Tx \otimes T_{2;y,z}) \circ T_{2;x,y\otimes z}.$$

定义 2.36. 设 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 是两个幺半范畴，并假设 F， $G\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ 是两个松幺半函子。（松）幺半自然变换 是一个自然变换 $\varphi\colon F \Longrightarrow G$，满足对于所有 x， $y \in \mathscr{C}$，以下两个图表均可交换：

$$\begin{array}{ccc} Fx \otimes Fy & \xrightarrow{F_{2;x,y}} & F(x \otimes y) \\ {\scriptstyle \varphi_x \otimes \varphi_y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{x\otimes y}} \\ Gx \otimes Gy & \xrightarrow[G_{2;x,y}]{} & G(x \otimes y) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{F_0} & F1 \\ {\scriptstyle G_0}\downarrow & \swarrow_{\varphi_1} & \\ G1 & & \end{array}$$

对偶地，给定两个反强幺半函子 F， $G\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$，可将 余松幺半群自然变换 定义为一个箭头 $\varphi\colon F \Longrightarrow G$，使得对于所有 x， $y \in \mathscr{C}$，下列图表可交换：

$$\begin{array}{ccc} F(x \otimes y) & \xrightarrow{F_{2;x,y}} & Fx \otimes Fy \\ {\scriptstyle \varphi_{x\otimes y}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_x \otimes \varphi_y} \\ G(x \otimes y) & \xrightarrow[G_{2;x,y}]{} & Gx \otimes Gy \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F1 & \xrightarrow{F_0} & 1 \\ {\scriptstyle \varphi_1}\downarrow & \nearrow_{G_0} & \\ G1 & & \end{array}$$

定义 2.37。 若伴随 $F\colon \mathscr{C} \rightleftarrows \mathscr{D} : U$ 中的 F 和 U 是松幺半函子，且该伴随的单位与余单位是幺半自然变换，则称此伴随为松幺半群伴随 。

与定义 2.37 类似，可以定义余松幺半群伴随。

定义 2.38。 设 $F\colon \mathscr{C} \rightleftarrows \mathscr{D} : U$ 是幺半范畴之间的一个普通伴随。将 $F \dashv U$ 提升为松幺半群伴随 包括为 F 和 U 选择松幺半结构，并断言该伴随的单位与余单位是松幺半自然变换。换言之，这就是左伴随为 F、右伴随为 U 的松幺半群伴随所需的结构。

类似地，可以定义 $F \dashv U$ 到反强幺半伴随的提升。

注 2.39。 若强幺半函子同时还是范畴等价，则称其为幺半等价 。幺半等价 $F\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ 的拟逆 $F^{-1}\colon \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$仍是幺半函子，并且存在幺半自然同构 $F \circ F^{-1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$ 和 $F^{-1} \circ F \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$。

除非另有说明，本论文余下部分中的所有幺半范畴都假设为严格范畴。Mac Lane 的以下严格化 结果 为此提供了依据， [ML63], 另见 [EGNO15，定理 2.8。5]。

定理 2.40。 每个幺半范畴都幺半等价于某个严格幺半范畴。

定义 2.41。 幺半范畴 $\mathcal{C}$ 的一个（左） $\mathcal{C}$-模范畴由一个范畴 M、一个函子 $\triangleright\colon \mathcal{C}\times \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ 以及同构组成

$$\mathcal{M}_{\mathsf{a};x,y,m}\colon (x\otimes y)\triangleright m \xRightarrow{\sim} x\triangleright(y\triangleright m),$$

在 $m\in \mathrm{M}$ 和 x中自然， $y\in\mathcal{C}$满足 相干性公理，这些公理类似于幺半范畴的公理；参见 [EGNO15，定义 7.1。1]。

类似地，可以定义关于 $\mathcal{C}$的右模范畴，其中涉及一个函子 $\triangleleft\colon \mathrm{M}\times\mathcal{C}\longrightarrow \mathrm{M}$ 和同构 $m\triangleleft(x\otimes y)\xRightarrow{\sim}(x\triangleleft y)\triangleleft m$。为简便起见，我们有时只说“$\mathcal{C}$-模范畴”；这始终指“左 $\mathcal{C}$-模范畴”。

例 2.42 ([HKRS04])。 设 H 是一个具有可逆对极 S的霍普夫代数。回顾例 2.33 ，Yetter–Drinfeld 模的范畴 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 是一个幺半范畴。一个左-左反 *Yetter–Drinfeld* 模是某个 $M\in\mathsf{Vect}$，其上赋有左 H-模结构 $\triangleright$ 和左 H-余模结构$m\longmapsto m_{(-1)}\otimes m_{(0)}$ ，使得对所有$h\in H$ 和 $m\in M$，以下条件成立：

请注意，与公式（2.4.2）的唯一差别在于，我们使用 S^{-1}而不是 S。

$$(h\triangleright m)_{(-1)}\otimes(h\triangleright m)_{(0)}=h_{(1)}m_{(-1)}S^{-1}(h_{(3)})\otimes(h_{(2)}\triangleright m_{(0)})$$

反 Yetter–Drinfeld 模范畴并不构成幺半范畴，而是 Yetter–Drinfeld 模上的一个 $\mathcal{C}$-模范畴。给定 $M\in{}^H_H$一个$\mathcal{YD}$和 $Y\in{}^H_H\mathcal{YD}$，定义 $Y\triangleright M\in{}^H_H$一个$\mathcal{YD}$为向量空间$Y\otimes_{\Bbbk} M$，并赋予如下作用和余作用：

$$h\triangleright(y\otimes m):=(h_{(1)}\triangleright y)\otimes(h_{(2)}\triangleright m),\qquad y\otimes m\longmapsto y_{(-1)}m_{(-1)}\otimes y_{(0)}\otimes m_{(0)}.$$

定义 2.43。 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 为幺半范畴。一个（$\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$）-双模范畴 由一个左 $\mathcal{C}$-模范畴 M 构成，同时它也是一个右$\mathcal{D}$-模范畴，使得存在一个自然同构

$$(x\triangleright m)\triangleleft y\xRightarrow{\sim} x\triangleright(m\triangleleft y),$$

对所有 $x\in\mathcal{C}$， $y\in\mathcal{D}$以及 $m\in \mathrm{M}$，称为中间交换，它满足适当的结合律约束；参见 [EGNO15，定义 7.1。7]。

例 2.44. 每个幺半范畴 $\mathcal{C}$ 都是一个 $(\mathcal{C},\ \mathcal{C})$-双模范畴，其两个作用均由 $\mathcal{C}$的张量积给出。我们将此模范畴称为正则双模，并记为 ${}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}_{\mathcal{C}}$。类似地，可以定义左正则与右正则 $\mathcal{C}$-模范畴 ${}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}_{\mathcal{C}}$。

例 2.45。 设 $\mathcal{C}$ 是一个幺半范畴。正则作用并非我们考虑 $\mathcal{C}$ 作为其自身上的双模的唯一方式。设$R\colon\ \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ 是一个强幺半函子。作用

$$\triangleleft\colon \mathcal{C}\times\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}\times R} \mathcal{C}\times\mathcal{C} \xrightarrow{\otimes} \mathcal{C}$$

赋予 $\mathcal{C}$ 自身上的右模范畴结构，我们将其记作 $\mathcal{C}_R$。换言之，我们有

$$x \triangleright y := Rx \otimes y, \qquad f \triangleright g := Rf \otimes g,$$

对于 $v,\ w,\ x,\ y \in \mathcal{C}$ 以及 $f\colon\ v \longrightarrow w,\ g\colon\ x \longrightarrow y$。

我们还可以用另一个幺半函子L从左侧扭转作用。以这种方式得到的扭转双模记作 ${}_L\mathcal{C}_R$。

注 2.46。 不难想象一个比例 2.45 更复杂的情形：从左侧用一个 oplax 幺半函子扭转 $L\colon\ \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$，从右侧用一个松幺半函子 R 扭转。在这种情形下，${}_L\mathcal{C}_R$ 是一个左松右 oplax $\mathcal{C}$-双模范畴，参见例如 [Szl12，第 2]节。由于本论文的大部分内容只讨论强情形，因此我们不再对这一情形作更形式化的处理；不过，参见注记 6.13。

定义 2.47。 设 M 和 $\mathcal{N}$ 是幺半范畴 $\mathcal{C}$上的左模范畴。从 M 到 $\mathcal{N}$ 的一个宽松 $\mathcal{C}$-模函子是一个函子 $F\colon \mathrm{M} \longrightarrow \mathcal{N}$，并配有一组态射

$$F_{\mathsf{a};x,m}\colon x \triangleright Fm \longrightarrow F(x \triangleright m), \qquad \text{natural for all } x \in \mathcal{C} \text{ and } m \in \mathcal{M},$$

满足结合律和单位性条件，见 [EGNO15，定义 7.2。1] .

反宽松和强 $\mathcal{C}$-模函子类似地定义；在前一种情形中，考虑态射 $F_{\mathsf{a};x,\ m}\colon F(x \triangleright m) \longrightarrow x \triangleright Fm$，而在后一种情形中，$F_{\mathsf{a}}$应当是可逆的。

定义 2.48。 设 $F,\ G\colon\ \mathrm{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ 是左$\mathcal{C}$-模范畴 M 与 $\mathcal{N}$之间的 $\mathcal{C}$-模函子。若自然变换 $\phi\colon\ F \Longrightarrow G$ 称为 $\mathcal{C}$-模变换，则

$$G_{\mathsf{a};x,m} \circ (\phi_x \triangleright m) = \phi_{x \triangleright m} \circ F_{\mathsf{a};x,m}, \qquad \text{for all } x \in \mathcal{C} \text{ and } m \in \mathcal{M}.$$

记号 2.49。 对于 $\mathscr{C}$-模范畴 M 和 $\mathcal{N}$，我们得到以下 $\mathscr{C}$-模函子范畴：

- $\mathscr{C}\mathrm{Mod}(\mathrm{M},\ \mathcal{N}) ..= \mathrm{Str}\mathscr{C}\mathrm{Mod}(\mathrm{M},\ \mathcal{N})$：从 M 到 $\mathcal{N}$ 的强 $\mathscr{C}$-模函子，
- $\mathrm{Lax}\mathscr{C}\mathrm{Mod}(\mathrm{M},\ \mathcal{N})$：从 M 到 $\mathcal{N}$ 的宽松 $\mathscr{C}$-模函子，
- $\mathrm{Oplax}\mathscr{C}\mathrm{Mod}(\mathrm{M},\ \mathcal{N})$：从 M 到 $\mathcal{N}$ 的余宽松 $\mathscr{C}$-模函子。

例 2.50。 对于对象 x 是一个（非严格）幺半范畴 $\mathscr{C}$，函子 $F ..= - \otimes x$ 是一个强左 $\mathscr{C}$-模函子。变换 F_{a} 由 $\mathscr{C}$ 的结合子给出。此外，$\mathscr{C}$ 中的一个态射 $f\colon\ x \longrightarrow y$ 诱导出一个 $\mathscr{C}$-模变换 $- \otimes f\colon\ - \otimes x \Longrightarrow - \otimes y$。

事实上，例 2.50 推广并完整描述了来自正则模的模函子。我们强调，这一结果是双范畴 Yoneda 引理的推论，见 [JY21，引理 8.3。16]。

命题 2.51。 设 M 是幺半范畴 $\mathscr{C}$ 上的左模范畴。那么存在一个模范畴等价

$$\mathrm{Str}\mathscr{C}\mathrm{Mod}(\mathscr{C}, \mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}, \qquad F \longmapsto F1, \qquad - \triangleright m \longmapsto m.$$

特别地，这给出一个幺半等价$\mathrm{Str}\mathscr{C}$模 $\simeq \mathscr{C}^{\mathrm{rev}}$。

2.4.1 编织

编织是联系张量积与其对偶范畴的自然变换。它们由 Joyal 和 Street 在 [JS85；JS86；JS93],中引入，并以 [ML63；EK66] 中研究的对称结构概念为基础。

定义 2.52。 幺半范畴 $\mathscr{C}$ 上的一个编织是一个自然同构$\sigma_{-,\ =}\colon\ - \otimes = \Longrightarrow = \otimes -$，满足 $\sigma_{x,\ 1} = \mathrm{id}_x$ 以及六边形公理[2]。

二元组（$\mathscr{C}, \sigma$）将被称为辫子幺半范畴。

[2] “六边形公理”这一名称源于这样一个事实：在非严格情形下，定义方程可以组织成一个六边形图，参见 [JS93]。

注记 2.53. 对于编织 σ，条件 $\sigma_{x,1} = \mathrm{id}_x$ 实际上由六边形恒等式所蕴含：该计算

$$\sigma_{x,1} = \sigma_{x,1\otimes 1} = (\mathrm{id}_1 \otimes \sigma_{x,1}) \circ (\sigma_{x,1} \otimes \mathrm{id}_1) = \sigma_{x,1} \circ \sigma_{x,1}$$

这表明 $\sigma_{x,1}$ 是一个可逆幂等元，因此结论得证。

例 2.54 ([Yet90，定理 7。2])。例2.33 中的左-左 Yetter–Drinfeld 模范畴在配备

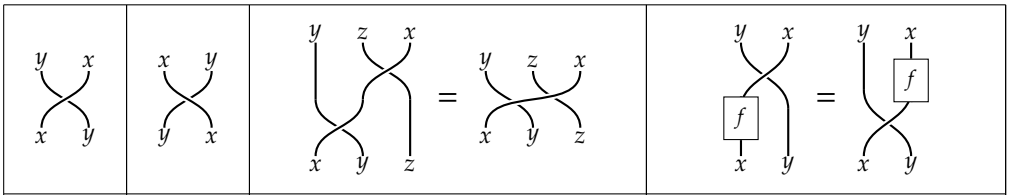
$$\sigma := \{\, \sigma_{Y,Z} : Y \otimes Z \longrightarrow Z \otimes Y,\quad y \otimes z \longmapsto (y_{(-1)} \triangleright z) \otimes y_{(0)} \,\}_{Y,Z \in {}^H_H\mathcal{YD}},$$

称为*Yetter–Drinfeld* 编织。注意，σ 是可逆的，因为 H 具有可逆反极。其逆元对所有 $YZ \in {}^H_H\mathcal{YD}$ 由下式给出

$$\sigma^{-1} := \{\, \sigma^{-1}_{Y,Z} : Z \otimes Y \longrightarrow Y \otimes Y,\quad z \otimes y \longmapsto y_{(0)} \otimes (S^{-1}(y_{(-1)}) \triangleright z) \,\}_{Y,Z \in {}^H_H\mathcal{YD}}.$$

定义 2.55. 幺半范畴 $\mathcal{C}$ 上的编织 σ 称为对称的，若对所有 $x, y \in \mathcal{C}$，都有 $\sigma^{-1}_{x,y} = \sigma_{y,x}$。装备了对称编织的幺半范畴称为对称幺半群范畴。

在图形演算中，编织用弦的交叉表示，并满足类似 Reidemeister 的恒等式，参见 [Sel11]。下图展示了一个编织、其逆元、六边形恒等式，以及编织在其第一个自变量上的自然性：



$\sigma_{x,y}$	$\sigma^{-1}_{x,y}$	$(\mathrm{id}_y \otimes \sigma_{x,z}) \circ (\sigma_{x,y} \otimes \mathrm{id}_z) = \sigma_{x,y\otimes z}$	$\sigma_{w,y} \circ (f \otimes \mathrm{id}_y) = (y \otimes f) \circ \sigma_{x,y}$

2.4.2 闭性

定义 2.56。设 $\mathcal{C}$ 是一个幺半范畴。模范畴 M 中的对象 m 称为闭合，如果函子 $- \triangleright m \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{M}$ 有一个右伴随 $\lfloor m, - \rfloor \colon \mathrm{M} \longrightarrow \mathcal{C}$，称为内 *Hom* 从 m。我们将其称为

$$- \triangleright m : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{M} : \lfloor m, - \rfloor$$

为内张量-*Hom* 伴随。

与定义 2.56 类似，若函子 $- \triangleright m \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{M}$ 存在左伴随，则称对象 $m \in \mathrm{M}$ 为余闭；我们将这个从 m 到 $\lceil m, - \rceil \colon \mathrm{M} \longrightarrow \mathcal{C}$ 的内余 Hom 记作，并称 $\lceil m, - \rceil \colon \mathrm{M} \rightleftarrows \mathcal{C} : - \triangleright m$ 为内余 Hom-张量伴随。若 M 中的每个对象都是闭合的，则称 M 为闭合的 $\mathcal{C}$-模范畴。

定义 2.57。若幺半范畴 $\mathscr{C}$ 的左正则$\mathscr{C}$-模范畴 ${}_{\mathscr{C}}\mathscr{C}$ 是闭合的，则称其为左闭；若其右正则 $\mathscr{C}$-模范畴 $\mathscr{C}_{\mathscr{C}}$ 是闭合的，则称其为右闭；若左右均闭，则称其为闭合或双闭。

在这些情形下，我们分别用 $[x,-]_\ell$ 和 $[x,-]_r$ 表示 $\lfloor x,\ -\rfloor$。

例2.58. 一个对称幺半群范畴是左闭的，当且仅当它是右闭的，当且仅当它是闭合的。

闭合 $\mathscr{C}$-模范畴的逐对象张量-Hom伴随唯一确定一个函子 $\lfloor -,\ =\rfloor\colon \mathrm{M}^{\mathrm{op}}\times\mathrm{M}\longrightarrow\mathscr{C}$，使得我们有

$$\mathscr{M}(c\triangleright m,n)\cong\mathscr{C}(c,\lfloor m,n\rfloor),$$

对全部三个变量都是自然的，参见 [ML98，第iv节。7] 关于幺半情形 .

例2.59. 对于右闭幺半范畴的任意对象 $x\in\mathscr{C}$，单位与余单位的一种组合

$$\eta_y^{(x)}\colon y\longrightarrow[x,x\otimes y]_r,\qquad \varepsilon_y^{(x)}\colon x\otimes[x,y]_r\longrightarrow y,\qquad \text{for all } y\in\mathscr{C}$$

导出该态射

$$\phi_y^{(x)}:=[x,1]_r\otimes y\xrightarrow{\eta^{(x)}_{[x,1]_r\otimes y}}[x,x\otimes[x,1]_r\otimes y]_r\xrightarrow{[x,\varepsilon_1^{(x)}\otimes y]}[x,y]_r. \tag{2.4.3}$$

2.4.3 刚性与枢纽性

刚性幺半范畴也称为自治，或在对称的情形下称为紧闭。

刚性在幺半范畴的语境中，它指一种类似于有限维向量空间的对偶概念。重要的是，对偶基和求值等概念在此设定中都有其对应物。

枢轴范畴——也称为平衡或主权范畴——是指那些存在对象与其双对偶之间、且与张量积相容的等同的范畴。

根据公式（2.4.3），可知存在一个典范态射

$$\Phi_y^{(x)}\colon[x,1]_r\otimes y\longrightarrow[x,y]_r$$

对所有对象 $x,\ y$ 在右闭幺半范畴 $\mathscr{C}$中。接下来的结果将此态射的可逆性与 $\mathscr{C}$ 具有刚性幺半结构的条件联系起来；例如参见 [Kel72],和 [NW17，命题 21]，其中给出了简洁的证明。

命题 2.60。设 $\mathscr{C}$ 为一个幺半范畴。对于任意对象 $x \in \mathscr{C}$，以下陈述等价：

(i) x 的右内部 *Hom* 存在，并且对所有 $y \in \mathscr{C}$，典范箭头 $\phi_y^{(x)}$ 均可逆；

(ii) x 的右内部 *Hom* 存在，且 $\phi_x^{(x)}$：$[x,1]_r \otimes x \longrightarrow [x,x]_r$ 是一个同构；并且

(iii) 存在一个对象 $x^\vee \in \mathscr{C}$ 以及态射 评价$_x^r$：$x \otimes x^\vee \longrightarrow 1$和 余评价$_x^r$：$1 \longrightarrow x^\vee \otimes x$，满足蛇形恒等式

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_x &= (\mathrm{ev}_x^r \otimes \mathrm{id}_x) \circ (\mathrm{id}_x \otimes \mathrm{coev}_x^r), \\ \mathrm{id}_{x^\vee} &= (\mathrm{id}_{x^\vee} \otimes \mathrm{ev}_x^r) \circ (\mathrm{coev}_x^r \otimes \mathrm{id}_{x^\vee}). \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

定义 2.61。我们称 x 右（刚性）可对偶，如果满足命题 2.60 中的任一等价条件。在这种情况下，对于所有 $[x,y]_r \cong x^\vee \otimes y$都有 $x,\ y \in \mathscr{C}$特别是 $x^\vee \cong [x,1]_r$。对象 左（刚性）可对偶性 也可以类似地定义：要么要求典范态射 $x \in \mathscr{C}$ 可逆 $\psi_y^{(x)}$：$y \otimes [x,1]_\ell \longrightarrow [x,y]_\ell$，要么要求存在一个对象 ${}^\vee x \in \mathscr{C}$，配有态射 评价$_x^\ell$：${}^\vee x \otimes x \longrightarrow 1$ 和 余评价$_x^\ell$：$1 \longrightarrow x \otimes {}^\vee x$，并满足适当变体的蛇形恒等式。

在上下文足以明确所选对象时，为了简洁起见，我们省略（余）评价态射的左、右上标。若 y 是 x 的左对偶，因而 x 是 y 的右对偶，则对 $(y, x, \mathrm{ev}, \mathrm{coev})$ 这一对称为对偶对。

定义 2.62。若幺半范畴 $\mathscr{C}$ 中的每个对象都可左（右）对偶，则称该范畴左（右）刚性；若它既左刚性又右刚性，则称其为刚性。

我们将刚性范畴 $\mathscr{C}$ 的左、右对偶化函子记为

$${}^\vee(-) \cong [-,1]_\ell : \mathscr{C}^{\mathrm{op,rev}} \longrightarrow \mathscr{C} \qquad \text{and} \qquad (-)^\vee \cong [-,1]_r : \mathscr{C}^{\mathrm{op,rev}} \longrightarrow \mathscr{C}.$$

例 2.63. 设 $\mathscr{C}$ 是一个左刚性幺半范畴。给定态射f：$x \longrightarrow y$ in $\mathscr{C}$，其诱导态射 ${}^\vee f$：${}^\vee y \longrightarrow {}^\vee x$ 由下式给出

$$(\mathrm{ev}_y^\ell \otimes \mathrm{id}_{{}^\vee x}) \circ (\mathrm{id}_{{}^\vee y} \otimes f \otimes \mathrm{id}_{{}^\vee x}) \circ (\mathrm{id}_{{}^\vee y} \otimes \mathrm{coev}_x^\ell).$$

存在仅具有单侧闭性或刚性的范畴，参见 [Lor21，定理 6.3。3]以及 [TV17，例 1.6。2]。取刚性范畴的对偶范畴会交换求值与余求值的角色。因此，左刚性范畴 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 的对偶范畴 $\mathcal{C}$是右刚性的。

引理 2.64 ([EGNO15，练习 2.10。6])。 设 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ 是一个强幺半函子。任意（刚性）可对偶对象 Fx 的像 $x \in \mathcal{C}$ 都是可对偶的。

证明概要。 若 $x \in \mathcal{C}$ 是一个右对偶为 $x^\vee$ 的对象，定义 $(Fx)^\vee \coloneqq F(x^\vee)$；求值映射定义为

$$Fx \otimes F(x^\vee) \xrightarrow{F_2} F(x \otimes x^\vee) \xrightarrow{F\mathrm{ev}_x^{(r)}} F1 \xrightarrow{F_0^{-1}} 1,$$

余求值类似地定义。直接计算可知，蛇形恒等式成立。□

图示地，求值和余求值将表示为半圆，并可用箭头装饰，以强调所考虑的是左式还是右式。

			
$\mathrm{ev}_x^\ell\colon {}^\vee x \otimes x \longrightarrow 1$	余评价$_x^l\colon 1 \longrightarrow x \otimes {}^\vee x$	$\mathrm{ev}_x^r\colon x \otimes x^\vee \longrightarrow 1$	余评价$_x^r\colon 1 \longrightarrow x^\vee \otimes x$

定义 2.65. 刚性幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象 $x \in \mathcal{C}$ 若其（左）求值和余求值均为同构，则称其为可逆。

因此，可逆对象的右求值和余求值也都是同构。此外，可逆对象的张量积和对偶仍然可逆，因此可逆对象构成的全子范畴$\mathsf{Inv}(\mathcal{C})$是 $\mathcal{C}$ 的刚性幺半范畴。

定义 2.66 ([Cas05]). 刚性幺半范畴$\mathcal{C}$ 的皮卡群 $\mathrm{Pic}\,\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}$中可逆对象的同构类所构成的群。其乘法由张量积诱导；即，对于 $\alpha, \beta \in \mathsf{Inv}(\mathcal{C})$，$[\alpha]\cdot[\beta] \coloneqq [\alpha \otimes \beta]$。$\mathrm{Pic}\,\mathcal{C}$ 的单位元是 $[1]$，且对于任意 $\alpha \in \mathsf{Inv}(\mathcal{C})$，我们有 $[\alpha]^{-1} = [{}^\vee\alpha]$。

命题 2.67. 对于刚性范畴 $\mathcal{C}$ 中的每个对象 $x \in \mathcal{C}$，我们得到 $\mathcal{C}$的两列伴随自函子：

$$\ldots \dashv - \otimes x^\vee \dashv - \otimes x \dashv - \otimes {}^\vee x \dashv \ldots \qquad \ldots \dashv {}^\vee x \otimes - \dashv x \otimes - \dashv x^\vee \otimes - \dashv \ldots$$

F此外，$-\otimes x$ 与 $x \otimes -$ 是范畴等价，当且仅当 x 是可逆的 .

证明。所述伴随链的存在性由 [EGNO15命题 2.10 得出。8]直接计算表明，与可逆对象作左或右张量积会得到范畴等价。

反过来，假设 $x \in \mathcal{C}$ 满足 $F := - \otimes x$ 是范畴等价。函子 F 及其拟逆 U 构成一个伴随，其单位 $\eta: \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Longrightarrow UF$ 和余单位 $\varepsilon: FU \Longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ 均可逆，参见例如 [Rie17，命题4.4。5]根据 [Rie17，命题4.4。1]，存在一个自然同构 $\theta: U \Longrightarrow - \otimes {}^{\vee}x$，它与相应的余单位和单位相容。将其作用于幺半单位 $1 \in \mathcal{C}$，得到

$$\mathrm{coev}_x^{\ell} = \theta_x \circ \eta_1 \qquad \text{and} \qquad \mathrm{ev}_x^{\ell} \circ (\theta_1 \otimes \mathrm{id}_x) = \varepsilon_1.$$

由此可知，x 可逆。类似的论证表明，$x \otimes -$ 是范畴等价也意味着 x 可逆。□

注 2.68。给定一个幺半范畴 $\mathcal{C}$，仅仅存在伴随

$$- \otimes x: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{C} : - \otimes Lx \qquad \text{and} \qquad x \otimes -: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{C} : Rx \otimes -$$

对于对象 Lx，$Rx \in \mathcal{C}$ 并不会导出刚性，而是导出较弱的概念张量可表性，参见定义3.1和3.2。

为了阐明其根本问题，我们暂且假设给定对象 x，$Rx \in \mathcal{C}$，满足 $x \otimes -: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{C}: Rx \otimes -$。可以证明，$x$ 的任何右刚性对偶（如果存在）都必须与 Rx 同构；也就是说，在对象上有 $Rx \cong x^{\vee}$。因此，伴随的单位 $\eta_z^{(x)}: z \longrightarrow Rx \otimes x \otimes z$ 和余单位 $\varepsilon_z^{(x)}: x \otimes Rx \otimes z \longrightarrow z$ 为我们提供了余评价和求值态射的自然候选：

$$\mathrm{coev}_x := \eta_1^{(x)}: 1 \longrightarrow Rx \otimes x \qquad \text{and} \qquad \mathrm{ev}_x := \varepsilon_1^{(x)}: x \otimes Rx \longrightarrow 1.$$

在幺半单位处计算伴随的三角恒等式，得到 s

$$\mathrm{id}_x = \varepsilon_x^{(x)} \circ (x \otimes \eta_1^{(x)}) \qquad \text{and} \qquad \mathrm{id}_{Rx} = (Rx \otimes \varepsilon_1^{(x)}) \circ \eta_{Rx}^{(x)}.$$

然而，若 Rx 要在刚性意义上成为 x 的对偶，则必须满足蛇形恒等式（2.4.4）。为此，我们应要求更强的条件：

$$\varepsilon_x^{(x)} = \varepsilon_1^{(x)} \otimes \mathrm{id}_x \qquad \text{and} \qquad \eta_{Rx}^{(x)} = \eta_1^{(x)} \otimes Rx.$$

注 2.69。 若一个左闭幺半范畴对每个 $x \in \mathcal{C}$，函子$-\otimes x$都有一个右对偶 $[x,-]_\ell$，且它是一个 $\mathcal{C}$-模函子（参见例 5.26），那么该范畴本身已经是刚性的。具体而言，这涉及以下关于 y 的自然映射：$z \in \mathcal{C}$:

$$[x,z]_\ell \otimes y \xrightarrow{\sim} [x, z \otimes y]_\ell,$$

由此得到的相容条件蕴含蛇形恒等式。

我们将在第 3 章更详细地研究这些问题；另请参见注 9.39，其中从 $\mathcal{C}$-模函子的角度刻画了刚性。

定义 2.70. 刚性幺半范畴 $\mathcal{C}$ 称为严格刚性，若对偶函子 ${}^\vee(-)$、$(-)^\vee$：$\mathcal{C}^{\mathrm{op},\mathrm{rev}} \longrightarrow \mathcal{C}$ 是严格的，且

$${}^\vee\big((-)^\vee\big) = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} = \big({}^\vee(-)\big)^\vee.$$

记号 2.71. 设 $\mathcal{C}$ 是一个刚性幺半范畴；对于 $x \in \mathcal{C}$ 和 $n \in \mathbb{Z}$，记

$$(x)^n := \begin{cases} \text{The } n\text{-fold left dual of } x, & \text{if } n > 0; \\ x, & \text{if } n = 0; \\ \text{The } n\text{-fold right dual of } x, & \text{if } n < 0. \end{cases}$$

我们的下一个结果最初由 [Sch01第 5]，节猜想，并且是 [NS07定理 22] 的一个略微变体。它表明，每个刚性范畴都存在一个刚性严格化；也就是说，与一个严格刚性范畴幺半等价。相应的左、右对偶函子之间的相容性直接源于这样一个事实：对于刚性范畴之间的任意强幺半函子 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$，都存在自然幺半同构

$$\phi_x\colon F({}^\vee x) \xrightarrow{\sim} {}^\vee Fx, \qquad \text{and} \qquad \psi_x\colon F(x^\vee) \xrightarrow{\sim} Fx^\vee, \qquad \text{for all } x \in \mathcal{C}.$$

定理 2.72. 每个刚性范畴都存在一个刚性严格化。

证明. 设 $\mathcal{C}$ 是一个刚性严格幺半范畴 $\mathcal{C}$。按如下方式构造一个幺半等价的严格刚性范畴 $\mathcal{D}$：$\mathcal{D}$ 的对象是（可以为空的）对象有限序列 $(x_1^{n_1}, \dots, x_i^{n_i})$，其中对象为 $x_1, \dots, x_i \in \mathcal{C}$，并附有整数 $n_1, \dots, n_i \in \mathbb{Z}$。

为了定义 $\mathcal{D}$的态射，回顾记号2.71 并设

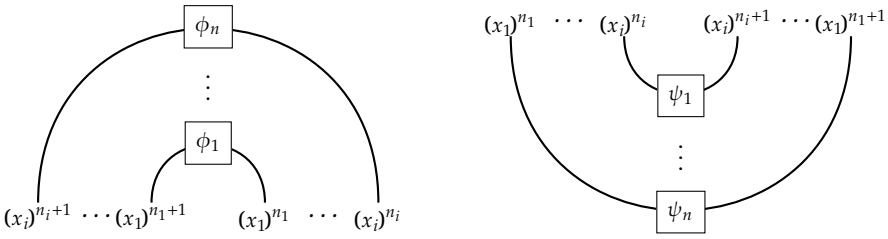
$$\mathcal{D}((x_1^{n_1}, \dots, x_i^{n_i}), (y_1^{m_1}, \dots, y_j^{m_j})) := \mathcal{C}((x_1)^{n_1} \otimes \cdots \otimes (x_i)^{n_i}, (y_1)^{m_1} \otimes \cdots \otimes (y_j)^{m_j}).$$

范畴 $\mathcal{D}$ 在以序列拼接作为张量积、以空序列作为单位时是严格幺半的。根据构造，存在一个严格幺半群范畴等价 $F\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$，它将任意对象 $(x_1^{n_1}, \dots, x_i^{n_i}) \in \mathcal{D}$ 映射为 $(x_1)^{n_1} \otimes \cdots \otimes (x_i)^{n_i} \in \mathcal{C}$，并将每个态射映射为其自身；$\mathcal{C}$ 的单位是空张量积。

将对象 $x \coloneqq (x_1^{n_1}, \dots, x_i^{n_i}) \in \mathcal{D}$ 的左对偶定义为

$$^{\vee}x \coloneqq (x_i^{n_i+1}, \dots, x_1^{n_1+1}),$$

其中求值态射与余求值态射由下式给出



对所有 $1 \le k \le i$，我们定义

$$\phi_k \coloneqq \begin{cases} \mathrm{ev}^{\ell}_{(x_k)^{n_k}}, & \text{if } n_k \ge 0; \\ \mathrm{ev}^{r}_{(x_k)^{n_k+1}}, & \text{if } n_k < 0; \end{cases} \quad \text{and} \quad \psi_k \coloneqq \begin{cases} \mathrm{coev}^{\ell}_{(x_k)^{n_k}}, & \text{if } n_k \ge 0; \\ \mathrm{coev}^{r}_{(x_k)^{n_k+1}}, & \text{if } n_k < 0. \end{cases}$$

x 的右对偶也类似地定义为 $x^{\vee} \coloneqq (x_i^{n_i-1}, \dots\dots, x_1^{n_1-1})$。因此，$\mathcal{D}$是严格刚性的，证明完毕。□

刚性范畴上的模函子具有特别良好的性质。

命题 2.73 ([Ost03，注 4], [DSPS19，引理 2.10])。若 $\mathcal{C}$ 是左刚性幺半范畴，则每个宽松 $\mathcal{C}$-模函子都是强函子。对偶地，若 $\mathcal{C}$ 是右刚性幺半范畴，则每个 *oplax* $\mathcal{C}$-模函子都是强函子。

许多应用要求刚性幺半范畴中的对象以一种与幺半结构相容的方式同构于其双对偶。在推论 6.45中，我们将证明一个用于检测这一性质的结果。

定义 2.74。一个枢轴范畴 是一个刚性幺半范畴 $\mathcal{C}$，配备有一个幺半自然同构 $\rho\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \xRightarrow{\sim} {}^{\vee\vee}(-)$，称为 $\mathcal{C}$ 的枢轴结构 。

刚性幺半范畴不一定具有枢轴结构；即使具有，也未必唯一。霍普夫代数理论中的例子见 [KR93；HK19；Hal21]。不过，每个刚性幺半范畴都具有一个称为其枢纽覆盖的普适枢轴范畴，参见 [Shi15]。

2.4.4 *Drinfeld* 中心

传统上，中心构造用于从一个幺半范畴构造出一个辫子幺半范畴，例如参见 [EGNO15，第 7]章。尤其是在第 4章和5章中，我们采用稍微一般化的设定，例如参见 [GNN09；BV12；HKS19；FH23；Kow24]。

定义 2.75. 设 $\mathcal{C}$ 为一个幺半范畴，M 为一个 $\mathcal{C}$-双模范畴，且$m \in$M。

类似于注记 2.53，可以证明 $\sigma_{M,1} =$id$_M$ 由六边形公理蕴含。

m 上的半编织 是一个自然同构 $\sigma_{-,=}$: $- \triangleleft = \Longrightarrow - \triangleright =$，使得对所有 $x, y \in \mathcal{C}$，我们有 $\sigma_{M,1} =$ id$_M$ 以及

$$\sigma_{m,x\otimes y} = (\mathrm{id}_x \triangleright \sigma_{m,y}) \circ (\sigma_{m,x} \triangleleft \mathrm{id}_y).$$

定义 2.76. 一个 $\mathcal{C}$-双模范畴 M 的中心 是如下定义的范畴 Z(M)：

- 对象是由对象 $m \in$ M 和半编织 $\sigma_{m,-}$ 组成的对 $(m,\sigma_{m,-})$。
- 态射 $f\colon (m, \sigma_{m,-}) \longrightarrow (n, \sigma_{n,-})$ 是一个与半编织相交换的 $f \in$ M(m, n)：

$$(\mathrm{id}_x \triangleright f) \circ \sigma_{m,x} = \sigma_{n,x} \circ (f \triangleleft \mathrm{id}_x), \qquad \text{for all } x \in \mathcal{C}.$$

存在一个典范遗忘函子 $U^{(M)}\colon$ Z(M) $\longrightarrow$ M。与经典表示论中双模的中心是该双模的子集不同，$U^{(M)}$ 一般不必在对象上是内射的。

例 2.77. 幺半范畴$\mathcal{C}$ 的正则双模的中心 Z($\mathcal{C}$)，见例 2.44，就是 $\mathcal{C}$ 的 *Drinfeld* 中心。张量积定义为 $(x, \sigma_{x,-}) \otimes (y, \sigma_{y,-}) ..= (x \otimes y, \sigma_{x\otimes y,-})$，其中

$$\sigma_{x\otimes y,z} := (\sigma_{x,z} \otimes \mathrm{id}_y) \circ (\mathrm{id}_x \otimes \sigma_{y,z}), \qquad \text{对所有 } z \in \mathcal{C}。$$

中心是一个辫化幺半范畴，其编织由相应的半编织拼接而成。六边形公理由半编织的定义以及Z($\mathcal{C}$) 的张量积推出。

例 2.78。 设 $H \in$ Vect 是一个有限维 Hopf 代数。那么，例 2.33 和 2.54 中的左-左 Yetter–Drinfeld 模范畴，作为辫子幺半范畴，与类别$_H$Vect 中左 H-模的 Drinfeld 中心等价，[Dri87；不过90]。

进一步，根据 [Dri87]，存在另一个霍普夫代数 $D(H)$，即 的 Drinfeld 双 H，其模范畴为 Z($_H$Vect) $\simeq {}^H_H\mathcal{YD}$。完整定义请参见 [Kas98，定义 IX.4。1] 上述等价的证明请参见 [Kas98，定理 XIII.5。1]

注 2.79。 例 2.42中的反 Yetter–Drinfeld 模范畴也是某个霍普夫代数的模范畴：即反 *Drinfeld* 双 [CMZ97; Sch99]。类比于反 Yetter–Drinfeld 模构成 Yetter–Drinfeld 模上的模范畴，反 Drinfeld 双是 Drinfeld 双上的余模代数。

对于下一个结果，回顾记号2.71中关于迭代对偶的部分。

命题 *2.80*（[*JS91*，引理 7]）。（严格）刚性范畴 $\mathcal{C}$的中心是（严格）刚性的：对所有 $(x, \sigma_{x,-}) \in Z(\mathcal{C})$，我们有 $U^{(Z)}\left({}^{\vee}(x, \sigma_{x,-})\right) = {}^{\vee}x$ 以及 $U^{(Z)}\left((x, \sigma_{x,-})^{\vee}\right) = x^{\vee}$。此外，对每个 $n \in \mathbb{Z}$和 $x \in Z(\mathcal{C})$，等式$\sigma_{(x)^n,(y)^n} = (\sigma_{x,y})^n$ 对所有 $y \in Z(\mathcal{C})$成立。

2.5 线性范畴与阿贝尔范畴

我们将特别关注某个域 $\Bbbk$上的 $\Bbbk$-线性范畴。事实上，$\Bbbk$-线性函子范畴涵盖了表示论中的许多现象；例如参见第3.2 节与第9章。我们将用 Vect 表示 $\Bbbk$-向量空间范畴，并用 vect 表示有限维 $\Bbbk$-向量空间的全子范畴。[3]

[3] 这将是贯穿整篇论文的一个普遍主题：只要在包含所有对象的较大范畴中存在一个由“有限维对象”构成的全子范畴，有限维子范畴的名称就以小写字母开头，而较大的范畴则以大写字母表示。

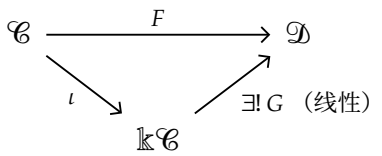
定义 2.81。 一个 $\Bbbk$-线性范畴是一个以 Vect 为丰范畴的范畴

例 2.82。 设 $\mathcal{C}$ 是一个普通范畴。它的 线性化 $\Bbbk\mathcal{C}$ 具有相同的对象，且任意两个对象之间的态射空间 $a, b \in \Bbbk\mathcal{C}$ 为$\Bbbk\mathcal{C}(a, b) \coloneqq \operatorname{span}_{\Bbbk} \mathcal{C}(a, b)$。要定义 $\Bbbk\mathcal{C}$ 中的复合，注意对于任意$a, b, c \in \Bbbk\mathcal{C}$，都存在唯一的线性映射

$$- \circ =: \Bbbk\mathcal{C}(b, c) \otimes_{\Bbbk} \Bbbk\mathcal{C}(a, b) \longrightarrow \Bbbk\mathcal{C}(a, c),$$

使得对于所有 $g \in \mathcal{C}(b, c)$ 和 $f \in \mathcal{C}(a, b)$，都有 $g \circ f = gf$。

设 $\iota\colon \mathcal{C} \longrightarrow \Bbbk\mathcal{C}$ 是一个函子，它在对象上为恒等，并将任意态射映射到相应的基向量。对于任意函子 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$，若其陪域是一个 $\Bbbk$-线性范畴，则可得到一个交换三角形：



因此，如果我们赋予普通函子范畴 [$\mathcal{C}$,Vect] 逐点的 $\Bbbk$-线性结构，就会得到一个线性范畴同构，将它与从 $\Bbbk\mathcal{C}$ 到 Vect 的 $\Bbbk$-线性函子范畴联系起来。

2.5.1 有限与局部有限阿贝尔范畴

在本节中，我们假设所有范畴和函子都是关于某个域 $\Bbbk$ 的 $\Bbbk$-线性的。对于阿贝尔范畴 $\mathscr{A}$ 和 B 之间的函子 $F\colon \mathscr{A} \longrightarrow \mathrm{B}$，若它保持有限极限，则称其为左正合；若它保持有限余极限，则称其为右正合；若它既右正合又左正合，则称其为正合。从 $\mathscr{A}$ 到 B 的右正合函子范畴记为 $\mathsf{Rex}(\mathscr{A},\mathrm{B})$，而左正合函子范畴记为 $\mathsf{Lex}(\mathscr{A},\mathrm{B})$。此外，令 $\mathscr{A}$-proj 表示由 $\mathscr{A}$ 中的投射对象构成的全子范畴；类似地，$\mathscr{A}$-inj 表示由投射内射对象构成的全子范畴。

我们回顾此情形下投射对象与内射对象的基本性质。

命题 2.83 ([GKKP22，引理 3.3])。 设 $\mathscr{A}$ 与 B 为阿贝尔范畴，并假设 B 有足够多的投射对象。设 $\iota\colon \mathscr{A}\text{-proj} \hookrightarrow \mathscr{A}$ 为包含函子。则限制函子 $\mathsf{Rex}(\mathscr{A},\mathrm{B}) \xrightarrow{-\circ\iota} [\mathscr{A}\text{-proj},\mathrm{B}]$ 是一个等价。

命题 2.84 ([GKKP22，引理 3.3])。 设 $\mathscr{A}$ 与 B 为阿贝尔范畴，并假设 B 有足够多的内射对象。设 $\iota\colon \mathscr{A}\text{-inj} \hookrightarrow \mathscr{A}$ 为包含函子。则 $\mathsf{Lex}(\mathscr{A},\mathrm{B}) \xrightarrow{-\circ\iota} [\mathscr{A}\text{-inj},\mathrm{B}]$ 是一个等价。

我们参考 [EGNO15，第 1] 章中的下列定义与结果。一个 $\Bbbk$-线性范畴的对象称为简单，如果其任一非零自同态都是同构。一个范畴 $\mathscr{C}$ 称为半单，如果其任一对象都是简单对象的直和。

命题 2.85 ([TV17，定理 C。6])。 半单范畴是阿贝尔范畴。半单范畴中的任意满态射或单态射都分裂。特别地，从半单范畴到阿贝尔范畴的任意函子都是正合的。

阿贝尔范畴 $\mathscr{A}$ 中的对象 V 具有有限长度，如果存在一个滤过

$$0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_n = V,$$

使得 V_i/V_{i-1} 是简单对象，对所有 $i \in \{1, \ldots\ldots, n\}$均如此。

定义 2.86。 若范畴 $\mathscr{C}$ 是阿贝尔的、Hom-有限的[4]、有足够多的投射对象，且其简单对象的同构类只有有限多个，
简单对象，并且其所有对象都具有有限长度。

引理 2.87。 范畴 $\mathscr{A}$ 是有限阿贝尔的，当且仅当存在一个有限维$\Bbbk$-代数 A，使得 $\mathscr{A} \simeq A$-模。

[4] 若一个（$\Bbbk$-线性）范畴 $\mathscr{C}$ 满足：对于所有 $x,\ y \in \mathscr{C}$，其 Hom 空间 $\mathscr{C}(x,\ y)$ 都是有限维的，则称其为*Hom*-有限。

定义 2.88。 如果一个范畴是阿贝尔的、Hom-有限的，并且其所有对象都具有有限长度，则称其为局部有限阿贝尔范畴。

引理 2.89. 范畴 $\mathscr{C}$ 是局部有限阿贝尔范畴，当且仅当存在一个$\Bbbk$-余代数 C，使得 $\mathscr{C} \simeq {}^{C}\mathrm{vect}$。

局部有限阿贝尔范畴满足一个 Krull–Schmidt型定理。

命题 2.90（[EGNO15，定理 1.5。7]）。 每个有限长度对象均可唯一分解为不可分解对象的直和。

定义 2.91. 一个阿贝尔范畴 $\mathscr{C}$ 若满足命题 2.90 则称为*Krull–Schmidt* 范畴。

一般阿贝尔幺半范畴允许一个非常有用的特例，即*Beck*单子性定理，例如参见 [BZBJ18，第4节。1]。

定理 2.92。 设 $F\colon \mathscr{A} \rightleftarrows \mathrm{B} : U$ 是阿贝尔范畴之间的一个伴随。如果 U 是右正合的且反映零对象[5]，，则比较函子 $K\colon \mathrm{B} \longrightarrow \mathscr{A}^{UF}$ 是一个等价。同样，如果 F 是左正合的且反映零对象，那么比较函子 $K\colon \mathscr{A} \longrightarrow \mathrm{B}^{FU}$ 是一个等价。

[5] 函子 F 反映零对象，当且仅当 $Fx \cong 0 \implies x \cong 0$。

2.5.2 张量范畴与环范畴

关于（多）张量范畴与环范畴理论的全面论述，请参阅 [EGNO15，第 4]章。本节中的所有范畴和函子同样假设为 $\Bbbk$-线性的。

定义 2.93。

- 张量范畴张量范畴 是一个局部有限阿贝尔刚性幺半范畴 $\mathscr{C}$，满足 $\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(1) \cong \Bbbk$。
- 有限张量范畴有限张量范畴是一个有限阿贝尔刚性幺半范畴 $\mathscr{C}$，满足 $\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(1) \cong \Bbbk$。
- 环范畴环范畴 是一个局部有限阿贝尔分别正合幺半范畴 $\mathscr{C}$，满足 $\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(1) \cong \Bbbk$。
- 一个有限环范畴是一个有限阿贝尔分别正合幺半范畴$\mathscr{C}$，满足 $\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(1) \cong \Bbbk$。

尽管术语表面上相似，环范畴的概念与环范畴（rig category）的概念并无关联，例如 [JY21]。

定义 2.94. 设 $\mathcal{C}$ 是一个环范畴。$\mathcal{C}$ 的一个纤维函子 是一个忠实正合的幺半函子 $U\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{vect}$。

下面的结果是环范畴的 Tannaka–Krein 对偶的一个变体。

定理 2.95 ([EGNO15，定理 5.4。1])。设 $\mathcal{C}$ 是一个环范畴，并假设它存在一个纤维函子 $U\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{vect}$。那么存在一个双代数 B，使得存在一个幺半等价 $K_B\colon \mathcal{C} \longrightarrow B\text{-comod}$ 以及一个幺半自然同构 $U_B \circ K_B \cong U$，其中 $U_B\colon B\text{-comod} \longrightarrow \mathrm{vect}$ 是遗忘函子。此外，B 在同构意义下唯一；当且仅当 $\mathcal{C}$ 是张量范畴时，B 是霍普夫代数；当且仅当 $\mathcal{C}$ 是有限环范畴时，B 是有限维的。

2.6 代数与模对象

设 $\mathcal{C}$ 是一个幺半范畴。$\mathcal{C}$ 中的代数对象由一个对象 $A \in \mathcal{C}$、一个乘法 $\mu\colon A \otimes A \longrightarrow A$ 和一个单位 $\eta\colon \mathbb{1} \longrightarrow A$组成，并满足类似于 $\Bbbk$-代数的结合律和单位公理。事实上，$\Bbbk$-代数与Vect中的代数对象相同。

$\mathcal{C}$ 中的余代数对象是一个对象 $C \in \mathcal{C}$，配备余乘法 $\Delta\colon C \longrightarrow C \otimes C$ 和余单位态射 $\varepsilon\colon C \longrightarrow \mathbb{1}$，并满足余结合性和余单位性公理，使得 C 成为 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$中的代数对象。

例 2.96。 幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象 A 是$\mathcal{C}$ 中的代数对象，当且仅当 $- \otimes A\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ 是一个单子。

例 2.97。 设 $\mathcal{C}$ 是一个幺半范畴，并且假设 $x \in \mathcal{C}$ 有一个左对偶 ${}^{\vee}x \in \mathcal{C}$。那么这会导出一个代数对象

$$({}^{\vee}x \otimes x,\ {}^{\vee}x \otimes \mathrm{ev}_x^{\ell} \otimes x\colon {}^{\vee}x \otimes x \otimes {}^{\vee}x \otimes x \longrightarrow {}^{\vee}x \otimes x,\ \mathrm{coev}_x^{\ell}\colon 1 \longrightarrow {}^{\vee}x \otimes x)$$

而对偶地，$\mathcal{C}$ 中的余代数对象（${}^{\vee}x \otimes x$，${}^{\vee}x \otimes$ 余评价$_x^{\ell} \otimes X$，评价$_x^{\ell}$）。

例 2.97 的一个特殊情形是考虑自函子的幺半范畴$[\mathcal{C},\mathcal{C}]$。此时，某个 $U \in [\mathcal{C},\mathcal{C}]$ 的左对偶是一个左伴随函子，其中 ev_U^{ℓ} 和 coev_U^{ℓ} 分别给出余求值和求值。由此得到的代数结构和余代数结构，就是与该伴随相对应的单子和余单子。

定义 2.98。 设 $(\mathbb{M}, \triangleright)$ 是一个左 $\mathscr{C}$-模范畴，且 (A, μ, η) 是 $\mathscr{C}$ 中的一个代数对象。$\mathbb{M}$ 中的一个左 A-模是一个对象 $M \in \mathbb{M}$，连同一个作用态射 $\alpha\colon A \triangleright M \longrightarrow M$，使得下列图表可交换

$$\begin{array}{ccccc} (A\otimes A)\triangleright M & \xrightarrow{\mathscr{M}_{\mathrm{a}}} & A\triangleright(A\triangleright M) & \xrightarrow{A\triangleright\alpha} & A\triangleright M \\ {\scriptstyle \mu\triangleright m}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ A\triangleright M & & \xrightarrow[\alpha]{} & & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{1}\triangleright M & \xrightarrow{\mathscr{M}_{\mathrm{u}}} & M \\ {\scriptstyle \eta\triangleright M}\downarrow & \nearrow{\scriptstyle \alpha} & \\ A\triangleright M & & \end{array}$$

一个模态射是一个箭头 $f\colon M \longrightarrow N$，它属于 $\mathbb{M}$，并且与相应的作用相容，即 $f \circ \alpha_m = \alpha_n \circ (A \triangleright f)$。

例 2.99。 显然，$\mathbb{M}$ 中的左 A-模及其态射构成一个范畴，我们将其记为 $A\text{-}\mathsf{Mod}_{\mathscr{M}}$。显然的遗忘函子$A\text{-}\mathrm{Forget}_{\mathscr{M}}\colon A\text{-}\mathsf{Mod}_{\mathscr{M}} \longrightarrow \mathbb{M}$ 有一个左伴随函子

$$\begin{aligned} A\text{-}\mathrm{Free}_{\mathscr{M}} &: \mathscr{M} \longrightarrow A\text{-}\mathsf{Mod}_{\mathscr{M}} \\ M &\longmapsto \left(A\triangleright M,\ A\triangleright(A\triangleright M) \xrightarrow{\mathscr{M}_{\mathrm{a}}^{-1}} (A\otimes A)\triangleright M \xrightarrow{\mu\triangleright M} A\triangleright M\right) \end{aligned}$$

这个伴随的单位由 $M \xrightarrow{\mathrm{u}} \mathbb{1}\triangleright M \xrightarrow{\eta\triangleright M} A\triangleright M$ 给出，而余单位为 $\alpha_M\colon A\triangleright M \longrightarrow M$。

给定 $\mathscr{C}$ 中的一个余代数对象 C，左 C-余模对象，属于 $\mathbb{M}$，是一个满足与 $\mathbb{M}$ 中模对象的公理对偶的公理的对象 $N \in \mathscr{C}$。因此，$\mathbb{M}$ 中的左 C-余模等同于 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$-模范畴 $\mathbb{M}^{\mathrm{op}}$ 中的左 C-模。余模态射的定义类似。我们用 $C\text{-}\mathsf{Comod}_{\mathscr{M}}$ 表示 $\mathbb{M}$ 中 C-余模构成的范畴。存在一个与模对象情形类似的伴随：

$$C\text{-}\mathrm{Coforget}_{\mathscr{M}} : \mathscr{M} \rightleftarrows C\text{-}\mathsf{Comod}_{\mathscr{M}} : C\text{-}\mathrm{Cofree}_{\mathscr{M}}.$$

类似地，可以在右模范畴中定义右模和余模，也可以在双模范畴中定义双模和双余模。

定义 2.100. 设 A 是 $\mathscr{C}$中的一个代数。（左）A-余模代数是一个代数 C，并带有左 A-余模结构 $\rho\colon C \longrightarrow A \otimes C$，使得 ρ 是 A-代数的一个态射。

与定义 2.100 类似，可以定义右余模代数，以及余模余代数和模代数。

记号 2.101。 如果底层范畴是向量空间范畴，那么为了将其与一般情形区分开来，我们采用以下记号：

$$^{C}\mathsf{Vect} := C\text{-}\mathsf{Comod}_{\mathsf{Vect}}.$$

对于余代数 C 的左 C-余模范畴。

类似地，例如在有限维情形下，我们定义 ${}_{A}\mathsf{Vect}$、 ${}^{C}\mathsf{Vect}_{A}$；或 ${}^{C}\mathsf{vect}$、${}_{A}\mathsf{vect}$ 以及${}^{B}_{B}\mathsf{vect}^{B}_{B}$。

注 2.102。 设 A 是 $\mathcal{C}$ 中的一个代数对象，且 $\mathbb{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是左 $\mathcal{C}$-模范畴。一个宽松的 $\mathcal{C}$-模函子 $F\colon \mathcal{N} \longrightarrow \mathbb{M}$ 可以提升为

$$A\text{-}\mathsf{Mod}_{F} : A\text{-}\mathsf{Mod}_{\mathcal{N}} \longrightarrow A\text{-}\mathsf{Mod}_{\mathcal{M}}$$

相应的 A-模范畴上的函子，将 $N \in A\text{-}\mathsf{Mod}_{\mathcal{N}}$ 映射为左 A-模 FN，其作用定义为

$$\alpha_{FN} : A \triangleright_{\mathcal{M}} FN \xrightarrow{F_{a;A,N}} F(A \triangleright_{\mathcal{N}} N) \xrightarrow{F\alpha_{N}} FN.$$

该函子是 F 的一个提升——它满足以下关系：

$$\begin{array}{ccc} A\text{-}\mathsf{Mod}_{\mathcal{N}} & \xrightarrow{A\text{-}\mathsf{Mod}_{F}} & A\text{-}\mathsf{Mod}_{\mathcal{M}} \\ {\scriptstyle A\text{-}\mathrm{Forget}_{\mathcal{N}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle A\text{-}\mathrm{Forget}_{\mathcal{M}}} \\ \mathcal{N} & \xrightarrow[F]{} & \mathcal{M} \end{array}$$

例 2.103. 设 $\mathcal{C}$是一个余完备对称幺半范畴，且其在两个变量上都右正合。则可如下定义双范畴$\mathbb{B}\mathsf{imod}(\mathcal{C})$：

- 对象是 $\mathcal{C}$中的代数对象。
- 对于 $\mathcal{C}$中的 A 和 B ，同态范畴 $\mathbb{B}\mathsf{imod}(\mathcal{C})(A, B)$由 $\mathcal{C}$ 中的 B-A-双模及其同态组成。水平复合由双模的平衡张量积给出。

与例2.103类似，对于 $\mathcal{C}$ 为完备对称幺半范畴且张量积在两个变量上都左正合的情形，存在一个 $\mathcal{C}$-双余模双范畴 $\mathbb{B}\mathsf{icomod}(\mathcal{C})$。

定义 2.104. 若每个有限图表都有余锥，则范畴 I 是滤过的 。

等价地，定义 2.104 可以表述如下：范畴I 是滤过的，当且仅当满足以下两个条件：

- 对所有 x，$y \in \mathrm{I}$，存在态射 $k_x\colon\ x \longrightarrow k$ 与 $k_y\colon\ y \longrightarrow k$ 于 I 中；并且
- 对所有平行态射 f，$g\colon\ x \longrightarrow y$ 于 I 中，存在一个 $k_{fg}\colon\ y \longrightarrow k$，使得 $k_{fg} \circ g = k_{fg} \circ f$。

定义 2.105. 图表 $F\colon\ \mathrm{I} \longrightarrow \mathscr{C}$ 称为滤过，如果定义域 I 是一个滤过范畴。一个滤过余极限是滤过图表的余极限，并且一个函子称为有限，如果它保持滤过余极限。

通常，极限与余极限不可交换。例如，对于集合 X，Y W，以及 V，典范态射 $(X \times Y) \coprod (W \times V) \longrightarrow (X \coprod V) \times (Y \coprod V)$ 一般不是同构。然而，事实表明滤过余极限确实与有限极限交换，参见例如 [ML98，定理IX.2.1]。

命题 2.106. 滤过余极限与有限极限在集合范畴中可交换：给定两个图表范畴的函子 $F\colon\ \mathcal{J} \times \mathrm{I} \longrightarrow$ 集合范畴，其中 $\mathcal{J}$ 是有限的，且I 是小的且滤过的，如下典范态射是一个同构：

$$\operatorname*{colim}_i \lim_j F(j,i) \xrightarrow{\sim} \lim_j \operatorname*{colim}_i F(j,i).$$

引理 2.107. 设 $\mathscr{A}$ 与B 为加性范畴。有限双积赋予 $\mathscr{A}$与B 以vect-模范畴结构。任意函子 $F\colon\ \mathscr{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ 都是vect-模函子，相对于这些vect-作用。

若B 容许滤过余极限，则 F 本质上唯一地延拓为一个有限Vect-模函子Ind($\mathscr{A}$) $\longrightarrow$ B，且任意有限 Vect- 模函子都具有这种形式。

证明。 设add($\mathscr{A}$)表示 $\mathscr{A}$ 在有限双积下的余完备化——即 $\mathscr{A}$的加性闭包。由于有限双积是绝对余极限，左伴随add($\mathscr{A}$) $\longrightarrow \mathscr{A}$ ——即典范包含 $\mathscr{A} \hookrightarrow$ add($\mathscr{A}$)的左伴随，来自式（2.9.1）的泛性质——是vect-模范畴的一个等价。因此，包含映射 $\mathscr{A} \hookrightarrow$ add($\mathscr{A}$)也是如此。我们得到如下等价

$$\mathsf{Cat}_{\Bbbk}(\mathscr{A}, -) \simeq \text{vect-Mod}(\mathsf{add}(\mathscr{A}), -) \simeq \text{vect-Mod}(\mathscr{A}, -),$$

证明第一个断言。第二个断言的证明方式类似，利用Vect $\simeq$ Ind(vect)且

$$\text{vect-Mod}(\mathscr{A}, \mathscr{B}) \simeq \text{Vect-Mod}_{\text{filt}}(\mathsf{Ind}(\mathscr{A}), \mathscr{B}).$$ □

例 2.108. 设 C 是Vect中的一个余代数。给定两个 C-余模 (X, ρ) 和 (Y, λ)，可以构造它们的余张量积——由等化子给出的向量空间 $X \square Y$

$$X \square Y \hookrightarrow X \otimes_{\Bbbk} Y \underset{X \otimes_{\Bbbk} \lambda}{\overset{\rho \otimes_{\Bbbk} Y}{\rightrightarrows}} X \otimes_{\Bbbk} C \otimes_{\Bbbk} Y.$$

有时，模范畴的形式体系——即使是建立在看似平凡的幺半范畴vect 和Vect之上的模范畴——也能让有关代数与余代数 $\Bbbk$-线性结构的经典陈述更加清晰。下面给出该结果的一个简短证明作为示例。

命题 2.109 ([Tak77，命题 2.1])。 设 $\mathcal{D}$ 是一个容许滤过余极限的阿贝尔范畴，并设 C 是一个定义在 $\Bbbk$上的余代数。存在一个等价

$$\begin{aligned} \mathsf{Lexf}({}^{C}\mathsf{Vect}, \mathcal{D}) &\xrightarrow{\sim} \mathsf{Comod}_{\mathcal{D}} C \\ F &\longmapsto FC \\ N \square - &\longleftarrow\!\shortmid N, \end{aligned}$$

其中左边是从 ${}^{C}\mathsf{Vect}$到2.99的左正合有限函子范畴；右边则按照例 C中的记号，表示 $\mathcal{D}$中的右 $\mathcal{D}$ -余模范畴。这里，Vect-模结构由命题 2.131中所述方式赋予。

特别地，对于定义在 $\Bbbk$上的余代数 D，我们有

$$\mathsf{Lexf}({}^{C}\mathsf{Vect}, {}^{D}\mathsf{Vect}) \simeq {}^{D}\mathsf{Vect}^{C}.$$

证明。 由于 ${}^{C}\mathsf{Vect} \simeq \mathsf{Ind}({}^{C}\mathsf{vect})$，函子 F可视为由其在 ${}^{C}\mathsf{vect}$上的限制延拓到滤过余极限，因此根据引理2.107，它是一个 Vect-模函子。注意， C作为自身上的双余模，是Vect中的右 C-余模。因此， FC 是 $\mathcal{D}$中的右 C-余模。

为了看出 $F \cong FC \square -$，令 $N \in {}^{C}\mathsf{Vect}$，并回想条构造提供了函子性内射分解

$$N \cong \mathrm{eq}(C \otimes N \underset{C \otimes \Delta_N}{\overset{\Delta_C \otimes N}{\rightrightarrows}} C \otimes C \otimes N).$$

因此，

$$\begin{aligned} FN &\cong F\left(\mathrm{eq}(C \otimes N \underset{C \otimes \Delta_N}{\overset{\Delta_C \otimes N}{\rightrightarrows}} C \otimes C \otimes N)\right) \cong \mathrm{eq}\left(F(C \otimes N) \underset{F(C \otimes \Delta_N)}{\overset{F(\Delta_C \otimes N)}{\rightrightarrows}} F(C \otimes C \otimes N)\right) \\ &\cong \mathrm{eq}\left(FC \otimes N \underset{FC \otimes \Delta_N}{\overset{F(\Delta_C) \otimes N}{\rightrightarrows}} FC \otimes C \otimes N\right) = FC \square N, \end{aligned}$$

其中，第一个同构使用条构造，第二个由 F 的左正合性得出，第三个利用了 F 是右 Vect-模函子的事实，第四个则通过观察 $F(\Delta_C) = \Delta_{F(C)}$ 得出。□

2.7 幺半双范畴

我们简要回顾幺半双范畴的概念，它将在通篇所用的弦图中发挥重要作用。更详细的论述见 [JY21，第 12], 章；另见 [GPS95；Gur06；GS16]。

定义2.110. 一个幺半双范畴由双范畴 $\mathbb{B}$以及下列数据组成：

- 一个伪函子 $\boxtimes\colon\ \mathbb{B}\times\mathbb{B}\longrightarrow\mathbb{B}$。
- 一个伪函子 $\mathbb{1}_{\mathbb{B}}\colon\ \heartsuit\longrightarrow\mathbb{B}$。$\mathbb{B}$ 中唯一对象$\heartsuit$的像将称为 $\mathbb{B}$的恒等对象，并且在滥用记号的情况下也记为 $\mathbb{1}_{\mathbb{B}}$。$\mathbb{1}_{\mathbb{B}}$ 的伪函子性产生额外结构：一个1-态射$\mathrm{I}_{\mathbb{B}}\colon\ \mathbb{1}_{\mathbb{B}}\longrightarrow\mathbb{1}_{\mathbb{B}}$，以及可逆2-态射$\nabla_{\mathrm{I}}\colon\ \mathrm{I}_{\mathbb{B}}\circ\mathrm{I}_{\mathbb{B}}\xrightarrow{\sim}\mathrm{I}_{\mathbb{B}}$与 $\eta_{\mathrm{I}}\colon\ \mathrm{Id}_{\mathbb{1}_{\mathbb{B}}}\xrightarrow{\sim}\mathrm{I}_{\mathbb{B}}$，使得（$\mathbb{1}_{\mathbb{B}}$，$\nabla_{\mathrm{I}}$，$\eta_{\mathrm{I}}$）在 $\mathbb{B}$中构成一个幂等单子。
- 一个伴随伪自然等价（$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{A}^{\blacklozenge}$，$\eta_{\mathfrak{A}}$，$\varepsilon_{\mathfrak{A}}$）：

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{B}\times\mathbb{B}\times\mathbb{B} & \xrightarrow{\boxtimes\times\mathbb{B}} & \mathbb{B}\times\mathbb{B}\\ {\scriptstyle \mathbb{B}\times\boxtimes}\downarrow & \swarrow_{\mathfrak{A}} & \downarrow{\scriptstyle \boxtimes}\\ \mathbb{B}\times\mathbb{B} & \xrightarrow[\boxtimes]{} & \mathbb{B}\end{array}$$

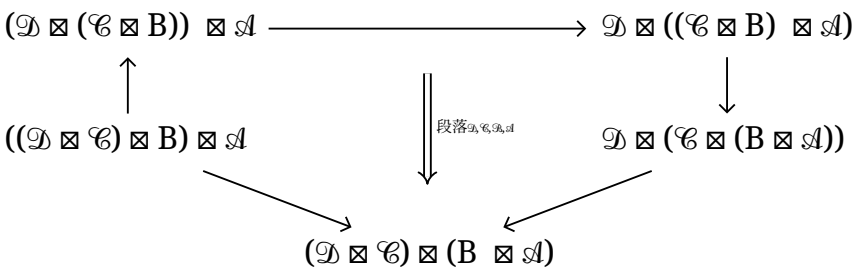
  它将被称为 $\mathbb{B}$ 的结合子。其分量是形如 $\mathfrak{A}_{\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C}}\colon(\mathscr{A}\boxtimes B)\boxtimes\mathscr{C}\xrightarrow{\sim}\mathscr{A}\boxtimes(B\boxtimes\mathscr{C})$ 的 1-态射。
- 伪自然伴随等价（$\mathfrak{L}$，$\mathfrak{L}^{\blacklozenge}$，$\eta_{\mathfrak{L}}$，$\varepsilon_{\mathfrak{L}}$）和（$\mathfrak{R}$，$\mathfrak{R}^{\blacklozenge}$，$\eta_{\mathfrak{R}}$，$\varepsilon_{\mathfrak{R}}$），分别称为左、右单位子：

$$\begin{array}{ccccc} & & \overset{\mathfrak{L}}{\Rightarrow} & & \\ \mathbb{B} & \xrightarrow[\mathbb{1}_{\mathbb{B}}\times\mathrm{id}_{\mathbb{B}}]{\mathrm{id}_{\mathbb{B}}\times\mathbb{1}_{\mathbb{B}}} & \mathbb{B}\times\mathbb{B} & \xrightarrow{\boxtimes} & \mathbb{B} \\ & & \underset{\mathfrak{R}}{\Leftarrow} & & \end{array}$$

  其分量是 $\mathbb{B}$ 形如 $\mathfrak{R}\colon\ \mathbb{1}_{\mathbb{B}}\boxtimes\mathscr{A}\xrightarrow{\sim}\mathscr{A}$ 和 $\mathfrak{L}\colon\ \mathscr{A}\boxtimes\mathbb{1}_{\mathbb{B}}\xrightarrow{\sim}\mathscr{A}$ 的 1-态射，其中 $\mathscr{A}\in\mathrm{Ob}\ \mathbb{B}$。

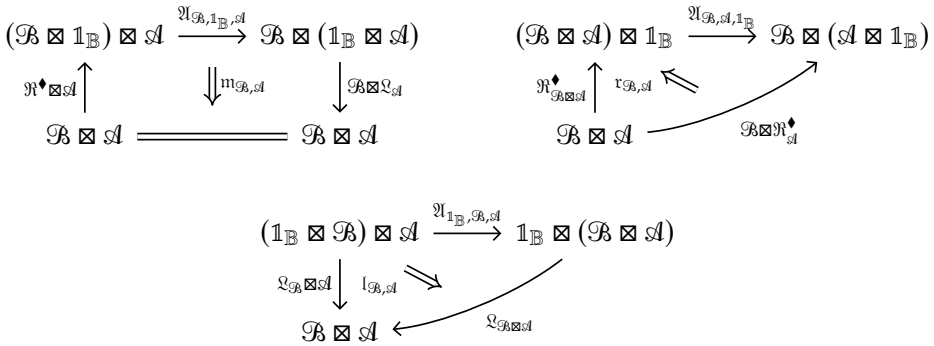
- 一个可逆修正 $\mathfrak{p}$，如下面所示的 $\mathfrak{p}$ 的分量所示，其中 $\mathscr{A}$，B，$\mathscr{C}$，$\mathscr{D} \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{B}$：

(2.7.1)



图表中的态射按照指示，使用结合子 $\mathfrak{A}$ 构造。我们称 $\mathfrak{p}$ 为五边形修正子。

- 可逆修正 $\mathfrak{l}$、$\mathfrak{m}$ 和 $\mathfrak{r}$；左、中、右 *2*-单位子：



这些数据满足相干公理，参见 [JY21，说明 12.1。3]。

例 2.111。 由 $\mathbb{C}\mathrm{at}_{\Bbbk}$ 个 $\Bbbk$-线性范畴、$\Bbbk$-线性函子及其间的自然变换构成的 2-范畴，在赋予 $\Bbbk$-线性范畴的张量积 后成为一个幺半双范畴：给定 $\mathscr{A}$ 和 B，定义 $\Bbbk$-线性范畴 $\mathscr{A} \otimes_{\Bbbk} \mathrm{B}$ 为

- $\mathrm{Ob}(\mathscr{A} \otimes_{\Bbbk} \mathscr{B}) := \mathrm{Ob}\,\mathscr{A} \times \mathrm{Ob}\,\mathscr{B}$,
- $(\mathscr{A} \otimes_{\Bbbk} \mathscr{B})((a,b),(a',b')) := \mathscr{A}(a,a') \otimes_{\Bbbk} \mathscr{B}(b,b')$.

给定 $\Bbbk$-线性函子 $F\colon \mathscr{A} \to \mathrm{B}$ 和 $G\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$，张量积 $F \otimes_{\Bbbk} G$ 定义为 $\mathrm{Ob}(F \otimes_{\Bbbk} G) = \mathrm{Ob}(F) \times \mathrm{Ob}(G)$，并且

$$(F \otimes_{\Bbbk} G)_{(a,b),(c,d)}\colon \mathscr{A}(a,c) \otimes_{\Bbbk} \mathscr{B}(b,d) \xrightarrow{F_{a,c} \otimes_{\Bbbk} G_{b,d}} \mathscr{C}(Fa,Fc) \otimes_{\Bbbk} \mathscr{D}(Gb,Gd).$$

自然变换的张量积也类似地扩展。

结合子和单位子是从集合范畴 和 Vect提升而来的，五边形修正子和 2-单位子都是平凡的。例如，给定 $\Bbbk$-线性范畴 $\mathcal{A}$、B 和 $\mathcal{C}$，结合子$\mathfrak{A}_{\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}}$ 是如下等价

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}\otimes_{\Bbbk}\mathcal{B})\otimes_{\Bbbk}\mathcal{C} &\xrightarrow{\sim} \mathcal{A}\otimes_{\Bbbk}(\mathcal{B}\otimes_{\Bbbk}\mathcal{C})\\ ((a,b),c) &\longmapsto (a,(b,c))\\ (f\otimes_{\Bbbk} g)\otimes_{\Bbbk} h &\longmapsto f\otimes_{\Bbbk}(g\otimes_{\Bbbk} h).\end{aligned}$$

图表 (2.7.1) 在此情形下交换，因此五边形修正子可取为恒等态射。

推广上述例子，对于对称闭幺半范畴 $(\mathcal{V},\otimes)$，双范畴 $\mathcal{V}$-$\mathbb{C}$at 是幺半的，其幺半结构 $\mathcal{A}\otimes$B 的定义与 $\mathcal{A}\otimes_{\Bbbk}$B 在 $\mathcal{V}$ ..= Vect 情形下的定义类似。

例 2.11. 双范畴 $\mathbb{B}$imod($\mathcal{C}$) 例 2.103是一个幺半双范畴，其幺半结构由 $\mathcal{C}$底层的张量积给出。双模 ${}_BM_A$和 ${}_DN_C$的张量积是 $(B\otimes D)$-$(A\otimes C)$-双模 ${}_BM_A\otimes_D N_C$，并以显然的方式扩展到双模同态。

关于下述例子及其更一般的变体（其中 $\mathcal{V}$ 只需是辫子的），详情请参见 [DS97，第 7]节。

例 2.113。 双范畴 $\mathbb{P}$rof$_{\Bbbk}$ 的对象是 $\Bbbk$-线性范畴，其 hom-范畴定义如下：

$$\mathbb{P}\mathrm{rof}_{\Bbbk}(\mathcal{C},\mathcal{D}) := \mathbb{C}\mathrm{at}_{\Bbbk}(\mathcal{D}^{\mathrm{op}}\otimes_{\Bbbk}\mathcal{C},\mathrm{Vect}).$$

我们称 $F\in\mathbb{P}\mathrm{rof}_{\Bbbk}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 为一个 预函子，并记作 $F\colon \mathcal{C}\nrightarrow\mathcal{D}$。预函子 $F\colon \mathcal{C}\nrightarrow\mathcal{D}$ 与 $G\colon \mathcal{D}\nrightarrow$E 的复合由余端给出：

$$(G\diamond F)(e,c) := \int^{d\in\mathcal{D}} G(e,d)\otimes_{\Bbbk} F(d,c).$$

此外，$\mathbb{P}$rof$_{\Bbbk}$ 在赋予幺半结构 $\otimes_{\Bbbk}$后成为幺半范畴。在对象上，它与例 2.111中的结构一致：给定范畴 $\mathcal{A}$ 和 B，它们的张量积为 $\mathcal{A}\otimes_{\Bbbk}$B。给定预函子 $\Phi\colon \mathcal{A}\nrightarrow\mathcal{A}'$ 和 $\Psi\colon$B $\nrightarrow$B′，预函子 $\Phi\otimes_{\Bbbk}\Psi\colon \mathcal{A}\otimes_{\Bbbk}\mathcal{A}'\nrightarrow$B $\otimes_{\Bbbk}$B′ 定义如下：

$$(\Phi\otimes_{\Bbbk}\Psi)((b,b'),(a,a')) = \Phi(a',a)\otimes_{\Bbbk}\Psi(b',b).$$

这同样可以推广到预函子之间的自然变换。

2.7.1 幺半双范畴中的弦图

本节将张量积引入第 2.3 节的图形语言 $\mathbb{C}$中，从而使其成为一个幺半 2-范畴。在我们的表示中，我们紧密遵循 Willerton [Wil08], 参见 [DS03；Str03；BMS24；DS25]，以了解其他“片层”或“曲面”图表的示例。

与之前一样，我们考虑弦及其间的顶点。它们分别标记为函子和自然变换。弦和顶点嵌入有界矩形中，我们称之为片。每个片的（连通）区域都装饰有一个范畴。普通二维弦图的相同规则也适用：水平和垂直粘合表示函子和自然变换的复合。在这些操作之外，我们还加入将片层叠在彼此后方的操作，以表示 $\mathbb{C}$的 幺半积。我们的约定是按从前到后、从右到左、从下到上的顺序读取图表。

给定一个幺半范畴 $\mathscr{C}$，这种新图形语言中两个最重要的构成要素是其张量积 $\otimes\colon\ \mathscr{C}\times\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{C}$ 以及单位$1\in\mathscr{C}$；它们见图2.2。左侧有两片彼此相等

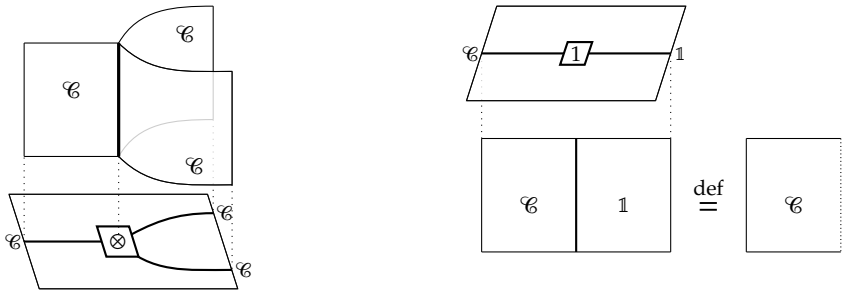


图 2.2：幺半范畴的张量积与单位的图形表示（$\mathscr{C}$, $\otimes$,1）。

到由一条线连接的 $\mathscr{C}$ 的两个副本：$\mathscr{C}$ 的张量积。在右侧，我们有 $\mathscr{C}$ 的单位，它被视为从终对象范畴到 $\mathscr{C}$ 的函子。我们用空白纸面表示 1，并用虚线表示 $\mathscr{C}$ 的单位。

例 2.114. 考虑一个反松幺半函子 $(F, F_2, F_0)\colon\ \mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{D}$。图 2.3 将余乘法 F_2 描绘为一种“时间演化”，其中我们从 $F(-\otimes=)$（位于底部）开始，并最终得到 $F(-)\otimes F(=)$（位于顶部）。余结合性与余单位性条件如图 2.4所示。

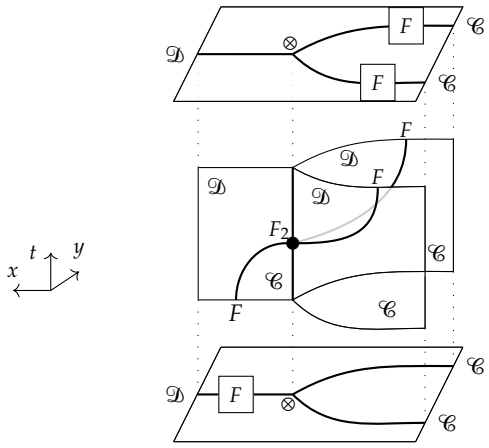


图 2.3：反松幺半函子 $F\colon\ \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ 的余乘法。

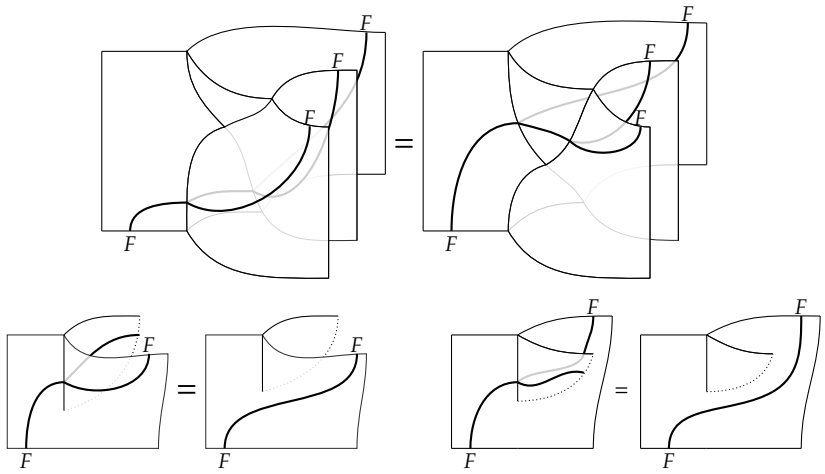
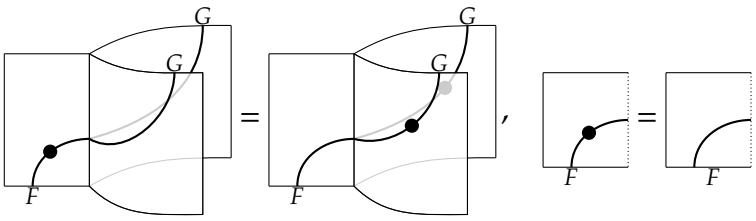


图 2.4：反松幺半函子的余结合性与余单位性条件。

注记 2.115. 给定两个反强幺半函子 $F,\ G\colon\ \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$，自然变换 $\eta\colon F \Longrightarrow G$ 成为反强幺半函子之一的弦图条件如下



例 2.116. 假设 $F\colon\ \mathscr{C} \rightleftarrows \mathscr{D}\colon\ U$ 是一个反强幺半伴随。在弦图中，单位 η 与余单位 ε 为余松幺半群自然变换的条件在图 2.5中给出。

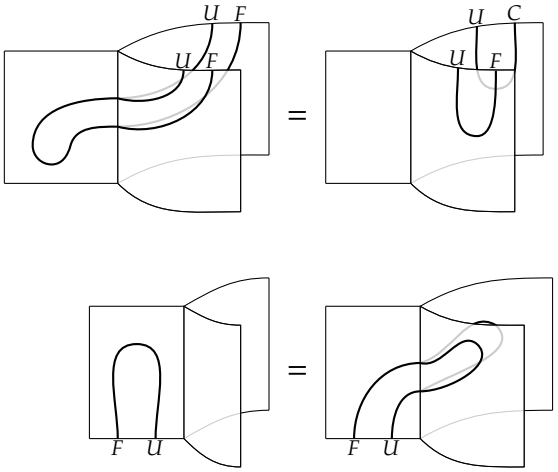


图 2.5：使 η 与 ε 成为 oplax 变换的条件。

2.8 余端

在本节中，我们给出富集余端的定义，其特殊情形为 $\Bbbk$线性范畴。更一般的论述例如可见于 [Gra80，第 2 节。3], [Kel05，章节 3],以及 [Lor21，章节 4]。

定义 2.117. 设 $\mathscr{C}$ 为一个本质小的 $\Bbbk$线性范畴。一个 $\Bbbk$线性函子 $P\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \otimes_{\Bbbk} \mathscr{C} \longrightarrow \mathsf{Vect}$ 的余端 是Vect中如下的余等化子：

$$\coprod_{a,b\in\mathscr{C}} \mathscr{C}(a,b)\otimes_{\Bbbk} P(b,a) \rightrightarrows \coprod_{a\in\mathscr{C}} P(a,a) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \int^{a\in\mathscr{C}} P(a,a).$$

对于 $a,\ b \in \mathscr{C}$ 这两个平行态射由下式给出

$$\begin{aligned} \mathscr{C}(a,b)\otimes_{\Bbbk} P(b,a) &\longrightarrow P(a,a), & f\otimes x &\longmapsto P(f,a)x,\\ \mathscr{C}(a,b)\otimes_{\Bbbk} P(b,a) &\longrightarrow P(b,b), & g\otimes y &\longmapsto P(b,g)y. \end{aligned}$$

端 $\int_{a\in\mathscr{C}} P(a,a)$ 的定义与之类似，是 Vect 中的一个等化子。

注 2.118。 $\mathscr{C}$ 本质上小的一个推论是，我们可以将定义 2.117 中定义相应（余）端的（余）等化子重写为按对象集合而非真类取指标。由于 Vect 完备且余完备，任意 $P\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \otimes_{\Bbbk} \mathscr{C} \longrightarrow \mathsf{Vect}$ 的端和余端都存在。

如果可以从上下文中明确推断出指标范畴 $\mathscr{C}$，我们就不再显式写出它。

注 2.119。 端和余端具有许多有用的性质，其中有两条将在本文中频繁使用。

首先，余端具有函子性：函子 $P, P'\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{C} \longrightarrow \mathsf{Vect}$ 之间的任意自然变换 $\alpha\colon P \Longrightarrow P'$ 都会诱导出唯一的态射

$$\int \mu\colon \int P \longrightarrow \int P'$$

根据（余）等化子的泛性质。

第二，对于适当的函子 P，*Fubini–Tonelli* 交换律 成立：如果下列任意一个余端存在：

$$\int^{a\in\mathscr{C}} \int^{b\in\mathscr{C}} P(a,a,b,b), \quad \int^{(a,b)\in\mathscr{C}\times\mathscr{C}} P(a,a,b,b), \quad \int^{b\in\mathscr{C}} \int^{a\in\mathscr{C}} P(a,a,b,b),$$

那么它们全都存在，且彼此同构；我们通常直接写作 $\int^{a,b} P(a,a,b,b)$。

下面的引理也称为富化 *Yoneda* 引理。

引理 2.120。 设 $\mathscr{C}$ 是一个范畴，且设 $F\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathsf{Vect}$ 和 $G\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{Vect}$是函子。那么存在自然同构

$$\int^{c} \mathscr{C}(c,-) \otimes_{\Bbbk} Fc \;\cong\; F \;\cong\; \int_{c} \mathsf{Vect}(\mathscr{C}(-,c), Fc), \tag{2.8.1}$$

and

$$\int^{c} \mathscr{C}(-,c) \otimes_{\Bbbk} Gc \;\cong\; G \;\cong\; \int_{c} \mathsf{Vect}(\mathscr{C}(c,-), Gc). \tag{2.8.2}$$

顾名思义，上述引理是富化情形下米田引理的一个类比；因此，在后续讨论中，我们只称它为“米田引理”。证明见 [Kel05，第 2 节。4]。

定义 2.121。 设 $\mathscr{C}$ 是一个 $\Bbbk$-线性幺半范畴。给定两个 $\Bbbk$-线性函子 F，G：$\mathscr{C} \longrightarrow \mathsf{Vect}$，$F$ 与 G 的 *Day* 卷积是 $\Bbbk$-线性函子 $F * G\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathsf{Vect}$，其由余端给出

$$F * G := \int^{a,b} \mathscr{C}(a \otimes b, -) \otimes_{\Bbbk} Fa \otimes_{\Bbbk} Gb.$$

注 2.122。 如果 $\mathscr{C}$ 是左闭或右闭幺半范畴，我们可以利用余端的米田引理来简化 Day 卷积积：

$$\begin{aligned} F * G &= \int^{a,b} \mathscr{C}(a \otimes b, -) \otimes_{\Bbbk} Fa \otimes_{\Bbbk} Gb \cong \int^{a,b} \mathscr{C}(a, [b,-]_\ell) \otimes_{\Bbbk} Fa \otimes_{\Bbbk} Gb \\ &\overset{(2.8.1)}{\cong} \int^{b} F([b,-]_\ell) \otimes_{\Bbbk} Gb, \end{aligned} \tag{2.8.3}$$

$$\begin{aligned} F * G &= \int^{a,b} \mathscr{C}(a \otimes b, -) \otimes_{\Bbbk} Fa \otimes_{\Bbbk} Gb \cong \int^{a,b} \mathscr{C}(b, [a,-]_r) \otimes_{\Bbbk} Fa \otimes_{\Bbbk} Gb \\ &\overset{(2.8.1)}{\cong} \int^{a} Fa \otimes G([a,-]_r). \end{aligned} \tag{2.8.4}$$

例 2.123. 考虑一个只有单个对象的 $\Bbbk$-线性幺半范畴 $\mathscr{X}\,x$。那么 $A \coloneqq \mathrm{End}_{\mathscr{X}}(x)$ 是一个交换代数，并且 $[\mathscr{X},\mathsf{Vect}] \cong \text{Mod-}A$。令$F, G\colon \mathscr{X} \longrightarrow \mathsf{Vect}$ 为两个函子。记 $M \coloneqq Fx$ 和 $N \coloneqq Gx$ 为相应的 A 上的模，记 $an \coloneqq na$ 为所有 $a \in A$ 和 $n \in N$，利用公式（ 2.8.3 ）和余端的定义，我们得到：

$$(F * G)x \cong {M \otimes_{\Bbbk} N}\big/{\langle ma \otimes_{\Bbbk} n - m \otimes_{\Bbbk} an \mid m \in M, n \in N, a \in A\rangle} = M \otimes_A N.$$

由此可还原交换代数上的模的张量积。

定理 2.124 ([Day71]). 对于任意幺半范畴 $\mathscr{C}$，范畴 $[\mathscr{C}^{\mathrm{op}},\mathsf{Vect}]$是一个闭幺半范畴，其张量积为 *Day* 卷积，单位为 $\mathscr{C}(1,-)$，且对所有 $F, G\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{Vect}$，其内 *Hom* 定义如下：

$$[F,G]_\ell \coloneqq \int_{a,b} \mathsf{Vect}(\mathscr{C}(- \otimes a, b), \mathsf{Vect}(Fa, Gb)), \tag{2.8.5}$$

$$[F,G]_r \coloneqq \int_{a,b} \mathsf{Vect}(\mathscr{C}(a \otimes -, b), \mathsf{Vect}(Fa, Gb)). \tag{2.8.6}$$

注记 2.125. 若幺半范畴 $\mathscr{C}$ 是闭合的，则可借助米田引理简化 $[\mathscr{C},\mathsf{Vect}]$ 的内 Hom 公式：

$$\begin{aligned} [F,G]_r &= \int_{a,b} \mathsf{Vect}(\mathscr{C}(a \otimes -, b), \mathsf{Vect}(Fa, Gb)) \\ &\cong \int_{a,b} \mathsf{Vect}(\mathscr{C}(a \otimes -, b) \otimes_{\Bbbk} Fa, Gb) \cong \int_b \mathsf{Vect}\Big(\int^a \mathscr{C}(a \otimes -, b) \otimes_{\Bbbk} Fa, Gb\Big) \\ &\cong \int_b \mathsf{Vect}\Big(\int^a \mathscr{C}(a, [-,b]_\ell) \otimes_{\Bbbk} Fa, Gb\Big) \overset{(2.8.1)}{\cong} \int_b \mathsf{Vect}(F[-,b]_\ell, Gb), \end{aligned} \tag{2.8.7}$$

$$[F,G]_\ell \cong \int_b \mathsf{Vect}\Big(\int_a \mathscr{C}(a,[-,b]_r)\otimes_{\Bbbk} Fa, Gb\Big) \overset{(2.8.1)}{\cong} \int_a \mathsf{Vect}(F[-,b]_r, Gb). \tag{2.8.8}$$

注记 2.126. 每当我们将 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}} \coloneqq [\mathscr{C},\mathsf{Vect}]$ 视为（闭合）幺半范畴时，都会隐含地为其赋予卷积张量积。类似地，$\widehat{\ }$也可以在 $\mathscr{C} \coloneqq [\mathscr{C}^{\mathrm{op}},\mathsf{Vect}]$上定义闭幺半结构。但请注意，在这种情况下，我们无法像注记 2.125中那样简化内 Hom；这要求范畴 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$而非$\mathscr{C}$其自身是闭幺半的。

卷积结构在可表对象上表现得尤为良好：

$$\mathscr{C}(-,x) * \mathscr{C}(-,y) = \int^{a,b\in\mathscr{C}} \mathscr{C}(-,a\otimes b)\otimes_{\Bbbk} \mathscr{C}(a,x)\otimes_{\Bbbk} \mathscr{C}(b,y) = \mathscr{C}(-,x\otimes y)$$

这种联系还延伸到整个函子范畴，参见 [Day71；IK86]。

命题 2.127. 对于一个幺半范畴 $\mathscr{C}$，米田嵌入

$$\text{よ} : \mathscr{C} \longrightarrow \widehat{\mathscr{C}} = [\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Vect}], \qquad x \longmapsto \mathscr{C}(-,x) \tag{2.8.9}$$

是一个强幺半函子。

2.9 （余）完备化

本小节将简要而非正式地介绍关于余完备化的幺半伪函子性，以及由此产生的幺半范畴与模范畴的（余）完备化运算的结果。关于（余）极限与（余）完备化的一般内容，请参见 [Kel05；KS06]。我们默认所有范畴和函子均为 $\Bbbk$ 线性的。

设 Φ 为一个图表类。若一个范畴存在定义域属于 Φ的函子的余极限，则称其为 Φ-余完备的；若一个函子保留此类余极限，则称其为Φ-余连续的。

定义 2.128。若幺半范畴 $\mathscr{C}$ 是 Φ-余完备的，且其张量积分别为 Φ-余连续，则称其为分别 Φ-余连续的。

类似地，对于一个 Φ-余完备幺半范畴 $\mathscr{D}$，如果一个 $\mathscr{D}$-模范畴 $\mathbb{M}$ 是 Φ-余完备的，且其作用 $-\triangleright_{\mathbb{M}} =$ 分别是 Φ-余连续的，则称 $\mathbb{M}$ 分别 Φ-余连续。

令 $\mathbb{C}\mathrm{at}_{\Phi\text{-Cocts}}$ 为由以下对象构成的 2-范畴： Φ-余完备范畴、 Φ-余连续函子及其之间的变换。令 $\mathscr{C}$为一个小范畴。根据 [Kel82，第 5 节，7], 存在一个范畴 $\Phi(\mathscr{C})$，即 $\mathscr{C}$ 的 Φ- 余完备化，以及一个嵌入 $\iota\colon \mathscr{C} \hookrightarrow \Phi(\mathscr{C})$，使得对于任意 Φ-余完备范畴 $\mathscr{D}$，限制函子 $\mathbb{C}\mathrm{at}_{\Phi\text{-Cocts}}(\mathscr{C}, \mathscr{D}) \xrightarrow{-\circ\iota} \mathbb{C}\circ\mathrm{at}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ 是一个等价。

根据 [Zöb76；Koc95], , 包含映射2-函子 $\mathbb{C}\mathrm{at}_{\Phi\text{-Cocts}}$到 $\mathbb{C}\mathrm{at}$ 是2-单子的，其左伴随由 Φ-余完备化伪函子 $\Phi(-)\colon \mathbb{C}\mathrm{at} \longrightarrow \mathbb{C}\mathrm{at}_{\Phi\text{-Cocts}}$给出。这个2-单子是宽松幂等的2-单子，意义如 [KL97]所述。

根据 [KL00], , 在 $\mathbb{C}\mathrm{at}$上存在一个类似的 2-单子 Φ_c ，其代数是带有指定选择的 Φ-余极限的范畴。严格态射是严格保持所选 Φ-余极限的函子，而伪态射则是按通常意义保持 Φ-余极限的函子。

根据 [LF11，定理 6.2], ，这给出了一个伪闭结构：2-范畴$\mathbb{C}\mathrm{at}_{\Phi_c\text{-余连续函子}}$，其对象为带有所选 Φ-余极限的范畴，态射为 Φ-余连续函子，变换为它们之间的变换。从 $\mathscr{A}$ 到 B 的内 Hom 的底层范畴为 $\mathbb{C}\mathrm{at}_{\Phi\text{-Cocts}}(\mathscr{A},\mathrm{B})$，而构成该 2-单子的函子是闭合的。此外，在某些情况下，例如当 Φ 是有限余极限类时，该伪闭结构会成为伪闭幺半结构。

由于幺半范畴与模范畴可以表述为伪闭幺半结构内部的伪幺半群，参见 [HP02],我们得到如下结果。

命题 2.129. 设 $\mathscr{C}$ 为一个幺半范畴。则 $\Phi(\mathscr{C})$ 是分别 Φ-余连续幺半的，包含映射 $\iota\colon \mathscr{C} \hookrightarrow \Phi(\mathscr{C})$ 是强幺半的，并且对任意分别 Φ- 余连续幺半范畴 $\mathscr{D}$ 诱导出如下等价：

$$\mathrm{StrMon}_{\Phi\text{-Cocts}}(\Phi(\mathscr{C}), \mathscr{D}) \xrightarrow{-\circ\iota} \mathrm{StrMon}(\mathscr{C}, \mathscr{D}).$$

对松幺半群函子和反强幺半函子也会诱导出类似的等价。

同样，给定一个 $\mathscr{C}$-模范畴 M， Φ-余完备化 $\Phi(\mathrm{M})$ 是分别 Φ-余连续的 $\Phi(\mathscr{C})$模范畴，包含映射 $\iota\colon \mathrm{M} \hookrightarrow \Phi(\mathrm{M})$ 是强 $\mathscr{C}$-模函子，并且该函子

$$\mathrm{Str}\Phi(\mathscr{C})\mathrm{Mod}_{\Phi\text{-Cocts}}(\Phi(\mathscr{M}), \mathscr{N}) \xrightarrow{-\circ\iota} \mathrm{Str}\mathscr{C}\mathrm{Mod}(\mathscr{M}, \mathscr{N}), \tag{2.9.1}$$

是一个等价；对于宽松和反松模函子，也存在类似的等价。

我们指出，文献中针对多种情况和构造方式，给出了命题 2.129 中得到的幺半结构和模结构的显式构造，以及对其泛性质的直接证明，例如参见 [MMMT19，第 3] 节，以及 [CG22，例 3.2。9]。

命题 2.130. 设 $\mathscr{A}$ 是一个加性范畴。 $\mathscr{A}$ 在vect上的余幂（见例5.22）是 $\mathscr{A}$上本质唯一的vect-模结构。

证明。 令add 表示有限离散范畴的集合。一个add-余完备范畴就是一个加性范畴，而add-余连续函子就是一个加性函子。

由于任何 $\Bbbk$-线性函子都保持直和，加性vect-模范畴必然在定义2.128的意义下分别加性。接着，只需注意到vect $\simeq$ add({⊛})，其中{⊛}是终端幺半范畴，即可得出结论：

$$\mathrm{StrMon}_{\mathrm{add}}(\mathrm{vect}, \mathbb{C}\mathrm{at}_{\mathrm{add}}(\mathscr{A},\mathscr{A})) \simeq \mathrm{StrMon}(\{*\}, \mathbb{C}\mathrm{at}_{\mathrm{add}}(\mathscr{A},\mathscr{A})) \simeq \{*\},$$

其中{∗}是终对象范畴，$\mathrm{StrMon}_{\mathrm{add}}$ 表示强幺半加性函子范畴。□

命题 2.131. 设 $\mathscr{A}$ 是一个具有滤过余极限的加性范畴。vect 在 $\mathscr{A}$ 上的作用可唯一延拓为 $\mathscr{A}$上的分别有限Vect-模范畴结构。

证明。 令 {add、filt} 表示由滤过图表或有限离散图表构成的集合。那么我们有 Vect $\simeq$ {add、filt}({⊛})，并且

$$\mathrm{StrMon}_{\mathrm{filt}}(\mathrm{Vect}, \mathbb{C}\text{在}_{\mathrm{add,filt}}(\mathscr{A},\mathscr{A})) = \mathrm{StrMon}_{\mathrm{add,filt}}(\mathrm{Vect}, \mathbb{C}\text{在}_{\mathrm{add,filt}}(\mathscr{A},\mathscr{A})) \simeq \mathrm{StrMon}(\{\circledast\}, \mathbb{C}\text{在}_{\mathrm{add,filt}}(\mathscr{A},\mathscr{A})) = \mathrm{StrMon}(\{\circledast\}, \mathbb{C}\text{在}_{\mathrm{filt}}(\mathscr{A},\mathscr{A})) \simeq \{*\}. \square$$

鉴于引理 2.89，滤过余极限及其余完备化（我们将其称为 *Ind*-完备化）在局部有限阿贝尔范畴的研究中尤为重要。例如，局部有限阿贝尔范畴 Ind($\mathscr{C}$)的 $\mathscr{C}$ 总是有足够多的内射对象。我们研究这些完备化的另一个原因是，余模范畴是局部有限呈示的，因此我们可以运用伴随函子的刻画，见下文命题2.133和2.134 。

定义 2.132. 范畴 $\mathscr{C}$ 中的对象 x 称为紧或有限呈示的，如果 $\mathscr{C}(x, -)$ 是有限的；也就是说，它保持滤过余极限。我们用 $\mathscr{C}_c$ 表示紧对象的全子范畴。若范畴 $\mathscr{C}$ 中的每个对象都是紧对象的滤过余极限，则称其为局部有限呈示的。

Ind-完备化的例子源于以下事实：$\mathsf{Ind}(^{\mathbb{C}}\text{向量空间}) \simeq {}^{\mathbb{C}}\mathsf{Vect}$。

命题 2.133（右伴随的特殊伴随函子定理）。若 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 是局部有限阿贝尔范畴，则存在等价

$$\mathsf{Rex}(\mathscr{C},\mathscr{D}) \xrightarrow{\mathsf{Ind}} \mathsf{Cocont}(\mathsf{Ind}(\mathscr{C}),\mathsf{Ind}(\mathscr{D})) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Map}(\mathsf{Ind}(\mathscr{C}),\mathsf{Ind}(\mathscr{D})),$$

其中，映射（$\mathscr{A}$，B）表示具有右伴随的函子所构成的范畴。

特别地，从 Ind（$\mathscr{C}$）到 Ind（$\mathscr{D}$）的函子具有右伴随，当且仅当它是余连续的；将函子 $F\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ 扩张到 Ind-余完备化后是余连续的，当且仅当 F 是右正合的。

命题 2.134（左伴随的特殊伴随函子定理）。设 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 是局部有限阿贝尔范畴。若函子 $G\colon$ Ind（$\mathscr{C}$） $\longrightarrow$ Ind（$\mathscr{D}$）连续且保滤过余极限，则它具有左伴随。

若函子 $G\colon$ Ind（$\mathscr{C}$） $\longrightarrow$ Ind（$\mathscr{D}$）具有左伴随 F，则 G 保滤过余极限，当且仅当 F 保持 $\mathscr{C}$ 中的紧对象。

命题 2.133 的后半部分由$\mathsf{Ind}(F)$ 保持有限余极限和滤过余极限推出，因此它也保持所有余极限。由于局部有限可呈范畴中的滤过余极限是正合的，左正合函子 G 的扩张$\mathsf{Ind}(G)$ 是左正合的。不过，尚不清楚$\mathsf{Ind}(G)$ 是否保持任意积。

定义 2.135. 对于局部有限阿贝尔范畴 $\mathscr{C}$，对象 $X \in \mathsf{Ind}(\mathscr{C})$ 若函子 $\mathsf{Ind}(\mathscr{C})(-, X)$ 保持任意积，则称其为有限余生成的 。

可以验证，对于满足$\mathsf{Ind}(\mathscr{C}) \simeq \mathsf{Comod}\text{-}D$ 的余代数 D，余模 M 有限余生成，当且仅当 M 嵌入某个形如 $D^{\oplus m}$ 的余模，其中 $m \in \mathbb{N}$。注意，对象 $M \in \mathsf{Ind}(\mathscr{D})$ 是紧的，当且仅当它属于嵌入 $\mathscr{D} \hookrightarrow \mathsf{Ind}(\mathscr{D})$ 的本质像。

定义 2.136. 设 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 是局部有限阿贝尔范畴。函子 $F\colon \mathsf{Ind}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathsf{Ind}(\mathscr{D})$ 称为拟有限 的，如果对任意有限余生成内射对象 I（属于$\mathsf{Ind}(\mathscr{C})$）和 $\mathscr{D}$中的紧对象 M， $\Bbbk$-向量空间$\mathsf{Ind}(\mathscr{D})(M, FI)$都是有限维的。

利用引理 $\mathscr{C} \simeq {}^{\mathbb{C}}\mathsf{vect}$ 2.89中的等价，以下结果直接由 [Tak77，命题 1.3]得出。

命题 2.137。设 $G\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ 是局部有限阿贝尔范畴之间的左正合函子。当且仅当该函子是拟有限的，函子$\mathsf{Ind}(G)$ 才有左伴随。

对于有限阿贝尔范畴，有一个更强的结果，它直接源于双模范畴的 Eilenberg–Watts 定理，参见例如 [FSS20，引理 2。1]。

命题 2.138. 有限阿贝尔范畴之间的函子 $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ 是右正合的，当且仅当它有右伴随函子；是左正合的，当且仅当它有左伴随函子。

回忆一下，在一个具有 Φ-余极限的范畴 $\mathcal{A}$ 中，对象 A 若函子 $\mathcal{A}(A,-)$ 保持这些余极限，则称其为 Φ- 小对象。

引理 2.139. 设 $G\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ 是一个 Φ-余连续函子，并假设 G 有左伴随函子 F。那么 F 将 Φ-小对象映为 Φ-小对象。

证明。 设 $x \in \mathcal{D}$ 是一个 Φ-小对象。那么

$$\mathcal{C}(Fx,-) \cong \mathcal{D}(x,G(-)) = \mathcal{D}(x,-) \circ G.$$

因此，函子 $\mathcal{C}(Fx,-)$ 自然同构于两个Φ-余连续函子的复合，故其自身也是一个 Φ-余连续函子。□

愿它在黑暗之地为你带来光明，即使
其他所有光芒都已熄灭。

J. R. R. 托尔金；《魔戒同盟》

3 幺半范畴的对偶理论

本章节旨在比较幺半范畴中几种“对偶”的概念。一方面是闭性，它体现了集合范畴中的张量-同态伴随；另一方面是刚性，它推广了有限维向量空间的对偶。Grothendieck– Verdier 对偶理论 [BD13], 也称为 $*$-自性 [Bar79], 描述了刚性的严格限制与幺半闭性的极其一般概念之间的一种对偶理论。粗略地说，Grothendieck–Verdier 范畴由一个闭幺半范畴和一个选定的对偶化对象构成，并且到该对象的内 Hom 诱导出范畴反等价。虽然闭范畴和刚性范畴都有左、右变体，但 Grothendieck–Verdier 对偶理论本质上是一个兼具左右两面的概念。

我们的首要目标是更深入地考察命题 2.67的逆命题，另见注 2.68。也就是说，我们研究能否仅通过验证内 Hom 由与某个对象作张量积给出，来判定一个闭幺半范畴是否为刚性范畴。感谢 Chris Heunen 在 BCQT2022年 暑期学校上提出这一点在一般情况下或许并不成立。

定理 3.23。 存在一个非刚性的张量可表范畴。

特别是，将定理 3.23、命题 3.16 和例子3.17，以及命题 3.12 和例子 3.15合在一起，可得一个严格层级：

$$\text{刚性} \subsetneq \text{张量可表} \subsetneq \text{格罗滕迪克–韦尔迪耶} \subsetneq \text{闭合}。$$

对于第二个包含映射，我们假设比较张量可表性的左手版本和右手版本的自然变换是可逆的，见命题 3.7和 3.16。对于刚性范畴，情况总是如此。

接下来，我们研究赋有 Day 卷积作为张量积的函子范畴上的闭合结构和 Grothendieck–Verdier 结构。给定一个足够良好的基范畴，函子范畴便继承了这些对偶结构。

命题 3.27。 设 $\mathscr{C}$ 是一个 $\Bbbk$-线性的 *Hom-有限 Grothendieck–Verdier* 范畴。若假设 3.25 成立——所有相关余端均存在且为有限维向量空间——则 $[\mathscr{C}, \mathsf{vect}]$ 是一个 *Grothendieck–Verdier* 范畴。

我们还将研究柯西完备化的对偶性质。由于我们使用函子范畴 $[\mathcal{C},\mathsf{vect}]$，而不是预层 $[\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathsf{vect}]$，，所以我们研究 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 关于 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 的柯西完备化，它是自由余完备化 $\widehat{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} = [\mathcal{C},\mathsf{vect}]$ 关于 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 的子范畴。回忆一下方程（2.8.9）中米田嵌入的定义。

推论 3.43. 设 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 是一个 $\Bbbk$-线性右闭幺半范畴。

(i) $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 是右刚性的，当且仅当其柯西完备化 $\widehat{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ 是右刚性的。*(ii)* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 是右张量可表的，当且仅当 $\widehat{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ 是。*(iii)* $(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, d)$ 是右 *Grothendieck–Verdier* 范畴，当且仅当 $(\widehat{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}, \text{よ}_d)$ 是。

本章最后考察了阿贝尔闭幺半函子范畴的三个例子。第一个例子是有限布尔代数，它最初源于序理论和泛代数的研究；与 Grothendieck–Verdier 对偶的联系已在 [Bar79] 中提及。

关于代数何时为 3.53 qf-2，请参见定义。

命题 3.54. 有限布尔代数的路径代数是 QF-2。

随后，我们将研究有限维 Mackey 函子的范畴。这类对象抽象并推广了经典表示论中的诱导、限制和共轭函子 [Lin76;TW95；Web00]。

命题3.57。 设 G 是一个有限群，并设 $\Bbbk$ 是一个域。范畴 $\mathsf{mky}_{\Bbbk}(G)$ 是一个 *Grothendieck–Verdier* 范畴，其刚性对象恰好是有限生成投射 *Mackey* 函子。此外，$\mathsf{mky}_{\Bbbk}(G)$ 是刚性的，当且仅当 *Mackey* 代数 $\mathbb{M}G$ 是半单的；这等价于 $\operatorname{char}\Bbbk$ 不整除 G的阶。

最后，我们将讨论严格 2-群及其作为交叉模的等价表述 [Wag21]。它们与 r-范畴有关；这是 Grothendieck–Verdier 对偶的一个特例，其中对偶化对象与幺半单位同构。

命题 3.65。 设 G 和 H 是有限群，并假设假设

$$\big(G,\, H,\, t\colon H \longrightarrow G,\, \alpha\colon G \longrightarrow \operatorname{Aut}(H)\big)$$

是一个交叉模。令 $\mathfrak{G}$ 为它所关联的严格 2-群。范畴 $\mathsf{rep}_{\mathfrak{G}}(\ker t)$ 是 $\ker t$ 的有限维表示范畴，是一个右 r-范畴。

3.1 张量可表性

定义 3.1. 若存在一个 $x \in \mathcal{C}$ 使得 $F \cong x \otimes -$，则称幺半范畴的自函子 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ 是右张量可表的。

命题2.67指出，刚性幺半范畴的内 Hom 在每个对象处都是张量可表示的。从现在起，为简洁起见，我们将简称为“（幺半）张量可表范畴”，而不再称为“内 Hom 张量可表示的闭幺半范畴”。如下文引理 3.5 所示，这等价于以下定义，而该定义不依赖于闭性。

定义 3.2. 若幺半范畴 $\mathcal{C}$ 满足：对于所有 $x \in \mathcal{C}$，都存在一个对象 $Rx \in \mathcal{C}$，称为 x 的右张量对偶，使得 $x \otimes - \dashv Rx \otimes -$，则称其为右张量可表。

若幺半范畴 $\mathcal{C}$ 是左张量可表的，则称其为右张量可表。同时左、右张量可表的范畴称为张量可表。

张量可表范畴涵盖所有刚性幺半范畴。因此，关于后者理论中的一些结果也适用于前者。例如，以下结果在刚性幺半阿贝尔范畴的情形下广为人知，参见 [EGNO15，推论 4.2。13]。

引理 3.3. 阿贝尔幺半右张量可表示范畴中的所有对象都是投射对象，当且仅当其单位对象是投射对象。

证明。 由于第一个断言蕴含第二个断言，我们只需证明其逆命题。取阿贝尔右张量可表示范畴 $\mathcal{A}$中的一个对象 x。存在一串伴随

$$x \otimes - \dashv Rx \otimes - \dashv R^2x \otimes - \dashv \dots.$$

因此，函子 $Rx\otimes -\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ 有左伴随函子和右伴随函子，故为正合函子。于是，$\mathcal{A}(x, -) \cong \mathcal{A}(1, Rx \otimes -)$ 作为正合函子的复合，本身也是正合的。□

尽管引理2.64 在刚性情形下成立，但对张量可表范畴而言未必成立：给定一个强幺半函子 F，对象 x 的像 Fx 本身可能不具有右张量对偶，即使该对象具有右张量对偶。不过，幺半等价保持这一性质。

引理 3.4。设 $\mathscr{C}$ 是一个右张量可表示范畴，并设 $\mathscr{D}$ 是幺半的。任意强幺半伴随等价 $F\colon \mathscr{C} \rightleftarrows \mathscr{D} : F^{-1}$ 都会赋予 $\mathscr{D}$ 一个右张量可表示结构。

证明。对任意 $x \in \mathscr{D}$，定义 $Dx \coloneqq FRF^{-1}x \in \mathscr{D}$，其中 $RF^{-1}x$ 是 $F^{-1}x \in \mathscr{C}$的右张量对偶。因此，$Dx \otimes -$ 是 $x \otimes -$的右伴随函子：

$$\begin{aligned}\mathscr{D}(x \otimes y, z) &\cong \mathscr{C}(F^{-1}(x \otimes y), F^{-1}z) \cong \mathscr{C}(F^{-1}x \otimes F^{-1}y, F^{-1}z) \\ &\cong \mathscr{C}(F^{-1}y, RF^{-1}x \otimes F^{-1}z) \cong \mathscr{D}(FF^{-1}y, F(RF^{-1}x \otimes F^{-1}z)) \\ &\cong \mathscr{D}(y, FRF^{-1}x \otimes z) = \mathscr{D}(y, Dx \otimes z).\end{aligned}$$

因此，$\mathscr{D}$ 是右张量可表的。 □

与刚性情形一样，闭性与张量可表性之间的关系由一族自然同构所支配。

引理 3.5。幺半范畴 $\mathscr{C}$ 是右张量可表的，当且仅当它是右闭幺半的，并且对所有 $x \in \mathscr{C}$，都存在同构

$$\varphi_y^{(x)}\colon [x,y]_r \longrightarrow [x,1]_r \otimes y \qquad \textit{natural in } y \in \mathscr{C}. \tag{3.1.1}$$

证明。对于每个 $x \in \mathscr{C}$，在右张量可表范畴 $\mathscr{C}$中，根据定义，存在一个对象 $Rx \in \mathscr{C}$，使得 $Rx \otimes -$ 是 $x \otimes -$的右伴随函子。因此，范畴 $\mathscr{C}$ 是右闭幺半范畴，而从 $x \in \mathscr{C}$ 出发的内 Hom 由 $Rx \otimes -$给出。注意到，等式（3.1.1）现在甚至是函子性等式 $Rx \otimes - = Rx \otimes 1 \otimes -$，即可得出结论。

反之，对所有 $x \in \mathscr{C}$ 存在一个同构

$$\mathscr{C}(y, [x,z]_r) \cong \mathscr{C}(x \otimes y, z) \cong \mathscr{C}(y, [x,1]_r \otimes z)$$

在 $y, z \in \mathscr{C}$中自然；该结果由米田引理得出。 □

定义 3.6. 假设 $\mathscr{C}$是一个右张量可表示范畴。由引理3.5，它是右闭幺半的。则 $R \coloneqq [-,1]_r\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathscr{C}$ 称为 $\mathscr{C}$的右（张量）对偶化函子。类似地，$L \coloneqq [-,1]_\ell\colon \mathscr{D}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathscr{D}$是左张量可表示范畴 $\mathscr{D}$的左（张量）对偶化函子。

右刚性幺半范畴同时也是左刚性的，当且仅当其右对偶化函子是范畴等价。在张量可表示情形中，情况会更复杂。假设 $\mathscr{C}$ 属于这类范畴。

分别将右张量对偶函子和左张量对偶函子记为 $R\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathscr{C}$ 和 $L\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathscr{C}$。令

$$\eta_y^{(x)}\colon y \longrightarrow Rx \otimes x \otimes y, \qquad \varepsilon_y^{(x)}\colon x \otimes Rx \otimes y \longrightarrow y,$$
$$u_y^{(x)}\colon y \longrightarrow y \otimes x \otimes Lx, \qquad c_y^{(x)}\colon y \otimes Lx \otimes x \longrightarrow y$$

对应伴随中的单位和余单位。左、右张量对偶化函子之间的关系为

$$x \xrightarrow{u_x^{(Rx)}} x \otimes Rx \otimes LRx \xrightarrow{\varepsilon_1^{(x)} \otimes LRx} LRx, \tag{3.1.2}$$
$$x \xrightarrow{\eta_x^{(Lx)}} RLx \otimes Lx \otimes x \xrightarrow{RLx \otimes c_1^{(x)}} RLx. \tag{3.1.3}$$

命题 3.7。 右对偶化函子 $R\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathscr{C}$ 张量可表范畴 $\mathscr{C}$ 的右伴随是 $L^{\mathrm{op}}\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}^{\mathrm{op}}$。此外， R 是等价，当且仅当方程 (3.1.2) 和 (3.1.3) 中的典范态射可逆。在此情形下， L^{op} 是 R的拟逆。

证明。 对于任意两个对象 $x, y \in \mathscr{C}$，有

$$\mathscr{C}^{\mathrm{op}}(Lx, y) = \mathscr{C}(y, Lx) \cong \mathscr{C}(y \otimes x, 1) \cong \mathscr{C}(x, Ry).$$

直接计算可得，此伴随的单位和余单位由方程 (3.1.2)和 (3.1.3) 中所示的自然变换给出。如果这些态射可逆，则 R 与 L^{op} 互为拟逆。

反过来，假设 R 是范畴等价。由于任何等价都可以改进为伴随等价，且伴随在唯一自然同构意义下唯一， L^{op} 必定是 R 的拟逆，并且方程 (3.1.2) 和 (3.1.3) 中的单位态射和余单位态射可逆。□

3.1.1 *Grothendieck–Verdier* 对偶

我们将大致遵循 [BD13]中的记号和术语。

定义 3.8。 （右）*Grothendieck–Verdier* 范畴由一对 $(\mathscr{C}, d)$ 组成，其中包括一个幺半范畴 $\mathscr{C}$ 和一个对象 $d \in \mathscr{C}$，并且对所有 $x \in \mathscr{C}$，都存在一个表示对象 $D_r x \in \mathscr{C}$，对应于 $\mathscr{C}(x \otimes -, d)$；即，

$$\mathscr{C}(x \otimes -, d) \cong \mathscr{C}(-, D_r x), \tag{3.1.4}$$

且由此诱导的右对偶化函子 $D_r\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathscr{C}$ 是一个范畴等价。若 $d = 1$是幺半单位，则称其为 r-范畴。

由于 D_r 是等价，因此还可得到

$$\mathcal{C}(x \otimes y, d) \cong \mathcal{C}(y, D_r x) \cong \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(D_\ell^{-1} y, x) = \mathcal{C}(x, D_r^{-1} y), \quad \text{for all } x, y \in \mathcal{C}. \tag{3.1.5}$$

注 3.9。在 [BD13], 中，作者转而考虑一对$(\mathcal{C}, d)$，并要求满足自然同构 $\mathcal{C}(-\otimes y, d) \cong \mathcal{C}(-, D_\ell y)$，使得由此诱导的函子 $D_\ell\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}$ 是一个等价。在我们的框架中，我们将称其为 $\mathcal{C}$上的左格罗滕迪克–韦尔迪耶范畴结构，其左对偶化函子为 D_ℓ。方程 (3.1.4) 和 (3.1.5) 变为

$$\mathcal{C}(x \otimes y, d) \cong \mathcal{C}(x, D_\ell y) \cong \mathcal{C}(y, D_\ell^{-1} x). \tag{3.1.6}$$

备注 3.10. 请注意，备注 3.9中的术语乍看之下可能会造成误导。由于 Grothendieck–Verdier 范畴的对偶化函子假定为等价，Grothendieck–Verdier 结构总是双侧的。根据公式 (3.1.5，右 Grothendieck–Verdier 范畴 $(\mathcal{C}, d)$ 也是左 Grothendieck–Verdier 范畴，且具有相同的对偶化对象 d，并且 $D_r^{-1} = D_\ell$同样如此。类似地，所有左 Grothendieck–Verdier 范畴也都是右侧的。

为清晰起见并体现方向性偏向，Grothendieck–Verdier 结构通常仍会明确加上前缀。特别是，在第 3.2 节 中，我们考察 $\overbrace{\quad}$余预层范畴 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 在格罗滕迪克–韦尔迪耶基范畴$\mathcal{C}$上的诱导 Grothendieck–Verdier 结构。在这种情况下，左 对偶化函子 $\mathcal{C}$ 自然导出一个右$\overbrace{\quad}$对偶化函子 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$；见命题 3.27。

Grothendieck–Verdier 范畴的对称性与刚性和张量可表性的单向性形成鲜明对比。

例 3.11。考虑一个对极不可逆的霍普夫代数 H，参见 [Sch00b]。它的有限维右余模构成一个左刚性范畴 comod-H；正如 [Ulb90, 注 2], 中所述，该范畴并非右刚性。若 comod-H 是一个 Grothendieck–Verdier 范畴，那么根据注 3.13，必存在一个余模 $M \in$ comod-H，使得 ${}^\vee(-) \otimes M$: (comod-H)$^{\mathrm{op}} \longrightarrow$ comod-H 是范畴等价。这将意味着 M 是一维的，因此左对偶化函子 ${}^\vee(-)$: comod-$H^{\mathrm{op}} \longrightarrow$ comod-H 将是一个等价——矛盾。

以下命题也在 [BD13 第 2], 节中讨论，是方程（3.1.4）和（3.1.5）的直接推论。

命题 3.12。 每个（右）*Grothendieck–Verdier* 范畴 $(\mathscr{C}, d)$ 都是闭幺半范畴；对于所有 $x, y \in \mathscr{C}$，左、右内部 *Hom* 分别为

$$\begin{aligned}[x,y]_\ell &:= D_r^{-1}(x \otimes D_r y) = D_\ell(x \otimes D_\ell^{-1} y),\\ [x,y]_r &:= D_r(D_r^{-1} y \otimes x) = D_\ell^{-1}(D_\ell y \otimes x).\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

注 3.13。 若 $(\mathscr{C}, d)$ 是一个 Grothendieck–Verdier 范畴，则将其对偶化函子作用于 $\mathscr{C}$的幺半单位，即可得到其对偶化对象。事实上，正如 [BD13，注 2.1.(4)], 所示，这种关系是双向的：

$$D_r 1 \cong d, \quad D_r d \cong 1, \quad D_\ell 1 \cong d, \quad D_\ell d \cong 1, \quad D_r^2 1 \cong 1, \quad D_\ell^2 d \cong d. \tag{3.1.8}$$

结合命题 3.12，可得出 $\mathscr{C}$的对偶函子的显式描述：

$$D_r x \cong [x,d]_r \qquad \text{and} \qquad D_\ell x = D_r^{-1} x \cong [x,d]_\ell, \qquad \text{for all } x \in \mathscr{C}. \tag{3.1.9}$$

虽然 Grothendieck–Verdier 对偶是幺半范畴上的额外结构——先验地看，它与其他对偶截然不同——但实际上它的表现仍与一种性质十分相似，因为可逆对象决定了对偶化对象的可能选择。

引理 3.14 ([BD13，命题 2.3])。 给定一个右 *Grothendieck–Verdier* 范$(\mathscr{C}, d)$ 其可逆对象与对偶化对象构成的满子范畴之间存在一个反等价，定义如下：

$$\mathrm{Inv}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathrm{Dual}(\mathscr{C}), \qquad \alpha \longmapsto \alpha^{-1} \otimes d.$$

例 3.15. 集合及其通常的笛卡尔幺半结构所构成的范畴 (集合范畴, ×,1) 是闭幺半范畴。若某个集合 X 可逆，则它必与终对象集合 1 同构。因此，要推得 集合范畴上不存在格罗滕迪克–韦尔迪耶结构，只需证明函子 集合范畴(–, 1) 不是反等价；这由 1 是终对象即可得出。

现在我们来刻画格罗滕迪克–韦尔迪耶范畴与张量可表范畴之间的关系。

命题 3.16. 设 $\mathscr{C}$ 是一个张量可表范畴。那么，以下陈述等价：

(i) 右对偶化函子存在拟逆，

（*ii*）范畴 $\mathscr{C}$ 是一个 r-范畴，且（*iii*）范畴 $\mathscr{C}$ 是一个 *Grothendieck–Verdier* 范畴。

证明。根据定义，我们有 (ii) $\Longrightarrow$ (iii)，且 (i) $\Longrightarrow$ (ii) 由定义 3.6和注记 3.13 得出。

为证明 （iii） $\Longrightarrow$ （ii），假设 $\mathscr{C}$ 是一个 Grothendieck–Verdier 范畴，其对偶化对象为 $d \in \mathscr{C}$。记 $L,\ R\colon\ \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathscr{C}$ 分别为其左、右张量对偶化函子，并记 $D_r\colon\ \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathscr{C}$ 为由 $d \in \mathscr{C}$诱导的对偶化函子。于是

$$Rd \otimes d \overset{(3.1.1)}{\cong} [d,d]_r \overset{(3.1.7)}{\cong} D_r(D_r^{-1}d \otimes d) \overset{(3.1.8)}{\cong} D_r d \overset{(3.1.8)}{\cong} 1,$$
$$d \otimes Ld \overset{(3.1.1)}{\cong} [d,d]_\ell \overset{(3.1.7)}{\cong} D_r^{-1}(d \otimes D_r d) \overset{(3.1.8)}{\cong} D_r^{-1} d \overset{(3.1.8)}{\cong} 1,$$

因此 $d \otimes Rd \cong d \otimes Rd \otimes d \otimes Ld \cong 1$。换言之，$d$ 是可逆的，而 $1 \cong Rd \otimes d$ 根据引理 3.14，是另一个对偶化对象。

为完成证明，注意，将 $\mathscr{C}$ 视为一个 r-范畴时，其右对偶化函子与其右张量对偶化函子一致。□

例 3.17。命题3.7的逆命题并不成立。设 A 是域 $\Bbbk$上的交换 Frobenius 代数。记 $A\text{-mod}^{\mathrm{f.g.}}$ 为有限生成左 A-模构成的范畴。可以证明，参见例如 [Lam99，第 15 节及 16]，，对所有 $M \in A\text{-mod}$，典范态射

$$\phi_M\colon M \longrightarrow M^{\vee\vee} = \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(M,A),A), \qquad \phi_M(x)\alpha = \alpha(x)$$

是一个同构；模 M 称为自反。

换言之，$A\text{-mod}^{\mathrm{f.g.}}$ 是一个带有 r 的范畴

$$\mathrm{Hom}_A(-,A)\colon (A\text{-mod}^{\mathrm{f.g.}})^{\mathrm{op}} \longrightarrow A\text{-mod}^{\mathrm{f.g.}}$$

作为对偶化函子。众所周知，对任意 A-模 M，存在一个 A-模 N，使得 $M \otimes - \dashv N \otimes -$ 当且仅当 M 是有限生成投射的；参见例如 [NW17，命题 2。1]因此，$A\text{-mod}^{\mathrm{f.g.}}$ 是张量可表示的，当且仅当所有（有限生成）A-模都是投射的，这等价于 A 是半单的。

然而，并非所有交换 Frobenius代数都是半单的。例如，有限阿贝尔群 G 的群代数 $\Bbbk[G]$ 是 Frobenius 代数。根据 Maschke 定理，它是半单的，当且仅当 $\Bbbk$ 的特征不整除 G 的阶。

注3.18. 设 $\mathcal{C}$ 为一个右张量可表示范畴，其对偶化函子 $R\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}$ 是一个等价。按照 [BD13，第 4]，节，对所有x，$y \in \mathcal{C}$ 存在一个典范同构

$$\begin{aligned}\tau_{x,y}\colon \mathcal{C}(y \otimes x \otimes Rx \otimes Ry, 1) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(Rx \otimes Ry, R(y \otimes x)) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(y \otimes x, R^{-1}(Rx \otimes Ry)).\end{aligned}$$

如 [BD13，引理4.1和备注4.2],中的态射

$$f := \tau_{x,y}\big(\varepsilon_1^{(y)} \circ (y \otimes \varepsilon_1^{(x)} \otimes Ry)\big)\colon R^{-1}(Rx \otimes Ry) \longrightarrow y \otimes x$$

$$\mu_{x,y} := Rf\colon Rx \otimes Ry \longrightarrow R(y \otimes x) = R(x \otimes^{\mathrm{op}} y)$$

赋予 $R\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op},\ \mathrm{rev}} \longrightarrow \mathcal{C}$ 松幺半函子的结构：

$$\begin{aligned}&\mu_{x,y\otimes^{\mathrm{op}}z} \circ (Rx \otimes \mu_{y,z}) = \mu_{x\otimes^{\mathrm{op}}y,z} \circ (\mu_{x,y} \otimes Rz), \\ &\mu_{1,x} \circ (R1 \otimes Rx) = \mathrm{id}_{Rx} = \mu_{x,1} \circ (Rx \otimes R1), \qquad \text{for all } x, y, z \in \mathcal{C}.\end{aligned}$$

在上述备注的情形下，并由 [BD13，命题4.4], 可得刚性的以下刻画。

命题3.19。 设右张量可表示范畴的对偶化函子 $R\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op},\ \mathrm{rev}} \longrightarrow \mathcal{C}$ 是一个等价。那么 $\mathcal{C}$ 是刚性的，当且仅当态射$\mu_{x,\ y}\colon R(-) \otimes R(=) \Longrightarrow R(- \otimes^{\mathrm{op}} =)$ 是同构，从而使 R 成为强幺半函子。

3.1.2 自由张量可表示范畴并非刚性

本节的目的是具体化注记2.68。也就是说，我们显式构造一个“自由”张量可表范畴 $\mathcal{W}$，并证明它不是刚性的；参见定理3.23。由于该证明依赖于一些技术论证，我们将首先概述基本策略。

作为构造 $\mathcal{W}$ 的一个中间步骤，我们定义一个严格幺半范畴 $\mathcal{V}$，它与 $\mathcal{W}$ 具有相同的生成元，但关系更少。换言之，$\mathcal{W}$ 本身将是 $\mathcal{V}$ 的一个商。范畴 $\mathcal{V}$ 具有这样的性质：给定态射的所有表示长度都相同。为了证明 $\mathcal{W}$ 不是刚性的，我们固定一个对象 $t \in \mathcal{W}$，并假设它存在刚性对偶。特别地，t 必须存在求值态射和余求值态射 $\mathrm{ev}_t\colon t \otimes t^\vee \longrightarrow 1$ 以及 $\mathrm{coev}_t\colon 1 \longrightarrow t^\vee \otimes t$。通过证明 $\mathcal{V}$ 中任何表示类 $(\mathrm{ev}_t \otimes t) \circ (t \otimes \mathrm{coev}_t) \in \mathcal{W}(t,\ t)$ 的态射，其长度都至少为 2，我们得出蛇形恒等式不可能成立。因此，$\mathcal{W}$ 不是刚性的。

我们根据生成元和关系来定义严格幺半范畴 $\mathcal{V}$。关于这类构造的详情，请参阅 [Kas98，第 XII] 章。

范畴 $\mathcal{V}$ 的对象幺半群由字母表 $\{\ldots, R^{-1}t, t, Rt, \ldots\}$ 自由生成。也就是说，其元素是有限长度的词，字母为 $R^n t$，其中 $n \in \mathbb{Z}$ 是某个整数。将 $1 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$ 记作 $\mathcal{V}$ 的幺半单位，即空词。对于对象 $w ::= (R^{k_1}t, \ldots, R^{k_n}t) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$，令 $Rw ::= (R^{k_n+1}t, \ldots, R^{k_1+1}t) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$。此指派扩展为自由阿贝尔群 $R \cong (\mathbb{Z}, +)$ 在 $\mathrm{Ob}(\mathcal{V})$ 上的群作用。对于任意 $i \in \mathbb{Z}$，我们将 $R^i w$ 记作 R^i 对 $w \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$ 的作用。

$\mathcal{V}$ 的态射是恒等态射与生成态射的张量积和复合。对所有 $x \neq 1, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$，这些态射定义如下：

$$\eta_y^{(x)} \colon y \longrightarrow Rx \otimes x \otimes y, \qquad \varepsilon_y^{(x)} \colon x \otimes Rx \otimes y \longrightarrow y,$$
$$u_y^{(x)} \colon y \longrightarrow y \otimes x \otimes R^{-1}x, \qquad c_y^{(x)} \colon y \otimes R^{-1}x \otimes x \longrightarrow y.$$

这些关系旨在实现自然变换

$$\eta^{(x)} \colon \mathrm{Id}_{\mathcal{V}} \Longrightarrow Rx \otimes x \otimes -, \qquad \varepsilon^{(x)} \colon x \otimes Rx \otimes - \Longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{V}},$$
$$u^{(x)} \colon \mathrm{Id}_{\mathcal{V}} \Longrightarrow - \otimes x \otimes R^{-1}x, \qquad c^{(x)} \colon - \otimes R^{-1}x \otimes x \Longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{V}}.$$

具体而言，对于任意生成态射 $g \colon c \longrightarrow d$、任意 $y = a \otimes c \otimes b, z = a \otimes d \otimes b$、任意箭头 $f = (\mathrm{id}_a \otimes g \otimes \mathrm{id}_b) \colon y \longrightarrow z$，以及所有 $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V}) \setminus \{1\}$，我们要求满足以下条件：

$$\eta_z^{(x)} \circ f = (Rx \otimes x \otimes f) \circ \eta_y^{(x)}, \qquad \varepsilon_z^{(x)} \circ (x \otimes Rx \otimes f) = f \circ \varepsilon_y^{(x)},$$
$$u_z^{(x)} \circ f = (f \otimes x \otimes R^{-1}x) \circ u_y^{(x)}, \qquad c_z^{(x)} \circ (f \otimes R^{-1}x \otimes x) = f \circ c_y^{(x)}.$$

通过取商消去三角恒等式，我们得到张量可表范畴 $\mathcal{W}$。[6] 更详细地说，严格幺半范畴 $\mathcal{W}$ 与 $\mathcal{V}$ 具有相同的对象和生成态射，并且恒等关系也相同。此外，对于任意 $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{W})$ 且满足 $x \neq 1$，我们要求

[6] 该范畴通过幺半局部化得到，参见 [Day73]。

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{x\otimes y}^{(x)} \circ (x \otimes \eta_y^{(x)}) = \mathrm{id}_x, \qquad (Rx \otimes \varepsilon_y^{(x)}) \circ \eta_{Rx\otimes y}^{(x)} = \mathrm{id}_{Rx}, \\
&c_{y\otimes x}^{(x)} \circ (u_y^{(x)} \otimes x) = \mathrm{id}_x, \quad (c_y^{(x)} \otimes R^{-1}x) \circ u_{y\otimes R^{-1}x}^{(x)} = \mathrm{id}_{R^{-1}x}, \\
&(\varepsilon_1^{(x)} \otimes x) \circ u_x^{(Rx)} = \mathrm{id}_x, \qquad (x \otimes c_1^{(x)}) \circ \eta_x^{(R^{-1}x)} = \mathrm{id}_x.
\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

下一个结果简洁地总结了迄今为止关于 $\mathcal{W}$ 的内 Hom 所作的观察。

引理 3.20。 范畴 $\mathcal{W}$ 是张量可表示的。此外，其右对偶化函子 $R: \mathcal{W}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{W}$ 是范畴等价。

证明。 根据构造，我们有 $x \otimes - \dashv Rx \otimes -$ 以及 $- \otimes x \dashv - \otimes R^{-1}x$ 对所有$x \in \mathcal{W}$。因此， $\mathcal{W}$ 是张量可表示的。方程（3.1.10）和命题 3.7表明 $R: \mathcal{W}_{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{W}$和 $R^{-1}: \mathcal{W}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{W}$互为拟逆。□

为了分析 $\mathcal{W}$ 中的态射并证明它不是刚性幺半范畴，我们将借助两种工具。第一种是箭头 $f \in \mathcal{W}\ (x,\ y)$ 的长度 。它定义为表示f所需的生成态射的最少数量。第二种工具是 $\mathcal{W}$ 中态射的不变量，这些不变量来自指向域 $\Bbbk$上有限维向量空间所成的刚性幺半范畴vect 的函子。我们将把vect的右刚性对偶化函子记为$(-)^*: \mathrm{vect}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{vect}$ 。有限维向量空间 V 的 n重对偶记为 $V^{(n)}$。

引理 3.21. 对于所有 $V \in$ 向量空间 ，存在一个强幺半函子 $F_V: \mathcal{W} \longrightarrow$ 向量空间，满足 $F_V(R^n t) \cong V^{(n)}$，对所有 $n \in \mathbb{Z}$以及

$$F_V(\eta_y^{(x)}) = \mathrm{coev}^r_{F_V x} \otimes F_V y, \qquad F_V(\varepsilon_y^{(x)}) = \mathrm{ev}^r_{F_V x} \otimes F_V y,$$
$$F_V(u_y^{(x)}) = F_V y \otimes \mathrm{coev}^\ell_{F_V x}, \qquad F_V(c_y^{(x)}) = F_V y \otimes \mathrm{ev}^\ell_{F_V x},$$

对于适当选取的求值态射和余求值态射。

证明. 定理 2.72 给出一个幺半等价 $G:$ 向量空间 $\rightleftarrows \mathcal{A}: H$，它将有限维向量空间范畴与一个刚性幺半范畴$\mathcal{A}$等同起来；该范畴的对偶化函子 $D_\ell, D_r: \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{A}$ 满足 $D_\ell D_r^{\mathrm{op}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}} = D_r^{\mathrm{op}} D_\ell$。固定一个拟逆 $H: \mathcal{A} \longrightarrow$ 向量空间，并选取一个对象 $v \in \mathcal{A}$，使得 $H(v) \cong V$，其中某个 $V \in$ 属于向量空间。利用 $\mathcal{W}$的泛性质直接计算（例如参见 [Kas98，命题 xii.1.4],），可知对于任意对象 $v \in \mathcal{A}$，存在唯一的严格幺半函子 $F'_v: \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{A}$，使得 $F'_v(t) = v$，且对于所有 $x, y \in \mathcal{W}, x \neq 1$，我们有

$$F'_v \eta_y^{(x)} = \mathrm{coev}^r_{F'_v x} \otimes F'_v y, \qquad F'_v \varepsilon_y^{(x)} = \mathrm{ev}^r_{F'_v x} \otimes F'_v y,$$
$$F'_v u_y^{(x)} = F'_v y \otimes \mathrm{coev}^\ell_{F'_v x}, \qquad F'_v c_y^{(x)} = F'_v y \otimes \mathrm{ev}^\ell_{F'_v x}.$$

现在令 $F = HF'_{G(V)}$，该断言即得。 □

推论 3.22. 对任意 $1 \neq x \in \mathcal{W}$以及任意态射 $g \in \mathcal{W}(a_1 \otimes y \otimes b_1, a_2 \otimes z \otimes b_2)$，下列态射不可能是同构：

$$(\mathrm{id}_{a_2} \otimes u_z^{(x)} \otimes \mathrm{id}_{b_2}) \circ g, \qquad g \circ (\mathrm{id}_{a_1} \otimes \varepsilon_y^{(x)} \otimes \mathrm{id}_{b_1}).$$

证明。 假设 $g \in \mathcal{W}(a_1 \otimes y \otimes b_1,\ a_2 \otimes z \otimes b_2)$ 并考虑

$$f \coloneqq g \circ (\mathrm{id}_{a_1} \otimes \varepsilon_y^{(x)} \otimes \mathrm{id}_{b_1}).$$

令 $V \in \mathsf{vect}$ 为一个维数至少为二的向量空间。将 F_V 应用于 f，得到 $F_V f = F_V g \circ F_V(\mathrm{id}_{a_1} \otimes \varepsilon_y^{(x)} \otimes \mathrm{id}_{b_1})$。然而，由于其源和目标的维数不同，$F_V(\mathrm{id}_{a_1} \otimes \varepsilon_y^{(x)} \otimes \mathrm{id}_{b_1})$ 必然具有非平凡的核，因此 f不可能是同构。

涉及余核的类似论证表明，复合 $(\mathrm{id}_{a_2} \otimes u_z^{(x)} \otimes \mathrm{id}_{b_2}) \circ g$ 不是可逆的。□

定理3.23。 范畴 $\mathcal{W}$ 不是刚性的。

证明。 假设 $t \in \mathcal{W}$ 具有一个右刚性对偶 $x \in \mathcal{W}$。根据伴随的唯一性，存在同构 $\vartheta\colon Rt \otimes t \longrightarrow x \otimes t$和 $\theta\colon x \longrightarrow Rt$，使得求值态射和余求值态射由下式给出

$$\mathrm{coev} \coloneqq \vartheta \circ \eta_1^{(t)}\colon 1 \longrightarrow x \otimes t, \qquad \mathrm{ev} \coloneqq \varepsilon_1^{(t)} \circ (t \otimes \theta)\colon t \otimes x \longrightarrow 1.$$

令 $\pi\colon \mathcal{V} \twoheadrightarrow \mathcal{W}$ 为投影函子。我们考虑集合

$$S \coloneqq \left\{ (\varepsilon_1^{(t)} \otimes t)\, \phi\, (t \otimes \eta_1^{(t)}) \in \mathcal{V}(t,t) \;\middle|\; \begin{array}{l} \phi \in \mathcal{V}(t \otimes Rt \otimes t,\, t \otimes Rt \otimes t) \\ \text{such that } \pi(\phi) \text{ is invertible} \end{array} \right\}.$$

注意，$S \subseteq \mathrm{Mor}(\mathcal{V})$。根据构造，存在一个态射 $s \in S$，使得复合箭头 $(\mathrm{ev} \otimes t) \circ (t \otimes \mathrm{coev}) = \pi(s)$ 对应于蛇形恒等式之一。此外，S 中的每个元素长度至少为二。[7] 因此，只需证明 S 在由.....产生的关系下闭合

方程（3.1.10），由此可得 $\pi(s) \neq$ 恒等$_t$，证明完毕。

考虑任意一个元素$f \coloneqq (\varepsilon_1^{(t)} \otimes t) \circ \phi \circ (t \otimes \eta_1^{(t)}) \in S$。我们需要研究两种“变换”。首先，假设我们将一个恒等态射展开为方程（3.1.10）中展示的某个态射。这相当于对 ϕ与一个箭头 $\psi \in \mathcal{V}(t \otimes Rt \otimes t, t \otimes Rt \otimes t)$进行前复合或后复合，该箭头投影到 $\mathcal{W}$中的一个同构，从而得到 S中的另一个元素。

[7] 注意，$\mathcal{V}$ 的关系保持给定箭头的任意表示中生成态射的数量不变。

第二，方程（3.1.10）中的任一态射都可能收缩为一个恒等态射。先验而言，这种情况可能有三种方式：

$$f = (\varepsilon_1^{(t)} \otimes t) \circ \phi' \circ \varepsilon_t^{(t)} \circ (t \otimes \eta_1^{(t)}), \qquad \text{with } \phi = \phi' \circ \varepsilon_t^{(t)}, \text{ or} \tag{3.1.11}$$

$$f = (\varepsilon_1^{(t)} \otimes t) \circ u_t^{(Rt)} \circ \phi'' \circ (t \otimes \eta_1^{(t)}), \quad \text{其中 } \phi = u_t^{(Rt)} \circ \phi'', \text{ 或者} \tag{3.1.12}$$

$$f = (\varepsilon_1^{(t)} \otimes t) \circ \phi_2 \circ g \circ \phi_1 \circ (t \otimes \eta_1^{(t)}), \text{ with } \phi = \phi_2 \circ g \circ \phi_1 \text{ and } \pi(g) = \mathrm{id}. \tag{3.1.13}$$

由推论3.22可知，$\pi(\phi')\circ\pi(\varepsilon_t^{(t)})$ 和 $\pi(u_t^{(Rt)})\circ\pi(\phi'')$ 都不是同构，这与情形（3.1.11）和（3.1.12）矛盾。

现在，假设 $f = (\varepsilon_1^{(t)} \otimes t) \circ \phi_2 \circ g \circ \phi_1 \circ (t \otimes \eta_1^{(t)})$ 且 $\phi = \phi_2 \circ g \circ \phi_1$。利用 $\pi\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ 的函子性，我们得到

$$\pi(\phi) = \pi(\phi_2 \circ g \circ \phi_1) = \pi(\phi_2) \circ \pi(g) \circ \pi(\phi_1) = \pi(\phi_2) \circ \pi(\phi_1) = \pi(\phi_2 \circ \phi_1).$$

因此，$\pi(\phi_2 \circ \phi_1)$ 是一个同构，而 $(\varepsilon_1^{(t)} \otimes t) \circ \phi_2 \circ \phi_1 \circ (t \otimes \eta_1^{(t)})$ 是 S 的一个元素。□

3.2 函子范畴

现在我们将探讨 先前讨论过的各种对偶在函子范畴中的情形。出发点是 Day 卷积是闭幺半的这一事实，见定理2.124。此类函子范畴的例子很多，包括路径代数上的模、Mackey 函子，以及源自交叉模的群分次表示；我们将在第 3.3 节更深入地研究这些例子。

假设 3.24。 固定一个域 $\Bbbk$，并记 $(-)^*\colon \mathrm{Vect}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Vect}$ 为 $\Bbbk$-线性对偶化函子。除非另有明确说明，本节余下部分中所有（幺半）范畴和函子都将取值于 Vect，而 $\mathcal{C}$ 表示一个本质小的幺半 $\Bbbk$-线性范畴。为简洁起见，“富化的”、“$\Bbbk$-线性的”和“（本质）小的”这些前缀通常会被$\widehat{}$省略。从 $\mathcal{C}$ 到 Vect 的函子范畴记作 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$。

$\widehat{}$我们不研究从 Hom-有限范畴 $F \in \mathcal{C}^{\mathrm{op}} = [\mathcal{C},\mathrm{Vect}]$ 到所有向量空间的函子，而是关注（逐点）有限维函子的全子范畴 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{fin}}\widehat{}$。也就是说，$F \in \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 使得对于所有 $x \in \mathcal{C}$，Fx 都是有限维的。

假设 3.25。 </style}在本节中，我们假设所有相关的端和余端都是有限维向量空间。

特别是，假设 3.25意味着 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{fin}}$ 是闭幺半的；也就是说，张量积和内 Hom 在每一点上都是有限维的。这些假设对 $\mathscr{C}$ 本身施加了某种有限性条件，或者——如下一个例子所示——对它的一个稠密[8] 子范畴施加了这种条件。

[8] 若子范畴 $\mathscr{C}_0$的 $\mathscr{C}$ 满足稠密 条件，则从 $\mathscr{C}$到 $[\mathscr{C}_0{}^{\mathrm{op}},\mathsf{Vect}]$ 的受限米田嵌入是全忠实的。

例 3.26。 设 $\mathscr{C}$ 是一个 Hom-有限范畴，并假设存在一个全子范畴 $\mathcal{S}$，使得 $\mathscr{C}$ 中的每个对象都可以写成 $\mathcal{S}$中对象的有限直和。在这种情形下，可以将引理2.120改写为以这个有限集为指标：例如，给定 $F\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathsf{vect}$，我们有

$$Fx \cong F\Big(\bigoplus_{i=1}^{n} s_i\Big) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} Fs_i \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \int^{s\in\mathcal{S}} \mathcal{S}(s,s_i)\otimes Fs \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \int^{s\in\mathcal{S}} \mathscr{C}(s,s_i)\otimes Fs$$
$$\cong \int^{s\in\mathcal{S}} \mathscr{C}\Big(s,\bigoplus_{i=1}^{n} s_i\Big)\otimes Fs \cong \int^{s\in\mathcal{S}} \mathscr{C}(s,x)\otimes Fs.$$

Panchadcharam 和 Street 用此证明了有限维 Mackey 函子构成一个格罗滕迪克–韦尔迪耶范畴，参见 [PS07，第 9]。

假设 3.25不仅在 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{fin}}$上蕴含了闭结构，还给出了对偶的规范概念。

命题 3.27。 设 $(\mathscr{C},d)$ 是一个有限维态射左 *Grothendieck*–韦尔迪耶范畴$\widehat{\ }$，其对偶化函子为 D_ℓ。则 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{fin}}$ 是一个右 *Grothendieck–Verdier* 范畴$\widehat{\ }$，其对偶化对象为 $\mathscr{C}(-,d)^* \in \mathscr{C}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{fin}}$，对偶化函子为

$$\mathfrak{D}_r\colon \widehat{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{fin}}}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \widehat{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}_{\mathrm{fin}}, \qquad F \longmapsto F(D_\ell -)^*.$$

证明。 利用公式（3.1.9），可以通过在对偶化对象处取值，从 Grothendieck–Verdier 范畴的右内部 Hom 恢复其右对偶化函子；即，$\mathfrak{D}_r \cong [-,\mathscr{C}(-,d)^*]_r$。在我们的情形中，有

$$\begin{aligned}
[F,\mathscr{C}(-,d)^*]_r x &\overset{(2.8.7)}{\cong} \int_b \mathsf{vect}\big(F[x,b]_\ell, \mathsf{vect}(\mathscr{C}(b,d),\Bbbk)\big)\\
&\cong \int_b \mathsf{vect}\big(\mathscr{C}(b,d)\otimes F[x,b]_\ell,\Bbbk\big)\\
&\cong \mathsf{vect}\Big(\int^b \mathscr{C}(b,d)\otimes F[x,b]_\ell,\Bbbk\Big) \overset{(2.8.1)}{\cong} \mathsf{vect}\big(F[x,d]_\ell,\Bbbk\big)\\
&\overset{(3.1.9)}{\cong} F(D_\ell x)^*.
\end{aligned}$$

为完成证明，注意到 $\mathfrak{D}_r\colon \widehat{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}^{\mathrm{op}}{}_{\text{有限}} \longrightarrow \widehat{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}_{\mathrm{fin}}$ 有一个拟逆

$$\mathfrak{D}_r^{-1}\colon \widehat{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}_{\mathrm{fin}} \longrightarrow \widehat{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{fin}}, \qquad F \longmapsto F(D_\ell^{-1}-)^*. \qquad \square$$

虽然我们将基于阿贝尔情形中存在的性质，发展出高效的方法来判定张量可表示性和刚性，但探究这类结构如何由基范畴的对偶类型与vect的对偶类型相互作用而产生，仍然很有意义。

推论 3.28. *($\mathscr{C}$, d) 是一个有限维态射左 Grothendieck–Verdier 范畴，其 $\widehat{\ }$ 对偶化函子为 D_ℓ。那么，如果存在同构，范畴 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{fin}}$ 便是右张量可表的：*

并非所有假设都是必需的，参见注 3.34。

$$D_\ell^2 a \cong a, \qquad D_\ell(a \otimes x) \cong D_\ell x \otimes D_\ell a, \qquad \textit{natural in } a, x \in \mathscr{C}, \tag{3.2.1}$$

$\widehat{\ }$ 并且对所有对象 $F, G \in \mathscr{C}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{fin}}$，我们有

$$\int^a \mathsf{vect}(F[-,a]_\ell, Ga) \cong \int_a \mathsf{vect}(F[-,a]_\ell, Ga). \tag{3.2.2}$$

证明。令 $\mathfrak{D}_r$ 为命题3.27的对偶化函子，并固定函子 $F, G \in \mathscr{C}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{fin}}$。于是，通过以下计算，我们得到一个同构 $(\mathfrak{D}_r F * G)x \cong [F,G]_r x$，从而得证：

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{D}_r F * G)x &\overset{(2.8.3)}{\cong} \int^a \mathfrak{D}_r F([a,x]_\ell) \otimes Ga \overset{(3.1.7)}{\cong} \int^a \mathfrak{D}_r F(D_\ell(a \otimes D_\ell x)) \otimes Ga \\
&\overset{3.27}{\cong} \int^a F(D_\ell^2(a \otimes D_\ell x))^* \otimes Ga \overset{(3.2.1)}{\cong} \int^a \mathsf{vect}\big(F(a \otimes D_\ell x), Ga\big) \\
&\overset{(3.2.1)}{\cong} \int^a \mathsf{vect}\big(F(D_\ell^2 a \otimes D_\ell x), Ga\big) \overset{(3.2.1)}{\cong} \int^a \mathsf{vect}\big(F(D_\ell(x \otimes D_\ell a)), Ga\big) \\
&\overset{(3.1.7)+(3.2.1)}{\cong} \int^a \mathsf{vect}\big(F([x,a]_\ell), Ga\big) \overset{(3.2.2)}{\cong} \int_a \mathsf{vect}\big(F([x,a]_\ell), Ga\big) \\
&\overset{(2.8.8)}{=} [F,G]_r x.
\end{aligned}$$

$\square$

注 3.29. 在讨论端与余端可互换的条件之前，我们先简要提及一些情形：在这些情形中，左格罗滕迪克–韦尔迪耶范畴 ($\mathscr{C}$, d) 的对偶化函子具有公式（3.2.1）所述的自然同构。

条件 $D_\ell(x\otimes y)\cong D_\ell y\otimes D_\ell x$ 意味着 $\mathscr{C}$ 必须是左张量可表的，因为这样对于所有 x， y， $z\in\mathscr{C}$，我们有

$$\mathscr{C}(x\otimes y,z)\overset{(3.1.6)}{\cong}\mathscr{C}(x\otimes y\otimes D_\ell^{-1}z,d)\overset{(3.1.6)}{\cong}\mathscr{C}(x,D_\ell(y\otimes D_\ell^{-1}z))\overset{(3.2.1)}{\cong}\mathscr{C}(x,z\otimes D_\ell y).$$

在没有进一步凝聚性假设的情况下，这并不意味着 $\mathscr{C}$必定是刚性的。条件 $D^2\,l\cong\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$ 例如在 $\mathscr{C}$ 是辫子时成立。对于所有 $x,y\in\mathscr{C}$，我们有

$$\mathscr{C}(x,y)\overset{(3.1.6)}{\cong}\mathscr{C}(D_\ell y\otimes x,d)\cong\mathscr{C}(x\otimes D_\ell y,d)\overset{(3.1.6)}{\cong}\mathscr{C}(x,D_\ell^2 y),$$

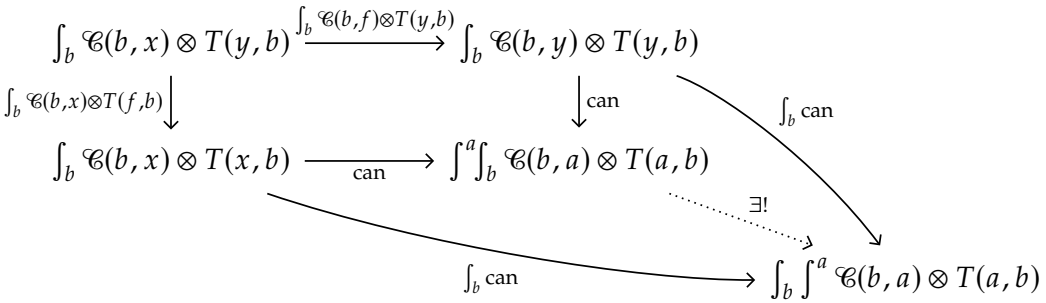
而米田引理推出 $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}\cong D^2\,l$。

以下构造是对 [Day06] 的改编。为简单起见，我们将 *ibid* 中的预幺半结构替换为由幺半结构诱导的结构。也就是说，$J\mathrel{..}=\mathscr{C}(1,-)$， $P(x,y,z)\mathrel{..}=\mathscr{C}(x\otimes y,z)$，其中 J 和 P分别是预幺半单位和乘法。

注 3.30。 设 $\mathscr{C}$ 是一个范畴。给定任意函子 $T\colon\mathscr{C}^{\mathrm{op}}\otimes_{\Bbbk}\mathscr{C}\longrightarrow\mathsf{Vect}$，存在一个典范映射

$$\int^{a\in\mathscr{C}}\int_{b\in\mathscr{C}}\mathscr{C}(b,a)\otimes T(a,b)\longrightarrow\int_{b\in\mathscr{C}}\int^{a\in\mathscr{C}}\mathscr{C}(b,a)\otimes T(a,b). \tag{3.2.3}$$

这是由端和余端具有函子性这一事实推出的；特别地，对于任意箭头 $f\colon x\longrightarrow y$，以下图表可交换：



引理 3.31 ([Day06，第 1] 页)。 设 $\mathscr{C}$ 是一个 *Hom*-有限范畴， $P\colon\mathscr{C}^{\mathrm{op}}\otimes_{\Bbbk}\mathscr{C}\longrightarrow$ vect是一个函子，并假设方程（3.2.3）中给出的映射可逆。若对所有a， $b\in\mathscr{C}$ 存在一个自然同构 $\varphi\colon\mathscr{C}(b,\ a)\xrightarrow{\sim}\mathscr{C}(a,\ b)^*$，则

$$\int^a P(a,a)\xrightarrow{\sim}\int_b P(b,b).$$

证明。 我们计算

$$\int^a P(a,a) \cong \int^a \int_b \mathrm{vect}(\mathscr{C}(a,b), P(a,b)) \cong \int^a \int_b \mathscr{C}(a,b)^* \otimes P(a,b)$$
$$\overset{\varphi^{-1}}{\cong} \int^a \int_b \mathscr{C}(b,a) \otimes P(a,b) \overset{(3.2.3)}{\cong} \int_b \int^a \mathscr{C}(b,a) \otimes P(a,b) \cong \int_b P(b,b).$$

第一个和最后一个同构由引理2.120 得出，第二个则是因为 $\mathscr{C}(a,\ b)$ 是有限维的，且 Vect 是刚性的。□

一般而言，要判断引理 3.31中的自然同构是否存在，似乎很困难。不过，对于某些类别的例子，迹映射为我们提供了可行的候选。

注 3.32。 设 $\mathscr{C}$ 是一个 Hom-有限的枢轴范畴，其枢轴结构为ψ: $(-)^\vee \longrightarrow {}^\vee(-)$，并假设 $\mathscr{C}(1,\ 1) \cong \Bbbk$。对于所有 $a,\ b \in \mathscr{C}$，考虑

$$\begin{aligned} \varphi_{a,b} &: \mathscr{C}(b,a) \longrightarrow \mathscr{C}(a,b)^* \\ f &\longmapsto \left(g \longmapsto \mathrm{tr}(f \circ g) := \mathrm{ev}_a^\ell \circ (\psi_a \otimes (f \circ g)) \circ \mathrm{coev}_a^r\right). \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

φ 的对偶为

$$\begin{aligned} (\varphi_{a,b})^* &: \mathscr{C}(a,b)^{**} \cong \mathscr{C}(a,b) \longrightarrow \mathscr{C}(b,a)^* \\ g &\longmapsto \left(f \longmapsto \mathrm{tr}(f \circ g) = \mathrm{tr}(g \circ f) = \varphi_{b,a}(g)(f)\right). \end{aligned}$$

因此，$\varphi_{a,\ b}$ 是内射的，当且仅当 $\varphi_{b,\ a}$ 是满射的。

假设 $\Bbbk$ 的特征为零，且 $\mathscr{C} := H$-模是半单霍普夫代数 H的有限维模范畴。由 [LR88定理 4], 可知，左对偶与右对偶重合，因此我们可以选择让式（3.2.4）中的“量子迹”与有限维向量空间之间端态射的通常迹一致。设 f: $M \longrightarrow N$ 是 $\mathscr{C}$中的一个态射。由半单性，以下短正合列分裂:

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow M \xrightarrow{f} \mathrm{im}\, f \longrightarrow 0, \qquad \mathrm{im}\, f \xrightarrow{\iota} M$$

箭头 $g = \iota \oplus 0$: $N \cong \mathrm{im}\ f \oplus N/\mathrm{im}\ f \longrightarrow M$满足

$$\mathrm{tr}(fg) = \mathrm{tr}(f\iota) = \mathrm{tr}(\mathrm{id}_{\mathrm{im}\, f}) = \dim \mathrm{im}\, f,$$

这意味着 $\varphi_{M,N}$ 是内射的。

例 3.33。考虑一个特征为 p 的域 $\Bbbk$，以及 p 的一个倍数 $q \in \mathbb{N}$。群 $H := \Bbbk[\mathrm{GL}_q(p)]$ 的群代数由 $\Bbbk$ 上的可逆 $q \times q$ 矩阵群构成，它为我们提供了一个枢纽有限维态射范畴的例子，其中方程 (3.2.4) 的态射不可逆。矩阵向量乘法使 $\Bbbk^q$ 成为一个简单的 H-模，其自同态代数是一维的。这意味着，对于所有 $f, g \in \mathrm{End}_{\mathrm{GL}_q(p)}(\Bbbk^p)$，都存在某个 $\lambda \in \Bbbk$，使得 $\mathrm{tr}(fg) = \lambda \,\mathrm{tr}(\mathrm{id}_{\Bbbk^q}) = \lambda \cdot 0 = 0$。

注 3.34. 可以结合推论 3.28 与引理 3.31推出：给定的有限维函子范畴是右张量可表的。为减少需要检验的公理数目，注意左对偶化函子的平方同构于恒等态射可由其余假设推出。设 $(\mathcal{C}, d)$ 为一个带有对偶化函子 D_ℓ 的 Hom-有限左格罗滕迪克–韦尔迪耶范畴，使得存在同构 $\mathcal{C}(a,b) \cong \mathcal{C}(b,a)^*$ 与 $D_\ell(a \otimes b) \cong D_\ell b \otimes D_\ell a$，对 a、$b \in \mathcal{C}$ 自然。利用

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(d, a \otimes D_\ell b) &\overset{(3.1.6)}{\cong} \mathcal{C}(d \otimes D_\ell^{-1}(a \otimes D_\ell b), d) \cong \mathcal{C}(d \otimes b \otimes D_\ell^{-1} a, d) \\ &\overset{(3.1.6)}{\cong} \mathcal{C}(D_\ell^{-1} a, D_\ell^{-1}(d \otimes b)) \overset{(3.1.8)}{\cong} \mathcal{C}(D_\ell^{-1} a, D_\ell^{-1} b) \cong \mathcal{C}(b, a),\end{aligned}$$

可得

$$\mathcal{C}(a, D_\ell^2 b) \overset{(3.1.6)}{\cong} \mathcal{C}(a \otimes D_\ell b, d) \cong \mathcal{C}(d, a \otimes D_\ell b)^* \cong \mathcal{C}(b, a)^* \cong \mathcal{C}(a, b)^{**} \cong \mathcal{C}(a, b).$$

该断言由米田引理得出。

引理 3.35. 设 $\Bbbk$ 为完美域。若 *Hom*-有限范畴 $\mathcal{C}$ 仅有有限$\widehat{\ }$多个对象且 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{fin}}$ 为半单，则典范映射

$$\int^a \int_b T(b,b,a,a) \cong \int_b \int^a T(a,a,b,b)$$

对所有函子 $T\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \otimes_\Bbbk \mathcal{C} \otimes_\Bbbk \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \otimes_\Bbbk \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Vect}$ 都是可逆的。

证明。 我们通过如下乘法，在向量空间 $A := \bigoplus_{a,b \in \mathcal{C}} \mathcal{C}(a,b)$ 上赋予结合含幺代数结构，其中对 $f \in \mathcal{C}(a,b)$，$g \in \mathcal{C}(c,d)$，有：

$$f \cdot g := \begin{cases} g \circ f, & \text{if } b = c, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

单位 $\sum_{a\in\mathscr{C}}\mathrm{id}_a$ 是 A 的正交幂等元之和。因此， A 的任意右模 M 都可作为向量空间分解为直和 $M \cong \bigoplus_{a\in\mathscr{C}} M_a$，其中 $M_a = M\cdot \mathrm{id}_a$，而任意 $f \in \mathscr{C}(a,b)$ 的作用定义了一个线性映射$M_a \longrightarrow M_b$。相应地，右 A-模的态射对应于一族同态 $\{\ \phi_a\colon\ M_a \longrightarrow N_a\ \}_{a\in\mathscr{C}}$，满足

$$\phi_b(m\cdot f) = \phi_a(m)\cdot f \qquad \text{for all } m\in M_a \text{ and } f\in\mathscr{C}(a,b).$$

这定义了一个函子 $\Theta\colon \text{Mod-}A \longrightarrow \widehat{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$。它的拟逆 Ω 将任意$F \in \widehat{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$ 映射到模 $\bigoplus_{a\in\mathscr{C}} Fa$，并将任意箭头 $\{\ \psi_a\colon\ Fa \longrightarrow Ga\ \}_{a\in\mathscr{C}}$ 映射到模同态 $\bigoplus_{a\in\mathscr{C}}\psi_a\colon \bigoplus_{a\in\mathscr{C}} Fa \longrightarrow \bigoplus_{a\in\mathscr{C}} Ga$。因此， $\widehat{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{fin}}}$对应于有限维右 A- 模的范畴 $\text{mod-}A$ 。

由于 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{fin}}$ 是半单的，因此 A 和 A^{op}也是半单的。此外， $\Bbbk$ 是完美的，这意味着任意两个有限维半单代数的张量积都是半单的，参见 [FD93，第 3] 节。特别地，代数 $B ..= A^{\mathrm{op}}\otimes_{\Bbbk} A\otimes_{\Bbbk} A^{\mathrm{op}}\otimes_{\Bbbk} A$ 是半单的，并且

$$[\mathscr{C}^{\mathrm{op}}\otimes_{\Bbbk}\mathscr{C}\otimes_{\Bbbk}\mathscr{C}^{\mathrm{op}}\otimes_{\Bbbk}\mathscr{C}, \mathsf{vect}] \cong \text{mod-}B.$$

写作 $\mathfrak{D} ..= [\mathscr{C}^{\mathrm{op}}\otimes_{\Bbbk}\mathscr{C}, [\mathscr{C}^{\mathrm{op}}\otimes_{\Bbbk}\mathscr{C},\mathsf{vect}]]$；那么函子

$$[\mathscr{C}^{\mathrm{op}}\otimes_{\Bbbk}\mathscr{C}\otimes_{\Bbbk}\mathscr{C}^{\mathrm{op}}\otimes_{\Bbbk}\mathscr{C}, \mathsf{vect}] \longrightarrow \mathfrak{D}, \qquad F\longmapsto \widehat{F},$$

其中 $F(x,y)[u,v] = F(u,v,x,y)$ 是一个 $\Bbbk$-线性范畴等价。
此外，由于极限与极限可交换，函子

$$\mathrm{end}\colon \mathfrak{D}\longrightarrow [\mathscr{C}^{\mathrm{op}}\otimes_{\Bbbk}\mathscr{C}, \mathsf{vect}], \qquad F\longmapsto (u,v\longmapsto \Big(\int_b F(b,b)\Big)(u,v))$$

是左正合的。由半单性可知， $\mathfrak{D}$ 中的任意短正合列都分裂，且所有函子都保持分裂满态射。因此，端： $\mathfrak{D}\longrightarrow [\mathscr{C}^{\mathrm{op}}\otimes_{\Bbbk}\mathscr{C},\mathsf{vect}]$ 是正合的，必然保持余极限。

给定 $F\in[\mathscr{C}^{\mathrm{op}}\otimes_{\Bbbk}\mathscr{C}\otimes_{\Bbbk}\mathscr{C}^{\mathrm{op}}\otimes_{\Bbbk}\mathscr{C},\mathsf{vect}],$ ，我们现在计算

$$\begin{aligned}\int^a\int_b F(a,a)(b,b) &\cong \int^a\int_b \widehat{F}(b,b)[a,a] \cong \int_b\int^a \widehat{F}(b,b)(a,a)\\ &\cong \int_b\int^a F(a,a,b,b).\end{aligned}$$

□

3.2.1 柯西完备化

在准备好所有必要的工具后，我们现在可以明确给出 (对偶范畴) 的柯西完备化条件，使一个 $\Bbbk$-线性范畴具有某些对偶结构。与（交换）环上的模一样，这些概念与对象为有限生成投射对象密切相关。同样，我们默认所有范畴和函子都为$\Bbbk$-线性，其中 $\Bbbk$是一个域。不过，我们不要求同态空间有限，并且仅在假设 3.24 下开展讨论。

定义 3.36. 设 $\mathscr{C}$ 是一个 $\Bbbk$-线性范畴。 $\mathscr{C}$ 的柯西完备化$\widehat{\ }$是 $\mathscr{C}$ 的全子范畴 $\overline{\mathscr{C}}$，它由所有预层 F组成，$\overline{\ }$并且满足：$\int_{\mathscr{C}}(F, -)$ 与所有小极限交换。

备注 3.37. 定义 3.36 与通常将 $\Bbbk$-线性范畴$\mathscr{C}$的柯西完备化定义为 $\mathscr{C}$的加性幂等完备化的做法不同。然而，根据 [BD86，命题 2] 和 [LT22，推论 4, 22], 这两个概念是等价的。我们选择前一种定义，因为就本论文的目的而言，它更便于使用。

例 3.38. 令 $\iota\colon \mathscr{C} \hookrightarrow \overline{\mathscr{C}}$ 表示将范畴 $\mathscr{C}$ 包含到其柯西完备化中的包含映射，并将 $x \in \mathscr{C}$ 映到 $\mathscr{C}(-, x)$。存在一个伴随等价

$$\left(\overline{\mathscr{C}}(-, \iota=), \overline{\mathscr{C}}(\iota-, =), \eta, \varepsilon\right),$$

之间 $\mathscr{C}$以及它在 profunc- tors 的幺半双范畴中的柯西完备化，参见示例 2.113。单位

$$\eta_{x,y}\colon \mathscr{C}(x, y) \longrightarrow \int^{\overline{c} \in \overline{\mathscr{C}}} \overline{\mathscr{C}}(\iota_x, \overline{c}) \times \overline{\mathscr{C}}(\overline{c}, \iota_y)$$

定义为

$$\mathscr{C}(x, y) \xrightarrow{\iota_{x,y}} \overline{\mathscr{C}}(\iota_x, \iota_y) \cong \int^{\overline{c} \in \mathscr{C}} \overline{\mathscr{C}}(\iota_x, \overline{c}) \times \overline{\mathscr{C}}(\overline{c}, \iota_y),$$

而对于余单位，我们有

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\overline{x},\overline{y}}\colon \int^{c \in \mathscr{C}} \overline{\mathscr{C}}(\overline{x}, \iota_c) \times \overline{\mathscr{C}}(\iota_c, \overline{y}) &\longrightarrow \overline{\mathscr{C}}(\overline{x}, \overline{y}) \\ [(f, g)] &\longmapsto g \circ f. \end{aligned}$$

由于 ι 是全忠实的，因此立即可得$\eta_{x,\ y}$对于所有 x，$y \in \mathscr{C}$，同构；由 ε 可知，余单位 [AEBSJ01，定理 11] 也是同构。

原则上，由于余预层范畴中不存在自由对象，因此有必要用抽象范畴论术语来发展这些概念；例如， [Pre09] 中对此有详尽讨论。就我们的目的而言，关于 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 的柯西完备化的以下刻画已足够。

引理 3.39。 设 $\mathcal{C}$ 为一个范畴。对于任意 $F \in \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$，以下条件等价：

(i) F 是有限生成投射的，*(ii)* F 是有限个可表函子的直和的直和项，并且 *(iii)* 函子 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(F, -)$ 与小余极限交换。

证明。 (i) 与 (ii) 之间的等价性已在 [Pre09]的推论 10.1.14 中证明。为了证明 (ii) 与 (iii) 等价，注意到由可表函子的有限直和的直和项组成的全子范畴 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 根据 [LT22，推论 4，柯西完备。现在仿照 22] [BD86]中的命题 2 推进，即可得出结论。 □

记号 3.40。 鉴于引理 3.39，我们采用以下记号，以强调 $X \in \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 是可表对象的直和的直和项：

$$X \underset{\pi_X}{\overset{\iota_X}{\rightleftarrows}} \bigoplus_{i=1}^{n} よ_{u_i},$$

其中 $\pi_X \circ \iota_X = \mathrm{id}_X$，且

$$よ : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow [(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}, \mathsf{Vect}] = [\mathcal{C}, \mathsf{Vect}], \qquad x \longmapsto \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(-, x) = \mathcal{C}(x, -)$$

是方程（2.8.9）中的逆变 Yoneda 嵌入。

命题 3.41。 对于所有对象 X $\underset{\pi_Y}{\overset{\iota_Y}{\rightleftarrows}}$ $\bigoplus_{i=1}^{n} よ_{u_i}$ 和 $Y \underset{\pi_X}{\overset{\iota_X}{\rightleftarrows}} \bigoplus_{j=1}^{m} よ_{v_i}$，右内部 *Homof* 柯西完备化 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ *of*一个右闭合幺范畴$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 存在且满足

$$[X, Y]_r \underset{[\iota_X, \pi_Y]_r}{\overset{[\pi_X, \iota_Y]_r}{\rightleftarrows}} [\oplus_{i=1}^{n} よ_{u_i}, \oplus_{j=1}^{m} よ_{v_j}] \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{m} よ_{[u_i, v_j]_r}. \tag{3.2.5}$$

证明。 范畴 $\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} \subseteq \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 在张量积运算下闭合，因为米田嵌入是强幺半的，并且 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 是 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 的全子范畴，由可表对象的有限直和的直和项构成。

设 $X, Y \in \overline{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$。将 $X = \mathrm{colim}_i \mathscr{C}(u_i, -)$ 和 $Y = \mathrm{colim}_j \mathscr{C}(v_j, -)$ 写成可表对象的有限直和的直和项。我们计算

$$\begin{aligned}
[X,Y]_r &\overset{(2.8.6)}{=} \int_{a,b} \mathsf{Vect}(\mathscr{C}(a \otimes -, b), \mathsf{Vect}(Xa, Yb)) \overset{(2.8.1)}{\cong} \int_a \mathsf{Vect}(Xa, Y(a \otimes -)) \\
&\cong \int_a \mathsf{Vect}(\mathrm{colim}_i \mathscr{C}(u_i, a), \mathrm{colim}_j \mathscr{C}(v_j, a \otimes -)) \\
&\cong \lim_i \mathrm{colim}_j \int_a \mathsf{Vect}(\mathscr{C}(u_i, a), \mathscr{C}(v_j, a \otimes -)) \cong \lim_i \mathrm{colim}_j \mathscr{C}(v_j, u_i \otimes -) \\
&\cong \lim_i \mathrm{colim}_j \mathscr{C}([u_i, v_j]_r, -).
\end{aligned}$$

由此可得 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ 是右闭幺半范畴，并且等式（3.2.5）成立。□

例 3.42。命题 3.41 可视为以下事实的一种变体：刚性可对偶对象的直和项或直和仍然是可对偶的。事实上，假设 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ 是一个闭幺半范畴，并考虑 $X \overset{\iota_X}{\underset{\pi_X}{\lhd\rhd}} U$、$Y \overset{\iota_Y}{\underset{\pi_Y}{\lhd\rhd}} V$ 和 $Z \overset{\iota_W}{\underset{\pi_W}{\lhd\rhd}} W$ 是 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ 中对象的三个直和项。下图中的水平箭头是 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ 的张量-同态伴随所给出的同构，且该图表可交换：

$$\begin{array}{ccc}
\overline{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(X * Y, Z) & \xrightarrow{\phi_{X,Y,Z}} & \overline{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(Y, [X, Z]_r) \\
\Big\downarrow \overline{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(\pi_X * \pi_Y, \iota_W) \quad \Big\uparrow \overline{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(\iota_X * \iota_Y, \pi_Z) & & \Big\downarrow \overline{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(\pi_V, [\pi_X, \iota_W]_r) \quad \Big\uparrow \overline{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(\iota_V, [\iota_X, \pi_Z]_r) \\
\overline{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(U * V, W) & \xrightarrow{\phi_{U,V,W}} & \overline{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(V, [U, W]_r)
\end{array}$$

因此，伴随 $X * -\colon \mathscr{C} \rightleftarrows \mathscr{C} \colon [X, -]_r$ 的单位和余单位满足

$$\begin{aligned}
\eta_Y^{(X)} &= Y \xrightarrow{\iota_Y} V \xrightarrow{\eta_V^{(U)}} [U, U * V] \xrightarrow{[\iota_X, \pi_X * \pi_Y]} [X, X * V], \\
\varepsilon_Y^{(X)} &= X * [X, Y] \xrightarrow{\iota_X * [\pi_X, \iota_Y]} U * [U, V] \xrightarrow{\varepsilon_V^{(U)}} V \xrightarrow{\pi_Y} Y.
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

推论 3.43。设 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ 是一个右闭幺半范畴。我们有：

(i) $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ 是右刚性的，当且仅当 $\overline{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$ 也是如此。*(ii)* $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ 是右张量可表示的，当且仅当 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ 也是如此。*(iii)* $(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, d)$ 是右 *Grothendieck–Verdier* 范畴，当且仅当 $(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \text{よ}_d)$ 也是如此。

证明。 由 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ 的右刚性和张量可表性可推出 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ 具有相同性质，这可由 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ 的内 Hom 描述，以及张量-Hom 伴随的单位和余单位得出，参见公式（3.2.6）。

若 $(\mathscr{C}^{\mathrm{op}},\ d)$ 是一个右 Grothendieck–Verdier 范畴，那么其右对偶化函子在自然同构意义下由 $[-,d]_r\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}^{\mathrm{op}}$给出。利用命题 3.41 直接计算可得 $[-,よ_d]_r\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}^{\mathrm{op}}} \longrightarrow \mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ 是一个等价，因此 $(\mathscr{C}^{\mathrm{op}},\ よ_d)$ 是右 Grothendieck–Verdier 范畴。

根据命题 3.41，两个可表函子的右内部 Hom $よ_x$和 $よ_y$是 $[よ_x,\ よ_y]_r \cong よ_{[x,y]_r}$。因此，任意三个陈述的逆命题都可由以下事实推出：通过米田嵌入， $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$作为右闭幺半范畴等价于$\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ 中以可表函子为对象的全子范畴。□

注 3.44. 定理 $\Bbbk\mathscr{W}$ 3.23 中讨论的张量可表范畴的线性化$\mathscr{W}$ 是张量可表的，具有左、右对偶化函子 L 和 R，但并非刚性。后者是因为，根据定理 3.23 的证明，存在一个对象 $t \in \mathscr{W}$，其典范态射 $[t,1]_r \otimes t \longrightarrow [t,t]_r$ 不可逆。

由于右对偶化函子 R 属于 $\mathscr{W}$ 且是反等价，因此$L \cong R^{-1}$也在 $\Bbbk\mathscr{W}^{\mathrm{op}}$上具有张量可表示但非刚性的结构。取左对偶化函子为 R，右对偶化函子为 L。根据推论 3.43，$\Bbbk\mathscr{W}^{\mathrm{op}}$ 是张量可表示的，但不是刚性的。

请注意，这与表示论中许多情形形成鲜明对比，例如交换环上的模或 $\Bbbk$-代数；在这些情形中，刚性与张量可表示性是等价的；例如参见 [NW17, 命题 2。1]给出了一个稍微一般化的陈述。由于 $\Bbbk$-代数可以解释为只有一个对象的 $\Bbbk$-线性范畴，下面的命题可视为经典情形的“多对象”版本。

命题 3.45。 设 $\mathscr{C}$ 是一个左刚性幺半范畴。对于某个 $X \in \mathscr{C}^{\mathrm{op}}$，以下条件等价：

(i) 它具有右刚性对偶，*(ii)* 存在一个 $\mathbb{D}X \in \mathscr{C}^{\mathrm{op}}$，使得 $X * -\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \rightleftarrows \mathscr{C}^{\mathrm{op}}\colon \mathbb{D}X * -$，并且 *(iii)* 它是有限生成投射的。

证明。 根据定义，(i) $\Longrightarrow$ (ii)。为了证明 (ii) $\Longrightarrow$ (iii)，我们假设存在一个 $\mathbb{D}X \in \mathscr{C}^{\mathrm{op}}$使得 $X * -\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \rightleftarrows \mathscr{C}^{\mathrm{op}}\colon \mathbb{D}X * -$，并固定一个小的

某个图表 $F\colon I \longrightarrow \mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ 的余极限 $\operatorname{colim}_{i\in I} Fi \in \mathscr{C}^{\mathrm{op}}$。对于每个 $i \in I$，记 $\iota_i\colon Fi \longrightarrow \operatorname{colim}_{i\in I} Fi \in \mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ 为其结构态射。现在考虑以下交换图：

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{colim}_{i\in I} \widehat{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(X, Fi) & \xrightarrow{\operatorname{colim}_{i\in I}(\widehat{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(X,\iota_i))} & \widehat{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(X, \operatorname{colim}_{i\in I} Fi) \\
\downarrow{\scriptstyle \operatorname{colim}_{i\in I} \phi_{X,Fi}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{X,\operatorname{colim}_{i\in I} Fi}} \\
\operatorname{colim}_{i\in I} \widehat{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(1, \mathbb{D}X * Fi) & \xrightarrow{\operatorname{colim}_{i\in I}(\widehat{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(1,\mathbb{D}X*\iota_i))} & \widehat{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(1, \mathbb{D}X * \operatorname{colim}_{i\in I} Fi)
\end{array}$$

其水平箭头由余极限的泛性质诱导，垂直箭头则来自 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ 的张量-同态伴随。函子 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}(1, -)$ 和 $\mathbb{D}X \otimes -$ 与所有小余极限交换；前者是因为 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}(1, -)$ 有限生成投射，参见引理 3.39；后者则是因为 Day 卷积是一个余极限。因此，底部的水平箭头是可逆的。由于垂直箭头也可逆，图表顶部所示的典范箭头 $\operatorname{colim}_{i\in I} \mathscr{C}^{\mathrm{op}}(X, Fi) \longrightarrow \mathscr{C}^{\mathrm{op}}(X, \operatorname{colim}_{i\in I} Fi)$ 必定是一个同构。同样，利用引理 3.39，X 必定是有限生成投射。因此，(ii) 推出 (iii)。

最后，如果 $X \in \mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ 是有限生成投射的，那么它包含于 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$的柯西完备化中，而后者是右刚性的。由推论 3.43可知，$\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$也具有这一性质。因此，$X$ 存在刚性对偶，并且 (iii) $\Longrightarrow$ (i)。□

3.3 应用

我们以讨论几个例子作为本章的结尾。

我们将考察布尔代数、它们在群论和环论中的应用，以及它们如何诱导阿贝尔 $\Bbbk$-线性 Grothendieck–Verdier 范畴。

接下来，我们聚焦于 Mackey 函子。粗略地说，它们是由向量空间构成的集合，这些向量空间以某个固定有限群的所有子群为索引，并配有满足某些关系的态射；这些关系反映了诱导、限制和共轭运算的行为，其中包括以 Mackey 恒等式命名的恒等式；参见 [Lin76；TW95]。有限维 Mackey 函子构成一个 Grothendieck–Verdier 范畴 [PS07]；我们将在命题3.57中证明，它是刚性的当且仅当它是半单的。

最后一个例子出现在对交叉模的研究中；用范畴论的术语来说，交叉模对应于严格 2-群。任意有限

到 Vect 的严格 2-群 函子构成一个阿贝尔幺半范畴，它等价于该 2-群的幺半单位的各向同性群的表示范畴的直和。在命题3.66 中，我们证明这个范畴的刚性等价于某个群代数的半单性。

3.3.1 布尔代数

定义 3.46。 一个格 由一个集合 L 以及两个结合且交换的运算组成

$$\wedge\colon L\times L\longrightarrow L,\quad (a,b)\longmapsto a\wedge b \quad\text{and}\quad \vee\colon L\times L\longrightarrow L,\quad (a,b)\longmapsto a\vee b,$$

称为交 和并，它们对所有 $a,b\in L$均满足吸收律：

$$a\vee(a\wedge b)=a, \qquad a\wedge(a\vee b)=a.$$

备注 3.47。 任意格 $(L,\wedge,\vee)$ 都通过关系定义一个偏序集

$$a\leq b \iff b=a\vee b \iff a=a\wedge b, \qquad a,b\in L.$$

反之，如果一个偏序集 $(P,\leq)$ 对任意一对对象 $a,b\in P$ 都存在最小上界 $a\vee b\in P$ 和最大下界 $a\wedge b\in P$，则它是一个格。

直接计算可知，元素 $1\in L$ 关于格 L 的偏序是极大的，当且仅当对所有 $a\in L$都有 $1\vee a=1$。类似地，$0\in L$ 是极小的，等价于对任意 $a\in L$都有 $0\wedge a=0$。极小元和极大元都是唯一的。如果它们存在，我们称 L 为有界。

定义 3.48。 布尔代数 是一个有界格 $(L,\wedge,\vee)$，满足以下分配律条件，对所有 $a,b,c\in L$均成立：

$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c), \qquad a\vee(b\wedge c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c), \tag{3.3.1}$$

并且每个 $a\in L$ 都存在一个补元 $a^{\perp}\in L$，满足

$$a\vee a^{\perp}=1 \qquad\text{and}\qquad a\wedge a^{\perp}=0.$$

注 3.49。 对于任意布尔代数 $(L,\wedge,\vee)$，方程（3.3.1）中的两个分配律条件任意一个都能推出另一个。此外，直接计算可知，补元是唯一的。由此得到一个对合映射$(-)^{\perp}\colon L\longrightarrow L$，它将 a 映射为 $a^{\perp}$。极大元 $1\in L$ 是 $\wedge$的单位：

$$a\wedge 1=a\wedge(a\vee a^{\perp})=a, \qquad \text{for all } a\in L.$$

类似的计算表明，布尔代数中的最小元素 0 满足 $a\vee 0=a$。

例 3.50。

- 中心幂等元：环 R 的中心幂等元集合 $C \coloneqq \{\, e \in Z(R) \mid e^2 = e \,\}$ 在赋予

$$\begin{aligned} \wedge &\colon C \times C \longrightarrow C & e \wedge f &= ef, \\ \vee &\colon C \times C \longrightarrow C & e \vee f &= e + f - ef, \\ (-)^{\perp} &\colon C \longrightarrow C & e^{\perp} &= 1 - e. \end{aligned}$$

- 半素环中的湮灭子：考虑一个带有单位元 1 的交换半素环R。也就是说，它的 Jacobson 根是平凡的。如果 R 还是阿廷的，这等价于它是半单的。理想 $I \subset R$ 的湮灭子是 $I^{\perp} \coloneqq \{\, x \in R \mid xI = 0\}$；它是一个根理想。我们在湮灭子集合 $\mathrm{Ann}(R)$ 上定义如下映射：

$$\begin{aligned} \wedge &\colon \mathrm{Ann}(R) \times \mathrm{Ann}(R) \longrightarrow \mathrm{Ann}(R), & I \wedge J &= I \cap J, \\ \vee &\colon \mathrm{Ann}(R) \times \mathrm{Ann}(R) \longrightarrow \mathrm{Ann}(R), & I \vee J &= (I + J)^{\perp}. \end{aligned}$$

这在$\mathrm{Ann}(R)$上定义了布尔代数结构。事实上，一个不一定交换的环的（右）湮灭子构成布尔代数，当且仅当该环是半素的，参见 [DT21]。

- 子群格：设 $H \subseteq G$ 是一个有限群的子群。我们用$H^{\perp}$ 表示所有不包含 H 的极大子群的交。以这种方式构造出的最小群是 G 的弗拉蒂尼子群$\Phi(G) = G^{\perp}$。Deaconescu、Isaacs 和 Wall 证明，集合

$$\{\, \Phi(G) \subseteq H \subseteq G \mid G = HH^{\perp} \,\},$$

按包含关系构成偏序集形成一个布尔代数，见 [DIW11]。

Barr 在 [Bar79] 中指出，布尔代数的对偶符合 Grothendieck–Verdier 范畴的框架。

命题 3.51。 设 $(L, \wedge, \vee)$ 是一个布尔代数。与之关联的偏序集范畴L 是一个左格罗滕迪克–韦尔迪耶范畴，其中交作为张量积，1 作为幺半单位，0 作为对偶化对象。对偶化函子由$(-)^{\perp}$诱导。</*output*>

若 L 是有限的，则从L 到有限维 $\Bbbk$-向量空间范畴的普通函子范畴⟨L,vect⟩可赋予右格罗滕迪克–韦尔迪耶结构，其中 $\Bbbk \mathrm{L}(-, s)^*$ 是对偶化对象和对偶化函子

$$\mathfrak{D}_r \colon \langle \mathscr{L}, \mathsf{vect} \rangle^{\mathrm{op}} \longrightarrow \langle \mathscr{L}, \mathsf{vect} \rangle, \qquad F \longmapsto F(-^{\perp})^*.$$

证明。 方程（3.3.1）的直接推论是，对于 $a \le c$ 和 $b \le d$，有 $a \wedge b \le c \wedge d$。因此，由于 $\wedge\colon\ L \times L \longrightarrow L$ 是结合的、交换的且有单位的，它在L上诱导出一个（对称）幺半结构。

为了证明 (L,0) 是一个 Grothendieck–Verdier 范畴，我们计算它的左内蕴 Hom。固定一个由元素 $a, b, c \in L$ 组成的三元组。我们有

$$\begin{aligned} b \wedge a \le c &\iff (b \wedge a) \vee a^{\perp} \le c \vee a^{\perp} \iff (b \vee a^{\perp}) \wedge (a \vee a^{\perp}) \le c \vee a^{\perp} \\ &\iff b \vee a^{\perp} \le c \vee a^{\perp} \iff b \le c \vee a^{\perp}, \end{aligned}$$

其中最后一个等价是由 $b = b \vee 0 \le b \vee a^{\perp}$ and$b \le c \vee a^{\perp}$ 这一事实推出的，这意味着 $b \vee a^{\perp} \le (c \vee a^{\perp}) \vee a^{\perp} = c \vee a^{\perp}$。因此

$$[-,=]_{\ell}\colon L \times L \longrightarrow L, \qquad [a,b]_{\ell} := (a \wedge b^{\perp})^{\perp} = b \vee a^{\perp},$$

定义了 L 的左内蕴 Hom，而反序对合

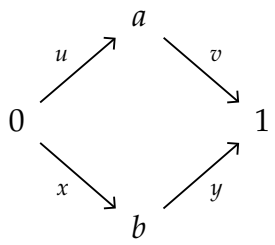
$$[-,0]_{\ell} = (-)^{\perp}\colon L \longrightarrow L$$

诱导出范畴等价 $D_{\ell}\colon \mathrm{L}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{L}$。如注3.13所述，(L,0) 是一个左格罗滕迪克–韦尔迪耶范畴。

根据例 2.82，我们有一个等价 L,vect $\cong [\Bbbk \mathrm{L}, \mathrm{vect}]$。在假设 L 有限的条件下，命题 3.27 表明，L,vect 具有右 Grothendieck–Verdier 范畴的结构，并配备指定的对偶化对象和对偶化函子。□

假设 L 是一个有限布尔代数，L 是其偏序集范畴。如引理 3.35 证明的开头所述，范畴 [𝕜L,vect]可视为与 L关联的偏序集的路径代数$A \cong \bigoplus_{e,f \in L} {}^{\Bbbk}\mathrm{L}(e,f)$ 的有限维右模范畴。

例 3.52。 下图所示的集合 $L ..= \{0, a, b, 1\}$ 上的偏序定义了一个布尔代数：



直接计算可知，其路径代数 A 同构于 $\Bbbk$ 值 4×4 上三角矩阵的一个子代数：

$$A \cong \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u & x & z \\ 0 & a & 0 & v \\ 0 & 0 & b & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, 0,u,x,z,a,v,b,y,1 \in \Bbbk \right\}.$$

上三角矩阵的子代数由 Thrall 在 [Thr48] 中研究，旨在推广拟 Frobenius 代数。[9] 以下定义将这一性质推广。
这一性质可由以下定义推广。

[9] 一个 $\Bbbk$-代数称为拟 *Frobenius* 代数，如果所有投射右模都是内射模。

定义 3.53。若一个 $\Bbbk$-代数的所有不可分解投射右模和所有不可分解投射左模都具有简单顶层，则称其为 qf-2。

利用命题3.51中的格罗滕迪克–韦尔迪耶结构，我们将证明任意有限布尔代数 L 的路径代数都是 qf-2。为此，我们需要以下观察。在 L 中取补元可扩张为反代数同构 $\phi\colon A \longrightarrow A$；其推前 $(-)\phi : \text{mod-}A \longrightarrow A\text{-mod}$ 是一个对合范畴等价。它将任意左模 M 映射为右模 M_ϕ，该右模具有相同的底层向量空间，并赋予作用 $a \triangleright m \mathrel{..}= m \triangleleft \phi(a)$，对所有 $m \in M$ 和 $a \in A$ 均成立。

命题 3.54. 设 A 为有限布尔代数 L的路径代数。 n

$$(-_\phi)^* : (\text{mod-}A)^{\text{op}} \longrightarrow \text{mod-}A$$

是范畴等价。特别地， $M \in \text{mod-}A$ 是投射的，当且仅当 $M_\phi{}^*$ 是内射的。此外， A 是QF-*2* 的，且当且仅当 $|L| = 1$时是拟 *Frobenius* 的。

证明。 第一条结论直接由以下两者之间的范畴等价，以及 [$\Bbbk$L,vect] 与 mod-A （引理 3.35的证明中给出）以及 [$\Bbbk$L,vect] 的对偶化函子的定义（见命题 3.51）直接得到。

为了证明第二个结论，我们注意到有限维代数 $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ 按路径长度分级。 L中的元素构成 A_0 的一组基，并对应于本原幂等元——即不能写成两个非零正交幂等元之和的非零幂等元。此外， A 的 Jacobson 根是 $J(A) = \bigoplus_{n\geq 1} A_n$。 A 的不可分解投射模具有 eA这种形式，其中 $e \in L$。注意， eA有一组由路径 $[e,y]$构成的向量空间基，其中 $e \leq y \leq 1$。 eA的顶是

$$\text{soc}(eA) = \{\, m \in eA \mid mJ(A) = 0 \,\} = \text{span}_{\Bbbk}\{[e,1]\},$$

它是一维的，因此是简单的。由 A-模 $\cong$ 模-A，可知 A 是一个 qf-2代数。

对于 $|L| = 1$，我们得到平凡的（拟）弗罗贝尼乌斯代数 $A = \Bbbk$。否则，存在一个 $e \in L$，使得 $\dim eA \geq 2$。直接计算可得 $\operatorname{soc}(eA) \cong 1A$。若 eA 是内射的，则包含映射 $1A \cong \operatorname{soc}(eA) \hookrightarrow eA$ 会有一个截面，这与 eA 的不可分解性矛盾。□

3.3.2 *Mackey* 函子

设 G 是一个有限群，并用 Sp_G 表示有限 G-集合的跨度同构类所构成的范畴。

在本节中，我们再次默认所有范畴和函子都是 $\Bbbk$-线性的。

可以证明，每个同态集都是自由且有限生成的交换幺半群，参见例如 [TW95]中引理 2.1 前的讨论。除了第 3.3 节开头概述的 Mackey 函子定义之外，Lindner 还给出了一个更简洁的表述 [Lin76]。

定义 3.55. 设 $\Bbbk$ 为一个域，G 为一个有限群。范畴 $\mathsf{Mky}_\Bbbk(G)$（即 G 的 *Mackey* 函子）由 $\Bbbk$-线性函子范畴 $[\Bbbk\mathsf{Sp}_G, \mathsf{Vect}]$给出。

Mackey 函子的例子很多：G 的任意表示都定义了一个，参见 [Thé95，例 53。1] 以及 [PS07，命题 10。1]。关于详尽的综述，我们建议读者参阅 [Thé95，章节 53]。

例 3.56. 对任意有限群 G，可以关联一个有限维代数 $\mathbb{M}G$——即 G 的 *Mackey* 代数——其模范畴等价于 $\mathsf{Mky}_\Bbbk(G)$，参见 [TW95，命题 3.1 与 3.2]。其有限维模与（逐点）有限维 Mackey 函子相对应，我们将其记为$\mathsf{mky}_\Bbbk(G)$。

鉴于 $\Bbbk\mathsf{Sp}_G$ 是对称幺半的，$\mathsf{Mky}_\Bbbk(G)$ 在以 Day 卷积作为其张量积时是闭合对称幺半的。[10] Fur-
此外，$\Bbbk\mathsf{Sp}_G$ 具有一个有限的稠密子范畴，其对象构成传递 G-集合的完备代表集。现在可以使用例3.26中的论证来说明有限维 Mackey 函子的张量积和内 Hom 是有限维的，参见 [PS07，第 9]节。

[10] 因此，在讨论 Mackey 函子时，我们不再为不同的对偶概念添加“左”或“右”前缀。

以下结果为 [Bou05 引理 2 中所概述论证2] 提供了另一种证明，即刚性 Mackey 函子与有限生成投射 Mackey 函子的类相同。

命题 3.57。设 G 为有限群，并设 $\Bbbk$ 为域。范畴$\mathsf{mky}_\Bbbk(G)$ 是一个 *Grothendieck–Verdier* 范畴，其对偶化对象为$\mathsf{mky}_\Bbbk(-,1)^*$。其刚性对象恰好是有限生成投射 *Mackey* 函子。

此外，$\mathsf{mky}_\Bbbk(G)$本身是刚性的，当且仅当 $\mathbb{M}G$ 是半单的，这等价于$\operatorname{char}\Bbbk$ 不整除 G的阶。

证明。$\mathsf{mky}_\Bbbk(G)$是Grothendieck–Verdier范畴这一事实已在 [PS07，定理 9.2]中得到证明。或者，我们可以利用$\Bbbk\mathrm{Sp}^G$ 是刚性范畴，见 [PS07，第 2]，节，并应用命题3.27，从而得到$\mathsf{mky}_\Bbbk(G)$是Grothendieck–Verdier范畴，且以$\mathsf{mky}_\Bbbk(-,1)^* \in \mathsf{mky}_\Bbbk(G)$作为其对偶化对象。根据命题3.45，一个Mackey函子是刚性可对偶的，当且仅当它是有限生成投射的。

现在假设$\mathsf{mky}_\Bbbk(G)$是刚性的，并回顾它等价于Mackey代数的有限维模范畴 $\mathbb{M}G$-mod。由于 $\mathbb{M}G$ 是有限维的，且根据命题3.45，$\mathsf{mky}_\Bbbk G$ 中的每个对象都是投射的，因此 $\mathbb{M}G$ 的任何子模都必须有补元。特别地，$\mathbb{M}G$ 是半单的。反之，若 $\mathbb{M}G$ 是半单的，则$\mathbb{M}G$-mod的所有对象，从而$\mathsf{mky}_\Bbbk(G)$的所有对象，都是投射的。又由于它们还是有限生成的，命题3.45 蕴含$\mathsf{mky}_\Bbbk(G)$的刚性。

[TW95], 的推论 14.4 表明，当特征$\Bbbk$ 不整除 $|G|$时，$\mathbb{M}G$ 是半单的。另一方面，G 在 $\Bbbk$ 上的有限维表示范畴 $\mathsf{Rep}_\Bbbk(G)$ 是$\mathsf{mky}_\Bbbk(G)$ 的一个全子范畴，见 [PS07，命题 10.1]。因此，若$\mathsf{mky}_\Bbbk(G)$ 是半单的，则 $\mathsf{Rep}_\Bbbk(G)$ 也半单，这意味着根据 Maschke 定理，特征$\Bbbk$ 不整除 $|G|$ 。□

3.3.3 交叉模

阿贝尔线性函子范畴上的格罗滕迪克–韦尔迪耶结构的另一个例子来自 $\Bbbk$对（严格）2-群的研究，这些群可以等同于交叉模。我们的阐述遵循 [Wag21]。

定义 3.58。一个严格2-群是一个（小）群胚 $\mathcal{G}$，它带有严格幺半结构，使得对象幺半群（$\mathrm{Ob}(\mathcal{G})$，$\otimes$，1）是一个群。

每个严格 2-群都是一个刚性范畴；对象$g \in \mathcal{G}$的左对偶和右对偶由其逆元 $g^{-1} \in \mathcal{G}$给出。

令 G 为 $\mathcal{G}$ 的对象群，并令 $H = \mathcal{G}(1,-)$ 为从幺半单位 $1 \in G$ 出发的态射集合。记 $t\colon H \longrightarrow G$ 为目标映射，我们通过乘法在 H 上定义群结构

$$h'h := (h' \otimes \mathrm{id}_{t(h)}) \circ h, \qquad \text{for all } h, h' \in H.$$

对于任意 $g \in G$ 和 $h \in H$，存在唯一的 $h' \in H$，使得 $\mathrm{id}_g \otimes h = h' \otimes \mathrm{id}_g$。这诱导出一个映射 $\alpha\colon G \longrightarrow \mathrm{Aut}(H)$，并使四元组 (G, H, t, α) 成为下文所定义的交叉模。

定义 3.59. 一个交叉模 是一个四元组 (G, H, t, α)，由两个群 G, H 和两个群同态 $t\colon H \longrightarrow G, \alpha\colon G \longrightarrow \mathrm{Aut}(H)$ 构成，使得对所有 $g \in G$ 和 $h, l \in H$，都有

$$t(\alpha(g)h) = g \circ t(h) \circ g^{-1}, \qquad \alpha(t(l))h = l \circ h \circ l^{-1}. \tag{3.3.2}$$

注 3.60. 任意交叉模 (G, H, t, α) 定义了一个严格 2-群 $\mathcal{G}$，其 $\mathrm{Ob}\,\mathcal{G} = G$，且 $\mathcal{G}(g, g') = \{(h, g) \in H \times G \mid t(h)g = g'\}$。复合由 $(h', t(h)g) \circ (h, g) ..= (h'h, g)$ 给出；对于张量积，我们有 $(h, g) \otimes (h', g') ..= (h\ \alpha(g)h', gg')$。左、右对偶化函子重合；它们将任意对象 $b \in G$ 映为 ${}^\vee b = b^{-1} = b^\vee$。对于态射 $f = (h, b)\colon b \longrightarrow c$，我们有

$${}^\vee f = (\alpha(c^{-1})h, c^{-1}) = (\alpha(b^{-1})h, c^{-1}) = f^\vee.$$

交叉模与严格 2-群之间存在范畴等价，例如 [Wag21，定理 1.92]。

例 3.61。

- *Hopf–Galois* 扩张与斜扭：群 H 的全纯群是半直积 $H \rtimes \mathrm{Aut}(H)$。两个群同态 $t\colon H \longrightarrow \mathrm{Aut}(H)$，$t(l)h = lhl^{-1}$，以及 $\alpha = \mathrm{id}\colon \mathrm{Aut}(H) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H)$，将 $(\mathrm{Aut}(H), H, t, \mathrm{id}_{\mathrm{Aut}(H)})$ 构成一个交叉模。正如《Introductionof [Byo24] and [Bac16，第 2], 全纯群可用于分类某些 Hopf–Galois 扩张以及斜扭。
- 有限群表示：群的一个短正合列

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{t} G \longrightarrow 0$$

使得 C 嵌入到 E 的中心中的，称为 G的中心扩张。令 $\kappa\colon G \longrightarrow E$ 为 $t\colon E \longrightarrow G$的一个集合论截面。直接计算可得，映射 $\alpha\colon G \longrightarrow \mathrm{Aut}(E)$ 定义为 $\alpha(g)e ..= \kappa(g)e\kappa(g)^{-1}$，与截面的选择无关，且是一个群同态。元组 (E, G, t, α) 构成一个交叉模，参见 [Wag21，第 1 节。3]

如 [HH92第 1], 中所述，若 G 是一个有限群，则任意射影表示 $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{PGL}_{\mathbb{C}}(V)$ 的 G 都可以提升为某个中心扩张 $\varrho\colon E \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ 的线性表示 E （该扩张）G。射影表示本身也在半直积的表示论中得到研究，例如参见 [CSST22]。

设 (G, H, t, α) 是一个交叉模，其关联的 2-群记为 $\mathfrak{G}$。利用第 3.2 节的结果，我们在范畴 $\mathfrak{G}$,vect 上确定一个 Grothendieck–Verdier 结构；该范畴由 $\mathfrak{G}$ 与 vect 之间的普通函子构成。

为此，我们需要更详细地分析 $\mathfrak{G}$ 的结构。由方程（3.3.2）可知，像 $K \coloneqq \operatorname{im} t \subset G$ 是 G 的正规子群，而核 $L \coloneqq \ker t$ 是 H 中的正规中心子群。后者可由恒等式推出

$$lhl^{-1} = \alpha(t(l))h = \alpha(e)h = h \qquad \text{for all } l \in L, h \in H.$$

对于任意 $k = t(h) \in K$ 和 $l \in L$，我们得到 $\alpha(k)l = \alpha(t(h))l = hlh^{-1} = l$。因此，存在唯一的群同态 $\alpha\colon Q \coloneqq G/N \longrightarrow \mathrm{Aut}(L)$，满足

$$\overline{\alpha}([g])l = \alpha(g)l \in L \subset H.$$

对所有 $g \in G$ 和 $l \in L$ 均成立。

$\mathfrak{G}$的连通分支与 Q的元素一一对应。给定任意元素 $g \in G$，我们将以 g 为指定对象的 $\mathfrak{G}$ 的极大满连通带基点子群胚记为 $\mathfrak{G}_g$。 $\mathfrak{G}_g$ 的对象集合为Kg，其态射与 $H \times Kg$相对应。

引理3.62。 设 $g \in G$，并将以单个对象g为对象的 L 的去环化记作$\mathbf{B}L$ 。典范包含映射 $\Theta_g\colon \mathbf{B}L \hookrightarrow \mathfrak{G}_g$ 将 g 映至 g，而 $l\colon g \longrightarrow g$ 映至$(l, g)\colon g \longrightarrow g$，它是本质满且全忠实的——也就是说，是一个等价。

为指定一个拟逆，固定群的满同态 $t\colon H \longrightarrow K$ 的一个集合论截面 $\iota\colon K \longrightarrow H$。定义拟逆$\Psi_g\colon \mathfrak{G}_g \longrightarrow \mathbf{B}L$，将每个对象映至 g，并将任意态射 (h, kg) 映至$\iota((t(h)k)^{-1})h\iota(k)$。利用 $\mathbf{B}L$,vect 可识别为群 L 的有限维表示范畴 $\mathrm{rep}(L)$， Θ_g和 Ψ_g 的推前给出了范畴等价

$$\Theta_g^*\colon \langle \mathfrak{G}_g, \mathsf{vect} \rangle \rightleftarrows \mathrm{rep}(L) : \Psi_g^*$$

$$F \longmapsto (Fg, \rho_F) \quad (\text{where } \rho_F(l) = F(l, g))$$

$$\left\{ \begin{array}{c} kg \longmapsto M \\ (hk, g) \longmapsto \rho\left(\iota((t(h)k)^{-1})h\iota(k)\right) \end{array} \right\} \longleftarrow\!\shortmid (M, \rho). \tag{3.3.3}$$

记号 3.63. 定义 $\mathsf{rep}_{\mathfrak{G}}(L) \coloneqq \bigoplus_{q\in Q}\mathsf{rep}(L)_q$，其中$\mathsf{rep}(L)_q \overset{=}{} \mathsf{rep}(L)$。给定某个 $M \in \mathsf{rep}_{\mathfrak{G}}(L)$，我们将其次数为 $q \in Q$ 的齐次分量记为 M_q。注意，若 K 在 G 中的指数有限，则有

$$\langle \mathfrak{G}, \mathsf{vect}\rangle \cong \bigoplus_{[g]\in Q} \langle \mathfrak{G}_g, \mathsf{vect}\rangle.$$

引理 3.64. 设 $\mathfrak{G}$ 是一个严格的 2-群，并将相应的交叉模记为 (G, H, t, α)。若 $K = \operatorname{im} t \subset G$ 具有有限指数，则 $\mathsf{rep}_{\mathfrak{G}}(L) \simeq \langle \mathfrak{G}, \mathsf{vect}\rangle$。

第 3.2 节中发展的工具，使我们能够赋予 $\mathfrak{G}$,vect Grothendieck–Verdier 范畴的结构，并将其转移到 $\mathsf{rep}_{\mathfrak{G}}(L)$。由此得到的张量积会置换齐次分量，并借助 α“扭曲” L 的作用。对此，我们引入如下记号：对于任意 $q \in Q$ 和 $M \in \mathsf{rep}(L)$，记 $M^{\alpha(q)}$ 为 L 的表示，其底层向量空间为M，并赋予作用 $l \triangleright m = \bar{\alpha}(q)l \triangleright m$，其中 $l \in L$ 和 $m \in M$任意。

命题 3.65. 设(G, H, t, α)是一个交叉模，其中 G 和 H 有限，并令 $\mathfrak{G}$ 为其对应的严格2-群。范畴 $\mathsf{rep}_{\mathfrak{G}}(L)$ 是一个右 r-范畴。其张量积和对偶化函子由以下指派定义

$$M \otimes N \coloneqq (M \otimes_{\Bbbk L} N^{\overline{\alpha}(p^{-1})}) \in \mathsf{rep}_{\mathfrak{G}}(L)_{pq}, \qquad DM \coloneqq \left(M^{\overline{\alpha}(p)}\right)^* \in \mathsf{rep}_{\mathfrak{G}}(L)_{p^{-1}}$$

对于 p、$q \in Q$ 和 $M \in \mathsf{rep}_{\mathfrak{G}}(L)_p$、$N \in \mathsf{rep}_{\mathfrak{G}}(L)_q$。

证明. 由命题 3.27，$\mathfrak{G}$,vect $\cong$ [$\Bbbk\mathfrak{G}$,vect] 可赋予右 Grothendieck–Verdier 范畴的结构，其对偶化对象为 $\Bbbk\mathfrak{G}(-, 1)^*$；将其对偶化函子记为 $R\colon \mathfrak{G}, \mathsf{vect}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathfrak{G}, \mathsf{vect}$。

由引理 3.64，存在 $\Bbbk$-线性等价

$$\widehat{\Theta}\colon [\Bbbk\mathfrak{G}, \mathsf{vect}] \rightleftarrows \mathsf{rep}_{\mathfrak{G}}(L) : \widehat{\Psi}$$

这些由下列等价的推前确定

$$\Theta_g\colon \langle \mathfrak{G}_g, \mathsf{vect}\rangle \rightleftarrows \mathbf{B}L : \Psi_g,$$

对每个齐次分量 [$\Bbbk\mathfrak{G}_{[g]}$,Vect]。因此，利用公式（3.3.3），我们可以将 [$\Bbbk\mathfrak{G}$, Vect] 的 Grothendieck–Verdier 结构显式地传递到 $\mathsf{rep}_{\mathfrak{G}}(L)$ 上。

对偶化对象被映射为 $\Theta(\Bbbk\mathcal{G}(-,\ 1)^*)\ = \Bbbk L^* \cong \Bbbk L \in \mathsf{rep}_{\mathcal{G}}(L)^{[1]}$，其中最后一个等式用到了 $\Bbbk L$ 是一个 Frobenius 代数这一事实。$\mathsf{rep}_{\mathcal{G}}(L)$ 的张量积和右对偶化函子为

$$\otimes := \widehat{\Theta} * (\widehat{\Psi} \times \widehat{\Psi}) \colon \mathsf{rep}_{\mathcal{G}}(L) \times \mathsf{rep}_{\mathcal{G}}(L) \longrightarrow \mathsf{rep}_{\mathcal{G}}(L),$$
$$D := \widehat{\Theta}\mathsf{R}\widehat{\Psi}^{\mathrm{op}} \colon \mathsf{rep}_{\mathcal{G}}(L)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{rep}_{\mathcal{G}}(L).$$

为了显式地计算它，我们考虑两个元素 p、$q \in Q$ 以及两个表示 $(M, \rho) \in \mathsf{rep}_{\mathcal{G}}(L)_p$ 和 $(N, \tau) \in \mathsf{rep}_{\mathcal{G}}(L)_q$。对应于 M 和 N 的函子的 Day 卷积通过某个余极限计算，而作为范畴等价的 $\widehat{\ }$ 与该余极限交换。因此，根据公式 (2.8.4) 以及余端的定义，次数为 $x \in Q$ 的齐次分量 $(M \otimes N)_x$ 是下列平行态射的余等化子：

$$\coprod_{r,s\in Q} \Bbbk L_{r,s} \otimes_{\Bbbk} M_r \otimes_{\Bbbk} N_{s^{-1}x} \rightrightarrows \coprod_{r\in Q} M_r \otimes_{\Bbbk} N_{r^{-1}x},$$

其中 $L_{r,s} = L$，当 $r = s$ 时；否则为 $\varnothing$。其平行态射为

$$l \otimes_{\Bbbk} m \otimes_{\Bbbk} n \longmapsto F\rho(l)m \otimes_{\Bbbk} n,$$
$$l \otimes_{\Bbbk} m \otimes_{\Bbbk} n \longmapsto m \otimes \tau(l^{\vee})n = m \otimes \tau(\overline{\alpha}(s^{-1})l)n,$$

其中 $l \in L_{r,s}$、$m \in M_r$ 和 $n \in N_{s^{-1}x}$。

为了计算 D，我们注意到，对于任意 $F \in [\Bbbk\mathcal{G}, \mathsf{vect}]$，$\mathsf{R}(F)\ = F(^{\vee}-)^*$。因此，给定 $x \in Q$，我们计算

$$DM_x = \begin{cases} M^* & x^{-1} = p, \\ \{0\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此，任意 $l \in L$ 在 M^* 上的作用由 $\left(\rho(\alpha(p)l)\right)^* \colon M_p^* \longrightarrow M_p^*$ 给出。 □

命题 3.66. 设 (G, H, α, t) 是一个交叉模，其中 G 和 H 有限，并记 $\mathcal{G}$ 为其对应的严格 2-群。当且仅当 $\mathrm{char}\,\Bbbk$ 不整除 $L = \ker t$ 的阶时，范畴 $\mathsf{rep}_{\mathcal{G}}(L)$ 是刚性的。

证明。 由命题 3.45 可知，表示$_{\mathcal{G}}(L)$ 是刚性的，当且仅当其中所有对象都是有限生成且投射的。由于表示$_{\mathcal{G}}(L)$ 是有限多个表示(L) 的直和，并且表示(L) 的每个对象都是有限生成的，因此当且仅当表示(L) 的所有对象都是投射的时，条件成立。后者等价于 $\Bbbk L$ 是半单的；根据 Maschke 定理，这又对应于 $\mathrm{char}\,\Bbbk$ 与 $|L|$ 互素。□

我在海滩漫步，嘟嘟嘟嘟；我在海滩漫步，噜嘟嘟；我在海滩漫步，嘟嘟嘟嘟嘟；我在海滩漫步，噜噜嘟嘟嘟。

海绵宝宝，S01E18b

4 扭曲的中心

Connes 和 Moscovici 意义下的 Hopf 循环上同调有一个特别之处：缺少“典范”的系数 [CM99]。最初，人们考虑了对合模对 [CM00]。这类模对由一个类群元和所考察的霍普夫代数的一个特征组成，它们通过各自的伴随作用实现对极的平方。后来，Hajac、Khalkhali、Rangipour 和 Sommerhäuser 在反 Yetter–Drinfeld 模范畴中找到了更一般的系数来源，[HKRS04]。如例 2.42所述，反 Yetter–Drinfeld 模并不构成幺半范畴，而是 Yetter–Drinfeld 模上的一个模范畴。这一点反映在如下事实中：反 Yetter–Drinfeld 模可以等同于反 Drinfeld 双上的模；反 Drinfeld 双是 Drinfeld 双上的一个余模代数，参见备注 2.79。Hajac 和 Sommerhäuser 的以下定理揭示了对合对的特殊作用。

定理 4.1 ([Hal21, 定理 3.4]). 对于有限维霍普夫代数 H，以下陈述等价：

(i) 霍普夫代数 H 存在对合对。*(ii)* 存在一个定义在 H上的一维反 *Yetter–Drinfeld* 模。*(iii)* H 的 *Drinfeld* 双与反 *Drinfeld* 双是同构代数。

对合对在范畴论中颇受关注，因为它们能在 Yetter–Drinfeld 模上产生枢轴结构。借助 heap 理论（研究配备三元运算的某些代数结构），我们可以将空间的皮卡群提升到范畴的 Picard 堆中。这些结构可视为经典对合对的类比。进一步将反 Yetter–Drinfeld 模抽象为反中心后，我们便能以更具范畴论意味的方式重新表述定理 4.1，并强调枢轴结构的作用。

在定理6.44 中，我们将给出该结果的单子解释。

定理 4.23。 设 $\mathcal{C}$ 为一个刚性范畴。在以下各项之间存在一个双射

(i) $\mathcal{C}$上拟枢轴结构的等价类，*(ii)* 反中心的 *Picard* 堆，以及 *(iii)* 中心与反中心之间模范畴等价的同构类。

在进一步研究 $\mathcal{C}$的反中心的堆结构时，我们研究自然单射 $\kappa\colon \mathrm{Pic}\,\mathsf{A}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Piv}\,\mathsf{Z}(\mathcal{C})$，见定理4.33，该映射最初由 Shimizu 引入 [Shi19]。根据 [Shi23a，定理 4.1]，，若 $\mathcal{C}$ 是有限张量范畴，则该箭头总是双射的。然而，我们证明这在一般情况下并不成立，从而证实了同上的引言中提出的一个猜想。

定理4.50。 存在范畴 $\mathcal{C}$ 上的一个枢轴结构，它并非由 $\mathcal{C}$的反中心的 *Picard* 堆中的任何元素所诱导。换言之，映射$\kappa\colon \mathrm{Pic}\,\mathsf{A}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Piv}\,\mathsf{Z}(\mathcal{C})$ 不是满射。

4.1 堆

可以把堆看作没有固定单位元的群。它们最初是在名称*Schar*， [Prü24; Bae29]下被研究的。近来，它们的同调性质在 [ESZ21], 中得到研究，而朝向“量子版本”的推广在 [Ško07]中有所暗示。堆等价于 G-旋子——即带有自由传递 G-作用的非空集合——对于群 G，例如参见 [Gir71]。我们的阐述遵循 [Brz20] 的第 2 节。

定义 4.2. 一个堆是集合 G 连同如下三元运算

$$\langle -,=,\equiv\rangle\colon G\times G\times G \longrightarrow G,$$

我们称之为堆运算，它满足广义结合公理以及*Mal'cev* 恒等式，我们将后者视为单位公理：

$$\langle g,h,\langle i,j,k\rangle\rangle = \langle\langle g,h,i\rangle,j,k\rangle, \qquad \text{对所有 } g、h、i、j、k\in G, \tag{4.1.1}$$

$$\langle g,g,h\rangle = h = \langle h,g,g\rangle, \qquad \text{对所有 } g、h\in G。 \tag{4.1.2}$$

我们想指出两点值得注意之处。首先，我们的定义有意没有将空集排除在堆之外。其次，由于设置略有不同，在 [HL17]中还需要额外的“中间结合公理”。然而，正如 [Brz20引理 23], 所指出的，这可由方程（4.1.1）和（4.1.2）推出。

定义 4.3。映射 $f\colon G \longrightarrow H$ 若在堆之间是一个堆的态射，则

$$f\left(\langle g,h,i\rangle\right) = \langle f(g), f(h), f(i)\rangle, \qquad \text{for all } g,h,i \in G.$$

下一个引理可仿照其群论版本证明。

引理 4.4. 堆的态射是同构，当且仅当它是双射。

忘去单位后，任意群都定义了一个堆。反过来，任意非空堆都可以通过选取一个单位转化为群，参见 [Cer43]。

引理 4.5. 每个群 $(G,\cdot,\ e)$ 都可通过以下方式成为一个堆

$$\langle -,=,\equiv\rangle\colon G\times G\times G \longrightarrow G, \qquad \langle g,h,i\rangle := g\cdot h^{-1}\cdot i.$$

群态射也成为诱导堆的堆态射。

引理 4.6。带有一个固定元素 G 的非空堆 $e \in G$ 可以通过乘法视为一个单位元为 e 的群

$$-\cdot_e =\colon G\times G \longrightarrow G, \qquad g\cdot_e h := \langle g,e,h\rangle.$$

元素 $g \in G$ 关于 $\cdot_e$ 的逆元由 $g^{-1} ..= \langle e,g,e\rangle$ 给出。堆的态射是所诱导群的态射，前提是它将其源的固定元素映射到其目标的固定元素。

更一般地，如果 $\mathfrak{G}$ 是一个群胚，并且 $x,y \in \mathfrak{G}$，那么态射集 $\mathfrak{G}(x,y)$ 通过定义为 $f,g,h ..= fg^{-1}h$ 的堆运算成为一个堆。下一个例子是这一构造的特殊情形，它将在本章节中发挥重要作用。

例 4.7。设 $F,G\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ 是 oplax 幺半自函子。集合

$$\mathrm{Iso}_{\otimes}(F,G) := \left\{\text{oplax monoidal natural isomorphisms from } F \text{ to } G\right\}$$

带有堆运算的堆结构

$$\langle -,=,\equiv\rangle\colon \mathrm{Iso}_{\otimes}(F,G)^3 \longrightarrow \mathrm{Iso}_{\otimes}(F,G), \qquad \langle \phi,\psi,\xi\rangle := \phi\psi^{-1}\xi.$$

4.2 枢轴结构与扭曲中心

4.2.1 扭曲中心及其皮卡堆

回顾例 2.45 ，我们可以用强幺半函子扭曲幺半范畴在自身上的正则作用。如果 $\mathscr{C}$ 是一个刚性幺半范畴，那么我们将中心 $\mathsf{Z}({}_L\mathscr{C}_R)$称为扭曲中心，并将 $\mathsf{Z}(\mathscr{C}_R)$和$\mathsf{Z}({}_L\mathscr{C})$称为右 和左 扭曲中心。

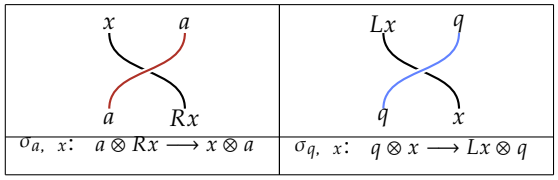
注 4.8. 从双范畴的视角可以得到扭曲中心的一种自然描述。给定幺半范畴 $\mathscr{C}$，令 $\mathbf{B}\mathscr{C}$ 表示其去环化；也就是说，$\mathbf{B}\mathscr{C}$ 是具有单个对象 $\bullet$ 的双范畴，且 $\mathbf{B}\mathscr{C}(\bullet, \bullet) \simeq \mathscr{C}$。在此设定下，强幺半函子等同于单对象双范畴之间的伪函子，而强幺半变换对应于伪图标s，例如参见 [JY21，命题 4.6。9]。

令 $\mathbb{P}\mathsf{s}^{\mathsf{ps}}(\mathbf{B}\mathscr{C})$ 为 $\mathbf{B}\mathscr{C}$ 的自伪函子、其伪自然变换以及修正所构成的双范畴。则 $\mathbb{P}\mathsf{s}^{\mathsf{ps}}(\mathbf{B}\mathscr{C})(L,\ R) \simeq \mathsf{Z}({}_L\mathscr{C}_R)$。参见 [FH23，命题 3。6] 以了解该事实的证明。

本节余下部分中，固定一个严格刚性范畴 $\mathscr{C}$，参见定理2.72。从扭曲双模范畴的中心到其底层幺半范畴的遗忘函子是忠实的，因此我们可以使用幺半范畴的图形演算变体，只需特别留意半编织。于是，我们引入一种着色方案，以帮助追踪各种范畴。

(i) 右扭中心$\mathsf{Z}(\mathscr{C}_R)$中的对象用红色表示；(ii) 左扭中心 $\mathsf{Z}({}_L\mathscr{C})$中的对象用蓝色表示；(iii) Drinfeld 中心$\mathsf{Z}(\mathscr{C})$或 $\mathscr{C}$中的对象用黑色表示。

例如，对象 $a \in \mathsf{Z}(\mathscr{C}_R)$和 $q \in \mathsf{Z}({}_L\mathscr{C})$的半编织为：



假设 4.9。 在本章节的其余部分，我们主要关注使用同一个严格幺半函子从左侧或右侧进行扭转。为简洁起见，我们因此固定这样一个函子 $L = R$: $\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$，并考虑范畴 ${}_L\mathscr{C}$和 $\mathscr{C}_R$。

假设给定三个对象

$$(a,\sigma_{a,-})\in \mathsf{Z}(\mathscr{C}_R),\qquad (q,\sigma_{q,-})\in \mathsf{Z}({}_L\mathscr{C}),\qquad \text{and}\qquad (x,\sigma_{x,-})\in \mathsf{Z}(\mathscr{C}).$$

命题 4.10. 张量积 $\mathscr{C}$ 扩展为 $\mathsf{Z}(\mathscr{C})$ 在$\mathsf{Z}(\mathscr{C}_R)$ 上的左作用，以及 $\mathsf{Z}(\mathscr{C})$ 在 $\mathsf{Z}({}_L\mathscr{C})$ 上的右作用。半编织如图 4.1所定义。

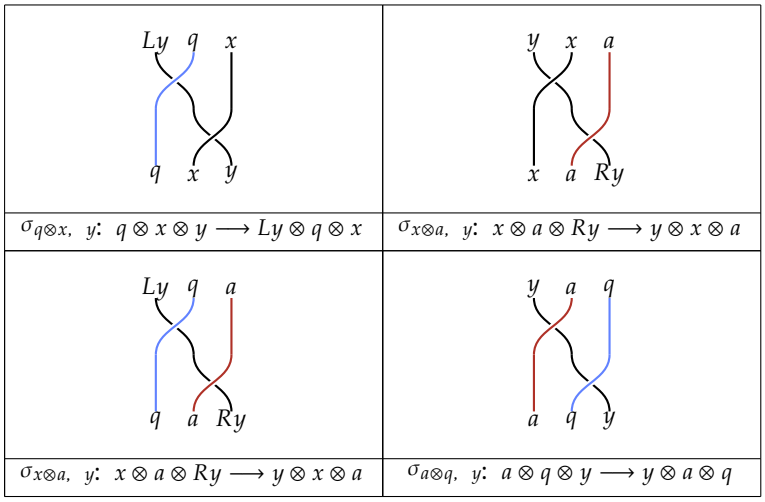
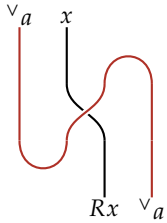


图 4.1：$\mathsf{Z}(\mathscr{C})$ 对$\mathsf{Z}({}_L\mathscr{C})$ 和$\mathsf{Z}(\mathscr{C}_R)$ 的典范作用。

备注 4.11. 直接计算证明范畴 $\mathsf{Z}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}{}_{,R}{}^{\mathrm{rev}})$ 与$\mathsf{Z}(_R\mathscr{C})^{\mathrm{op}}$ 等价。此外，这一等同与模结构相容：对所有 $x\in\mathsf{Z}(\mathscr{C}^{\mathrm{op},\mathrm{rev}})$ 和 $a\in\mathsf{Z}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}{}_{,R}{}^{\mathrm{rev}})$，我们有 $x\otimes^{\mathrm{op}}R(a)=R(a)\otimes x$ 以及 $\sigma_{x\otimes^{\mathrm{op}}a,-}=\sigma_{a\otimes x,-}$。因此，我们将研究范围限制于右扭曲中心。

由命题 2.80 可知，由于 $\mathscr{C}$ 是刚性幺半范畴，中心 $\mathsf{Z}(\mathscr{C})$ 同样是刚性的。尽管扭曲中心并非如此，但任意对象 $(a,\sigma_{a,-})\in\mathsf{Z}(\mathscr{C}_R)$ 的左对偶 ${}^{\vee}a$ 在配备半编织后，可以成为 $\mathsf{Z}(_R\mathscr{C})$ 的一个对象



这表明，类比命题2.80，我们可以通过将右扭曲与左扭曲互换，将 $\mathscr{C}$ 的对偶化函子提升到扭曲中心的层次。更具概念性的描述见 [FH23，命题 3。15]。

命题 4.12。左对偶化函子 ${}^{\vee}(-)\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{op},\ \mathrm{rev}}$ 可提升为右扭曲中心和左扭曲中心之间的函子

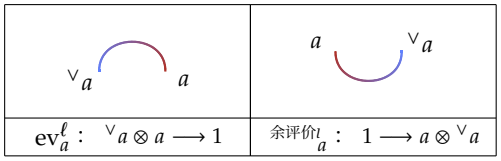
$$ {}^{\vee}(-)\colon \mathsf{Z}(\mathcal{C}_R) \longrightarrow \mathsf{Z}({}_R\mathcal{C})^{\mathrm{op}}. $$

图4.1 右栏所示的半编织表明，每个对象 $a \in \mathsf{Z}(\mathcal{C}_R)$都会导出两个左$\mathsf{Z}(\mathcal{C})$-模函子：

$$ -\otimes a\colon \mathsf{Z}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{Z}(\mathcal{C}_R) \qquad \text{and} \qquad -\otimes {}^{\vee}a\colon \mathsf{Z}(\mathcal{C}_R) \longrightarrow \mathsf{Z}(\mathcal{C}). \tag{4.2.1} $$

令 $(a,\sigma_{a,-}) \in \mathsf{Z}(\mathcal{C}_R)$。根据命题 4.12，我们采用以下记号表示扭曲中心的求值态射和余求值态射：

(4.2.2)



命题 4.13. 每个对象 $a \in \mathsf{Z}(\mathcal{C}_R)$ 诱导伴随函子$\mathsf{Z}(\mathcal{C})$-模函子

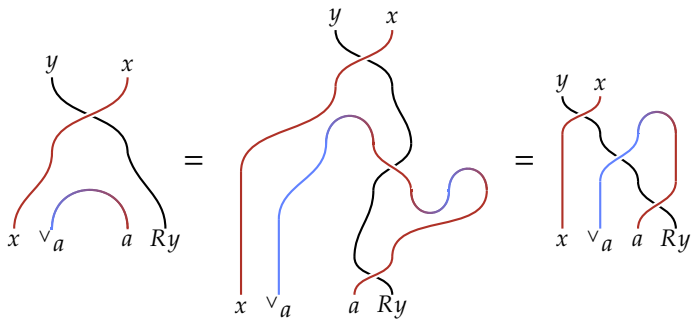
$$ -\otimes a\colon \mathsf{Z}(\mathcal{C}) \rightleftarrows \mathsf{Z}(\mathcal{C}_R) :-\otimes {}^{\vee}a. \tag{4.2.3} $$

证明. 我们知道，对任意对象 $(a,\sigma_{a,-}) \in \mathsf{Z}(\mathcal{C}_R)$，等式 (4.2.3) 是一个普通伴随，其单位 η 与余单位 ε 由下式给出

$$ \begin{aligned} \eta_y &:= \mathrm{id}_y \otimes \mathrm{coev}_a^{\ell}\colon y \longrightarrow y\otimes a\otimes {}^{\vee}a, && \text{for all } y \in \mathsf{Z}(\mathcal{C}),\\ \varepsilon_x &:= \mathrm{id}_x \otimes \mathrm{ev}_a^{\ell}\colon x\otimes {}^{\vee}a\otimes a \longrightarrow x, && \text{for all } x \in \mathsf{Z}(\mathcal{C}_R). \end{aligned} $$

下一图表表明，对每一个 $x \in \mathsf{Z}(\mathcal{C}_R)$，$\varepsilon_x$ 是$\mathsf{Z}(\mathcal{C}_R)$ 中的态射：

(4.2.4)



此外，对于所有 $w \in \mathsf{Z}(\mathcal{C})$，$\varepsilon_{w\otimes x} = \mathrm{id}_w \otimes \varepsilon_x$。类似的论证表明，伴随的单位是模函子的自然变换。□

由于从（扭曲）中心到其底层范畴的遗忘函子是忠实的，因此它也是保守的[11]，，这使我们能够刻画
$\mathsf{Z}(\mathscr{C})$ 与右扭曲中心之间的模范畴等价。

[11] 函子$F\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$称为保守的，如果它反映同构；也就是说，对于所有 $f \in \mathscr{C}(x,y)$，若 Ff 是一个同构，则 f 也是一个同构。

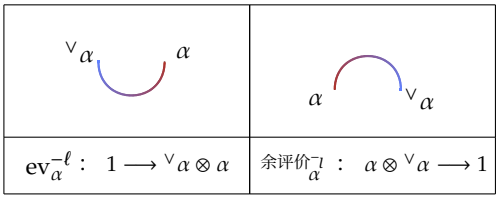
备注 4.14. 回忆命题 2.51 指出，对于幺半范畴 $\mathscr{C}$和一个 $\mathscr{C}$-模范畴 $\mathbf{M}$，存在一个 $\mathscr{C}$-模范畴等价

$$\mathsf{Str}\mathscr{C}\mathsf{Mod}(\mathscr{C},\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}, \qquad F \longmapsto F1, \qquad -\triangleright m \longleftarrow m.$$

特别地，任意左模范畴函子 $F\colon \mathsf{Z}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathsf{Z}(\mathscr{C}_R)$ 都自然同构于 $-\otimes F1\colon \mathsf{Z}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathsf{Z}(\mathscr{C}_R)$。由命题 2.67，$F$ 是等价，当且仅当 $F1 \in \mathscr{C}$ 可逆；两个左 $\mathsf{Z}(\mathscr{C})$-模函子 $F, G\colon \mathsf{Z}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathsf{Z}(\mathscr{C}_R)$ 同构，当且仅当 $F1 \cong G1$。

定义 4.15。 对象 $(\alpha,\sigma_{\alpha,-}) \in \mathsf{Z}(\mathscr{C}_R)$ 中的对象称为 $\mathscr{C}$-可逆，如果 α 在遗忘函子 $U^{(R)}\colon \mathsf{Z}(\mathscr{C}_R) \longrightarrow \mathscr{C}$ 下的像 $U\alpha \in \mathscr{C}$ 是可逆的。

记号 4.16。 设 $(\alpha, \sigma_{(\alpha,-)}) \in \mathsf{Z}(\mathscr{C}_R)$ 是一个 $\mathscr{C}$-可逆元素。类似于等式（4.2.2），我们用以下记号表示 $\mathrm{ev}^{-\ell}$ 和$\mathrm{coev}^{-\ell}$ 分别关于 ev^{ℓ} 和 coev^{ℓ}的逆：



堆这一概念使我们能够在实现 Drinfeld 中心 $\mathsf{Z}(\mathscr{C})$ 与其扭曲相对中心 $\mathsf{Z}(\mathscr{C}_R)$ 之间模等价的对象同构类上定义一种代数结构。类比皮卡群，我们将其称为扭曲中心的 Picard 堆。

定义 4.17. 右扭中心 *Picard* 堆 $\mathsf{Z}(\mathscr{C}_R)$ 是同构类的集合

$$\mathrm{Pic}\,\mathsf{Z}(\mathscr{C}_R) := \left\{[\alpha] \,\middle|\, \alpha \in \mathsf{Z}(\mathscr{C}_R) \text{ is } \mathscr{C}\text{-invertible}\right\}$$

以及为 $[\alpha]$、$[\beta]$、$[\gamma] \in \mathrm{Pic}\mathsf{Z}(\mathscr{C}_R)$ 定义的堆运算

$$\langle [\alpha],[\beta],[\gamma]\rangle = [\alpha \otimes {}^\vee\beta \otimes \gamma].$$

引理4.18。 定义4.17 中的 *Picard* 堆构成一个堆。

证明。 广义结合律，见方程（4.1.1），由 $\mathscr{C}$ 的张量积的结合律及其与半编织“粘合”的相容性得出。为证明 Mal'cev 恒等式成立，取 $\mathscr{C}$-可逆对象 α、$\beta \in \mathsf{Z}(\mathscr{C}_R)$。命题 2.80 和方程（4.2.4）表明

$$\alpha \otimes {}^{\vee}\alpha \otimes \beta \xrightarrow{\mathrm{coev}_\alpha^{\ell\,-1}\otimes \mathrm{id}_\beta} \beta \qquad \text{and} \qquad \beta \otimes {}^{\vee}\alpha \otimes \alpha \xrightarrow{\mathrm{id}_\beta \otimes \mathrm{ev}_\alpha^{\ell}} \beta$$

是$\mathsf{Z}(\mathscr{C}_R)$中的同构，因此 $\langle [\alpha],\ [\alpha],\ [\beta] \rangle = [\beta] = \langle [\beta],\ [\alpha],\ [\alpha] \rangle$。 □

一般而言，扭曲中心$\mathsf{Z}(\mathscr{C}_R)$ 不会继承 $\mathscr{C}$的幺半结构。然而，引理4.18暗示了一种略作推广的情形：用三价函子取代张量积，从而本质上实现堆的范畴化（不包含 Mal'cev 恒等式）。这一概念的良定义性已由 [Ško07] 以堆范畴之名作了初步探讨。

4.2.2 拟枢轴性

我们此前研究所得的一个特别有趣的推论出现在 $R \mathrel{..=} {}^{\vee\vee}(-)$的情形中；右侧由 R 扭曲的正则双模的中心可以理解为反 Yetter–Drinfeld 模的一种推广，参见 [HKS19，定理2.3]。与之前一样，固定一个严格刚性范畴 $\mathscr{C}$，并考虑扭曲双模范畴 $\mathscr{C}_{{}^{\vee\vee}(-)}$ 和 ${}_{{}^{\vee\vee}(-)}\mathscr{C}$。

记号 4.19. 我们记$\mathsf{A}(\mathscr{C}) \mathrel{..=} \mathsf{Z}(\mathscr{C}_{{}^{\vee\vee}(-)})$ 和 $\mathsf{Q}(\mathscr{C}) \mathrel{..=} \mathsf{Z}({}_{{}^{\vee\vee}(-)}\mathscr{C})$，并将前者称为 $\mathscr{C}$ 的反 *Drinfeld* 中心。

我们已经提到扭曲中心$\mathsf{A}(\mathscr{C})$ 与霍普夫代数上的反 Yetter–Drinfeld 模之间的联系，这一联系见于 [HKS19]。当 $\mathscr{C}$ 是霍普夫代环上的模范畴时，Kowalzig 在 [Kow24]中研究了这种情形。广义反 Yetter–Drinfeld 模的对应对象$\mathsf{Q}(\mathscr{C})$ 在文献中较少见，但在第 5 章和第 6章的单子论研究中起着关键作用。

定义 4.20 ([Shi23a，第 4])。 刚性幺半范畴 $\mathscr{C}$ 上的拟枢轴结构 是一个有序对 $(\beta,\ \rho_\beta)$，由一个可逆对象 $\beta \in \mathscr{C}$ 和一个幺半自然同构组成

$$\rho_\beta \colon (-) \xRightarrow{\sim} \beta \otimes {}^{\vee\vee}(-) \otimes {}^{\vee}\beta.$$

这个元组（$\mathscr{C},\ \ (\beta,\ \rho_\beta)$）将称为拟枢轴范畴。

如果 $\mathcal{C}$ 是有限维霍普夫代数上的有限维模范畴，那么拟枢轴结构有一种众所周知的解释——它们对应于对合对。这可以由对 [Hal21，引理 56],稍作变动后推得。主要观察是，拟枢轴结构 β 中的可逆对象(β, ρ_β) 在 $\mathcal{C}$ 上对应于一个特征，而ρ_β 确定了一个类群元。由该特征和类群元实现反对子的平方这一事实，体现了ρ_β 是从恒等函子到双对偶函子的某个共轭函子的自然变换。我们将在第6.5节研究这一点的单子类比。

注4.21。 每个枢轴范畴都是拟枢轴的；反之则不成立。一个反例是 [HK19] 中讨论的广义 Taft 代数的有限维模。这些霍普夫代数中的任意一个都承认对合对，但一般而言，既不能使特征平凡，也不能使类群样元平凡。前面的讨论以及 [Hal21，引理 5，6] 表明，Mod-H 是拟枢轴的，但不是枢轴的——这与其 Drinfeld 中心$\mathcal{Z}$(Mod-H)形成对比，后者根据 [Hal21，引理 5，5]承认一个枢轴结构。

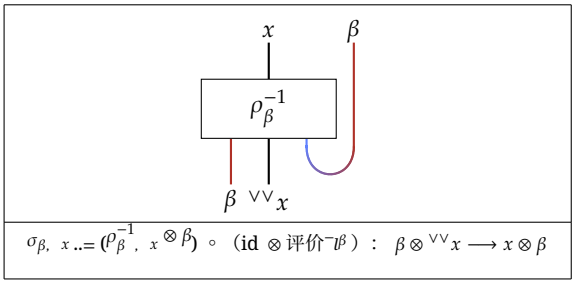
设 (β, ρ_β) 是 $\mathcal{C}$ and ϕ 上的一个拟枢轴结构： $\beta' \longrightarrow \beta$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个同构。显然，对 $(\beta', (\phi^{-1} \otimes \mathrm{id} \otimes {}^{\vee}\phi) \circ \rho_\beta)$ 是 $\mathcal{C}$ 上的另一个拟枢轴结构。这定义了一个等价关系，我们记作

$$\mathrm{QPiv}(\mathcal{C}) := \{\, [(\beta, \rho_\beta)] \mid (\beta, \rho_\beta) \text{ is a quasi-pivotal structure on } \mathcal{C} \,\}$$

关于 $\mathcal{C}$ 上拟枢轴结构等价类的集合。

引理 4.22。 设 $\mathcal{C}$ 是一个严格刚性范畴。*Picard* 堆 PicA($\mathcal{C}$) 与拟枢轴结构等价类的集合QPiv($\mathcal{C}$) 之间存在双射。

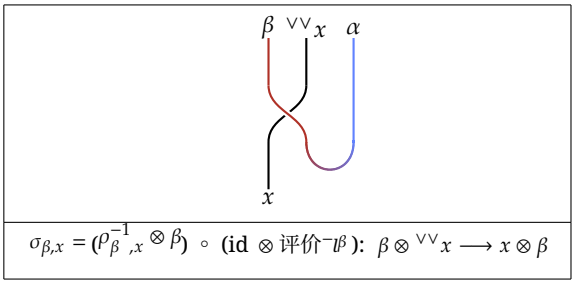
证明。 设 (β,ρ_β) 是 $\mathcal{C}$ 上的拟枢轴结构。记 $\mathrm{ev}_\beta^{-\ell} := (\mathrm{ev}_\beta^{\ell})^{-1}$，我们定义半编织



于是，由于 ρ_β 是幺半的，$\sigma_{\beta,x}$ 满足六边形恒等式。这定义了

$$\phi\colon \mathrm{QPiv}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathrm{Pic}\,\mathsf{A}(\mathscr{C}), \qquad [(\beta,\rho_\beta)] \longmapsto [(\beta,\sigma_{\beta,-})].$$

反过来，设 $(\alpha,\sigma_{\alpha,-}) \in \mathsf{A}(\mathscr{C})$ 是 $\mathscr{C}$-可逆的。由其半编织，我们得到一个幺半自然变换



$\sigma_{\beta,x} = (\rho_\beta^{-1},_x \otimes \beta) \circ (\mathrm{id} \otimes \text{评价}^{-l\beta})\colon \beta \otimes {}^{\vee\vee}x \longrightarrow x \otimes \beta$

由蛇形恒等式可知，下述映射是 ϕ 的逆元：

$$\psi\colon \mathrm{Pic}\,\mathsf{A}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathrm{QPiv}(\mathscr{C}), \qquad [(\alpha,\sigma_{\alpha,-})] \longmapsto [(\alpha,\rho_\alpha)]. \qquad \square$$

定理 4.23。 设 $\mathscr{C}$ 是一个严格刚性范畴。那么以下对象之间存在双射：

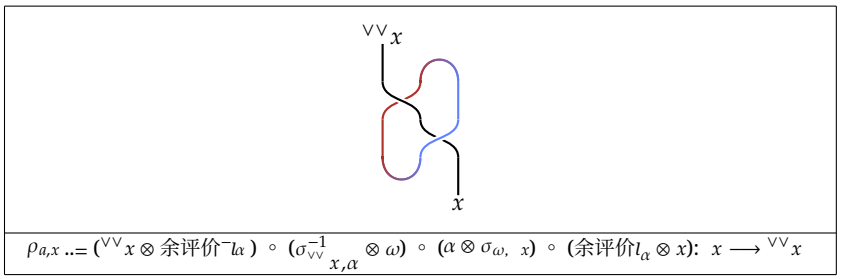
(i) $\mathscr{C}$ 上拟枢轴结构的等价类；*(ii)* $\mathsf{A}(\mathscr{C})$ 的 *Picard* 堆；以及 *(iii)* $\mathsf{Z}(\mathscr{C})$-模等价的同构类，其中这些模等价是在$\mathsf{Z}(\mathscr{C})$ 与 $\mathsf{A}(\mathscr{C})$之间的。

证明。 （ii）与(ii)和(iii) 的等价性由注4.14得出；要证明(i) 等价于(ii) ，我们调用引理4.22。 □

4.2.3 *Drinfeld* 中心的枢纽性

本节将从范畴论的角度考察对合中的对与枢轴结构之间的关系，例如见注 4.21。设 $a ::= (\alpha,\sigma_\alpha,-) \in \mathsf{A}(\mathscr{C})$ 可 $\mathscr{C}$-逆，并将其左对偶记作$\Omega ::= (\omega,\sigma_\omega,-) \in \mathsf{Q}(\mathscr{C})$。图 4.2 汇总了 α 的余求值及其逆元 $\mathrm{coev}_\alpha^{-\ell}$ 的一些有用性质。

定义 4.24。 设 $a ::= (\alpha,\ \sigma_{\alpha,\ -})\ \in \mathsf{A}(\mathscr{C})$ 是一个 $\mathscr{C}$-可逆元素，其左对偶为 $\Omega ::= (\omega,\ \sigma_{\omega,\ -}) \in \mathsf{Q}(\mathscr{C})$。对于任意 $x \in \mathsf{Z}(\mathscr{C})$，定义态射 $\rho_{a,\ x}$ 如下：



$\rho_{a,x} ::= ({}^{\vee\vee}x \otimes \text{余评价}^{-l\alpha}) \circ (\sigma^{-1}_{\vee\vee}{}_{x,\alpha} \otimes \omega) \circ (\alpha \otimes \sigma_{\omega,\ x}) \circ (\text{余评价}l_\alpha \otimes x)\colon x \longrightarrow {}^{\vee\vee}x$

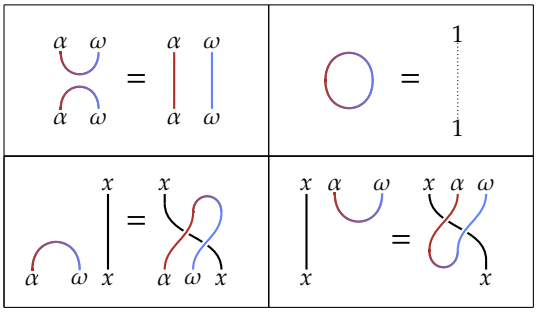
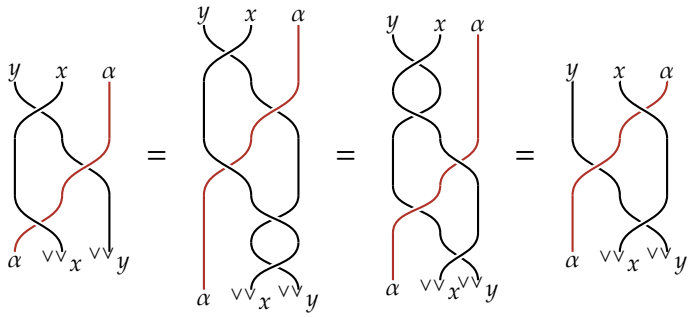


图 4.2：余评价l_α和余评价$\overline{l}_\alpha$ 的性质。

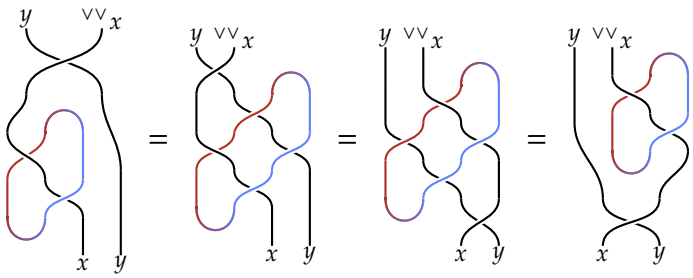
如注记 4.8 所述，扭曲中心中的对象对应于幺半函子的去环化之间的伪自然变换。以下引理表明，如果这些对象是 $\mathscr{C}$-可逆的，那么就可以由它们重构幺半自然同构。

引理 4.25 ([Shi23a, 第4节。4])。 对于任意 $\mathscr{C}$-可逆对象 $a \in \mathsf{A}(\mathscr{C})$，映射 $\rho_{a,-} \colon (-) \Longrightarrow {}^{\vee\vee}(-)$ 在 $\mathsf{Z}(\mathscr{C})$上定义了一个枢轴结构。

证明。 取一个对象 $a \coloneqq (\alpha, \sigma_{\alpha,-}) \in \mathsf{A}(\mathscr{C})$，使得 α 在 $\mathscr{C}$中可逆，并将其左对偶记为 $\Omega \coloneqq (\omega, \sigma_{\omega,-}) \in \mathsf{Q}(\mathscr{C})$。此外，设$x \in \mathsf{Z}(\mathscr{C})$为 $\mathscr{C}$的 Drinfeld 中心中的任意对象。注意，对于任意$y \in \mathscr{C}$，杨–巴克斯特恒等式的一个变体成立：

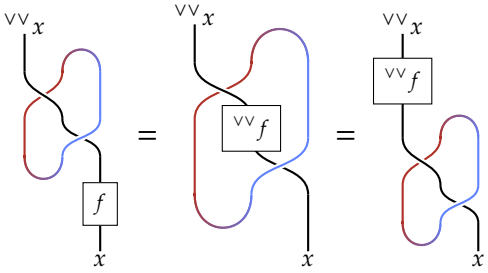


将这一事实与图 4.2 相结合，可得 $\rho_{a,x}$：$x \longrightarrow {}^{\vee\vee}x$ 是 $\mathscr{C}$的 Drinfeld 中心中的一个态射：

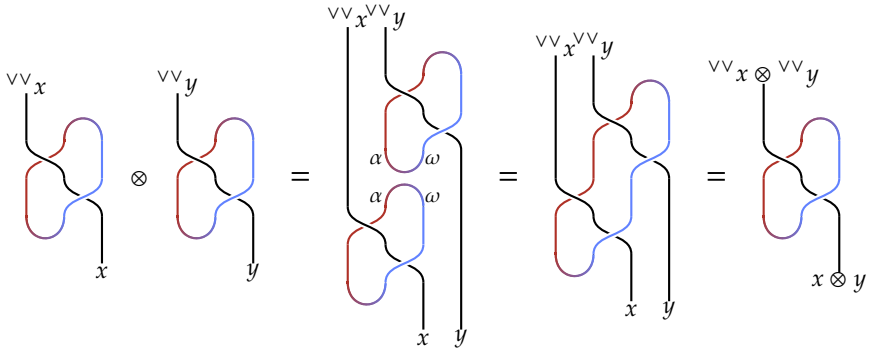


由于遗忘函子 $U^{(Z)}\colon \mathsf{Z}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathscr{C}$ 是保守的，且 $\rho_{a,x}$ 是 $\mathscr{C}$中若干同构的复合，因此它是中心 $\mathsf{Z}(\mathscr{C})$ 中的一个同构。

半编织的自然性意味着 ρ_a 同样是自然的：



最后，自然同构 $\rho_a\colon \mathrm{Id}_{\mathsf{Z}(\mathscr{C})} \longrightarrow {}^{\vee\vee}(-)$ 是幺半的，这由六边形恒等式确立。



□

给定 $\mathsf{Z}(\mathscr{C})$ 的不同枢轴结构，它们由 $\mathsf{A}(\mathscr{C})$ 中的 $\mathscr{C}$-可逆对象诱导，先验上并不清楚它们是否重合。下面的引理是朝这个方向迈出的第一步。它表明，诱导的枢轴结构仅依赖于$\mathsf{A}(\mathscr{C})$ 中 $\mathscr{C}$-可逆对象的同构类。

引理 4.26. 假设 a_1、$a_2 \in \mathsf{A}(\mathscr{C})$ 是等价类 $[a_1] = [a_2] \in \mathrm{Pic}\mathsf{A}(\mathscr{C})$ 的两个代表。则 $\rho_{a_1} = \rho_{a_2}$。

证明。 假设存在一个同构 $\phi\colon\ a_1 \longrightarrow a_2$ 在反 Drinfeld 中心中。则由图 4.3 可知，诱导的枢轴结构 ρ_{a_1} 与ρ_{a_2} 相同，对任意 $x \in \mathsf{Z}(\mathscr{C})$。 □

定义 4.27。 我们称对象 $x \in \mathsf{Z}(\mathscr{C})$对称的，如果满足

$$\sigma_{x,y}^{-1} = \sigma_{y,x}, \qquad \text{for all } y \in \mathsf{Z}(\mathscr{C}).$$

我们将$\mathsf{SZ}(\mathscr{C})$ 中由$\mathsf{Z}(\mathscr{C})$ 的对称对象构成的全（对称）幺半子范畴称为对称或*Müger* 中心，即$\mathsf{Z}(\mathscr{C})$的中心，参见 [Müg13]。

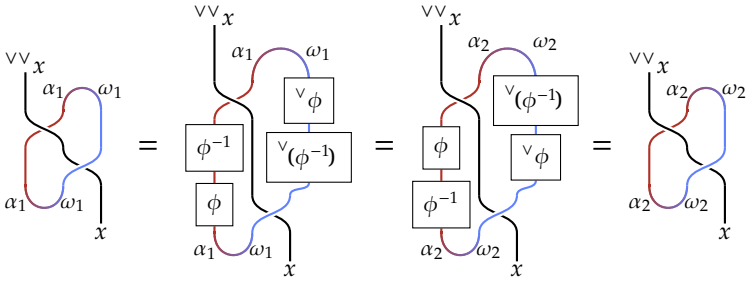
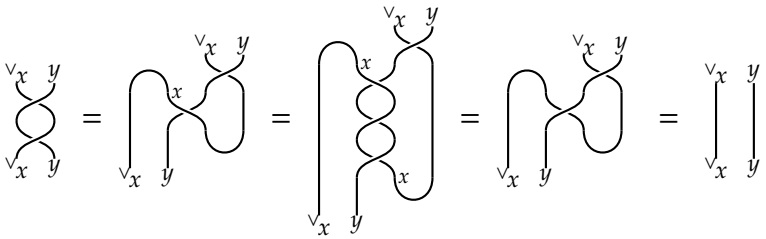


图 4.3： ρ_{a_1}和 ρ_{a_2} 的诱导枢轴结构相同。

引理 4.28. 如果 $\mathscr{C}$ 是一个刚性幺半范畴，那么$\mathsf{SZ}(\mathscr{C})$ 是刚性幺半的。

证明。假设 $x \in \mathsf{Z}(\mathscr{C})$ 是对称的，并令 $y \in \mathsf{Z}(\mathscr{C})$。我们计算



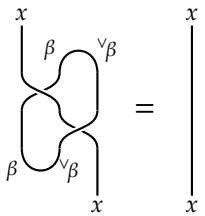
这意味着$\sigma^{-1}_{{}^\vee x,\ y} = \sigma_{y,\ {}^\vee x}$。由于任何 $x \in \mathsf{SZ}(\mathscr{C}) \subseteq \mathsf{Z}(\mathscr{C})$的左对偶都可以赋予右对偶的结构，并且$\mathsf{SZ}(\mathscr{C})$是$\mathsf{Z}(\mathscr{C})$的全子范畴，因此它必定是刚性的。□

现在来考虑皮卡群 $\mathrm{Pic}\mathsf{SZ}(\mathscr{C})$。它通过从左侧进行张量积作用于 $\mathrm{Pic}\,\mathsf{A}(\mathscr{C})$，如图 4.1 所示。若两个元素 $a, c \in \mathrm{Pic}\mathsf{A}(\mathscr{C})$ 属于同一轨道，则它们等价；也就是说，

$$[a] \sim [c] \iff \text{there exists a } [b] \in \mathrm{Pic}\,\mathsf{SZ}(\mathscr{C}) \text{ such that } [b \otimes a] = [c].$$

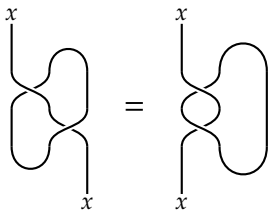
为了证明两个对象等价当且仅当它们在 $\mathsf{Z}(\mathscr{C})$ 上诱导相同的枢轴结构，我们需要两个技术性观察。首先，对称可逆对象的一种替代描述；其次，对诱导的枢轴结构的逆元进行更详细的考察。

引理 4.29。 可逆对象 $(\beta, \sigma_{\beta,-}) \in \mathsf{Z}(\mathscr{C})$ 是对称的，当且仅当对于所有 $x \in \mathsf{Z}(\mathscr{C})$，它满足



(4.2.5)

证明。 设 $B = (\beta, \sigma_{\beta,-}) \in \mathsf{Z}(\mathscr{C})$ 是可逆对象，且 $x \in \mathsf{Z}(\mathscr{C})$。等式（4.2.5）的左边可改写为：

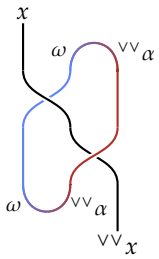


定义态射 $f := \mathrm{id}_x \otimes \text{余评价}^{\ell}_{\beta}$： $x \longrightarrow x \otimes \beta \otimes {}^{\vee}\beta$ 并注意到，方程（4.2.5）与下式相同

$$f^{-1} \circ ((\sigma_{\beta,x} \circ \sigma_{x,\beta})^{-1} \otimes \mathrm{id}_{{}^{\vee}\beta}) \circ f = \mathrm{id}_x.$$

这等价于 $(\sigma_{\beta,x} \circ \sigma_{x,\beta}) \otimes \mathrm{id}^{{}^{\vee}\beta} = \mathrm{id}_{x\otimes\beta} \otimes \mathrm{id}^{{}^{\vee}\beta}$。由于函子 $- \otimes {}^{\vee}\beta$是保守的，结论得证。□

引理 4.30。 设 $a := (\alpha, \sigma_{\alpha,-}) \in \mathsf{A}(\mathscr{C})$ 是 $\mathscr{C}$-可逆的，并将其在$\mathsf{Q}(\mathscr{C})$中的对偶记为 $\Omega := (\omega, \sigma_{\omega,-})$。对于任意 $x \in \mathsf{Z}(\mathscr{C})$，$\rho_{a,x}$ 的逆元为

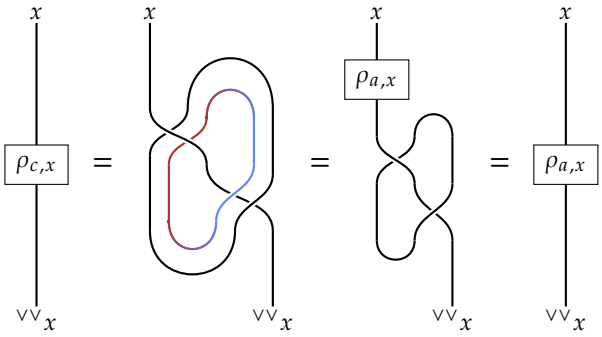


证明。 对于 $x \in \mathsf{Z}(\mathscr{C})$，蛇形恒等式和图4.2 的一个变体推出图 4.4。因此，对于 $\Omega := ({}^{\vee}\alpha, \sigma_{{}^{\vee}\alpha,-}) \in \mathsf{Z}(\mathscr{C})$，有 $\rho_{a,x} \circ \rho_{\Omega,x} = \mathrm{id}_x$。□

命题 4.31. 两个元素 $[a], [c] \in \mathrm{Pic}\mathsf{A}(\mathscr{C})$ 在 $\mathsf{Z}(\mathscr{C})$ 上诱导相同的主轴结构，当且仅当存在一个 $[b] \in \mathrm{Pic}\mathsf{SZ}(\mathscr{C})$ 使得 $[b \otimes a] = [c]$。

证明。 令 $[a], [c] \in \mathrm{Pic}\mathsf{A}(\mathscr{C})$。假设存在一个 $[b] \in \mathrm{Pic}\mathsf{SZ}(\mathscr{C})$，使得 $[b \otimes a] = [c]$。对于任意 $x \in \mathsf{Z}(\mathscr{C})$，我们计算得：

(4.2.6)



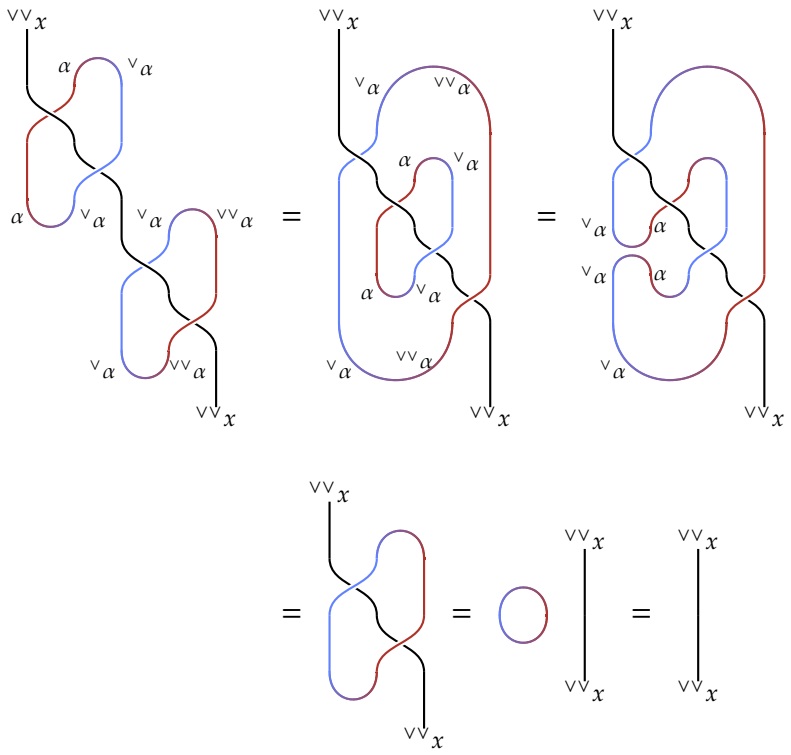


图 4.4：引理 4.30 的验证。

反过来，若 $\rho_a = \rho_c$，我们声称 $c \otimes {}^\vee a$ 是对称的。由引理 4.29，我们只需证明，对于每个 $x \in \mathsf{Z}(\mathscr{C})$，$c \otimes {}^\vee a$与 x 的“缠结” $\rho_{c\otimes {}^\vee a}$ 是恒等态射。事实上，

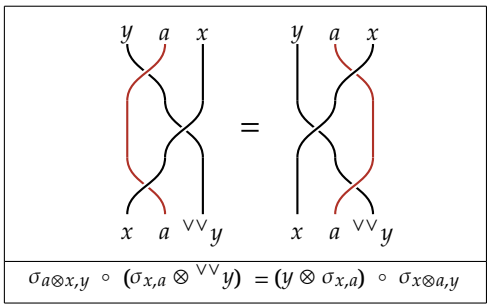
$$\rho_{c\otimes {}^\vee a,x} = \rho_{{}^\vee a,x} \circ \rho_{c,x} = \rho_{a,x}^{-1} \circ \rho_{c,x} = \mathrm{id}_x.$$

对于第一个等式，我们使用了方程（4.2.6）中的六边形恒等式，将 $\rho_{c\otimes {}^\vee a,\ x}$ 分成两部分。第二个等式由引理 4.30 中对 $\rho_{a,\ x}$ 的逆元的描述得出。最后，由于 $\mathrm{id}_c \otimes \mathrm{ev}_a^\ell \colon c\otimes {}^\vee a\otimes a \longrightarrow c$ 是 $\mathsf{A}(\mathscr{C})$ 中的一个同构，我们有 $[(c \otimes {}^\vee a) \otimes a] = [c]$。□

$\mathscr{C}$-可逆对象的同构类在 $\mathsf{A}(\mathscr{C})$ 中并非仅仅构成一个集合，而是形成 Picard 堆 $\mathrm{PicA}(\mathscr{C})$。

引理 4.32。 典范投影 $\pi \colon \mathrm{Pic}\,\mathsf{A}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathrm{Pic}\,\mathsf{A}(\mathscr{C})/\mathrm{Pic}\,\mathsf{SZ}(\mathscr{C})$在等价类集合 $\mathrm{PicA}(\mathscr{C})/\mathrm{PicSZ}(\mathscr{C})$上诱导出一种堆结构。

证明。 该结论由一般观察可得。令 $x \in \mathsf{Z}(\mathscr{C})$ 和$a \in \mathsf{A}(\mathscr{C})$。半编织 $\sigma_{x,a}$: $x \otimes a \longrightarrow a \otimes x$ 是 $\mathsf{A}(\mathscr{C})$ 中的一个同构：



同样，$\sigma_{x,\,{}^{\vee}a}$: $x \otimes {}^{\vee}a \longrightarrow {}^{\vee}a \otimes x$ 是 $\mathsf{Q}(\mathscr{C})$ 中的一个同构。对于所有$[a]$, $[a']$, $[a'']\in \mathsf{PicA}(\mathscr{C})$ 和 $[b]$, $[b']$, $[b'']\in \mathsf{Pic\,SZ}(\mathscr{C})$，可以计算得出

$$\pi\left(\langle [a],[a'],[a'']\rangle\right) = \pi\left([a\otimes {}^{\vee}a'\otimes a'']\right) = \pi\left([b\otimes {}^{\vee}b'\otimes b''\otimes a\otimes {}^{\vee}a'\otimes a'']\right)$$
$$= \pi\left([b\otimes a\otimes {}^{\vee}(b'\otimes a')\otimes b''\otimes a'']\right) = \pi\left(\langle [b\otimes a],[b'\otimes a'],[b''\otimes a'']\rangle\right). \quad \square$$

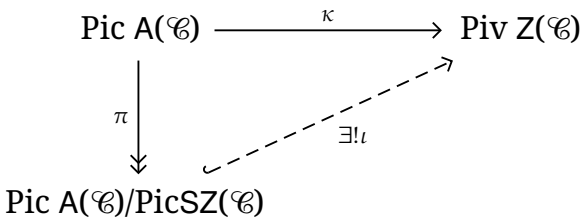
回顾一下，根据例 4.7， $\mathsf{Z}(\mathscr{C})$ 上的主轴结构构成一个堆。利用定义 4.24，我们可以将此结构与反中心的结构联系起来。

定理 4.33。 堆的态射

$$\kappa\colon \mathrm{Pic}\,\mathsf{A}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathrm{Piv}\,\mathsf{Z}(\mathscr{C}), \qquad [a] \longmapsto \rho_a$$

诱导出唯一的单射堆态射 $\iota\colon \mathrm{Pic}\,\mathsf{A}(\mathscr{C})/\mathrm{Pic}\,\mathsf{SZ}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathrm{Piv}\,\mathsf{Z}(\mathscr{C})$，使得下图可交换：

(4.2.7)



证明。 引理 4.25 和4.26表明 κ 定义良好。给定三个元素 $[a]$、$[b]$、$[c]\in \mathsf{PicA}(\mathscr{C})$，我们计算

$$\kappa(\langle [a],[b],[c]\rangle) = \rho_{a\otimes {}^{\vee}b\otimes c} = \rho_a\circ \rho_{{}^{\vee}b}\rho_c = \rho_a\circ \rho_b^{-1}\circ \rho_c = \langle \rho_a,\rho_b^{-1},\rho_c\rangle.$$

第二个等式由六边形恒等式得出，如等式（4.2.6）所示；第三个等式则由引理4.30得出。

命题 4.31 指出，对于任意两个元素 $[a], [b] \in \mathrm{Pic}\,\mathrm{A}(\mathscr{C})$，当且仅当 $\kappa([a]) = \kappa([b])$ 时，$\pi([a]) = \pi([b])$。由引理 4.32 可知，使图表 (4.2.7) 交换的唯一单射 $\iota\colon \mathrm{Pic}\,\mathrm{A}(\mathscr{C})/\mathrm{Pic}\,\mathrm{SZ}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathrm{Piv}\,\mathrm{Z}(\mathscr{C})$ 是堆的态射。□

例 4.34。 根据 [Shi19，定理 1.1]，，代数闭域 $\Bbbk$ 上有限张量范畴的 Müger 中心的皮卡群 $\mathrm{PicSZ}(\mathscr{C})$ 是平凡的。在此情形下，诱导的枢轴结构仅取决于皮卡堆 $\mathrm{PicA}(\mathscr{C})$，而非其商。

在光谱的另一端，可以考虑阿贝尔群 G 的离散范畴$\mathbf{E}G$；其对象集合为 G，且所有态射都是恒等态射。范畴$\mathbf{E}G$ 是刚性幺半范畴；其张量积定义为 G 的乘法，以及由各自逆元给出的左对偶与右对偶。直接计算可得$\mathrm{SZ}(\mathbf{E}G) = \mathrm{Z}(\mathbf{E}G) \cong \mathbf{E}G$。由于$\mathbf{E}G$ 是骨架范畴且每个对象都可逆，$\mathrm{PicSZ}(\mathbf{E}G) \cong G$。由于$\mathbf{E}G$ 上的双对偶函子与恒等函子重合，同样的论证表明 $\mathrm{Pic}\,\mathrm{A}(\mathbf{E}G) \cong G$，因此 $\mathrm{Pic}\,\mathrm{A}(\mathbf{E}G)/\mathrm{PicSZ}(\mathbf{E}G) \cong \{1\}$。

[12] 类比于 G 的去环化$\mathbf{B}G$，范畴$\mathbf{E}G$也称为该群的全空间。

在良好的情形下，$\mathscr{C}$ 的中心上的所有枢轴结构都由 $\mathscr{C}$的拟枢轴结构诱导。

命题 4.35 ([Shi23a, 定理 4.1])。 对于有限张量范畴 $\mathscr{C}$，映射

$$\iota\colon \mathrm{Pic}\,\mathrm{A}(\mathscr{C})/\mathrm{Pic}\,\mathrm{SZ}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathrm{Piv}\,\mathrm{Z}(\mathscr{C})$$

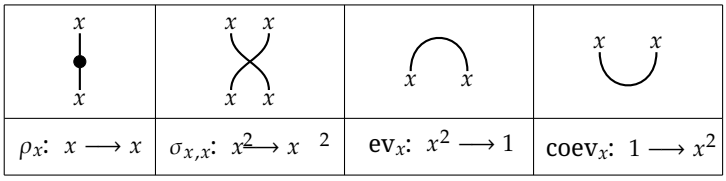
是双射。

然而，在 [Shi23a]的引言中，作者指出，一般而言，不应期待这一结论成立。在本节余下部分，我们将构造一个明确的反例。

我们简述一下总体思路：假设存在一个对象 $x \in \mathscr{C}$，它可以赋予两种不同的半编织 $\sigma_{x,-}$ 和 $\chi_{x,-}$。进一步假设，在 $\mathrm{Z}(\mathscr{C})$ 上存在一个枢轴结构 $\zeta\colon \mathrm{Id}_{\mathrm{Z}(\mathscr{C})} \longrightarrow {}^{\vee\vee}(-)$，使得 $\zeta_{(x,\sigma_{x,-})} \neq \zeta_{(x,\chi_{x,-})}$。如果 $\mathscr{C}$ 的单位是唯一的可逆对象，就不存在诱导出 ζ 的（拟）枢轴结构，因此 ι 不可能是满射。

我们用生成元与关系来定义这样的范畴 $\mathscr{C}$。我们的方法与第3.1.2 节类似，并且同样遵循 [Kas98，第XII章]。考虑由单个对象 $\mathscr{C}^{\mathrm{free}}$ 生成的自由幺半范畴 x。

它们的张量积为 $x^n \otimes x^m \mathrel{..}= x^{n+m}$。 $\mathscr{C}^{\text{free}}$的态射是对象上的恒等态射以及由生成态射组成的集合 M：



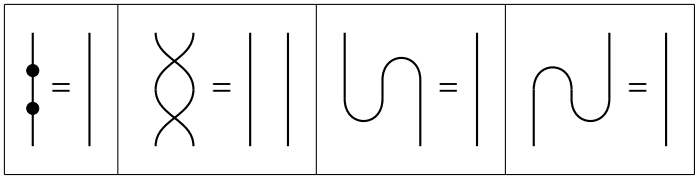
注 4.36. 根据 [Kas98，引理 XII.1.2]，每个态射 $f\colon\ x^n \longrightarrow x^m$ 在$\mathscr{C}^{\text{free}}$ 要么是恒等态射，要么可以写成

$$f = (\mathrm{id}_{x^{j_l}} \otimes f_l \otimes \mathrm{id}_{x^{i_l}}) \circ \cdots \circ (\mathrm{id}_{x^{j_2}} \otimes f_2 \otimes \mathrm{id}_{x^{i_2}}) \circ (\mathrm{id}_{x^{j_1}} \otimes f_1 \otimes \mathrm{id}_{x^{i_1}}),$$

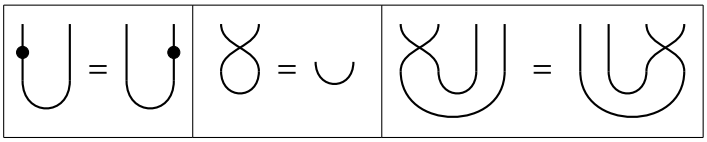
其中 $i_1,\ j_1,\ \ldots\ldots,\ i_l,\ j_l \in \mathbb{N}$ 以及 $f_1,\ \ldots\ldots,\ f_l \in M$。这样的表示并不唯一，但以这种方式写出 f 所需的生成态射数量 $l \in \mathbb{N}$ 是唯一的。我们称之为 f 的次数，记作 $\deg(f) \mathrel{..}= l$。

定义 4.37。 范畴 $\mathscr{C}$ 定义为 $\mathscr{C}^{\text{free}}$ 关于下图所示关系的商。这使 $\mathscr{C}$ 成为一个主轴（严格）刚性幺半范畴，并使我们能够将 σ 扩展为对称编织。为提高可读性，我们省略弦上的 x 标记。

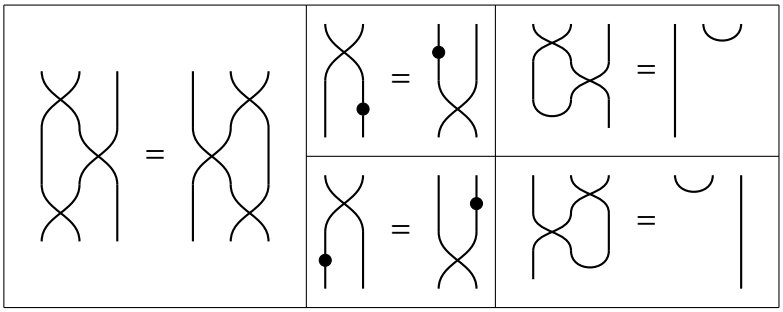
(4.2.8)



(4.2.9)



(4.2.10)



根据 [Kas98，命题 XII.1。4] 存在唯一的函子 $P\colon \mathscr{C}^{\mathrm{free}} \longrightarrow \mathscr{C}$ 它将对象映射到自身，并将生成态射映射到各自的等价类。

定义 4.38. 考虑一个态射 $f \in \mathscr{C}(x^n, x^m)$。$f$的表示是一个态射 $g \in \mathscr{C}^{\mathrm{free}}(x^n, y^n)$，满足 $f = Pg$。如果 g的次数在 f的所有表示中最小，我们就称其为最小表示。

定理 4.39. 定义 4.37 中的范畴 $\mathscr{C}$是严格刚性的，且双对偶函子是恒等函子。此外，id_x, $\rho_x\colon x \longrightarrow x$ 可以扩展为枢轴结构，而 $\sigma_{x,x}\colon x^2 \longrightarrow x^2$ 可以扩展为对称编织。

证明。 求值和余求值态射及其蛇形恒等式使得 $x \in \mathscr{C}$成为其自身的左、右对偶，并且由此可知， $\mathscr{C}$中的每个对象也是如此。利用方程（4.2.9），我们计算得

$$
\begin{aligned}
{}^{\vee}\rho_x &= \rho_x = \rho_x{}^{\vee}, & {}^{\vee}\sigma_{x,x} &= \sigma_{x,x} = \sigma_{x,x}{}^{\vee},\\
{}^{\vee}\mathrm{ev}_x &= \mathrm{coev}_x = \mathrm{ev}_x{}^{\vee}, & {}^{\vee}\mathrm{coev}_x &= \mathrm{ev}_x = \mathrm{coev}_x{}^{\vee}.
\end{aligned}
$$

因此， $\mathscr{C}$ 是严格刚性的，且其双对偶函子等于恒等函子。我们在 $\mathscr{C}$ 上构造非平凡枢轴结构的候选为

$$
\rho\colon \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}, \qquad \rho_{x^n} := \rho_x \otimes \cdots \otimes \rho_x\colon x^n \longrightarrow x^n, \text{ for } n \in \mathbb{N}.
$$

由构造可知，这族同构与 $\mathscr{C}$的幺半结构相容，因此我们只需证明自然性，而只需检验生成元即可。方程（4.2.10）表明， ρ_{x^2} 与$\sigma_{x,x}$可交换。对于 $x \in \mathscr{C}$ 的求值，我们利用方程（4.2.9）的对偶来计算

$$
\mathrm{ev}_x \circ \rho_{x^2} = \mathrm{ev}_x \circ (\rho_x \otimes \rho_x) = \mathrm{ev}_x \circ ({}^{\vee}\rho_x \otimes \rho_x) = \mathrm{ev}_x \circ (\mathrm{id}_x \otimes \rho_x^2) = \rho_1 \circ \mathrm{ev}_x.
$$

应用左对偶化函子，可得 $\mathrm{coev}_x \circ \rho_1 = \rho_{x^2} \circ \mathrm{coev}_x$，因此 ρ 定义了一个主轴结构。

最后，$\sigma_{x,x}$ 在 $\mathscr{C}$上实现了一个对称性 $\sigma\colon \otimes \Longrightarrow \otimes^{\mathrm{op}}$。令

$$
\sigma_{x,x^m} := (\mathrm{id}_x \otimes \sigma_{x,x^{m-1}}) \circ (\sigma_{x,x} \otimes \mathrm{id}_{x^{m-1}}), \quad \text{for } m \in \mathbb{N},
$$

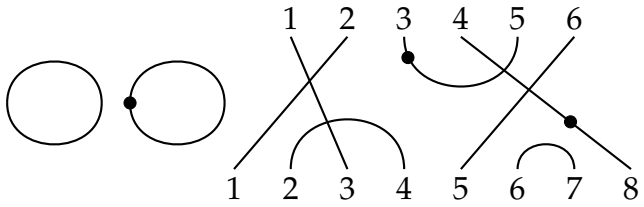
并通过以下方式将其扩展到任意对象

$$
\sigma_{x^n,x^m} := (\sigma_{x^{n-1},m} \otimes \mathrm{id}_x) \circ (\mathrm{id}_{x^{n-1}} \otimes \sigma_{x,x^m}), \quad \text{for } n, m \in \mathbb{N}.
$$

由于这一族同构是依照六边形公理构造的，我们只需证明其自然性。同样，只需考虑生成态射。等式（4.2.10）表明，σ 关于 ρ_x、$\sigma_{x,x}$以及 余评价$_x$ 是自然的。$\sigma_{x,x}$ 的自对偶性，以及 $^\vee$余评价$_x$ = 评价$_x$，蕴含了 σ 与 评价$_x$ 之间所需的交换关系。因此，σ 是 $\mathcal{C}$上的一种编织，由等式（4.2.8）可知它是对称的。□

我们认为，$\mathcal{C}$ 的一个一般态射具有如下形式

(4.2.11)



该图表明，不同类型的态射之间存在区别：包括连接器，它们将输入连接到输出顶点；闭环；以及半圆形式的求值和余求值类型的态射。连接器在 $\mathbb{N}$的一个子集上诱导置换。例如，由公式（4.2.11）产生的置换可表示为（1 2）（3 4）。

如 usual，S_n 表示{ 1，2，…，n } 上的对称群。

反过来，令$s = t_{i_1} \cdots t_{i_l} \in S_n$ 设其为写成初等换位乘积的一个置换，并令$f_s := f_{t_{i_1}} \cdots f_{t_{i_l}} \colon x^n \longrightarrow x^n$，其中

$$f_{t_i} := \mathrm{id}_{x^{i-1}} \otimes \sigma_{x,x} \otimes \mathrm{id}_{x^{n-(i+1)}} \colon x^n \longrightarrow x^n, \qquad \text{for} \qquad 1 \le i \le n-1.$$

由于编织 σ 是对称的，f_s 不依赖于 s的表示。然而，如果 s 的表示是最小的，那么相应的 f_s表示也是最小的。

为了推导出 $\mathcal{C}$ 的自同构的标准形，并将我们之前阐述的想法转化为精确的数学陈述，我们需要研究 $\mathcal{C}$中态射的“拓扑”特征。

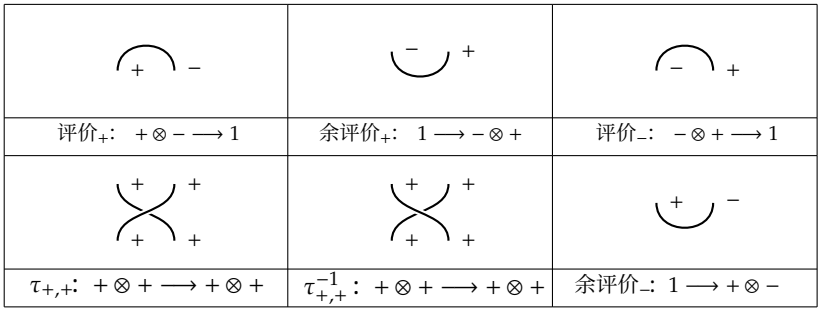
注记 4.40。我们回顾缠结范畴 $\mathcal{T}$。它与源自 $\mathcal{C}$ 的弦图密切相关，并基于 [Kas98 第 xii 章2]。其对象是取自 { +, –} 的有限序列，其态射是定向缠结的同伦类。Kas98 定义 x.5.1] 中对缠结作了详细讨论。对我们来说，只需将类型为 (n, m) 的定向缠结 L 视为有限个互不相交的嵌入之并，其中每个嵌入要么是将单位圆 S^1 嵌入到 $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ 中，要么是将区间 $[0,1]$ 嵌入到 $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ 中，并满足

$$\partial L = L \cap \left(\mathbb{R}^2 \times \{0,1\}\right) = \left([n] \times \{(0,0)\}\right) \cup \left([l] \times \{(0,1)\}\right),$$

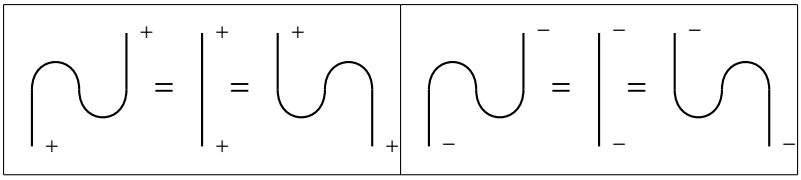
其中 $[n]=\{1,\dots,n\}$，且 $[l]=\{1,\dots,l\}$。L 的每个连通分支上的定向，均由 S^1 的逆时针定向和 $[0,1]$ 的（递增）定向诱导。缠结的张量积通过将它们并排拼接来定义。它们的复合则通过适当的粘合与缩放实现。

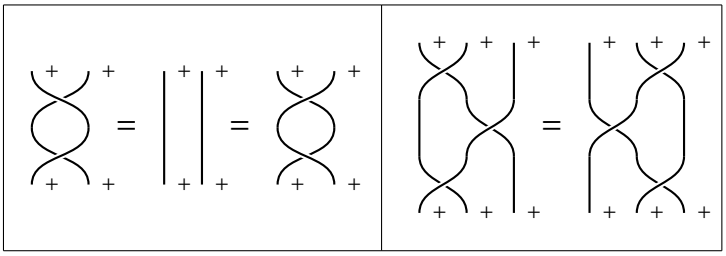
为了区分缠结的同伦类，可以研究它们在投影 $\mathbb{R}^2\times[0,1]\twoheadrightarrow\mathbb{R}\times[0,1]$ 下的像。这引出了 $\mathcal{T}$ 的组合描述，例如参见 [Kas98，定理XII.2.2]。

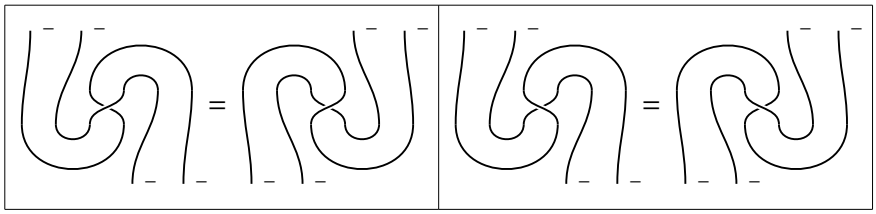
命题4.41. 严格幺半范畴 $\mathcal{T}$ 由这些态射生成

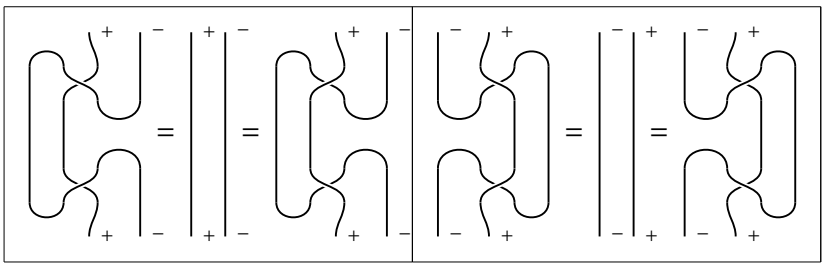


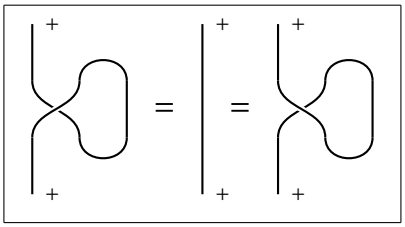
它们满足以下关系：











缠结与范畴之间的联系 $\mathscr{C}$ 通过应用 [Kas98，命题 XII.1。4] 以类似于我们在引理 3.21 中所做的方式建立。

引理 4.42. 存在一个严格幺半函子 $S\colon \mathcal{T} \longrightarrow \mathscr{C}$，它由 $S(+) = x = S(-)$ 唯一确定，并且

$$S(\mathrm{ev}_\pm) = \mathrm{ev}_x, \qquad S(\mathrm{coev}_\pm) = \mathrm{coev}_x, \qquad S(\tau^\pm_{+,+}) = \sigma_{x,x}.$$

现在我们想将 $\mathscr{C}$ 的态射提升到 $\mathcal{T}$。为此，我们想将生成元 $\rho_{x,x}\colon x \longrightarrow x$ “平凡化”。令 $\mathscr{C}/\rho_x$ 为从 $\mathscr{C}$ 得到的范畴，其中将 ρ_x 与 id_x 等同。投影函子 $\mathrm{Pr}\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}/\rho_x$ 使我们能够在 $\mathscr{C}$ 的态射上定义一个等价关系：

$$f \sim g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{Pr}(f) = \mathrm{Pr}(g).$$

例如，$\mathscr{C}$ 的幺半单位的自态射 $\textcircled{}\colon 1 \longrightarrow 1$ 和 $\textcircled{\bullet}\colon 1 \longrightarrow 1$ 在此等价关系下等价。

命题4.43. 每个 $f \in \mathrm{Aut}_{\mathscr{C}}(x^n, x^n)$ 都可以唯一地写成 $f = f_s \circ f_\phi$，其中 $f_s\colon x^n \longrightarrow x^n$ 是由置换 $s \in S_n$ 诱导的自同构，且 $f_\phi = \rho_x^{\phi_1} \otimes \cdots \otimes \rho_x^{\phi_n}$，其中 $\phi_1, \ldots, \phi_n \in \mathbb{Z}_2$。此外，若固定一个最小表示 $s := t_{i_1} \ldots t_{i_l}$，则由此得到的 f 表示也是最小的。

证明。对于任意 $f \in \mathrm{Aut}_{\mathscr{C}}(x^n)$，都存在另一个自同构 $g \in \mathrm{Aut}_{\mathscr{C}}(x^n)$，使得 $\mathrm{Pr}\, f = \mathrm{Pr}\, g$，并且 g 有一个不包含任何 ρ 副本的表示。

按照 [Kas98 引理 X.3.3]，我们由 L_g 构造出一个切结 g，使得 $S(L_g) = g$，并且它与一个切结同痕，L'_g 该切结在投影下的连通分支的像 $\mathbb{R}^2 \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \times [0,1]$ 是

闭环、求值型或余求值型的半圆，或直线。将投影为 n 条平行直线的切结记作 L_n^{triv}：

$$\{\,(k,t)\mid t\in[0,1]\text{ and }k\in\{1,\dots,n\}\,\}.$$

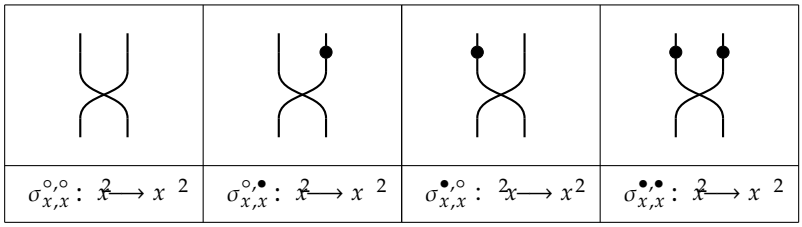
根据假设，由于 g 可逆，我们可以将其逆元 g^{-1} 提升为一个切结 $L_{g^{-1}}$，使得 $[L_g]\circ[L_{g^{-1}}]=[L_n^{\mathrm{triv}}]=[L_{g^{-1}}]\circ[L_g]$。这个方程意味着 L'_g 不可能包含任何闭环或半圆。换言之，$g=f_s$，其中 f_s 是由置换 $s\in S_n$ 得到的态射，该置换由将 L'_g 投影到 $\mathbb{R}\times[0,1]$ 所诱导。由 $\sigma_{x\text{ 的自然性},x}$，f 与 g 等价，这意味着 $f=f_s\circ f_\phi$，其中 f_ϕ 是恒等态射与 ρ_x 的若干副本的张量积。因此，s 的最小表示诱导出 f 的最小表示。□

要证明定理 ι 中定义的 4.33 不是满射，第一步是证明 PicA(𝒞) 至多包含两个元素。

推论 4.44. 范畴 $\mathscr{C}$ （定义 4.37）上仅有的拟枢轴结构为 $\mathrm{id}:\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}\longrightarrow\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$ 与 $\rho:\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}\longrightarrow\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$。

证明. $\mathscr{C}$ 的唯一可逆对象是其幺半单位，这意味着 $\mathscr{C}$ 上的任何拟枢轴结构都是主轴的。由命题4.43，它们由其在 x 上的取值以及$\mathrm{Aut}_{\mathscr{C}}(x)=\{\mathrm{id}_x,\rho_x\}$决定。□

现在，我们转而考察为对象$y\in\mathscr{C}$ 配备半编织的各种方式。我们对 $\mathscr{C}$ 中自同构的分类使我们能够轻易验证：在 $x\in\mathscr{C}$上存在四种不同的半编织，它们由以下内容决定



这些编织因各自弦上出现 ρ而得以区分，这一事实引出了我们的下一个定义。

定义 4.45. 设 $f_{\cdot\cdot}=f_sf_\phi$：$x^n\longrightarrow x^n$ 是 $\mathscr{C}$中的一个自同构。其特征序列 为 $\phi_{\cdot\cdot}=(\phi_1,\dots,\phi_n)\in(\mathbb{Z}_2)^n$，其中

$$f_\phi=\rho_x^{\phi_1}\otimes\cdots\otimes\rho_x^{\phi_n}.$$

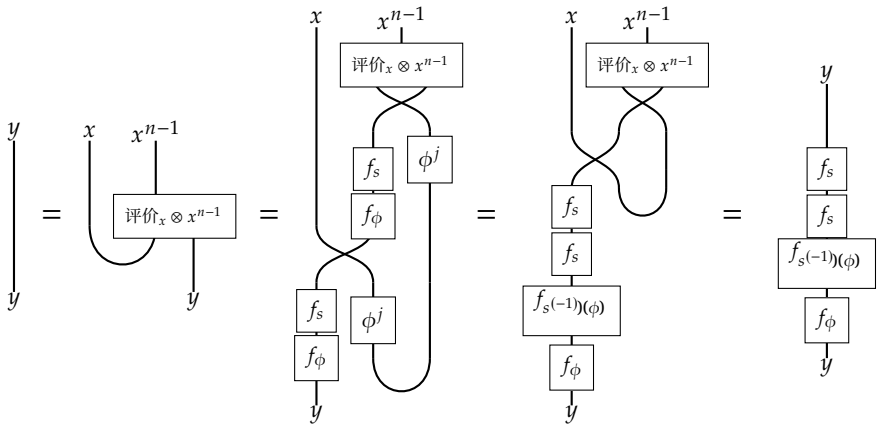
事实上，正是 ρ 的各个实例与底层置换之间的相互作用，决定了自同构 $\chi_{y,\,x}\colon\ y\otimes x\longrightarrow x\otimes y$能否提升为半编织。

引理 4.46. 任意自同构 $\chi_{y,\,x}\colon\ y\otimes x\longrightarrow x\otimes y$ 可延拓为 y 上的半编织，当且仅当存在一个 $f\in \mathrm{Aut}_{\mathscr{C}}(y)$，其特征序列为 $(\phi_1,\ \ldots,\ \phi_n)$，且底层置换为 $s\in S_n$，使得 $s^2(i)=i$ 且$\phi_{s(i)}=\phi_i$ 对所有 $1\le i\le n$ 成立，并且 $\chi_{y,\,x}=\sigma_{y,\,x}\circ(f\otimes\rho_x^j)$ 对某个整数 $j\in\mathbb{Z}_2$ 成立。

证明。 假设 $\chi_{y,\,x}\colon\ y\otimes x\longrightarrow x\otimes y$ 在 $y^{\cdot=}x^n$上诱导一个半编织。由命题 4.43，我们可以写成 $\chi_{y,\,x}=\sigma_{y,\,x}\circ(f\otimes\rho_x^j)$，其中 $f\colon\ y\longrightarrow y$ 是 y 的自同构，且 $j\in\mathbb{Z}_2$。设 $\phi=(\phi_1,\ \ldots,\ \phi_n)$ 为 f 的特征序列，$s\in S_n$ 为其底层置换。将 $f_s\colon\ y\longrightarrow y$ 记作由 s 诱导的态射，并令

$$f_\phi=\rho_x^{\phi_1}\otimes\cdots\otimes\rho_x^{\phi_n},\qquad\qquad f_{s^{-1}(\phi)}=\rho_x^{\phi_{s^{-1}(1)}}\otimes\cdots\otimes\rho_x^{\phi_{s^{-1}(n)}}.$$

利用 $f=f_s\circ f_\phi$ 的自然性 $\chi_{y,\,-}$ 以及方程（4.2.9），我们计算得到



这等价于 s 是一个对合，且 ϕ 在 s下不变。

反过来，设 $\chi_{y,x}=\sigma_{y,x}\circ(f\otimes\rho_x^j)\colon\ y\otimes x\longrightarrow x\otimes y$，其中 f是一个满足引理假设的自同构。根据六边形公理，我们将其扩展为一族自同构 $\chi_{y,-}\colon\ y\otimes-\longrightarrow-\otimes y$，并验证其在 $\mathscr{C}$ 的生成元上的自然性。对于 ρ_x 和 $\sigma_{x,x}$，这分别直接由它们各自的自然性条件得出。要证明 $\chi_{y,-}$、coev_x和 ev_x之间的交换关系，可如上所述进行论证。□

前一个引理大幅限制了自同构 $\mathscr{C}$ 能够提升到中心$Z(\mathscr{C})$的可能性。

推论 4.47。 设对象 $x^n \in \mathscr{C}$ 配备了两个半编织

$$\chi_{x^n,x} = \sigma_{x^n,x} \circ ((f_s \circ f_\phi) \otimes \rho_x^j), \qquad \theta_{x^n,x} = \sigma_{x^n,x} \circ ((f_t \circ f_\psi) \otimes \rho_x^k).$$

若 $g = g_r \circ g_\lambda \in \mathrm{Aut}_{\mathscr{C}}(x^n)$提升为 $\mathscr{C}$的中心中对象的态射 $g : (x^n, \chi_{x^n,-}) \longrightarrow (x^n, \theta_{x^n,-})$，则

$$\phi_i \circ \lambda_{sr(i)} = \psi_{r(i)} \circ \lambda_{r(i)} \qquad \textit{for all } 1 \le i \le n.$$

证明。 要使 $g = f_r \circ f_\lambda \in \mathrm{Aut}_{\mathscr{C}}(x^n)$ 提升到中心，它必须满足

$$\begin{aligned}\sigma_{x^n,x} \circ ((f_s \circ f_\phi \circ g) \otimes \rho_x^j) = \chi_{x^n,x} \circ (g \otimes \mathrm{id}_x) &= (\mathrm{id}_x \otimes g) \circ \theta_{x^n,x} \\ &= \sigma_{x^n,x} \circ ((g \circ f_t \circ f_\psi) \otimes \rho_x^k).\end{aligned}$$

这表明 $f_s \circ f_\phi \circ g = g \circ f_t \circ f_\psi$，因而对所有 $1 \le i \le n$ 都有 $\phi_{s(i)} \circ \lambda_{sr(i)} = \lambda_{r(i)} \circ \psi_{rt(i)}$。由于 $\mathbb{Z}_2$ 是阿贝尔的，且 $\phi_{s(i)} = \phi_i$ 与 $\psi_{t(i)} = \psi_i$亦然，结论随之成立。□

鉴于引理4.46，我们给出定义 4.45的一个精细版本。

定义 4.48。 考虑对象 $y = (x^n, \chi_{x^n,x}) \in \mathsf{Z}(\mathscr{C})$，其半编织由整数 $j \in \mathbb{Z}_2$ 的 $\chi_{x^n,x} = \sigma_{x^n,x} \circ (f \otimes \rho_x^j)$ 定义。我们将 f 的特征序列 ϕ 称为 y 的签名。

我们现在在 $\mathscr{C}$ 的中心上构造一个枢轴结构，它不同于 id 与 ρ 从 $\mathscr{C}$ 到 $\mathsf{Z}(\mathscr{C})$的提升。

定理 4.49. $\mathscr{C}$ 的 *Drinfeld* 中心$\mathsf{Z}(\mathscr{C})$具有枢轴结构 ζ，且

$$\zeta_{(x,\sigma^{\circ,\circ}_{x,-})} = \mathrm{id}_x, \qquad \zeta_{(x,\sigma^{\circ,\bullet}_{x,-})} = \mathrm{id}_x, \qquad \zeta_{(x,\sigma^{\bullet,\circ}_{x,-})} = \rho_x, \qquad \zeta_{(x,\sigma^{\bullet,\bullet}_{x,-})} = \rho_x.$$

证明. 对任意对象 $y \in \mathsf{Z}(\mathscr{C})$，定义

$$\zeta_y = \rho_x^{\phi_1} \otimes \cdots \otimes \rho_x^{\phi_n}, \qquad \text{where } \phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n) \text{ is the signature of } y.$$

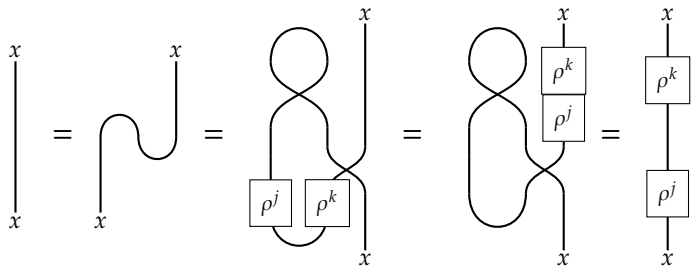
由于$\mathsf{Z}(\mathscr{C})$中对象之张量积的签名由其各分量的签名拼接而成，这定义了一族同构ζ：$\mathrm{Id}^{\mathsf{Z}(\mathscr{C})} \longrightarrow \mathrm{Id}^{\mathsf{Z}(\mathscr{C})}$，且该族与幺半结构相容。

接下来要证明ζ的自然性。考虑 $\mathscr{C}$ 的恒等态射和生成元到其 Drinfeld 中心的所有可能提升，即可验证这一点。对于id_x，$\rho_x : x \longrightarrow x$ 以及$\sigma_{x,\,x} : x^2 \longrightarrow x^2$，由推论 4.47可知这一点。对于

为了研究 x的余求值，固定一个半编织$\chi_{x^2,\,-}\colon\ x^2\otimes -\longrightarrow -\otimes x^2$ 在x^2上。根据引理 4.46，它由以下内容决定：

$$\chi_{x^2,x}=\sigma_{x^2,x}\circ\left((\sigma^i_{x,x}\circ(\rho^j_x\otimes\rho^k_x))\otimes\rho^l_x\right),\qquad \text{where } i,j,k,l\in\mathbb{Z}_2.$$

现在假设 $\mathrm{coev}_x\colon\ 1\longrightarrow x^2$ 提升为$\mathsf{Z}(\mathcal{C})$中的一个态射，其中 x^2 配备了这个半编织。方程（4.2.9）以及$\sigma_{x,x}$的自对偶性推出$\sigma_{x,x}\circ\mathrm{coev}_x=\mathrm{coev}_x$ 和 $\mathrm{ev}_x\circ\sigma_{x,x}=\mathrm{ev}_x$；我们计算得



因此，$j=k$ 和$\zeta_{(x^2,\chi_{x^2,-})}=\mathrm{id}^2_x$ 或$\zeta_{(x^2,\chi_{x^2,-})}=\rho^2_x$，这意味着自然性。对 x 的求值进行类似论证，即可完成证明。□

根据推论4.44，$\mathsf{A}(\mathcal{C})$的 Picard 堆至多有两个元素。然而，上述定理在$\mathsf{Z}(\mathcal{C})$上构造了第三种枢轴结构；这就得到了我们所需的结果。

定理 4.50. *$Z(\mathcal{C})$ 的主轴结构并非由$\mathsf{A}(\mathcal{C})$的 Picard 堆诱导而来。特别地，定理 4.33 的映射 $\iota\colon\mathrm{Pic}\,\mathsf{A}(\mathcal{C})/\mathrm{Pic}\,\mathsf{SZ}(\mathcal{C})\longrightarrow\mathrm{Piv}\,\mathsf{Z}(\mathcal{C})$ 不可满射。*

[单]子，一切存在物中最不完美的。

阿图尔·叔本华；《论辩的艺术》

单子坦纳卡–克莱因重构

5

双单子与霍普夫单子是双代数与霍普夫代数的一种广泛推广。它们自然地出现于对（刚性）幺半范畴和拓扑量子场论的研究中，参见例如 [KL01；Moe02；BV07；BLV11；TV17]。回想一下，双代数对象的定义必然要求以辫子幺半范畴为底范畴，才能写出乘法是余幺半群态射的含义。然而，一般而言，自函子范畴并非辫化的，因此朴素的双代数概念无法推广到单子情形，必须加以调整。Moerdijk 以霍普夫单子之名提出并研究了一种解决这一问题的可能方法， [Moe02]。[13] 这里，

[13] 正如 [Moe02]，所指出的，这一概念与幺半余单子严格对偶，相关研究见 [Boa95]。

反松幺半函子的结构态射可用来替代余乘法和余单位。Hopf 单子还有其他定义，有时彼此并不等价，参见 [Boa95；MW11]。我们遵循 [Moe02]，的定义，并根据 [BV07；BLV11]略微调整了术语。这一定义旨在推广霍普夫代数的自由–遗忘伴随这一典型例子。因此，在单子前加上“bi-”或“Hopf”前缀，指的是在其 Eilenberg–Moore 范畴上附加的结构或性质。

更一般地，Aguiar 和 Chase 以余模单子之名给出了模范畴的单子解释，[参见12]AC。双单子上的余模单子推广了双代数上的余模代数这一概念，参见下文例5.14 。本章的主要结果推广了 [AC12命题 4.12] 和 [TV17引理 7.10] 的重构结果：

定理 5.28。 设 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 是幺半范畴，并设 M 和 $\mathcal{N}$ 分别是右 $\mathscr{C}$-以及 $\mathscr{D}$-模范畴。设 $F\colon \mathscr{C} \rightleftarrows \mathscr{D}\colon U$ 是一个宽松幺半伴随。将伴随 $G\colon \mathrm{M} \rightleftarrows \mathcal{N}\colon V$ 提升为余模伴随，与将 $V\colon \mathcal{N} \longrightarrow \mathrm{M}$ 提升为强余模函子之间存在双射。

由该结果的证明可以立即得到 Kelly 的教义伴随结果的一个类似结论，[Kel74]，适用于 $\mathscr{C}$-模范畴。

推论 5.29。 模范畴之间的伴随 $G\colon \mathrm{M} \rightleftarrows \mathcal{N}\colon V$ 在 $\mathscr{C}$-模范畴之间诱导出如下双射：<*PRIVATE_PERSON*> $\mathscr{C}$ 上的拟松弛 F-模结构与 $\mathscr{C}$ 上的松弛 U-模结构。

随后，我们得到一个余模单子的 Tannaka–Krein 重构结果，其精神与 [Moe02，定理 7₁] 以及 [McC02，推论 3₁₃]相同。

定理 5.31。 设 B 是幺半范畴 $\mathscr{C}$上的一个双单子，且 T 是右 $\mathscr{C}$-模范畴M上的一个单子。 B 在 T 上的余作用与 $\mathscr{C}^B$在M^T上的右作用 U^T一一对应，并且 U^B是一个到*{v?}*

随后，我们可以应用这些结果来研究第2.2.1节的比较函子。具体而言，该函子总是继承“强伴随函子”的强模结构；也就是说，对于 oplax$\mathscr{C}$-模伴随，取右伴随函子；而在 lax 情形下，取左伴随函子。

命题 5.35。 设M 和 $\mathcal{N}$ 是左 $\mathscr{C}$-模范畴。

- *oplax* $\mathscr{C}$-模伴随 $G\colon \mathrm{M} \rightleftarrows \mathcal{N}\colon V$的比较函子 K^{VG} 是一个强 $\mathscr{C}$-模函子。
- *lax* $\mathscr{C}$-模伴随 $G\colon \mathrm{M} \rightleftarrows \mathcal{N}\colon V$ 的比较函子 K_{VG} 是一个强 $\mathscr{C}$-模函子。

5.1 双单子

定义 5.1. 幺半范畴 $\mathscr{C}$上的一个双单子 由一个作用在 $\mathscr{C}$上的 oplax 幺半自函子 B，以及 oplax 幺半自然变换$\mu\colon B^2 \Longrightarrow B$, $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \Longrightarrow B$构成，使得 (B, μ, η) 是 $\mathscr{C}$上的一个单子。

双单子之间的双单子态射是一个自然变换 $f\colon B \Longrightarrow H$，它既是 oplax 幺半的，也是一个单子态射。

我们将定义 5.1 明确表述如下。若要使一个单子 (B, μ, η) 成为双单子，必须存在一个自然变换 $B_2\colon B \circ \otimes \Longrightarrow B \otimes B$和一个态射 $B_0\colon B1 \longrightarrow 1$，使得图 5.1 中的所有图表都交换。此外，在第 μ 和 η 节的图示演算中，变换为 oplax 幺半的含义见图 2.7.1 5.2。

备注5.2。 我们也可以用5.1 更丰富的双范畴语言来表述定义。于是，双单子可以定义为一个单子[14]，它位于双范畴 $\mathbb{O}\mathrm{plMon}^{\mathrm{opl}}$
其中，对象是幺半范畴，1-胞是反松幺半函子，2-胞是 oplax 幺半变换。

[14] 幺半范畴中的幺半群$\mathbb{O}\mathrm{plMon}_{\mathrm{opl}}(\mathscr{C}, \mathscr{C})$。

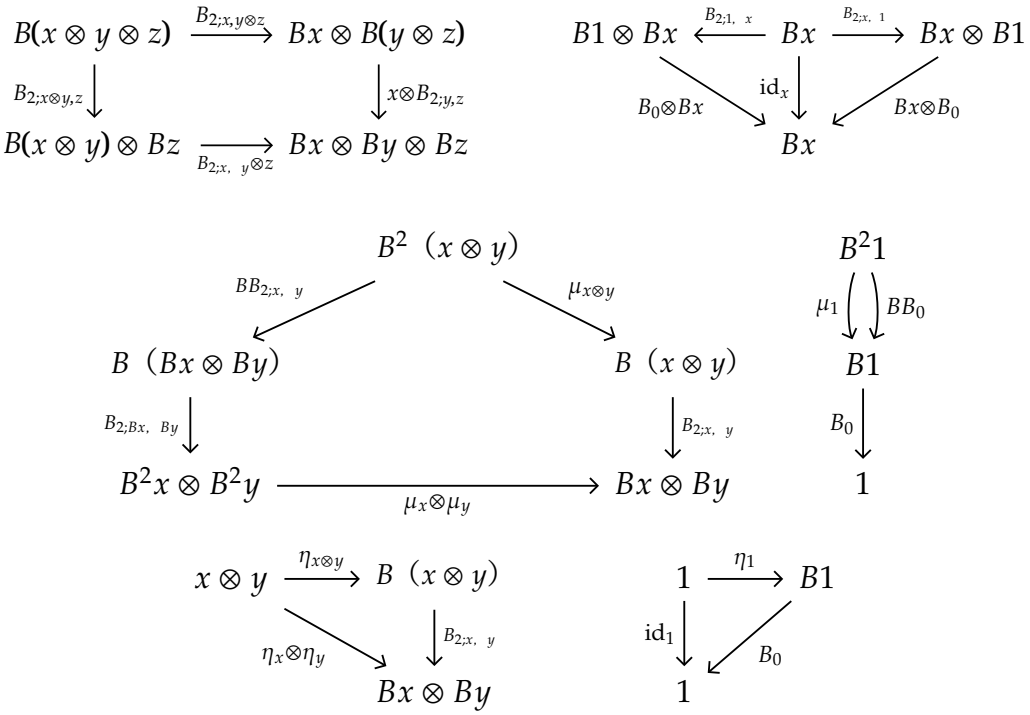


图 5.1：B 成为双单子的显式条件。

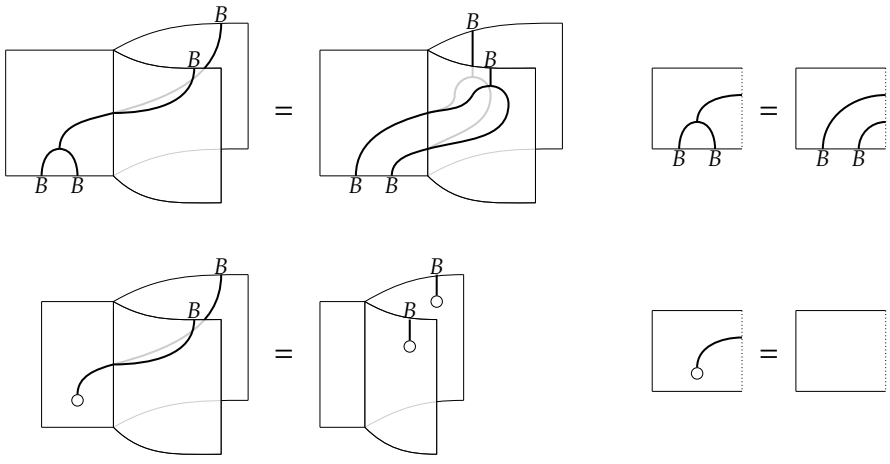


图 5.2：双单子的乘法和单位成为 oplax 幺半自然变换的条件。

例 5.3. 设 $A \in \mathcal{C}$ 是一个幺半范畴中的对象。在例 2.96中我们看到，函子 $A \otimes -$ 是 $\mathcal{C}$ 上的一个单子，当且仅当 A 是 $\mathcal{C}$中的一个代数对象。这一关系也推广到双代数：设 $B \in \mathcal{C}$ 是一个代数对象，并假设 $T \mathrel{..}= B \otimes -$ 是 $\mathcal{C}$ 上的相应单子。那么， T 是一个双单子，当且仅当 B 是一个双代数。更确切地说，从 B上的双代数结构 (Δ, ε) 出发，令

$$T_2 \colon B \otimes - \xrightarrow{\Delta \otimes -} B \otimes B \otimes - \qquad \text{and} \qquad T_0 \colon B \otimes - \xrightarrow{\varepsilon \otimes -} -.$$

这就将 T 变成了一个双单子。

反过来，假设 (T, T_2, T_0) 是一个反松幺半函子。可以在 B 上定义双代数结构如下：

$$\Delta \colon B = B \otimes 1 \otimes 1 \xrightarrow{T_{2;1,1}} B \otimes 1 \otimes B \otimes 1 = B \otimes B, \qquad \varepsilon \colon B = B \otimes 1 \xrightarrow{T_0} 1.$$

这些态射满足所有所需恒等式这一事实，可由直接计算得出。

例 5.4. 例 2.11 中单子与伴随之间错综复杂的相互作用，也延伸到了幺半范畴和双单子。给定一个反强幺半伴随 $F \colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} \colon U$，单子 $UF \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$是一个双单子，其余乘法对每个 x， $y \in \mathcal{C}$ 定义为以下复合

$$UF(x \otimes y) \xrightarrow{UF_{2;x,y}} U(Fx \otimes Fy) \xrightarrow{U_{2;Fx,Fy}} UFx \otimes UFy.$$

其余单位由 $UF1 \xrightarrow{UF_0} U1 \xrightarrow{U_0} 1$ 给出。

以下陈述是 [Kel74 定理 1 的一个特例。2]。

命题 5.5. 给定幺半范畴 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$，以及一个伴随$F \colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : U$，在 F 上的 *oplax* 幺半群结构与 U上的强单幺半结构之间存在一个双射。

对 [Kel74，定理 12]的证明是借助伴随变换构造性地给出的。给定弱幺半结构 (F_2, F_0) 在 F 上，则强单幺半自然变换 U_2（即 U 的变换）对所有 x、$y \in \mathcal{D}$ 由下式给出

$$Ux \otimes Uy \xrightarrow{\eta_{Ux \otimes Uy}} UF(Ux \otimes Uy) \xrightarrow{UF_{2;Ux,Uy}} U(FUx \otimes FUy) \xrightarrow{U(\varepsilon_x \otimes \varepsilon_y)} U(x \otimes y),$$

其中 η 与 ε 是该伴随的单位和余单位。由 U 上的宽松幺半结构构造 F 上的弱幺半结构与此类似。

现在来重点介绍命题5.5的一个重要特例。

引理 5.6 ([TV17，引理 7.10])。 两个幺半范畴之间的任意伴随是 *oplax* 幺半的，当且仅当其右伴随是强幺半的。

例 5.7。 设 $\Bbbk$ 是一个域，且 $B \in \mathsf{Vect}$ 是一个双代数。于是，由例 5.4可知，单子 $B \otimes_{\Bbbk} -\colon \mathsf{Vect} \longrightarrow \mathsf{Vect}$ 是一个双单子，因此伴随$B \otimes_{\Bbbk} -\colon \mathsf{Vect} \rightleftarrows B\text{-模}$: U是 oplax 幺半的，其中 $U\colon B\text{-模} \longrightarrow \mathsf{Vect}$是典范遗忘函子，它仅遗忘 B-模结构。由引理 5.6，可得 U 甚至是强幺半的。

更一般地，设 $B\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ 是由反强幺半伴随 $F\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}\colon U$产生的双单子。由于遗忘函子 $U^B\colon \mathcal{C}^B \longrightarrow \mathcal{C}$是严格幺半的，Eilenberg–Moore 伴随 $F^B \dashv U^B$ 是 oplax 幺半的。

以下结果归功于 [Kel74],另见 [BV07，定理 2。6]。

引理 5.8。 设 $F\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}\colon U$是一个反强幺半伴随。那么，双单子 UF 的比较函子 $K^{UF}\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}^{UF}$ 是强幺半的，并且$U^{UF}K^{UF} = U$ $K^{UF}F = F^{UF}$分别是强幺半函子和反强幺半函子。

关于 $\mathcal{C}^B$ 上的幺半结构在多大程度上是唯一的这一问题，Moerdijk [Moe02，定理 7。1] 和 McCrudden [McC02，推论 3。13]给出了答案。特别是，这种 Tannaka–Krein 重构为“bimonad”这一名称提供了另一种解释。

命题 5.9。 设 (B, μ, η) 是幺半范畴 $\mathcal{C}$上的一个单子。 B 上的双单子结构与 $\mathcal{C}^B$ 上的幺半结构之间存在一一对应，且遗忘函子 U^B 是严格幺半函子。

证明概要。 给定一个双单子 $(B, \mu, \eta, B_2, B_0)\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$，以及两个模 (m, ∇_m) 和 $(n, \nabla_n) \in \mathcal{C}^B$，我们定义

$$(m, \nabla_m) \otimes (n, \nabla_n) := \left(m \otimes n,\ B(m \otimes n) \xrightarrow{B_{2;m,n}} Bm \otimes Bn \xrightarrow{\nabla_m \otimes \nabla_n} m \otimes n\right).$$

此外，定义 $\nabla_1\colon B1 \xrightarrow{B_0} 1$。 B 的余乘法的余结合性和余单位性表明，上述构造在 $\mathcal{C}^B$上赋予了一种单oidal结构，与双代数上的模所具有的结构相对应。

反之，设（B， μ， η）为幺半范畴 $\mathcal{C}$上的一个单子。假设$\mathcal{C}^T$ 是幺半的，使得遗忘函子 U^T 是严格幺半的。考虑自由模（Bm， μ_m）与（Bn， μ_n），并将它们的张量积记为

$$(Bm, \mu_m) \otimes (Bn, \mu_n) = (Bm \otimes Bn, \mu_m \cdot \mu_n\colon B(Bm \otimes Bn) \longrightarrow Bm \otimes Bn).$$

于是， B 的余乘法由下式给出

$$B(m \otimes n) \xrightarrow{B(\eta_m \otimes \eta_n)} B(Bm \otimes Bn) \xrightarrow{\mu_m \cdot \mu_n} Bm \otimes Bn.$$

对于余单位，取单位 $\mathscr{C}^B$的作用 $B1 \longrightarrow 1$。 □

5.2 霍普夫单子

现在，我们可以将刚性纳入第 5.1 节的框架中。

定义 5.10 ([BLV11，第 2 节。6])。 设 H 是幺半范畴 $\mathscr{C}$上的一个双单子。其右融合算子 H_{rf} 是 H 的自然变换

$$H_{\mathrm{rf};x,y} \colon H(Hx \otimes y) \xrightarrow{H_{2;Hx,y}} H^2x \otimes Hy \xrightarrow{\mu_x \otimes Hy} Hx \otimes Hy, \quad \text{for } x, y \in \mathscr{C}.$$

双单子 H 称为*右 Hopf*，如果其右融合算子可逆。

左融合算子和左霍普夫单子通过对偶方式定义；如果一个双单子同时是左霍普夫单子和右霍普夫单子，则称其为霍普夫单子。

定理 5.11 ([BLV11，定理 3。6])。 设 $\mathscr{C}$ 是一个右闭幺半范畴，且 H 是 $\mathscr{C}$上的双单子。那么， H 是右霍普夫单子，当且仅当 $\mathscr{C}^H$ 是右闭的，且遗忘函子 $U^H \colon \mathscr{C}^H \longrightarrow \mathscr{C}$ 是右闭的。

霍普夫单子 $H \colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ 可以定义在任意幺半范畴上。如果$\mathscr{C}$是刚性的，则可以利用 [BLV11，引理 3.4 和定理 3。6] 在 H-模范畴上得到刚性而不仅仅是闭合的幺半结构。这体现为存在两个自然变换

$$s^{\ell} \colon H({}^{\vee}H) \Longrightarrow {}^{\vee}H \quad \text{and} \quad s^{r} \colon H(H^{\vee}) \Longrightarrow H^{\vee}, \quad \text{for all } x \in \mathscr{C}, \tag{5.2.1}$$

称为 左和右对极，属于 H。在 [BV12] 的例 2.4 中解释了它们如何推广霍普夫代数的对极；在霍普夫情形下，例 5.3有类似的结果。

5.3 余模单子

除了 Aguiar 和 Chase 的余模单子理论 之外， [AC12],本节还将探讨（反）宽松 $\mathscr{C}$-模单子的特殊情形。后者将在第 8 章和 9章中发挥重要作用。

定义 5.12 ([AC12，定义 3.3。1])。设 $(F,\ F_2,\ F_0)\colon\ \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ 是一个 oplax 幺半函子，M是一个右 $\mathscr{C}$-模，而 $\mathcal{N}$ 是一个右 $\mathscr{D}$-模范畴。一个关于 的（右）余模函子 F[15] 是由函子构成的一对 $(G,\ G_{\mathsf{a}})$：
$G\colon\ \mathrm{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ 连同一个自然变换

[15] 或者，我们将称 G 是一个（右）F-余模函子。

$$G_{\mathsf{a};m,x}\colon G(m \triangleleft x) \longrightarrow Gm \triangleleft Fx, \qquad \text{for all } x \in \mathscr{C} \text{ and } m \in \mathscr{M},$$

称为 G的余作用，它是余结合的且余单位的，也就是说，对于所有 x，$y \in \mathscr{C}$ 和 $m \in \mathrm{M}$，以下图表均交换：

$$\begin{array}{ccc}
G((m \triangleleft x) \triangleleft y) & \xrightarrow{\cong} & G(m \triangleleft (x \otimes y)) \\
{\scriptstyle G_{\mathsf{a};m\triangleleft x,y}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G_{\mathsf{a};m,x\otimes y}} \\
G(m \triangleleft x) \triangleleft Fy & & Gm \triangleleft F(x \otimes y) \\
{\scriptstyle G_{\mathsf{a};m,x}\triangleleft Fy}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Gm\triangleleft F_{2;x,y}} \\
(Gm \triangleleft Fx) \triangleleft Fy & \xrightarrow[\cong]{} & Gm \triangleleft (Fx \otimes Fy)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
G(m \triangleleft 1) & \xrightarrow{\cong} & Gm \\
{\scriptstyle G_{\mathsf{a};m,1}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \cong} \\
Gm \triangleleft F1 & \xrightarrow[Gm\triangleleft F_0]{} & Gm \triangleleft 1
\end{array}$$

如果一个余模函子的余作用是同构，则称它为强余模函子；如果余作用是恒等态射，则称它为严格余模函子。

例 5.13。幺半范畴 $\mathscr{C}$ 上的恒等函子$\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$ 的右余模函子 $\mathscr{C}$不过就是定义2.47中所说的宽松 $\mathscr{C}$-模函子，只需将左模范畴改为右模范畴。

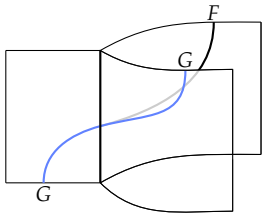
例 5.14 （[AC12，第 6 节。1]）。若 B 是双代数，其基环为交换环 $\Bbbk$，则 $B \otimes_{\Bbbk} -\colon\ \Bbbk$-Mod $\longrightarrow \Bbbk$-Mod 成为反松幺半函子。设 A 为右 B-余模代数，其余作用为 $\nu\colon\ A \longrightarrow A \otimes_{\Bbbk} B$。回想由 B-余不变元 构成的 A 的子代数由下式给出

$$A^{\mathrm{co}B} := \{\, a \in A \mid \nu(a) = a \otimes 1 \,\}.$$

假设 C 是 $A^{\mathrm{co}B}$ 的子代数。则 ν 是 C-C-双模的映射，它使 $A \otimes_C -\colon\ C$-Mod $\longrightarrow C$-Mod 成为 $B \otimes_{\Bbbk} -$ 上的右余模函子。$\Bbbk$-Mod 在 C-Mod 上的作用由对 $\Bbbk$ 取张量积给出。

回顾第2.4.4节和第4.2.1节中中心与扭曲中心的构造。忘却半编织的典范函子 $U^{(\mathrm{Z})}\colon \mathsf{Z}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathscr{C}$ 是严格幺半的。类似地，给定一个强幺半函子 L，遗忘函子 $U^{(L)}\colon \mathsf{Z}_L(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathscr{C}$ 是关于 $U^{(\mathrm{Z})}$ 的严格余模函子。

注 5.15。 第 2.7.1 节的图示演算可以推广到余模函子的情形。除了使用张量积组合各片之外，我们现在还考虑通过作用来组合。为了跟踪发生了哪种分裂，模范畴之间的函子将以蓝色标示。例如，余作用将绘制为：



余结合性和余单位性 G_{a} 展示于图5.3；请注意，这些图表与图2.4具有类似的形式。

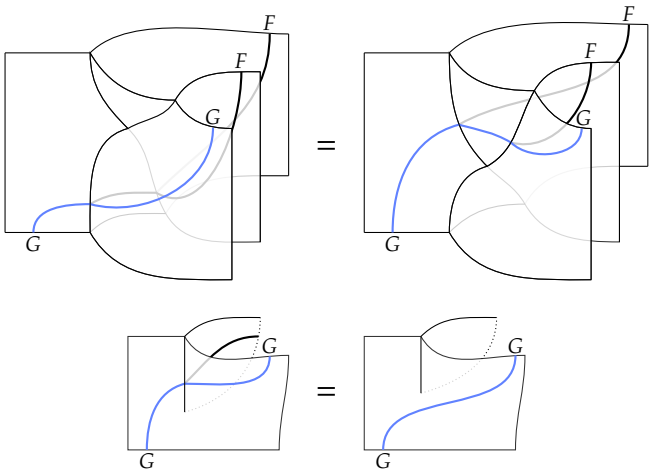


图 5.3：余模函子的余作用满足的余结合性和余单位性条件。

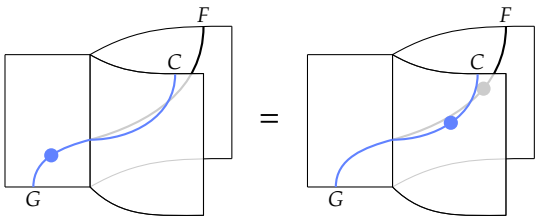
定义 5.16。设 $C, G\colon \mathrm{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ 是 $B, F\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ 上的余模函子。从 C 到 G 的余模（自然）变换由一对自然变换 $\phi\colon C \Longrightarrow G$ 和 $\psi\colon B \Longrightarrow F$ 构成，使得对于所有 $x \in \mathscr{C}$ 和 $m \in \mathrm{M}$，以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} C(m \triangleleft x) & \xrightarrow{\phi_{m \triangleleft x}} & G(m \triangleleft x) \\ {\scriptstyle C_{\mathsf{a};m,x}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G_{\mathsf{a};m,x}} \\ Cm \triangleleft Bx & \xrightarrow[\phi_m \triangleleft \psi_x]{} & Gm \triangleleft Fx \end{array} \tag{5.3.1}$$

我们称 (ϕ, ψ) 为余模函子态射，如果 $B = F$ 并且 $\psi = \mathrm{id}_B$。

例 5.17。 若 $\mathscr{C} = \mathscr{D}$ 且 $B = F = \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$，则 C 和 G 是 oplax $\mathscr{C}$-模函子，参见例 5.13。从 C 到 G的余模自然变换恰好是 $\mathscr{C}$意义下的模变换，见定义 2.48。

给定一个余模自然变换 $(\phi\colon G \Longrightarrow C, \psi\colon B \Longrightarrow F)$，图表（5.3.1）的图形表示如下图所示，其中蓝点表示 ϕ，黑点表示 ψ。



余模函子态射这一概念或许看起来有所限制；然而，实际上只需考虑这种形式的箭头即可。

例 5.18. 设 $\phi\colon C \Longrightarrow G$ 和 $\psi\colon B \Longrightarrow F$ 是一个余模变换。若为 C 配备一个新的余作用，则可将 $\phi\colon C \Longrightarrow G$ 视为 F 上的余模函子态射。该余作用定义如下：

$$C(m \triangleleft x) \xrightarrow{C_{a;m,x}} Cm \triangleleft Bx \xrightarrow{Cm \triangleleft \psi_x} Cm \triangleleft Fx, \qquad \text{for all } x \in \mathscr{C} \text{ and } m \in \mathscr{M}.$$

因此，通过适当调整所涉及的余作用，余模自然变换与余模函子态射可以相互等同。

设 $B\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ 是一个双单子，且 M 是 $\mathscr{C}$ 上的模范畴。单位 $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \Longrightarrow B$ 通过下式在 $\mathrm{Id}_{\mathscr{M}}\colon \mathrm{M} \Longrightarrow \mathrm{M}$ 上定义一个余作用

$$\mathrm{id}_m \triangleleft \eta_x\colon \mathrm{Id}_{\mathscr{M}}(m \triangleleft x) \longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathscr{M}} m \triangleleft Bx, \qquad \text{for all } x \in \mathscr{C}, m \in \mathscr{M}.$$

利用乘法 $\mu\colon B^2 \Longrightarrow B$，我们可以为两个余模函子 C，$G\colon \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ 的复合 CG 配备余模结构：

$$(CG)_a\colon CG(- \triangleleft =) \xrightarrow{CG_a} C(G(-) \triangleleft B(=)) \xrightarrow{C_a} CG(-) \triangleleft B^2(=) \xrightarrow{\mathrm{id} \triangleleft \mu} CG(-) \triangleleft B(=).$$

由于 B 的乘法满足结合律和单位性，余此，M 上的 B-余模自函子范畴成为幺半范畴。

定义 5.19。 考虑一个双单子 $B\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ 和一个 $\mathscr{C}$ 上的模范畴 M。M 上的 B -余模单子 由一个余模自函子 $(C, C_{\mathsf{a}})\colon \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ 以及余模态射 $\mu\colon C^2 \Longrightarrow C$ 和 $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathscr{M}} \Longrightarrow C$ 构成，使得 (C, μ, η) 是一个单子。

一个余模单子态射是余模函子的自然变换 $f\colon C \Longrightarrow G$，同时也是单子态射。

余模单子的乘法与单位 C在M 上、在双单子 B （作用于 $\mathscr{C}$ ）之上成为余模函子态射的条件由图5.4给出。注意这些条件如何类似于图5.2。

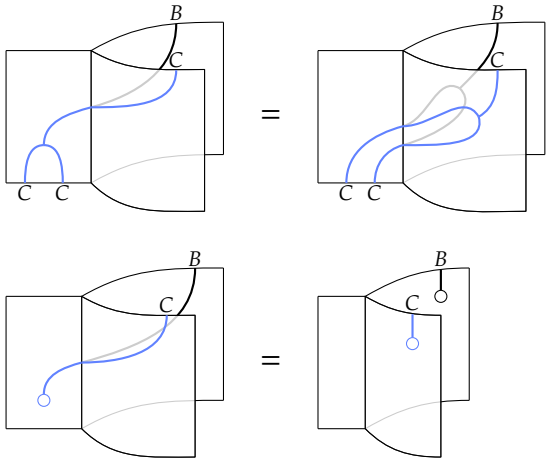


图 5.4：余模单子的乘法与单位成为余模函子态射的条件。

例 5.20. 一个反宽松 $\mathscr{C}$-模单子是 $\mathscr{C}$上恒等单子上的余模单子。或者，它是范畴 Oplax$\mathscr{C}$Mod(M,M)中的幺半群，该范畴由（左） $\mathscr{C}$-模范畴 M 上的反宽松 $\mathscr{C}$-模自函子构成。

类似地，可以定义宽松 $\mathscr{C}$-模余单子的概念。

例 5.21. 考虑偏序集 $(\mathbb{R},\ \leq)$。它是一个幺半范畴，其中张量积为加法，$0 \in \mathbb{R}$ 是单位。在 [HL18], 中，Hasegawa 和 Lemay 利用上取整函数定义了一个双单子。令

$$H\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \lceil x \rceil := \min\{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x \,\}.$$

由于 $\lceil x + y \rceil \leq \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$ 对所有 $x,\ y \in \mathbb{R}$ 和 $\lceil 0 \rceil = 0$，函子 H 是 oplax 幺半的。余乘法和余单位由唯一的态射给出

$$H_0\colon H0 = 0 \longrightarrow 0 \qquad \text{and} \qquad H_{2;x,y}\colon H(x+y) \longrightarrow Hx + Hy,$$

对所有 $x,\ y \in \mathbb{R}$。上取整函数的幂等性意味着恒等自然变换定义了一个乘法 $\mu\colon H^2 \Longrightarrow H$。其单位对应于 $\{\ x \longrightarrow Hx\ \}_{x\in\mathbb{R}}$。

给定半开区间 $[0,1)$ 中的一个数 z，令

$$C^{(z)}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \min\{\, z+n \mid n \in \mathbb{Z}, z+n \geq x \,\}.$$

若 $z = 0$，则有 $C^{(z)} = H$。否则，$C^{(z)}0 = z > 0$ 和 $C^{(z)}$ 不可能是 oplax 幺半的。尽管如此，$C^{(z)}(x+y) \leq C^{(z)}x + \lceil y \rceil = C^{(z)}x + Hy$ 仍成立，并且唯一的自然箭头

$$C^{(z)}_{\mathsf{a};x,y}\colon C^{(z)}(x+y) \longrightarrow C^{(z)}x + Hy, \qquad \text{for all } x,y \in \mathbb{R},$$

定义了 H 在 C 上的余作用。同样，我们有 $(C^{(z)})^2 = C^{(z)}$ 是幂等的，且对于所有 $x \in \mathbb{R}$，$x \leq C^{(z)}x$。因此，它是一个在 H 上的余模单子。

例 5.22. 设 $(\mathcal{V},\ \otimes,\ 1)$ 是一个闭对称幺半群范畴。若一个 A$\mathcal{V}$-范畴 $\mathcal{C}$ 被称为 关于...余幂化 于 $\mathcal{V}$，见 [Kel05，第 3 节。7],当且仅当存在一个函子 $-\cdot =:\ \mathcal{C}\times\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{C}$，使得对所有 $c \in \mathcal{C}$，都有

$$c\cdot -\colon \mathcal{V} \rightleftarrows \mathcal{C} :\mathcal{C}(c,-).$$

由米田引理可得 $c\cdot(v\otimes w) \cong (c\cdot v)\cdot w$：

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\big(c\cdot(v\otimes w),x\big) &\cong \mathcal{V}\big(v\otimes w, \mathcal{C}(c,x)\big) \cong \mathcal{V}\big(w,\mathcal{V}(v,\mathcal{C}(c,x))\big)\\ &\cong \mathcal{V}\big(w,\mathcal{C}((c\cdot v),x)\big) \cong \mathcal{C}\big((c\cdot v)\cdot w,x\big).\end{aligned}$$

事实上，这使得 $\mathcal{C}$ 成为一个 $\mathcal{V}$-模范畴，因此也使得 $\mathcal{C}$上的恒等单子成为一个在 $\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}$ 上的余模单子，且其余作用是平凡的。

假设 $B ..= UF$ 是 $\mathcal{V}$上的一个双单子。单位 $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{V}} \Longrightarrow B$ 是双单子态射，因此我们可以将 $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ 的余作用扩展为

$$\delta\colon -\cdot = \xrightarrow{-\cdot\eta} -\cdot B=,$$

从而使 B 成为一个 $\mathcal{C}$-模单子。

下面的命题将 $\mathcal{C}$-模单子的概念与 $\mathcal{C}$ 中代数对象的概念联系起来，参见第2.6节。

命题 5.23。 设 $\mathcal{C}$ 是一个幺半范畴。$\mathcal{C}$ 上的强$\mathcal{C}$-模单子与 $\mathcal{C}$中的代数对象之间存在一一对应。

证明。 根据命题 2.51，存在一个左模范畴的等价

$$\mathsf{Str}\mathscr{C}\mathsf{Mod}(\mathscr{C},\mathscr{C}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}^{\mathrm{rev}}, \qquad T \longmapsto T1, \qquad -\otimes A \longmapsto A,$$

并且根据例 2.96， A 是代数对象，当且仅当 $-\otimes A$ 是一个单子。

特别地，若 $(A,\ \tau,\ \upsilon)$ 是 $\mathscr{C}$ 中的代数对象，则 $(-\otimes A,\ -\otimes\tau,\ -\otimes\upsilon)$ 成为 $\mathscr{C}$ 上的强 $\mathscr{C}$- 模单子。强 $\mathscr{C}$- 模结构由 $\mathscr{C}$ 的结合子给出：

$$(-\otimes A)_{\mathsf{a};X} \coloneqq X\otimes(-\otimes A) \xrightarrow{\sim} (X\otimes -)\otimes A, \qquad \text{for all } X\in\mathscr{C}.$$

若 $(T,\ \mu,\ \eta)$ 是一个强 $\mathscr{C}$-模单子，则在幺半单位处取值可得到 $\mathscr{C}$ 中的一个代数对象，其乘法为 μ_1，单位为 η_1。□

特别地，右 A-模范畴与 $-\otimes A$ 的 Eilenberg–Moore 范畴作为 $\mathscr{C}$-模范畴相同。

备注 5.24。 设 $B\colon \mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{C}$ 是一个双单子，且 $(C,\ C_{\mathsf{a}})\colon \mathbb{M}\longrightarrow\mathbb{M}$ 是其上的一个余模单子。 C 的余作用使我们能够定义一个作用

$$\triangleleft\colon \mathscr{M}^C\times\mathscr{C}^B\longrightarrow\mathscr{M}^C.$$

对于任意两个模 $(m,\nabla_m)\in\mathbb{M}^C$ 和 $(x,\nabla_x)\in\mathscr{C}^B$，其定义为

$$(m,\nabla_m)\triangleleft(x,\nabla_x) \coloneqq \big(m\triangleleft x,(\nabla_m\triangleleft\nabla_x)\circ C_{\mathsf{a};m,x}\big).$$

B 在 C 上的余作用公理，恰好对应于 $\mathscr{C}^B$ 在 $\mathbb{M}^C$ 上的作用与 $\mathscr{C}^B$的张量积和单位之间的相容性。

定义 5.25. 设 $F\colon \mathscr{C}\rightleftarrows\mathscr{D}\colon U$ 是一个反强幺半伴随。假设 $G\colon\mathbb{M}\rightleftarrows\mathcal{N}\colon V$ 是一个伴随，且 G 是一个 F-余模函子，而 V 是一个 U-余模函子。若以下恒等式成立，则 $(G\dashv V,\ F\dashv U)$ 是一个余模伴随：

$$\begin{array}{ccc} m\triangleleft x & \xrightarrow{\eta^{(G\dashv V)}_{m\triangleleft x}} & VG(m\triangleleft x) \\ {\scriptstyle \eta^{(G\dashv V)}_m\triangleleft\eta^{(F\dashv U)}_x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle VG_{\mathsf{a};m,x}} \\ VGm\triangleleft UFx & \xleftarrow[V_{\mathsf{a};Gm,Fx}]{} & V(Gm\triangleleft Fx) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} GV(m\triangleleft x) & \xrightarrow{GV_{\mathsf{a};m,x}} & G(Vm\triangleleft Ux) \\ {\scriptstyle \varepsilon^{(G\dashv V)}_{m\triangleleft x}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G_{\mathsf{a};Vm,Ux}} \\ m\triangleleft x & \xleftarrow[\varepsilon^{(G\dashv V)}_m\triangleleft\varepsilon^{(F\dashv U)}_x]{} & GVm\triangleleft FUx \end{array}$$

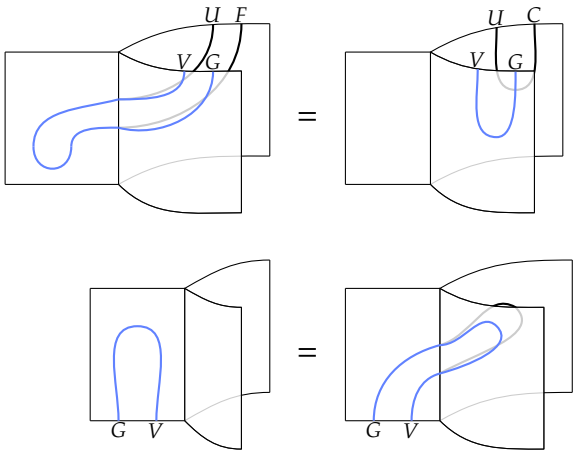


图 5.5：余模伴随的弦图条件。

例 5.26. 若对于一个（左） $\mathscr{C}$-模范畴 $\mathbf{M}$，有 $F = U = \mathrm{Id}_{\mathscr{M}}$，则称 $G \dashv V$ 是一个反强幺半 $\mathscr{C}$-模伴随。更明确地说，G 和 V 是 oplax $\mathscr{C}$-模函子，且该伴随的单位和余单位是 $\mathscr{C}$-模变换。

与此类似，可以定义宽松 $\mathscr{C}$-模伴随的概念。

图 5.5清楚地表明，定义 5.25所要求的条件与图 2.5中所述的条件类似。

例 5.27。 单子与伴随是同一枚硬币的两面，这一哲学观点也适用于余模函子。假设我们有一个反强幺半伴随 $F\colon \mathscr{C} \rightleftarrows \mathscr{D} : U$，以及其上的一个余模伴随$G\colon \mathbf{M} \rightleftarrows \mathscr{N} : V$。根据 [AC12，命题 4.3.1],，双单子 $B ..= UF$在单子 $C .. = VG$上有一个余作用；对于所有 $m \in \mathbf{M}$ 和 $x \in \mathscr{C}$，它由下式给出

$$VG(m \triangleleft x) \xrightarrow{VG_{\mathsf{a};m,x}} V(Gm \triangleleft Fx) \xrightarrow{V_{\mathsf{a};Gm,Fx}} VGm \triangleleft UFx = Cm \triangleleft Bx.$$

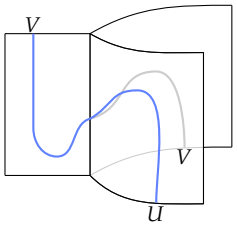
5.3.1 余模单子的重构

下一个定理提供了一种方法，可以从余模单子的模范畴重构余模单子。它推广了 [AC12，命题 4.1。2] 以及 [TV17，引理 7。10]。回顾定义2.38，并注意到，可以类似地定义将伴随提升为余模伴随。

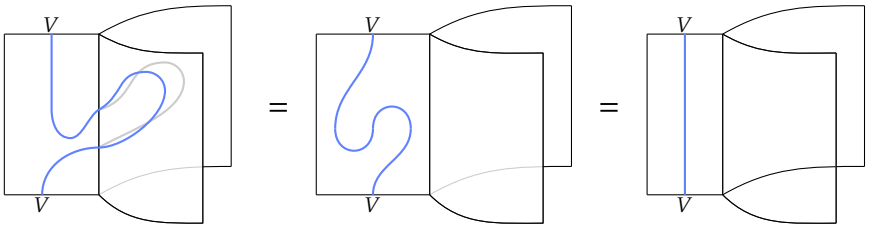
定理 5.28。 设 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 为幺半范畴，并设 $\mathbf{M}$ 和 $\mathscr{N}$ 分别为右 $\mathscr{C}$-模范畴和 $\mathscr{D}$-模范畴。设 $F\colon \mathscr{C} \rightleftarrows \mathscr{D} : U$ 为一个宽松幺半伴随。将伴随 $G\colon \mathbf{M} \rightleftarrows \mathscr{N} : V$ 提升为余模伴随的方式，与将 $V\colon \mathscr{N} \longrightarrow \mathbf{M}$ 提升为强 U-余模函子的方式之间存在双射。

证明。 设 $G \dashv V$ 是一个关于 $F \dashv U$的余模伴随。定义 V_a 的逆元V_a^{-1}: $V - \triangleleft U = \Longrightarrow V(- \triangleleft =)$ 为

(5.3.2)



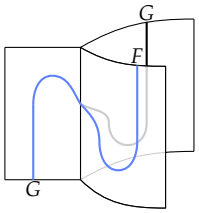
利用 G 和 V 属于一个余模伴随这一事实，直接计算可得 $V_a^{-1} \circ V_a = \mathrm{id}_{V(- \triangleleft =)}$:



可以采用类似的方法证明 $V_a \circ V_a^{-1} = \mathrm{id}_{V - \triangleleft U =}$。因此， V_a是一个自然同构，从而 V 是一个强余模函子。

反过来，假设 $V\colon \mathcal{N} \longrightarrow \mathrm{M}$ 是U上的强余模函子。定义一个箭头 $G_a\colon G(- \triangleleft =) \Longrightarrow G(-) \triangleleft F(=)$ 如下

(5.3.3)



根据 [TV17，引理 7.10],的余乘法和余单位 F 由下式给出

$$F(x \otimes y) \xrightarrow{F(\eta_x \otimes \eta_y)} F(UFx \otimes UFy) \xrightarrow{FU_{-2;Fx,Fy}} FU(Fx \otimes Fy) \xrightarrow{\varepsilon_{Fx \otimes Fx}} Fx \otimes Fy,$$

$$F1 \xrightarrow{FU_{-0}} FU1 \xrightarrow{\varepsilon_1} 1, \qquad \text{for all } x, y \in \mathcal{C}.$$

请注意，图示地， F_2 看起来与图表（5.3.3）完全相同，只是用黑色的弦替代了蓝色的弦。

我们将证明 G 是 F上的余模函子。图 5.6 表明G_a: $G(- \triangleleft =) \Longrightarrow G(-) \triangleleft F(=)$ 按照图 5.3的意义是余结合的。

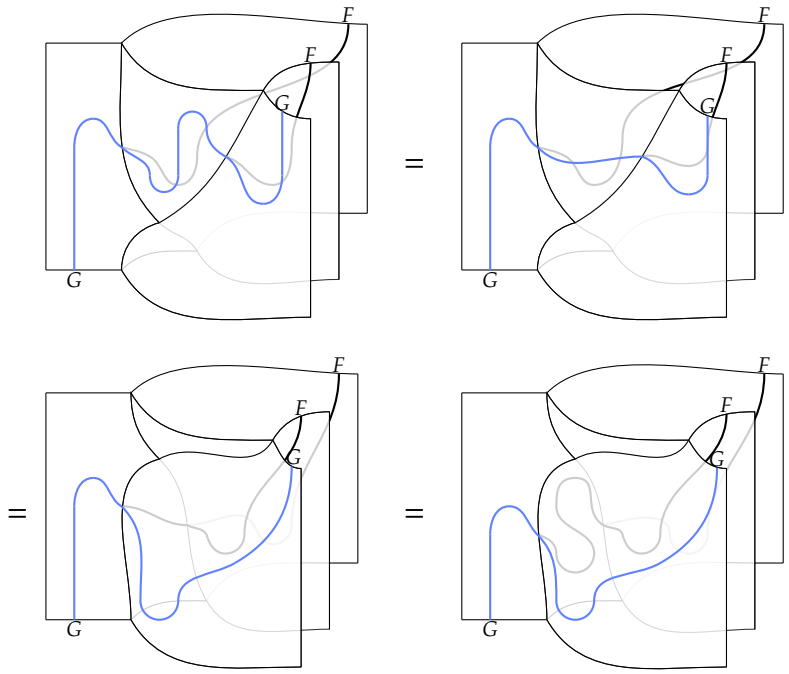
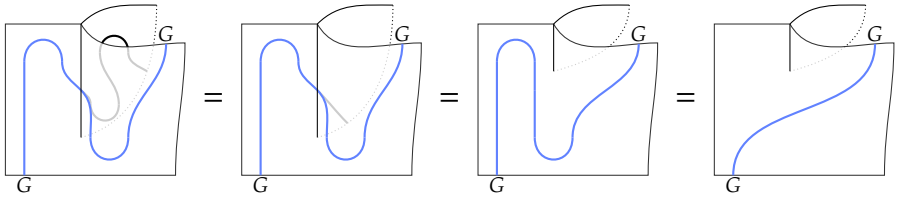
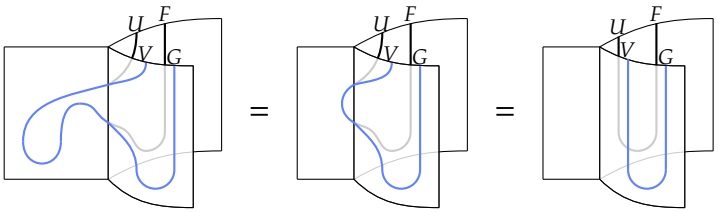


图 5.6： G 的余结合条件。

G_a 是余单位的这一事实可由



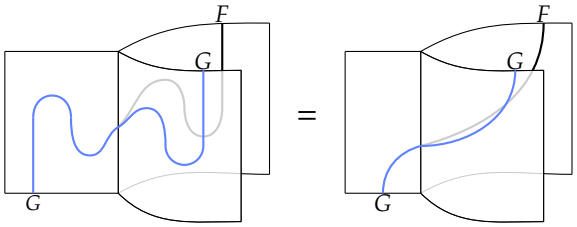
通过直接计算可证明，伴随$G \dashv V$ 的单位满足图中所示的公理5.5:



对余单位作类似的论证可知， $G \dashv V$ 是一个余模伴随。

为了证明这两种构造互为逆元，首先假设我们有一个余模伴随 $G \dashv V$。利用 V_a^{-1}图表（5.3.2）中给出的内容，我们得到另一个余作用 λ，作用在 G上，见图表（5.3.3）。现在，

直接计算可得 $G_{\mathsf{a}} = \lambda$:



反向结论显然：将任意强余模结构 V 关联到余模伴随$G \dashv V$ 的映射，保持 V 的余作用。□

定理 5.28 的证明给出了命题 5.5的一个类似结果，我们用 $\mathscr{C}$-模函子的语言来表述。

推论 5.29。 设 M 和 $\mathcal{N}$ 分别为 $\mathscr{C}$-模范畴和 $\mathscr{D}$-模范畴。对于一个伴随 $F\colon \mathrm{M} \rightleftarrows \mathcal{N}\colon U$， F 上的宽松 $\mathscr{C}$-模结构与 U上的宽松 $\mathscr{C}$-模结构之间存在双射。

推论 5.30。 设 M 是一个 $\mathscr{C}$-模范畴，且 T 是 M上的一个单子。则存在一个双射对应

$$\{\text{宽松 } \mathscr{C}\text{-模单子结构与 } T\} \leftrightarrow \left\{\mathscr{C}\text{-模范畴结构之间，其中 } \mathrm{M}^T \text{ 满足 } U^T \text{ 是一个严格模函子}\right\}$$

$$\{\, T(- \triangleright =) \xrightarrow{T_{\mathsf{a}}} - \triangleright T(=) \,\} \longmapsto \{\, T(- \triangleright =) \xrightarrow{T_{\mathsf{a}}} - \triangleright T(=) \xrightarrow{\mathrm{id} \triangleright \mathrm{act}} - \triangleright = \,\}$$

$$\{\, U^T F^T(- \triangleright =) \xrightarrow{U^T_{\mathsf{a}} \circ U^T F^T} {}^{\mathsf{a}}\!\!\longrightarrow - \triangleright U^T F^T(=) \,\} \longleftarrow \{\, U^T(- \triangleright =) \xrightarrow{U^T} {}^{\mathsf{a}}\!\!\longrightarrow - \triangleright U^T(=) \,\}$$

定理 5.28 还给出了一个余模单子余作用的描述，该描述通过其 Eilenberg–Moore 伴随来表达；也就是说，这是一个秉承命题5.9的精神的 Tannaka–Krein 重构结果。

定理 5.31. 设 B 是幺半范畴 $\mathscr{C}$ 上的一个双单子， T 是右 $\mathscr{C}$-模范畴 M 上的一个单子。 B 在 T 上的余作用与 $\mathscr{C}^B$ 在 M^T 上的右作用一一对应，且满足 U^T 是 U^B 上的严格余模函子。

证明。 设 $\mathscr{C}^B$ 从右侧作用于 M^T，使得 U^T 是一个严格余模函子。根据定理 5.28， $T = U^T F^T$ 通过余作用成为一个余模单子

$$T_{\mathsf{a}}\colon T(- \triangleleft =) \xrightarrow{U^T F^T_{\mathsf{a}}} U^T(F^T(-) \triangleleft F^B(=)) \xrightarrow{U^T_{\mathsf{a}}} T(-) \triangleleft B(=),$$

它等于 $U^T F_{\mathsf{a}}^T$，因为 U^T 是一个严格的 U^B-余模函子。

反之，若 T 是余模单子，则 $\mathbb{M}^T$ 成为右 $\mathscr{C}^B$ 模范畴，其作用如注记5.24中所给出。

由于 T_{a} 以及 $\mathscr{C}^B$ 在 $\mathbb{M}^T$ 上的作用唯一确定了余作用 F_{a}^T（即 F^T 的余作用），这两种构造由定理5.28互为逆。□

下述结果对偶于定理5.28，针对 $\mathscr{C}$ 模伴随这一特殊情形，其中我们研究左伴随而非右伴随上的强 $\mathscr{C}$ 模结构。

命题 5.32. 设 $\mathscr{C}$ 为幺半范畴，并假设 $\mathbb{M}$ 与 $\mathcal{N}$ 为左 $\mathscr{C}$ 模范畴。给定伴随 $F : \mathbb{M} \rightleftarrows \mathcal{N} : U$，则 F 提升为强 $\mathscr{C}$ 模函子与 $F \dashv U$ 提升为宽松 $\mathscr{C}$ 模伴随之间存在一一对应。

证明。 假设 $F : \mathbb{M} \rightleftarrows \mathcal{N} : U$ 是宽松 $\mathscr{C}$ 模伴随。将作用 $F_{\mathsf{a}} : - \triangleright F(=) \Longrightarrow F(- \triangleright =)$ 的逆元定义为

$$F(- \triangleright =) \xrightarrow{F(\eta \triangleright =)} F(UF(-) \triangleright =) \xrightarrow{FU_{\mathsf{a}}} FU(F(-) \triangleright =) \xrightarrow{\varepsilon} F(-) \triangleright =.$$

反过来，给定一个伴随 $F : \mathbb{M} \rightleftarrows \mathcal{N} : U$，使得 F 是强 $\mathscr{C}$-模函子，定义

$$U(-) \triangleright = \xrightarrow{\eta} UF(U(-) \triangleright =) \xrightarrow{UF_{\mathsf{a}}^{-1}} U(FU(-) \triangleright =) \xrightarrow{U(\varepsilon \triangleright =)} U(- \triangleright =).$$

将定理 5.28证明中的弦图上下颠倒后阅读，即可验证所需的相干条件，并且这两种构造互为逆。□

我们得到单子 Kleisli 范畴的推论 5.30 版本。

推论 5.33。 设 $\mathbb{M}$ 是一个左 $\mathscr{C}$-模范畴，并设 T 为 $\mathbb{M}$ 上的一个单子。T 上的宽松 $\mathscr{C}$-模单子结构与 $\mathbb{M}_T$ 上的 $\mathscr{C}$-模范畴结构之间存在一个双射，使得 F_T 是一个严格的 $\mathscr{C}$-模函子。

证明。 设 $\mathbb{M}_T$ 是一个 $\mathscr{C}$-模范畴，并且 F_T 是一个严格的 $\mathscr{C}$-模函子。那么 $T := U_T F_T : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$ 是一个宽松的 $\mathscr{C}$-模单子，由命题 5.32可知。

反过来，如果 T 是一个宽松的 $\mathscr{C}$-模单子，那么 $\mathbb{M}_T$ 可如下构成一个 $\mathscr{C}$-模范畴：对于 $x \in \mathscr{C}$ 和 $m,\ n \in \mathbb{M}$，令对象上的 $x \triangleright_{\mathbb{M}_T} m := x \triangleright_{\mathbb{M}} m$，而对于 $\mathbb{M}_T$ 中的态射 $f : m \longrightarrow Tn$，我们将 $x \in \mathscr{C}$ 的作用定义为

$$x \triangleright_{\mathbb{M}_T} f := x \triangleright m \xrightarrow{x \triangleright f} x \triangleright Tn \xrightarrow{T_{\mathsf{a};x,n}} T(x \triangleright n).$$

容易验证，这些赋值定义了一个 $\mathscr{C}$-模结构，并且相对于该结构， F_T 是一个严格的 $\mathscr{C}$-模函子。

The $\mathscr{C}$-模结构 M_T 以及其上的松模单子结构 T唯一确定了 $\mathscr{C}$-模结构 F_T。因此， F_T^{-1} ；一个如命题 5.32 所述给出，并且这两种构造互为逆构造。 □

利用这些见解，我们现在可以阐明余模伴随所关联的比较函子的结构。

命题 5.34。 考虑一个余模伴随 $G\colon \mathrm{M} \rightleftarrows \mathcal{N}\colon V$，它建立在 *oplax* 幺半伴随 $F\colon \mathscr{C} \rightleftarrows \mathscr{D}\colon U$之上，并将相应的余模单子和双单子分别记为 $C \mathrel{..}= VG\colon \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ 和 $B \mathrel{..}= UF\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$。

那么比较函子 $K^C\colon \mathcal{N} \longrightarrow \mathrm{M}^C$ 是关于$K^B\colon \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}^B$的强余模函子，并且以下余模函子恒等式成立：

$$U^C K^C = V \qquad \textit{and} \qquad K^C G = F^C.$$

证明。 我们采用与 [BV07 中定理 2 类似的方法。6]。对于任意 $n \in \mathcal{N}$，我们有 $K^C n = (Vn,\ V\varepsilon_n)$，直接计算可知，$V$ 的余作用提升为 K^C的余作用。也就是说，

$$U^C K^C_{\mathsf{a};n,y} = V_{\mathsf{a};n,y}, \qquad \text{for all } n \in \mathcal{N} \text{ and } y \in \mathscr{D}.$$

利用 $U^C\colon \mathrm{M}^C \longrightarrow \mathrm{M}$ 是忠实且保守函子这一点，可以看出 K^C 由此成为强余模函子。此外，由于 U^C是严格余模函子， $U^C K^C$和 V的余作用相同。最后，对于任意 $x \in \mathscr{C}$和 $m \in \mathrm{M}$，我们计算如下：

$$(K^C G)_{\mathsf{a};m,x} = (U^C K^C G)_{\mathsf{a};m,x} = (VG)_{\mathsf{a};m,x} = C_{\mathsf{a};m,x} = (U^C F^C)_{\mathsf{a};m,x} = F^C_{\mathsf{a};m,x}. \quad \square$$

命题 5.35。 设 M 和 $\mathcal{N}$ 是左 $\mathscr{C}$-模范畴。

- 设 $F\colon \mathrm{M} \rightleftarrows \mathcal{N}\colon U$是一个宽松 $\mathscr{C}$-模伴随，并考虑推论 5.30 中 M^T 上相应的 $\mathscr{C}$-模范畴结构。那么对于 $T \mathrel{..}= UF$，比较函子 K^T 是一个强 $\mathscr{C}$-模函子。

- 令 $F\colon \mathrm{M} \rightleftarrows \mathcal{N}\colon U$为一个宽松的 $\mathscr{C}$-模伴随，考虑推论 5.33中 M_T 上相应的 $\mathscr{C}$-模范畴结构。则对于 $T \mathrel{..}= UF$，比较函子 K_T 是一个强 $\mathscr{C}$-模函子。

命题*5.36.* 设 M 是一个 $\mathscr{C}$-模范畴，$T: M \longrightarrow M$ 是一个宽松的 $\mathscr{C}$-模单子，而 $S: M \longrightarrow M$ 是 T 的右伴随。则命题 *2.25* 中的同构 $M^T \cong M^S$ 是一个严格的 $\mathscr{C}$-模同构，其中 M^T 赋予命题*5.30*中的$\mathscr{C}$-模结构，对于 M^S也同样如此。

证明。 注意，根据定理 5.28 余单子 $S: \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ 具有如下宽松 $\mathscr{C}$-模结构，对所有 $x \in \mathscr{C}$ 以及 $m \in \mathrm{M}$:

$$S_{\mathsf{a};x,m}: x \triangleright Sm \xrightarrow{\eta_{x\triangleright Sm}} ST(x \triangleright Sm) \xrightarrow{ST_{\mathsf{a};x,Sm}} S(x \triangleright TSm) \xrightarrow{S(x\triangleright\varepsilon_m)} S(x \triangleright m).$$

此外，命题 $L: \mathrm{M}^T \xrightarrow{\sim} \mathrm{M}^S$ 中的同构 2.25 由下式给出

$$\big(m,\ \nabla_m: Tm \longrightarrow m\big) \longmapsto \big(m,\ m \xrightarrow{\eta_m} STm \xrightarrow{S\nabla_m} Sm\big).$$

我们需要证明，对于所有 $x \in \mathscr{C}$ 以及 $(m, \nabla_m) \in \mathrm{M}^T$，$L(x \triangleright (m, \nabla_m)) = x \triangleright L((m, \nabla_m))$。这等价于以下等式:

$$\big(x \triangleright m,\ x \triangleright m \xrightarrow{\eta_{x\triangleright m}} ST(x \triangleright m) \xrightarrow{ST_{\mathsf{a};x,m}} S(x \triangleright Tm) \xrightarrow{S(x\triangleright\nabla_m)} S(x \triangleright m)\big)$$

and

$$\big(x \triangleright m,\ x \triangleright m \xrightarrow{x\triangleright\eta_m} x \triangleright STm \xrightarrow{x\triangleright S\nabla_m} x \triangleright Sm \xrightarrow{\eta_{x\triangleright Sm}} ST(x \triangleright Sm) \xrightarrow{S(T_{\mathsf{a}})_{x,S(m)}} S(x \triangleright TSm) \xrightarrow{S(x\triangleright\varepsilon_m)} S(x \triangleright m)\big).$$

这可由以下交换图看出:

$$\begin{array}{ccccccc}
x \triangleright m & \xrightarrow{\eta_{x\triangleright m}} & ST(x \triangleright m) & & \xrightarrow{\quad ST_{\mathsf{a};x,m} \quad} & & S(x \triangleright Tm) \\
{\scriptstyle x\triangleright\eta_m}\downarrow & \text{nat } \eta & \downarrow{\scriptstyle ST(x\triangleright\eta_m)} & \text{nat } T_{\mathsf{a}} & \overset{S(x\triangleright T\eta_m)}{\swarrow}\ \text{adj} & & \| \\
x \triangleright STm & \xrightarrow[\eta_{x\triangleright STm}]{} & ST(x \triangleright STm) & \xrightarrow{ST_{\mathsf{a};x,STm}} & S(x \triangleright TSTm) & \xrightarrow[S(x\triangleright\varepsilon_{Tm})]{} & S(x \triangleright Tm) \\
{\scriptstyle x\triangleright S\nabla_m}\downarrow & \text{nat } \eta & \downarrow{\scriptstyle ST(x\triangleright S\nabla_m)} & \text{nat } T_{\mathsf{a}} & \downarrow{\scriptstyle S(x\triangleright TS\nabla_m)} & \text{nat } \varepsilon & \downarrow{\scriptstyle S(x\triangleright\nabla_m)} \\
x \triangleright Sm & \xrightarrow[\eta_{x\triangleright Sm}]{} & ST(x \triangleright Sm) & \xrightarrow[ST_{\mathsf{a};x,Sm}]{} & S(x \triangleright TSm) & \xrightarrow[S(x\triangleright\varepsilon_m)]{} & S(x \triangleright m)
\end{array}$$

□

与命题 5.36类似，可得以下结果。

命题 *5.37.* 设 M 是一个 $\mathscr{C}$-模范畴，$T: M \longrightarrow M$ 是一个宽松的 $\mathscr{C}$-模单子，且 $L: M \longrightarrow M$ 是 T 的左伴随。那么，命题 *2.26* 中的同构 $M_T \cong M_L$ 是一个 $\mathscr{C}$-模同构，其中 M_T 和 M_L 均赋予推论 *5.33* 中的 $\mathscr{C}$-模结构。

[这部著作的价值] 将取决于思想表达得有多好，钉子敲得有多准。——我清楚地意识到，自己远未做到所能做到的程度。原因很简单：我的能力不足以胜任这项任务。

Lud维希·维特根斯坦；《逻辑哲学论》 学

单子扭曲中心

6

反 Yetter–Drinfeld 模 在有限维霍普夫代数的情形下构成 Yetter–Drinfeld 模上的一个模范畴。随后，它们由 Drinfeld 双上的一个余模代数实现，见 [HKRS04]。如第 4.2节所述，我们也处于类似的情形。反 Drinfeld 中心是反 Yetter–Drinfeld 模的替代，它构成 Drinfeld 中心上的一个模范畴。

本节将有限维向量空间替换为一个刚性、可能带主轴结构的范畴 $\mathcal{C}$，并将底层霍普夫代数替换为 $\mathcal{C}$ 上的霍普夫单子 H，旨在研究霍普夫单子 $D(H) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$，以及其上的余模单子 $Q(H) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$；它们分别将中心及其扭曲版本实现为相应的模。Bruguières 和 Virelizier 通过拓展 Day 和 Street 的结果 [DS07]，对 $D(H)$ 给出了清晰的描述，见 [BV12] 。若 H 是恒等函子，则可在 $\mathcal{C}^H$ 上定义中心霍普夫单子 $\mathrm{D}(\mathcal{C}^H)$，其 Eilenberg–Moore 范畴为 $\mathrm{Z}(\mathcal{C}^H)$。作为贝克分配律理论的一项应用，可以得到 Drinfeld 双 $D(H) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$。我们运用相同的技巧，定义 H 的反双 $Q(H)$；其模与反 Drinfeld 中心 $\mathrm{Q}(\mathcal{C}^H)$ 的“对偶”同构。图6.1 最能概括这一方法。我们得到了定理 4.1 的单子版本。

定理 6.44： 设 $\mathcal{C}$ 是一个刚性幺半范畴，并设 $H: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$是一个具有双 $D(H)$ 和反双 $Q(H)$ 的霍普夫单子。以下陈述等价：

（*i*）幺半单位 $1 \in \mathcal{C}$提升为 $Q(H)$ 上的一个模；（*ii*）存在余模单子的同构 $D(H) \cong Q(H)$；以及（*iii*）存在单子的同构 $Q(H) \cong D(H)$。

如果 $\mathcal{C}$ 是主轴的，且其枢轴结构为 ϕ，那么上述任一陈述成立，当且仅当 H 和 ϕ 构成一对对合对。

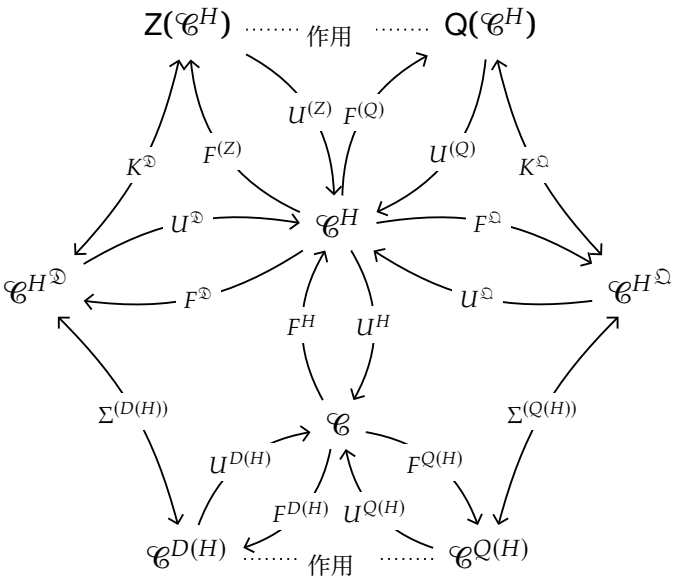


图6.1：伴随、单子以及中心和反中心的各种版本之间错综复杂的关系。

根据定理 6.44 ，我们可以推导出 $\mathcal{C}^H$ 上的枢轴结构如何由中心霍普夫单子 $\mathfrak{D}$ 与反中心余模单子$\mathfrak{Q}$之间的模态射产生。

推论 6.45. 设 $\mathcal{C}$ 是一个刚性幺半范畴。如果 $\mathcal{C}$ 具有一个中心霍普夫单子 $\mathfrak{D}(\mathcal{C})$ 和一个反中心余模单子 $\mathfrak{Q}(\mathcal{C})$，那么它是主轴的，当且仅当 $\mathfrak{D}(\mathcal{C}) \cong \mathfrak{Q}(\mathcal{C})$作为单子同构。

6.1 交叉积和分配律

Drinfeld 中心的霍普夫单子描述 $\mathsf{Z}(\mathcal{C}^H)$，对于刚性范畴 $\mathcal{C}$ 及其上的霍普夫单子 H 作用于 $\mathcal{C}$，通过两步过程实现：首先在 $\mathcal{C}^H$ 上找到一个合适的单子，然后将其“提升”为 $\mathcal{C}$上的单子。我们将依据 [BV12第 3 节和 4]回顾这一提升过程。

定义 6.1. 设 $H\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$是一个单子， $T\colon \mathcal{C}^H \longrightarrow \mathcal{C}^H$是一个函子。 T通过 H得到的交叉积 $T \rtimes H$是自函子 $U^H T F^H\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$。

如果 $(T,\ \mu,\ \eta)$ 是一个单子，那么交叉积 $T \rtimes H$ 也继承了这一结构：其乘法和单位定义如下

这里， ε 和 η 分别是伴随$F^H \dashv U^H$的单位和余单位。

$$\mu^{(T\rtimes H)}\colon U^H T F^H U^H T F^H \xrightarrow{U^H T \varepsilon T F^H} U^H T T F^H \xrightarrow{U^H \mu^{(T)} F^H} U^H T F^H$$

and

$$\eta^{(T\rtimes H)}\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\eta} U^H F^H \xrightarrow{U^H \eta^{(T)}} U^H T F^H.$$

给定两个双单子 $H\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$和 $B\colon \mathcal{C}^H \longrightarrow \mathcal{C}^H$，对 U^H、B和 F^H 的余乘法与余单位进行迭代应用，可在 $B \rtimes H\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ 上得到一个双单子结构。余乘法定义如下

$$U^H_{2;TF^H(-),TF^H(=)} \circ U^H T_{2;F^H(-),F^H(=)} \circ U^H T F^H_{2;-,=},$$

而对于余单位，我们有

$$\varepsilon^{(U^H)} \circ U^H \varepsilon^{(T)} \circ U^H T \varepsilon^{(F^H)}.$$

类似的考量得出以下结果。

引理 6.2. 设 $H\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ 和 $B\colon \mathcal{C}^H \longrightarrow \mathcal{C}^H$ 是双单子，它们分别对余模单子 $G\colon \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ 和 $C\colon \mathrm{M}^G \longrightarrow \mathrm{M}^G$ 施加余作用。交叉积 $C \rtimes G\colon \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ 是 $B \rtimes H$ 上的余模单子，其余作用为

$$U^G_{\mathsf{a};CF^G(-),BF^H(=)} \circ U^G C_{\mathsf{a};F^G(-),F^H(=)} \circ U^G C F^G_{\mathsf{a};-,=}.$$

注 6.3. 设 $H\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ 和 $B\colon \mathcal{C}^H \longrightarrow \mathcal{C}^H$ 为单子。关于何种条件下 $B \rtimes H$ 的模 $\mathcal{C}^{B\rtimes H}$ 与 $(\mathcal{C}^H)^B$ 同构的问题，与第 2.2.2 节的分配律理论密切相关。我们可以将该理论的形式化理论（参见 [Str72],）应用于由幺半范畴、oplax 幺半函子及 oplax 幺半自然变换构成的双范畴 $\mathbb{O}\mathrm{plMon}^{\mathsf{opl}}$，从而得到对双单子和 oplax 幺半分配律的描述——即双单子 H、$B\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ 之间的 oplax 幺半自然变换 $\Lambda\colon HB \longrightarrow BH$，且它们还是分配律，参见 [McC02]。

设 $\Lambda\colon HB \longrightarrow BH$ 是一个反强幺半分配律。底层函子 $BH\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ 的余乘法和余单位使复合 $B \circ_\Lambda H$ 成为一个双单子。因此，余模单子可以在以下双范畴中进行内在描述：

- 作为对象，是由幺半范畴 $\mathcal{C}$上的右模范畴 M 组成的对 $(\mathrm{M}, \mathcal{C})$；
- 作为 1-态射，是由关于反强幺半函子 F的余模函子 G 组成的对 (G, F)；并且
- 作为 2-态射，是构成余模变换的对 (ϕ, ψ)。

以下结果可由 [Str72]立即得出。

定义 6.4. 设 $G, C\colon \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$ 分别是双单子 $H, B\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ 上的两个余模单子。余模分配律是指一对分配律 $\Omega\colon GC \longrightarrow CG$和 $\Lambda\colon HB \longrightarrow BH$，满足 (Λ, Ω) 是一个余模自然变换。

命题 6.5. 考虑双单子 $G, C\colon \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$ 上的两个余模单子 $H, B\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$。两者之间存在一个双射对应：

(i) 余模分配律 $\left(GC \xrightarrow{\Omega} CG, HB \xrightarrow{\Lambda} BH\right)$；以及 *(ii)* 将 B 提升为双单子 $\widetilde{B}\colon \mathscr{C}^H \longrightarrow \mathscr{C}^H$，同时将 C 提升为余模单子 $\widetilde{C}\colon \mathbb{M}^G \longrightarrow \mathbb{M}^G$（它位于 $\widetilde{B}$ 上），使得 $BU^H = U^H\widetilde{B}$ 是反松幺半函子，且 $CU^G = U^G\widetilde{C}$ 是余模函子。

设 $\left(GC \xrightarrow{\Omega} CG, HB \xrightarrow{\Lambda} BH\right)$ 是一个余模分配律。G 和 C 的余作用使 $C \circ_\Omega G$ 成为 $B \circ_\Lambda H$ 上的余模单子。

引理 6.6。 假设 $\Omega\colon GC \longrightarrow CG$和 $\Lambda\colon HB \longrightarrow BH$构成余模分配律。那么存在等价 $(\mathscr{C}^H)^{\widetilde{B}^\Lambda} \simeq \mathscr{C}^{B\circ_\Lambda H}$，它们是幺半范畴之间的等价；并且 $(\mathbb{M}^G)^{\widetilde{C}^\Omega} \simeq \mathbb{M}^{C\circ_\Omega G}$ 是 $\mathscr{C}^{B\circ_\Lambda H}$-模范畴之间的等价。

事实上，根据 [BV12，第4节。5], 前面的结果可以推广到霍普夫单子背景。设 $B, H\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$是霍普夫单子。若 $\Lambda\colon HB \longrightarrow BH$是一个 oplax 幺半分配律，那么 $B \circ_\Lambda H\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ 及其提升$\widetilde{B}^\Lambda\colon \mathscr{C}^H \longrightarrow \mathscr{C}^H$ 也都是霍普夫单子。

6.2 可中心化函子与中心双单子

文献 [BV12]中给出的霍普夫单子 $H\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ 的双的构造，依赖于对遗忘函子$U^{(Z)}\colon \mathsf{Z}(\mathscr{C}^H) \longrightarrow \mathscr{C}^H$的左对偶的显式描述，而该左对偶由一个余端实现。

定义 6.7. 设 $\mathscr{C}$ 是一个刚性范畴，$T\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ 是一个自函子。若对所有 $x \in \mathscr{C}$，以下余端都存在，则称 T 可中心化：

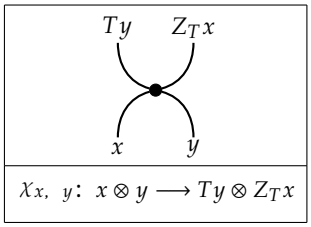
$$Z_T(x) := \int^{y\in\mathscr{C}} {}^\vee Ty \otimes x \otimes y.$$

备注 6.8. 任何可中心化函子 $T\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ 都具有一个泛余作用

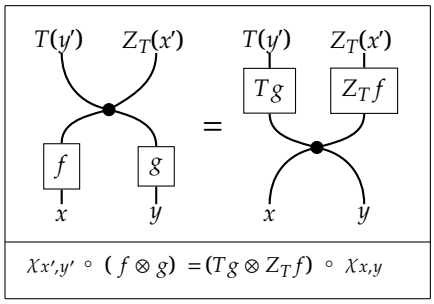
$$\chi_{x,y} := (\mathrm{id}_{Ty} \otimes \mathrm{copr}_{y,x}) \circ (\mathrm{coev}^l_{Ty} \otimes \mathrm{id}_{x\otimes y}), \qquad \text{for } x, y \in \mathscr{C},$$

它关于两个变量都是自然的。我们称 (Z_T, χ) 为 T 的中心化子。

注 6.9。图示地，我们将泛余作用表示如下：



对于所有 $f\colon\ x \longrightarrow x'$ 和 $g\colon\ y \longrightarrow y'$，自然性条件等价于

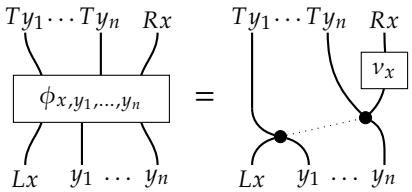


泛余作用具有某种泛性质，这一性质将在本章节余内容中发挥至关重要的作用——扩展分解性质。特别是，它为我们构造双模与余模单子提供了强有力的工具。

引理 6.10 ([BV12, 引理 5.4])。设 $(Z_T,\ \chi)$ 为函子 $T\colon\ \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ 的中心化子，并假设 $L,\ R\colon\ \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ 是两个函子。对于任意 $n \in \mathbb{N}$，$y \in \mathcal{D}$ 和 $x_1,\ \ldots,\ x_n \in \mathcal{C}$，以及任意自然变换

$$\phi_{y,x_1,\ldots,x_n}\colon Ly \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \longrightarrow Tx_1 \otimes \cdots \otimes Tx_n \otimes Ry,$$

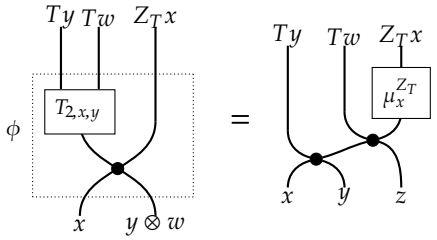
存在唯一的自然变换 $\nu\colon\ Z_T^n L \Longrightarrow R$，满足



例 6.11. 令 $T\colon\ \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ 为一个带中心化子 (Z_T, χ) 的反松幺半函子。对所有 $x \in \mathcal{C}$，定义 Z_T 的单位为

$$\eta_x^{(Z_T)}\colon x \xrightarrow{\chi_{x,1}} T1 \otimes Z_T x \xrightarrow{T_0 \otimes Z_T x} Z_T x.$$

由引理 6.10，我们可以从 T的余乘法导出唯一的乘法 $\mu^{(Z_T)}\colon Z_T^2 \Longrightarrow Z_T$。

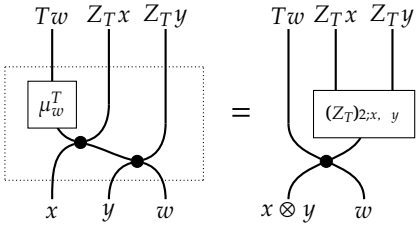


以下结果归功于 Day 与 Street， [DS07，第 191–192], 页；另见 [BV12，定理 5。6] 的证明。

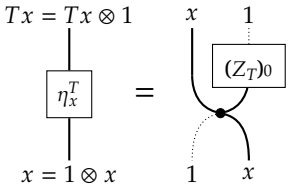
引理 6.12. 中心化子 $(Z_T,\ \chi)$（反松幺半自函子 T 在 $\mathscr{C}$ 上）是一个单子，其乘法与单位如例 6.11 所给出。

在引理 6.12 的证明（见于 [BV12，定理 5。6], ）中，作者进一步考虑将 $T\colon\ \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ 装备以霍普夫单子结构，并证明在此情形下 Z_T 同样是霍普夫单子。引理 6.10 所给出的扩展分解性质在 Z_T 上，由泛余作用的两次应用以及 T 的乘法重构出余乘法：

(6.2.1)



同样， T 的单位通过以下方式在 Z_T 上诱导出余单位



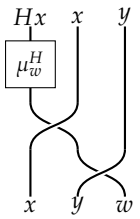
直接计算可验证，中心化子 Z_T 也是一个双单子。关于左、右对径的构造，参见 [BV12，定理 5。6]。

注 6.13。 我们将 $\mathsf{Z}(_H\mathscr{C})$ 视为注 2.46中所述的 oplax 双模范畴的中心，另见 [BV07，第 5 节5]。$\mathsf{Z}(_H\mathscr{C})$ 中的对象是对

$(x,\ \sigma_{x,\ -})$，其中 $x \in \mathcal{C}$和 $\sigma_{x,\ -}\colon\ x\otimes - \Longrightarrow H(-)\otimes x$是一个自然变换，满足对所有 $x,\ y,\ z \in \mathcal{C}$

$$(H_{2;y,z} \otimes x) \circ \sigma_{x,y\otimes z} = (Hy \otimes \sigma_{x,z}) \circ (\sigma_{x,y} \otimes z),$$
$$(H_0 \otimes x) \circ \sigma_{x,1} = \mathrm{id}_x.$$

与前文研究的中心类似，$\mathsf{Z}({}_H\mathcal{C})$ 中的态射是 $\mathcal{C}$ 中与半编织相容的态射。如 [BV12命题 5.9], 所示，霍普夫单子 : 的结构态射可用于在$\mathsf{Z}({}_H\mathcal{C})$上定义刚性结构。例如，$(x, \sigma_{x,-})$ 与 $(y,\sigma_{y,-})\ \in \mathsf{Z}({}_H\mathcal{C})$ 的张量积为 $x \otimes y \in \mathcal{C}$，并配有半编织



关于由（反）松幺半函子扭曲的中心的论述，参见 [FH23] .

由于霍普夫单子的中心化子本身也是霍普夫单子，它们的模实现了备注 6.13 中的扭曲中心，构成一个刚性范畴。此结果证明见 [BV12，定理 5.12 和推论 5.14]。

命题 6.14。 设 $H\colon\ \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ 是一个可中心化霍普夫单子。其中心化子 $(Z_H,\ \chi)$ 的 $\mathcal{C}^{Z_H}$ 模作为刚性范畴同构于 $\mathsf{Z}({}_H\mathcal{C})$。

将上述命题应用于恒等函子 $\mathrm{Id}\colon\ \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$，我们得到刚性范畴$\mathcal{C}$的 Drinfeld 中心 $\mathsf{Z}(\mathcal{C})$ 的霍普夫单子描述。下一个定义中的术语源自 Shimizu，参见 [Shi17]。

定义 6.15。 设 $\mathcal{C}$ 是一个幺半范畴，并设 $\mathcal{C}$ 上的恒等函子是可中心化的，其中心化子为 $(Z,\ \chi)$。 $\mathcal{C}$ 的中心霍普夫单子是 $\mathfrak{D}(\mathcal{C}) \coloneqq Z_{\mathrm{Id}}\colon\ \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$。我们将其 Eilenberg–Moore 表示为 $\mathcal{C}^{\mathfrak{D}}$。

证明命题 6.14 的一个重要步骤，是确定比较函子 $K^{Z_T}\colon \mathsf{Z}({}_T\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}^{Z_T}$ 的一个逆元。这一构造在我们对反 Drinfeld 中心的单子性描述中也将发挥重要作用，因此我们在此回顾其完整的一般形式。设 $T\colon\ \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ 是一个可中心化的 oplax 幺半自函子，其中心化子为 (Z_T, χ)。对于每个 Z_T-模

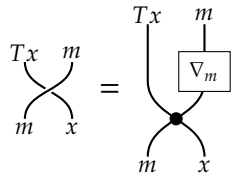
(m, ∇_m)，我们赋予一个半编织 $\sigma_{m,-}\colon m \otimes - \Longrightarrow T(-) \otimes m$。对于任意$x \in \mathcal{C}$，它由以下复合给出

$$\sigma_{m,x}\colon m \otimes x \xrightarrow{\chi_{m,x}} Tx \otimes Z_T x \xrightarrow{Tx \otimes \nabla_m} Tx \otimes m. \tag{6.2.2}$$

由此得到一个函子 $E^{Z_T}\colon \mathcal{C}^{Z_T} \longrightarrow \mathsf{Z}(_T\mathcal{C})$，它在态射上为恒等函子，而在对象上的作用定义为

$$E^{Z_T}(m, \nabla_m) = (m, \sigma_{m,-}), \qquad \text{for all } (m, \nabla_M) \in \mathcal{C}^{Z_T}. \tag{6.2.3}$$

反过来，对于每个对象 $(m, \sigma_{m,-}) \in \mathsf{Z}(_T\mathcal{C})$，我们可以赋予一个 Z_T-模，其作用 ∇_m 根据引理 6.10唯一确定为



由此得到比较函子 $K^{Z_T}\colon \mathsf{Z}(_T\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}^{Z_T}$。

注 6.16。 设 $T\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ 是一个可中心化的 oplax 幺半自函子，其中心化子为 (Z_T, χ)。记 Z_T 的 Eilenberg–Moore 伴随的自由函子为 $F^{Z_T}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{Z_T}$。复合

$$\mathcal{C} \xrightarrow{F^{Z_T}} \mathcal{C}^{Z_T} \xrightarrow{E^{Z_T}} \mathsf{Z}(_T\mathcal{C})$$

定义了遗忘函子 $U^{(T)}\colon \mathsf{Z}(_T\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$ 的左伴随。

事实上，中心伴随 $F^{(T)} \dashv U^{(T)}$ 是单子性的。

命题 6.17 ([BV12，定理 5.12])。 设(Z_T, χ) 是宽松幺半自函子 $T\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$的中心化子。比较函子 $K^{Z_T}\colon \mathsf{Z}(_T\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}^{Z_T}$是一个范畴同构，其逆元为 $E^{Z_T}\colon \mathcal{C}^{Z_T} \longrightarrow \mathsf{Z}(_T\mathcal{C})$。

6.3 中心化子与余模单子

现在，我们将 Bruguières 和 Virelizier 的方法应用于扭曲中心，以获得一个实现反 Drinfeld 中心的余模单子。为此，我们需要对单子上的模这一概念进行推广。我们的方法基于 [MW11]。

定义 6.18. 设 (B,μ,η): $\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{C}$ 是一个双单子，$F\colon\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{D}$ 是一个反松幺半函子。B 在 F 上的一个*oplax 幺半群右作用* 是一个 oplax 自然变换 $\alpha\colon FB\Longrightarrow F$，满足下列图表可交换：

$$\begin{array}{ccc} FBB & \xrightarrow{F\mu} & FB \\ {\scriptstyle \alpha B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ FB & \xrightarrow[\alpha]{} & F \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{F\eta} & FB \\ & {\scriptstyle \mathrm{id}_F}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ & & F \end{array}$$

类似地，可以定义 oplax 幺半左作用。

注 6.19. 回顾注 5.2，双单子 B 是幺半范畴 $\mathbb{O}\mathsf{plMon}^{\mathsf{opl}}(\mathscr{C},\mathscr{C})$ 中的一个幺半群，其中该范畴由 $\mathscr{C}$ 上的 oplax 幺半自函子及其间的 oplax 幺半自然变换构成。该范畴显然通过函子复合在 $\mathbb{O}\mathsf{plMon}^{\mathsf{opl}}(\mathscr{C},\mathscr{D})$ 上有一个右作用。在此背景下，双单子$B\colon\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{C}$ 的 oplax 幺半右作用等同于一个 $\mathbb{O}\mathsf{plMon}^{\mathsf{opl}}(\mathscr{C},\mathscr{D})$-模 B。

oplax 幺半左作用的一个典型例子，是双单子 $U^B\colon\mathscr{C}^B\longrightarrow\mathscr{C}$ 的遗忘函子 $B\colon\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{C}$ 连同作用$\nabla=U^B\varepsilon\colon BU^B\longrightarrow U^B$，参见注 2.30。

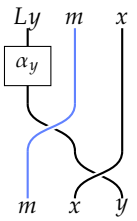
假设 6.20. 为使记号简洁，以下固定一个反松幺半函子 $L\colon\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{C}$，它带有一个由双单子 $B\colon\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{C}$ 给出的 oplax 右作用 $\alpha\colon LB\Longrightarrow L$，并假设 L 和 B 均可中心化。它们的中心化子分别记为 $(Z_L,\ \xi)$ 和 $(Z_B,\ \chi)$。

我们将 $\mathsf{Z}_{(B}\mathscr{C})$ 视为 Drinfeld 中心的一个更一般版本，它应当从右侧作用于 $\mathsf{Z}_{(L}\mathscr{C})$。为强调这一点，并与第4.2节的着色方案保持一致，我们用黑色表示 $\mathscr{C}$ 或其广义 Drinfeld 中心中的对象，用蓝色表示$\mathsf{Z}_{(L}\mathscr{C})$中的对象。

考虑对象 $(m,\ \sigma_{m,\ -})\in\mathsf{Z}_{(L}\mathscr{C})$ 和 $(x,\ \sigma_{x,\ -})\in\mathsf{Z}_{(B}\mathscr{C})$。$B$对 L 的作用，以及 m 和 x 的半编织，给出一个自然变换

$$\sigma_{m\otimes x,y}\colon m\otimes x\otimes y\longrightarrow Ly\otimes m\otimes x,$$

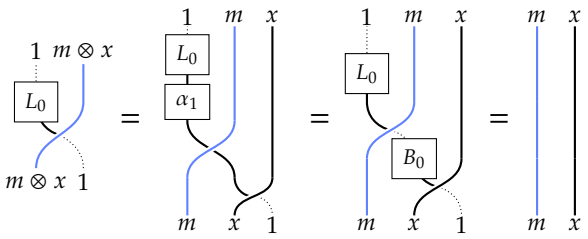
我们可以用图示地表示为



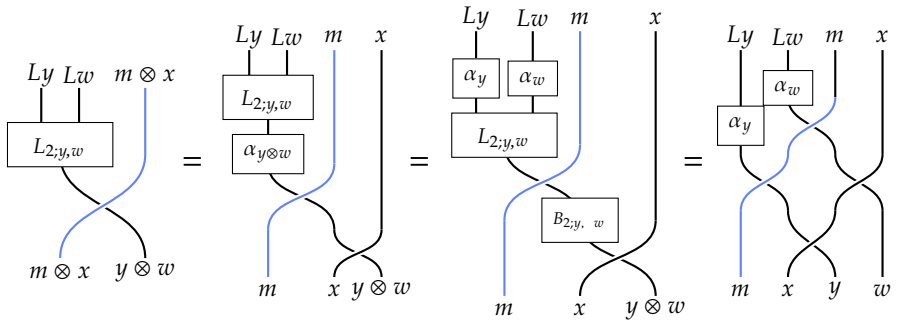
(6.3.1)

引理 6.21。 中心 $\mathsf{Z}({}_B\mathcal{C})$ 通过对底层对象取张量积并按照方程（6.3.1）将半编织粘合在一起，从右侧作用于 $\mathsf{Z}({}_L\mathcal{C})$。关于此作用，遗忘函子 $:\mathsf{Z}({}_L\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$ 是一个关于 $U^{(B)}\colon \mathsf{Z}({}_B\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$的严格余模函子。

证明。 我们按照 [BV12，命题 5.9] 中的做法进行。固定对象 $(m,\ \sigma_{m,\ -}) \in \mathsf{Z}({}_L\mathcal{C})$ 和 $(x,\ \sigma_{x,\ -}) \in \mathsf{Z}({}_B\mathcal{C})$。 $m \otimes x$ 的半编织与 $\mathcal{C}$ 的单位的相容性可通过简单计算得到：



类似地，我们验证六边形公理：

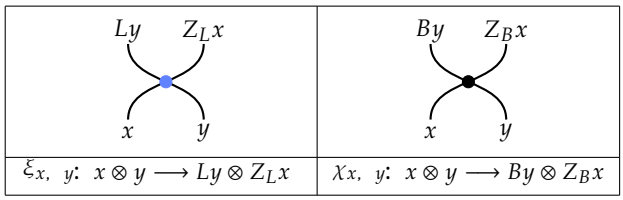


作用 $\alpha\colon LB \Longrightarrow L$ 与 B 的乘法和单位的相容性断言，$\mathsf{Z}({}_L\mathcal{C})$ 是一个右 $\mathsf{Z}({}_B\mathcal{C})$-模范畴。根据构造，对所有 $(m,\ \sigma_{m,\ -}) \in \mathsf{Z}({}_L\mathcal{C})$ 与 $(x,\ \sigma_{x,\ -}) \in \mathsf{Z}({}_B\mathcal{C})$，我们有

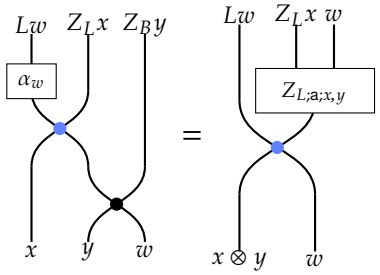
$$U^{(L)}\big((m,\sigma_{m,-}) \triangleleft (x,\sigma_{x,-})\big) \;=\; m \otimes x \;=\; U^{(L)}(m,\sigma_{m,-}) \otimes U^{(B)}(x,\sigma_{x,-}).$$

因此，$U^{(L)}$ 是 $U^{(B)}$ 上的严格余模函子。 □

记号 6.22. 我们将着色方案扩展到泛余作用：



注 6.23. 将 $\mathcal{C}^{Z_B}$ 和 $\mathcal{C}^{Z_L}$ 分别与广义 Drinfeld 中心及其扭曲版本对应起来，这表明 Z_L 是 Z_B上的一个余模单子。类比公式（6.2.1），我们定义 Z_L 的余作用 $Z_{L;\mathsf{a}}$ 如下：



(6.3.2)

命题 6.24. 设 $\alpha\colon LB \Longrightarrow L$ 是双单子$B\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$在宽松幺半函子 $L\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ 上的 *oplax* 幺半群右作用。此外，假设 L 的中心化子 (Z_L, ξ) 和 B 的中心化子 (Z_B, χ) 存在。方程（6.3.2）中的余作用使 Z_L 成为 Z_B 上的余模单子，并且 $\mathcal{C}^{Z_L}$ 作为 $\mathcal{C}^{Z_B}$ 上的右模范畴，与 $\mathsf{Z}({}_L\mathcal{C})$同构。

证明. 根据注6.16 和命题6.17，我们有单子伴随

$$F^{(B)}\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathsf{Z}({}_B\mathcal{C}) :U^{(B)} \qquad \text{and} \qquad F^{(L)}\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathsf{Z}({}_L\mathcal{C}) :U^{(L)}$$

由于 [BV12，注 5.13],诱导出双单子 Z_B 和单子 Z_L。引理 6.21 表明 $U^{(L)}$ 是 $U^{(B)}$上的严格余模函子。

根据定理5.31，另见注5.24 和例5.27， Z_L 是 Z_B上的余模单子；余作用 $\lambda\colon Z_L(-\otimes =) \longrightarrow Z_L(-) \otimes Z_B(=)$ 实现$\mathcal{C}^{Z_B}$ 对$\mathcal{C}^{Z_L}$ 的作用，对所有 x， $y \in \mathcal{C}$ 定义如下：

$$\lambda_{x,y}\colon Z_L(x \otimes y) \xrightarrow{Z_L(\eta_x^{(Z_L)} \otimes \eta_y^{(Z_B)})} Z_L(Z_L x \otimes Z_B y) \xrightarrow{\nabla_{Z_L x \otimes Z_B y}} Z_L x \otimes Z_B y,$$

其中 ∇ 定义如方程（2.3.1）所示。

利用方程（6.2.2）中解释的泛余作用与半编织之间的关系，并应用六边形恒等式，我们计算得到图6.2。泛余作用的唯一性意味着 $\lambda = Z_{L;\mathsf{a}}$。

还需证明 $\mathcal{C}^{Z_L}$ 与 $\mathsf{Z}({}_L\mathcal{C})$ 作为 $\mathcal{C}^{Z_B}$上的模同构。根据命题 5.34，比较函子 $K^{Z_B}\colon \mathsf{Z}({}_B\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}^{Z_B}$ 是强幺半函子，且 $K^{Z_L}\colon \mathsf{Z}({}_L\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}^{Z_L}$ 是其上的强余模函子。此外，根据命题 6.17，K^{Z_B} 和 K^{Z_L} 都存在逆元

$$E^{Z_B}\colon \mathcal{C}^{Z_B} \longrightarrow \mathsf{Z}({}_B\mathcal{C}) \qquad \text{and} \qquad E^{Z_L}\colon \mathcal{C}^{Z_L} \longrightarrow \mathsf{Z}({}_L\mathcal{C}).$$

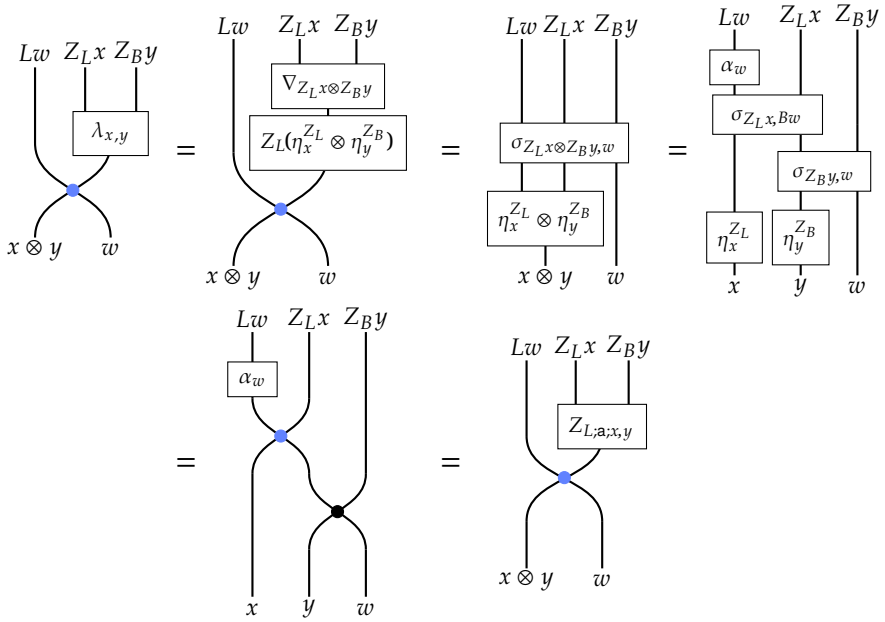


图 6.2：态射 λ 和 $Z_{L;a}$满足相同的泛性质。

利用 E^{Z_B} 是幺半函子这一点，我们将 $\mathsf{Z}({}_B\mathscr{C})$ 在 $\mathsf{Z}({}_L\mathscr{C})$ 上的右作用识别为 $\mathscr{C}^{Z_B}$ 的右作用 $\blacktriangleleft\colon \mathsf{Z}({}_L\mathscr{C}) \times \mathscr{C}^{Z_B} \longrightarrow \mathsf{Z}({}_L\mathscr{C})$，定义如下

$$\mathsf{Z}({}_L\mathscr{C}) \times \mathscr{C}^{Z_B} \xrightarrow{\mathrm{id} \times E^{Z_B}} \mathsf{Z}({}_L\mathscr{C}) \times \mathsf{Z}({}_B\mathscr{C}) \xrightarrow{\triangleleft} \mathsf{Z}({}_L\mathscr{C}).$$

对于任意的 $m \in \mathsf{Z}({}_L\mathscr{C})$ 和 $x \in \mathsf{Z}({}_L\mathscr{C})$，我们有

$$K^{Z_L}(m \blacktriangleleft x) = K^{Z_L}(m \triangleleft E^{Z_B} x) \xrightarrow[\mathsf{a};m,E^{Z_B}x]{K^{Z_L}} K^{Z_L} m \triangleleft K^{Z_B} E^{Z_B} x = K^{Z_L} m \triangleleft x,$$

因此 $K^{Z_L}\colon \mathsf{Z}({}_L\mathscr{C}) \longrightarrow \mathscr{C}^{Z_L}$ 是模范畴之间的一个同构。 □

例 6.25. 设 $\mathscr{C}$ 是一个刚性幺半范畴，且 (Z_L, ξ) 和 (Z_B, χ) 分别是 ${}^{\vee\vee}(-)\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ 和 $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$ 的中心化子。那么，存在 $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$ 在 ${}^{\vee\vee}(-)$: 上的一个平凡右作用：

$$\mathrm{id}_x\colon {}^{\vee\vee}(\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}(x)) \longrightarrow {}^{\vee\vee}x, \qquad \text{for all } x \in \mathscr{C}.$$

此作用使 Z_L 成为 Z_B 上的一个余模单子，其模范畴 $\mathscr{C}^{Z_L}$ 与 $\mathsf{Q}(\mathscr{C})$ 同构，作为一个 $\mathscr{C}^{Z_B}$-模范畴。

回忆一下，根据备注 4.11，我们可以将 $\mathsf{Q}(\mathscr{C})$ 认作$\mathsf{A}(\mathscr{C}^{\mathrm{op},\mathrm{rev}})^{\mathrm{op}}$。

定义 6.26. 假设 ${}^{\vee\vee}(-), \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ to 存在中心化子 (Z_L, ξ) 和 (Z_B, χ)。我们称 $\mathfrak{Q}(\mathscr{C}) ..= Z_L$ 为 $\mathscr{C}$ 的反中心余模单子。

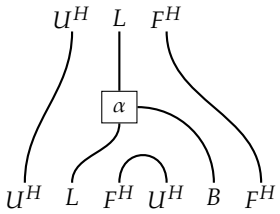
6.4 Hopf 单子的 Drinfeld 双与反 Drinfeld 双

现在我们能够理清图中各种范畴和伴随之间的关系6.1。

假设 6.27. 在本章余下部分，固定刚性范畴 $\mathcal{C}$上的霍普夫单子 H，以及 $\mathcal{C}^H$ 上的 oplax 幺半自函子 L、双单子 B、oplax 幺半群右作用 $\alpha\colon LB \Longrightarrow B$，并假设交叉积 $B \rtimes H$ 和 $L \rtimes H$ 分别具有中心化子 $(Z_{B\rtimes H},\ \nu)$ 和 $(Z_{L\rtimes H},\ \tau)$。

下面的观察——通过直接计算即可得出——将 B 对 L 的作用扩展为相应交叉积的作用。

引理 6.28. *oplax* 幺半群右作用 $\alpha\colon LB \Longrightarrow B$ 诱导出 $L \rtimes H$ 上 $B \rtimes H$ 的 *oplax* 幺半作用，定义如下



下一个结果是 [BV12 定理 7₄] 的一个变体。

定理6.29。 函子 $B, L\colon \mathcal{C}^H \longrightarrow \mathcal{C}^H$存在中心化子 (Z_B, χ)、(Z_L, ξ)，使得 Z_B 将 $Z_{B\rtimes H}$ 提升为双单子，而 Z_L 将 $Z_{L\rtimes H}$ 提升为余模单子。

证明。 根据 [BV12 定理7.4(a)]，存在中心化子 $(Z_L,\ \xi)$ 以及 $(Z_B,\ \chi)$，它们是L和 B的中心化子，并且对所有 $(x,\ \nabla_x)$，$(y,\ \nabla_y) \in \mathcal{C}^H$，均满足

$$U^H Z_L(x,\nabla_x) = Z_{L\rtimes H}x, \qquad U^H \xi_{(x,\nabla_x),(y,\nabla_y)} = (U^H L\nabla_y \otimes Z_{L\rtimes H}x)\circ \tau_{x,y},$$
$$U^H Z_B(x,\nabla_x) = Z_{B\rtimes H}x, \qquad U^H \chi_{(x,\nabla_x),(y,\nabla_y)} = (U^H B\nabla_y \otimes Z_{B\rtimes H}x)\circ \nu_{x,y}.$$

《ibid》的第二部分和第三部分 指出 Z_L 是单子 $Z_{L\rtimes H}$ 的提升，并且Z_B 是双单子 $Z_{B\rtimes H}$的提升。接下来需要证明 Z_L 和 $Z_{L\rtimes H}$ 的余作用与遗忘函子 $U^H\colon \mathcal{C}^H \longrightarrow \mathcal{C}$ 相容。固定对象 $(x,\ \nabla_x)$、$(y,\ \nabla_y) \in \mathcal{C}^H$ 和 $w \in \mathcal{C}$，由图 6.3即可得出。

引理6.10中给出的泛余作用的唯一性性质随即推出 $U^H Z_{L;\mathsf{a};(x,\nabla_x),\ (y,\ \nabla_y)} = Z_{L\rtimes H;\mathsf{a};x,\ y}$。由于 $U^H\colon \mathcal{C}^H \longrightarrow \mathcal{C}$ 是严格余模函子，故结论成立。□

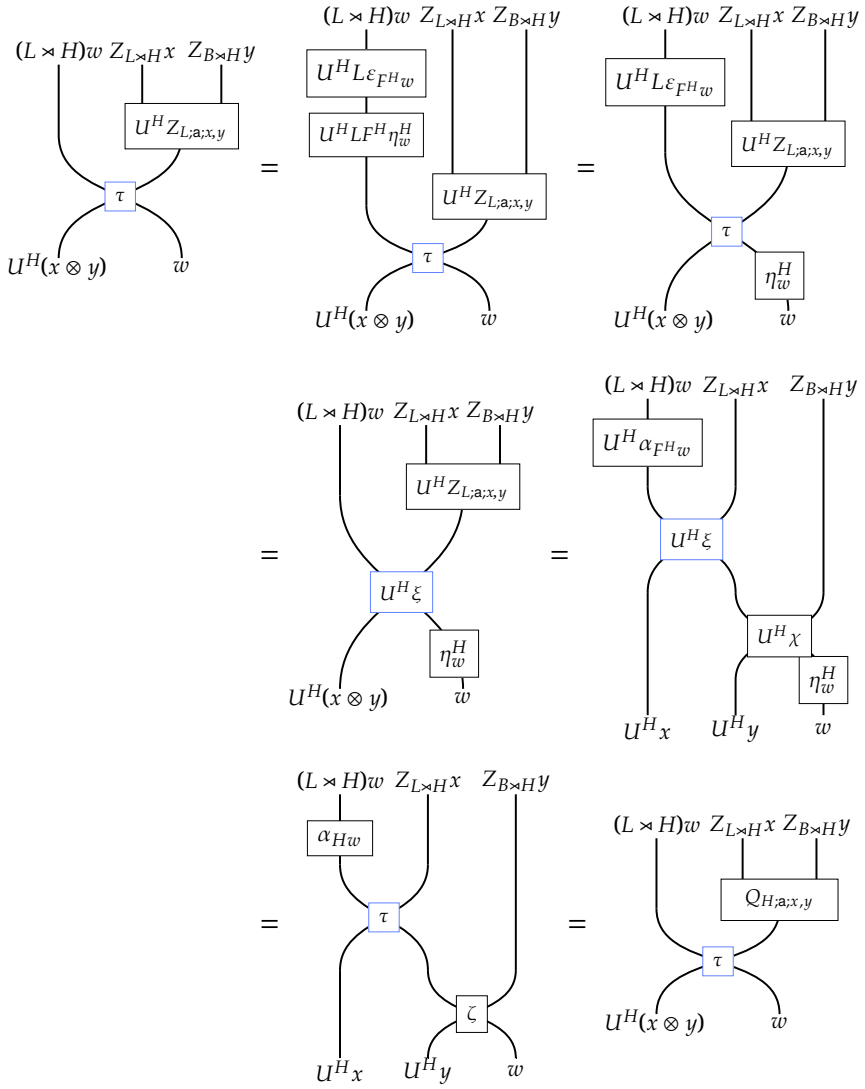


图 6.3： Z_L 和 $Z_{L\rtimes H}$ 的余作用与遗忘函子相容。

注 6.30。 前一个定理结合引理 6.2 意味着我们得到一个余模单子 $D(L,\ H) .. = Z_L \rtimes H$ 上的 $D(B,\ H) .= Z_B \rtimes H$。命题 6.5中给出的提升与单子之间的对应关系，给出了唯一的余模分配律

$$\left(HZ_{L\rtimes H} \xrightarrow{\Omega} Z_{L\rtimes H}H,\ HZ_{B\rtimes H} \xrightarrow{\Lambda} Z_{B\rtimes H}H\right),$$

使得

$$D(L,H) = Z_{L\rtimes H} \circ_\Omega H \qquad \text{and} \qquad D(B,H) = Z_{B\rtimes H} \circ_\Lambda H.$$

定义 6.31。 我们将 D（$B,\ H$）和 D（$L,\ H$）在备注 6.30 中的 双 和扭曲双，分别称为对 （$B,\ H$）和 （$L,\ H$）。

双与广义 Drinfeld 中心之间的关系已在 [BV12、命题 7.5 和定理 7。6]中进行研究。我们的下一个结果使用相同的技术来证明扭曲双如何参数化扭曲中心。

定理 6.32. 扭曲双 $D(L,H)$ 是一个关于 $D(B,H)$的余模单子，并且 $\mathcal{C}^{D(L,H)}$ 作为一个 $\mathcal{C}^{D(B,H)}$-模范畴同构于 $\mathsf{Z}({}_L\mathcal{C}^H)$ 。

证明。 由于 Z_L 是 $Z_{L\rtimes H}$ 作为余模单子的一个提升，扭曲双$D(L,H)$ 是关于 $D(B,H)$ 的余模单子。由引理 6.6，这意味着存在一个 $\mathcal{C}^{D(B,H)}$-模范畴的同构 $I\colon \mathcal{C}^{D(L,H)} \xrightarrow{\sim} \left(\mathcal{C}^H\right)^{Z_L}$。根据命题6.24的证明，比较函子$K^{Z_L}\colon \mathsf{Z}({}_L\mathcal{C}^H) \longrightarrow \left(\mathcal{C}^H\right)^{Z_L}$实现了模范畴的一个同构，结论由考察

$$\mathcal{C}^{D(L,H)} \xrightarrow{I} \left(\mathcal{C}^H\right)^{Z_L} \xrightarrow{E^{Z_L}} \mathsf{Z}({}_L\mathcal{C}^H). \qquad \square$$

下列定义可以理解为将 [HKRS04] 所给出的反 Drinfeld 双概念推广到单子框架。

定义 6.33. 设 H 是刚性范畴 $\mathcal{C}$上的霍普夫单子。对于 $B ..= \mathrm{Id}_{\mathcal{C}^H}$与 $L ..= {}^{\vee\vee}(-) : \mathcal{C}^H \longrightarrow \mathcal{C}^H$，我们分别称 $D(H) ..= D(B,H)$ 与 $Q(H) ..= D(L,H)$ 为 H 的 *Drinfeld* 双与反 *Drinfeld* 双。

6.5 霍普夫单子的对合对

我们现在考虑一个容许双与反双的霍普夫单子，并在此设定下发展对合对的概念。在经典情形中，它们由霍普夫代数的一个类群元与一个特征构成，二者借助其伴随作用实现对极的平方。

定义 6.34. 设 H 是刚性幺半范畴 $\mathcal{C}$上的霍普夫单子。 H 的特征 是一个 H-代数 $\beta ..= (1, \nabla_\beta) \in \mathcal{C}^H$，其底对象为幺半单位 $1 \in \mathcal{C}$。

注 6.35. 具体而言，定义6.34指出，一个类群元 g 属于 H 满足

$$H_{2;x,y} \circ g_{x\otimes y} = g_x \otimes g_y \qquad \text{and} \qquad H_0 \circ g_1 = \mathrm{id}_1, \qquad \text{for all } x, y \in \mathcal{C}.$$

霍普夫单子的特征$\mathrm{Char}(H)$ 构成一个幺半群；根据 H 在 $\mathcal{C}$ 上的 [BV07，引理 3，21], 集合$\mathrm{Gr}(H)$ 中的类群元带有群结构。

例 6.36。霍普夫单子的类群元 H 通过共轭作用于该单子。我们回顾这一基于 [BV07第 1 节4]。给定一个自然变换 $g\colon \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \longrightarrow H$，定义左和右正则作用的 g 在 H上为如下定义的自然变换：

$$L_g\colon H \xrightarrow{{}^{g}H} H^2 \xrightarrow{\mu^{(H)}} H \qquad \text{and} \qquad R_g\colon H \xrightarrow{H^{g}} H^2 \xrightarrow{\mu^{(H)}} H.$$

回顾 H_3 备注 2.35中对它的定义。

定义 6.37。 霍普夫单子H的每一对（$g \in \mathrm{Gr}(H)$， $\beta \in \mathrm{Char}(H)$）都会产生自然变换

$$\mathrm{Ad}_g := L_g \circ R_{g^{-1}}\colon H \Longrightarrow H,$$
$$\mathrm{Ad}_\beta := (\nabla_\beta \otimes H(-) \otimes \nabla_{\vee\beta}) \circ H_{3;1,-,1}\colon H \Longrightarrow H,$$

分别称为 g 和 β 在 H 上的伴随作用。

为了定义对合对，我们需要霍普夫代数的反粒子的平方的一个类似概念。这一概念在 [BV07第 7 节中有所阐述。3]。

定义 6.38。 设 $\phi\colon \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \longrightarrow {}^{\vee\vee}(-)$ 是 $\mathscr{C}$ 上的一个枢轴结构，并设 $H\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ 是一个霍普夫单子。 H 的反粒子的平方是一个自然变换 $S^2\colon H \Longrightarrow H$，对所有 $x \in \mathscr{C}$ 定义为

$$S^2_x := \phi^{-1}_{Hx} \circ s^l{}_{\vee Hx} \circ H^{\vee} s^l_x \circ H\phi_x,$$

w此处 s^l 是 H的左反粒子，参见方程（5.2.1）以及 [BV07，第 3 节。3]　　.

与霍普夫代数的情形类似，我们陈述如下：

定义 6.39。 设 $H\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ 是一个霍普夫单子， $\phi\colon \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \longrightarrow {}^{\vee\vee}(-)$ 是一个枢轴结构。$g, \beta \in \mathrm{PI}^{\phi}_{H}$ 的一个对合对 由 H 和 ϕ 组成，其中 $g \in \mathrm{Gr}(H)$ 是一个类群元， $\beta \in \mathrm{Char}(H)$ 是一个特征，使得对所有 $x \in \mathscr{C}$

$$Ad_{g,x} = Ad_{\beta,x} \circ S^2_x.$$

为了证明对合对对应于 $\mathscr{C}^H$的 Drinfeld 中心上的某些枢轴结构，我们需要两个技术性结果。第一个是经典结果；证明可参见例如 [BV07，引理 1.2 和 1.3]。

引理 6.40。 设 H 是一个单子，其典范遗忘函子为 $U^H\colon \mathscr{C}^H \longrightarrow \mathscr{C}$。若$F, G\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ 是函子，其中范畴 $\mathscr{D}$ 任意，则存在一个典范双射

$$(-)^\sharp\colon \mathrm{Nat}(F, GH) \longrightarrow \mathrm{Nat}(FU^H, GU^H), \qquad \alpha \longmapsto \alpha^\sharp,$$

其中 $\alpha^\sharp{}_{(m,\ \nabla_m)} ..= G\nabla_m \circ \alpha_m$。

下一个引理是 [BV07 引理 7.5] 的一个变体。

引理 6.41。 设 $\phi\colon \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \longrightarrow {}^{\vee\vee}(-)$ 是 $\mathscr{C}$ 上的一个主轴结构，且 $H\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ 是一个霍普夫单子。对于任意类群元 $g \in \mathrm{Gr}(H)$ 和特征 $\beta \in \mathrm{Char}(H)$，以下条件等价：

(i) 态射 g 和 β 构成 H 和 ϕ的一个对合对；以及 *(ii)* 箭头 $\phi g^{\sharp} \in \mathrm{Nat}(U^H, {}^{\vee\vee}(-)\circ U^H)$ 提升到 $\mathrm{Nat}(\mathrm{Id}_{\mathscr{C}^H}, \beta \otimes {}^{\vee\vee}(-) \otimes {}^{\vee}\beta)$。

证明。 取一个模 $(m, \nabla_m) \in \mathscr{C}^H$。由 [BV07 定理 3.8(a)] 以及 S^2 的定义，${}^{\vee\vee}m$ 上的作用由下式给出

$$\nabla_{{}^{\vee\vee}m} = {}^{\vee\vee}\nabla_m \circ s^l_{{}^{\vee\vee}Hm} \circ H({}^{\vee}s^l_m) = \phi_m \circ \nabla_m \circ S^2_m \circ H(\phi_m^{-1}),$$

因此我们有

$$\nabla_{\beta\otimes{}^{\vee\vee}m\otimes{}^{\vee}\beta} = (\nabla_\beta \otimes \nabla_{{}^{\vee\vee}m} \otimes \nabla_{{}^{\vee}\beta})H_{3;1,m,1} = (\nabla_\beta \otimes \phi_m\nabla_m S^2_m H(\phi_m^{-1}) \otimes \nabla_{{}^{\vee}\beta})H_{3;1,m,1}.$$

根据定义，$\phi g^{\sharp}$提升为从 $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}^H}$到 $\beta \otimes {}^{\vee\vee}(-) \otimes {}^{\vee}\beta$的自然变换，当且仅当对于任意 H-模 (m, ∇_m)，我们有

$$(\phi g^{\sharp})_m \nabla_m = \nabla_{\beta\otimes{}^{\vee\vee}m\otimes{}^{\vee}\beta} H\big((\phi g^{\sharp})_m\big). \tag{6.5.1}$$

现在让我们依次简化该等式的两边。利用 $g\colon \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \Longrightarrow H$的自然性，$\nabla_m$ 是一个作用这一事实，以及$g^{\sharp}$ 在引理6.40中给出的定义，我们可以将左边改写为

$$(\phi g^{\sharp})_m \nabla_m = \phi_m \nabla_m g_m \nabla_m = \phi_m \nabla_m H(\nabla_m) g_{Hm} = \phi_m \nabla_m \mu^{(H)}_m g_{Hm}.$$

同样，我们将右侧简化为

$$\begin{aligned}
\nabla_{\beta\otimes{}^{\vee\vee}m\otimes{}^{\vee}\beta} H\big((\phi g^{\sharp})_m\big) &= (\nabla_\beta \otimes \phi_m\nabla_m S^2_m H(\phi_m^{-1}) \otimes \nabla_{{}^{\vee}\beta})H_{3;1,m,1} H\big((\phi g^{\sharp})_m\big) \\
&= (\nabla_\beta \otimes \phi_m\nabla_m S^2_m H(\phi_m^{-1}) H\big((\phi g^{\sharp})_m\big) \otimes \nabla_{{}^{\vee}\beta})H_{3;1,m,1} \\
&= (\nabla_\beta \otimes \phi_m\nabla_m S^2_m H(\nabla_m g_m) \otimes \nabla_{{}^{\vee}\beta})H_{3;1,m,1} \\
&= (\nabla_\beta \otimes \phi_m\nabla_m H(\nabla_m g_m) S^2_m \otimes \nabla_{{}^{\vee}\beta})H_{3;1,m,1} \\
&= \phi_m\nabla_m H(\nabla_m g_m)(\nabla_\beta \otimes \mathrm{id}_{Hm} \otimes \nabla_{{}^{\vee}\beta})H_{3;1,m,1} S^2_m \\
&= \phi_m\nabla_m \mu^{(H)}_m H(g_m)\, \mathrm{Ad}_{\beta,m}\, S^2_m.
\end{aligned}$$

利用 ϕ 是一个同构这一事实，方程（6.5.1）可改写为

$$\begin{aligned} & \nabla_m \mu_m^{(H)} g_{Hm} = \nabla_m \mu_m^{(H)} H(g_m) \operatorname{Ad}_{\beta,m} S_m^2 \\ \iff \quad & \nabla_m L_{g,m} = \nabla_m R_{g,m} \operatorname{Ad}_{\beta,m} S_m^2 \end{aligned}$$

根据引理6.40，上述等价于$L_{g,\,m} = R_{g,\,m} \operatorname{Ad}_{\beta,\,m} S_m^2$。我们将两边同乘以 $R_{g^{-1},\,m}$，从而完成证明。□

引理 6.41 导致将 H 与 ϕ的对合对等同于 $\mathcal{C}^H$上的某些拟枢轴结构。

命题 6.42。设 H 为 $\mathcal{C}$ 上的霍普夫单子，且 $\phi\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow {}^{\vee\vee}(-)$ 为 $\mathcal{C}$上的枢轴结构。则(H, ϕ) 具有一个对合对，当且仅当在 $\mathcal{C}^H$ 上存在一个拟枢轴结构，其底层可逆对象为一个特征。

证明。我们仿照 [BV07，命题 7.6]进行。设$(g,\ \beta) \in \mathrm{PI}_H^{\phi}$。由引理6.41，自然变换 $\phi g^\sharp$ 提升为一个自然同构

$$\rho_{\beta,x}\colon x \longrightarrow \beta \otimes {}^{\vee\vee}x \otimes {}^{\vee}\beta, \qquad \text{for all } x \in \mathcal{C}^H.$$

由于 ϕ 按定义是幺半的，且 $g^\sharp$ 凭借 g 为类群元而是幺半的——参见 [BV07，引理 3.20]——我们得到一个拟枢轴结构

$$\rho_\beta\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{C}^H} \longrightarrow \beta \otimes {}^{\vee\vee}(-) \otimes {}^{\vee}\beta.$$

另一方面，设 (β,ρ_β) 是一个拟枢轴结构，其中 $\beta \in \mathrm{Char}(H)$。由于遗忘函子 U^H 是强幺半函子，因此

$$U^H(\beta \otimes {}^{\vee\vee}(-) \otimes {}^{\vee}\beta) = U^H({}^{\vee\vee}(-)) = {}^{\vee\vee}(U^H(-)),$$

存在一个幺半自然变换

$$\phi^{-1}_{U^H x} \circ U^H(\rho_{\beta,x})\colon U^H x \longrightarrow U^H x, \qquad \text{for all } x \in \mathcal{C}^H.$$

应用 [BV07，引理 3。20] 可得到唯一的类群元 $g \in \mathrm{Gr}(H)$，满足

$$g^\sharp = \phi^{-1}_{U^H(x)} \circ U^H(\rho_{\beta,x}).$$

由于 $\phi g^\sharp = U^H(\rho_\beta)$提升到 $\mathcal{C}^H$上的拟枢轴结构 (β, ρ_β)，引理 6.41意味着 $(g,\ \beta) \in \mathrm{PI}_H^{\phi}$。 □

现在来研究 [BV07，引理 2.9] 的一个变体。

命题 6.43。 设 $C, D : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$ 是双单子 B: $\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ 上的两个余模单子。余模单子态射 f: $D \Longrightarrow C$ 与严格模函子 $F : \mathbb{M}^C \longrightarrow \mathbb{M}^D$ 之间存在双射对应，其中 $U^D F = U^C$。

证明。 如 [BV07，引理 1.7]，所示，任意函子 F: $\mathbb{M}^C \longrightarrow \mathbb{M}^D$，满足 $U^D F = U^C$，都由唯一的单子态射 f: $D \longrightarrow C$ 诱导。也就是说，F 在态射上是恒等态射，在对象上的定义为

$$F(m, \nabla_m) = (m, \nabla_m f_m), \qquad \text{for all } (m, \nabla_m) \in m^C.$$

还需证明，f 是余模态射，当且仅当 F 是严格的 $\mathscr{C}^B$-模函子。设 $(m, \nabla_m) \in m^C$ 和 $(x, \nabla_x) \in \mathscr{C}^B$。我们计算

$$\begin{aligned} F\big((m, \nabla_m) \triangleleft (x, \nabla_x)\big) &= (m \triangleleft x,\ (\nabla_m \triangleleft \nabla_x) \circ C_{\mathsf{a};m,x} \circ f_{m \triangleleft x}), \\ F(m, \nabla_m) \triangleleft (x, \nabla_x) &= (m \triangleleft x,\ (\nabla_m \triangleleft \nabla_x) \circ (f_m \triangleleft Bx) \circ D_{\mathsf{a};m,x}). \end{aligned}$$

根据 [BV07，引理 1.4]，，这些模相同当且仅当

$$C_{\mathsf{a};m,x} \circ f_{m \triangleleft x} = (f_m \triangleleft Bx) \circ D_{\mathsf{a};m,x},$$

这恰好是 f 为余模态射的条件。 □

上述结果蕴含了所需的定理 4.1 的单子版本。

定理 6.44. 设 $\mathscr{C}$ 是一个刚性幺半范畴，并假设 H: $\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ 是一个霍普夫单子，它有一个双 $D(H)$ 和一个反双 $Q(H)$。以下陈述等价：

(i) 幺半单位 $1 \in \mathscr{C}$ 提升为 $Q(H)$ 上的一个模；*(ii)* 存在一个余模单子态射 $D(H) \cong Q(H)$；以及 *(iii)* 存在一个单子态射 $Q(H) \cong D(H)$。

此外，若 $\mathscr{C}$ 具有枢轴结构 ϕ 且为主轴范畴，则上述任一陈述成立，当且仅当 H 和 ϕ 都允许一个对合对。

证明。 (i) $\Longrightarrow$ (ii)：假设 $\omega \in \mathsf{Q}(\mathscr{C}^H)$ 具有 $U^{Q(H)}\omega = 1$。如方程 (4.2.1) 所示，这诱导出一个模范畴函子

$$\omega \otimes - : \mathscr{C}^{D(H)} \longrightarrow \mathscr{C}^{Q(H)}.$$

由于 $U^{Q(H)}\omega = 1 \in \mathcal{C}$，我们可以应用命题 6.43，并得出 $Q(H)$和 $D(H)$作为余模单子是同构的。

由此立即可得 (ii) 推出 (iii)；接下来证明 (iii) $\Longrightarrow$ (i)：考虑一个单子的同构 g: $Q(H) \Longrightarrow D(H)$。它导出一个函子 G: $\mathcal{C}^{D(H)} \longrightarrow \mathcal{C}^{Q(H)}$，其在对象上的定义如下

$$G(m, \nabla_m) = (m, \nabla_m g_m), \qquad \text{for all } (m, \nabla_m) \in \mathcal{C}^{D(H)}.$$

我们将 G与 $E^{Q(H)}$复合：$\mathcal{C}^{Q(H)} \longrightarrow \mathsf{Q}(\mathcal{C}^H)$——比较函子在公式（6.2.3）中定义的逆元——并注意到存在一个对象

$$1^{(Q)} := E^{Q(H)}G(1) \in \mathsf{Q}(\mathcal{C}^H),$$

其底层对象是 $\mathcal{C}$的单位。现在令 $(\mathcal{C}, \phi)$ 为主轴结构。根据引理 4.22，将 $1 \in \mathcal{C}$ 提升到反中心的对偶 $\mathsf{Q}(\mathcal{C}^H)$ 与拟枢轴结构 (β, ρ_β)一一对应，其中 $\beta \in \mathrm{Char}(H)$。根据命题 6.42，存在这样的拟枢轴结构，当且仅当存在一个关于 H 和 ϕ的对合对。□

作为一个推论，我们可以通过中心单子与反中心单子之间的单子同构来判定一个范畴是否具有主轴结构。对于范畴 $\mathcal{C}$，回顾其中心霍普夫单子的定义6.15 以及其反中心余模单子的定义6.26。

推论 6.45。设 $\mathcal{C}$ 是一个刚性幺半范畴。若 $\mathcal{C}$ 具有中心霍普夫单子$\mathfrak{D}(\mathcal{C})$ 和反中心余模单子$\mathfrak{Q}(\mathcal{C})$，则它具有主轴结构，当且仅当$\mathfrak{D}(\mathcal{C}) \cong \mathfrak{Q}(\mathcal{C})$作为单子同构。

证明。我们将恒等态射 $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$: $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ 视为一个霍普夫单子。其 Drinfeld 双和反 Drinfeld 双分别为 $D(\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) = \mathsf{D}(\mathcal{C}) \rtimes \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ 和 $Q(\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) = \mathsf{Q}(\mathcal{C}) \rtimes \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$。由此可得 $D(\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) = \mathsf{D}(\mathcal{C})$，同理 $Q(\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) = \mathsf{Q}(\mathcal{C})$。证明由定理 6.44 得出。□

攀登高峰的奋斗本身就足以填满人的心灵。人必须想象西西弗斯是幸福的。

阿尔贝·加缪；《西西弗神话》

DU OI DAL R-矩阵

7

双幺半范畴的提出源于 [AM10]，其名称为*2-*幺半范畴，旨在研究双松幺半函子以及在线性物种上的各种构造。它们将编织幺半范畴和 [BFSV03] 中的二重幺半范畴加以推广：前者考虑由不可逆交换律联系起来的两个幺半结构，后者则假设两个张量积共享同一个单位。此后，双幺半范畴被用于研究高维霍普夫理论 [BCZ13；BS13；AHLF18；LFV20；Böh21]，，并且也在数学的其他诸多领域中得到了应用，[GLF16；SS22；Rom24；Tor24]。

本章节旨在推广关于双单子上的 R-矩阵的一个重构型结果，[BV07，命题 8。5],该结果又进一步推广了双代数的经典 R-矩阵理论。前者还有一个额外优点，即不要求基范畴是辫编幺半基范畴，因为与双代数不同，双单子可以定义在任意幺半范畴上。

定理 7.21. 设 $\mathfrak{D}$ 是一个具有幺半结构 $\circ$ 和 $\bullet$的范畴，并且 T 是 $\mathfrak{D}$ 上的一个单子，它具有一个 $\circ$-*oplax* 幺半结构和一个 $\bullet$-*oplax* 幺半结构。那么，T 上的拟三角结构与 $\mathfrak{D}^T$上的双幺半结构之间存在双射。

这一结果可视为 [AM10 第 7], 节中双余幺半单子的推广，类似于双代数的 R-矩阵对余交换双代数的推广。

在第 7.3节中，我们从这一角度研究正规双幺半范畴与线性分配范畴之间的关系。我们将非平面线性分配范畴 L 视为预双幺半范畴的一种类比，其意义在于，附加结构在幺半情形下会变得平凡，参见例 7.27。为 L 赋予平面结构后，我们可以按照 [Pas12]的意义，将双余幺半单子与线性分配单子联系起来。

7.1 双幺半范畴

我们将大致沿用 [BM12的术语（定义 3], 中引入了术语双幺半范畴），并采用 [BCZ13]的记号。

定义 7.1 ([AM10，定义 6.1])。一个双幺半范畴是一个五元组$(\mathfrak{D}, \circ, \perp, \bullet, 1)$，由以下数据组成：

- 幺半范畴 $(\mathfrak{D}, \circ, \perp)$ 和 $(\mathfrak{D}, \bullet, 1)$；
- 一个未必可逆的自然变换

$$\zeta\colon (x \bullet y) \circ (a \bullet b) \Longrightarrow (x \circ a) \bullet (y \circ b),$$

  称为中间交换律；
- 三个态射

$$\nu\colon \perp \longrightarrow \perp \bullet \perp, \qquad \varpi\colon 1 \circ 1 \longrightarrow 1, \qquad \iota\colon \perp \longrightarrow 1;$$

这些数据必须满足以下关系：

- $(1, \varpi, \iota)$ 是 $(\mathfrak{D}, \circ, \perp)$ 中的幺半群；
- $(\perp, \nu, \iota)$ 是 $(\mathfrak{D}, \bullet, 1)$ 中的余幺半群；
- 以下图表均交换，从而见证结合律：

(7.1.1)

$$\begin{array}{ccc}
((x \bullet y) \circ (a \bullet b)) \circ (c \bullet d) & \xrightarrow{\alpha} & (x \bullet y) \circ ((a \bullet b) \circ (c \bullet d)) \\
\downarrow{\scriptstyle \zeta \circ \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \circ \zeta} \\
((x \circ a) \bullet (y \circ b)) \circ (c \bullet d) & & (x \bullet y) \circ ((a \circ c) \bullet (b \circ d)) \\
\downarrow{\scriptstyle \zeta} & & \downarrow{\scriptstyle \zeta} \\
((x \circ a) \circ c) \bullet ((y \circ b) \circ d) & \xrightarrow[\alpha \bullet \alpha]{} & (x \circ (a \circ c)) \bullet (y \circ (b \circ d))
\end{array}$$

(7.1.2)

$$\begin{array}{ccc}
((x \bullet a) \bullet c) \circ ((y \bullet b) \bullet d) & \xrightarrow{\alpha \circ \alpha} & (x \bullet (a \bullet c)) \circ (y \bullet (b \bullet d)) \\
\downarrow{\scriptstyle \zeta} & & \downarrow{\scriptstyle \zeta} \\
((x \bullet a) \circ (y \bullet b)) \bullet (c \circ d) & & (x \circ y) \bullet ((a \bullet c) \circ (b \bullet d)) \\
\downarrow{\scriptstyle \zeta \bullet \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \bullet \zeta} \\
((x \circ y) \bullet (a \circ b)) \bullet (c \circ d) & \xrightarrow[\alpha]{} & (x \circ y) \bullet ((a \circ b) \bullet (c \circ d))
\end{array}$$

- 以下图表均交换，从而见证单位性：

$$\begin{array}{ccc} \bot\circ(a\bullet b) & \xrightarrow{\nu\circ\mathrm{id}} & (\bot\circ\bot)\circ(a\bullet b) \\ {\scriptstyle\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\zeta} \\ a\bullet b & \xrightarrow[\lambda^{-1}\bullet\lambda^{-1}]{} & (\bot\circ a)\bullet(\bot\circ b) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (a\bullet b)\circ\bot & \xrightarrow{\mathrm{id}\circ\nu} & (a\bullet b)\circ(\bot\bullet\bot) \\ {\scriptstyle\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\zeta} \\ a\bullet b & \xrightarrow[\lambda^{-1}\bullet\lambda^{-1}]{} & (a\circ\bot)\bullet(b\circ\bot) \end{array} \tag{7.1.3}$$

$$\begin{array}{ccc} (1\bullet a)\circ(1\bullet b) & \xrightarrow{\zeta} & (1\circ 1)\bullet(a\circ b) \\ {\scriptstyle\lambda\circ\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\omega\bullet\mathrm{id}} \\ a\circ b & \xrightarrow[\lambda]{} & 1\bullet(a\circ b) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (a\bullet 1)\circ(b\bullet 1) & \xrightarrow{\zeta} & (a\circ b)\bullet(1\circ 1) \\ {\scriptstyle\lambda\circ\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{id}\bullet\omega} \\ a\circ b & \xrightarrow[\lambda]{} & (a\circ b)\bullet 1 \end{array}$$

为略去记号起见，我们常将 $\mathcal{D}$ 称为双幺半范畴，而省略其余数据。

定义 7.2. 双幺半范畴 $\mathcal{D}$ 称为正规，如果 $\bot\cong 1$。

请注意，在定义 $\iota\colon \bot\longrightarrow 1$ 中明确要求存在 7.1并非严格必要，因为它可以从其他指定数据推导出来：

$$\iota\colon \bot \xrightarrow{\lambda^{-\bot}} \bot\circ\bot \xrightarrow{\lambda^{-1}\circ\rho^{-1}} (1\bullet\bot)\circ(\bot\bullet 1) \xrightarrow{\zeta} (1\circ\bot)\bullet(\bot\circ 1) \xrightarrow{\lambda^{\bot}\bullet\rho^{\bot}} 1\bullet 1 \xrightarrow{\lambda^{1}} 1.$$

例 7.3. 根据 [AM10，命题 6。10]，一个辫子幺半范畴$(\mathcal{C},\ \otimes,\ 1,\ \sigma)$ 给出一个双幺半范畴 $(\mathcal{C},\ \otimes,\ 1,\ \otimes,\ 1)$，其结构态射为

$$\zeta_{a,b,c,d}=(a\otimes b)\otimes(c\otimes d)\ \cong a\otimes(b\otimes c)\otimes d \xrightarrow{a\otimes\sigma_{b,c}\otimes d} a\otimes(c\otimes b)\otimes d\cong(a\otimes c)\otimes(b\otimes d),$$

特别要注意我们有 $\rho_1=\lambda_1$。

$$\omega:=1\otimes 1\xrightarrow{\lambda}1,\qquad \nu:=1\xrightarrow{\lambda^{-1}}1\otimes 1,\qquad \iota:=1\xrightarrow{\mathrm{id}_1}1.$$

例7.4. 例7.3 的逆命题同样成立。若 $\mathcal{D}$ 是一个双幺半范畴，使得交换律与结构态射均为同构，则 [AM10，命题6.11] 在$(\mathcal{D},\ \circ,\ \bot)$ 与$(\mathcal{D},\ \bullet,\ 1)$上给出一个编织，使得它们作为编织幺半范畴彼此同构，并且交换律由该编织产生。

然而请注意，单幺范畴上存在非平凡的双幺半结构$(\mathcal{C},\ \otimes,\ 1)$。回顾例 ${}^{H}_{H}\mathcal{YD}$ 2.54 中（左-左）Yetter–Drinfeld 模范畴的定义。如果霍普夫代数 H 不具有可逆反极，那么 ${}^{H}_{H}\mathcal{YD}$ 就是松弛编织的——Yetter–Drinfeld 编织是满足辫子方程的不可逆自然变换。由此可在$(\mathcal{C},\ \otimes,\ 1,\ \otimes,\ 1)$ 上得到一种非辫子的双幺半结构。

双幺半范畴有多种等价定义。例如，可以将其定义为幺半 2-范畴中的伪幺半群，该 2-范畴由幺半范畴、反松幺半函子和反松幺半自然变换构成，参见 [AM10，命题 6。72] 以及 [GLF16，定义 1]。特别地，这意味着 $\bullet$ 是一个松幺半函子，而$\circ$是一个反松幺半函子；[16] 来自

利用这一刻画，可以得到一个相干性结果，参见 [Lew72], [AM10第 6 节。2], 以及 [MP22定理 5。9]。

[16] 这可推广到正规双幺半范畴，其中 $\circ\colon \mathfrak{D}\times\mathfrak{D}\longrightarrow\mathfrak{D}$ 和 $\perp\colon \mathbb{1}\longrightarrow\mathfrak{D}$是正规的反松幺半函子，其中 $\mathbb{1}$ 是终对象范畴。

命题 7.5。双幺半范畴中的任何 ETC 图表都交换。

粗略地说，一个ETC 图表是一个形式图表 $F\colon \mathcal{J}\longrightarrow\mathfrak{D}$ 按照 [MP22第 20], 页的定义，它只由双幺半范畴的结构态射组成，并且对所有 $j\in\mathcal{J}$ 对象 Fj，该对象都不与两个单位中的任何一个同构。关于精确定义以及命题 [MP22定义 5.8 和定理 59] 的证明，参见7.5。形式图表含有平行态射时的一个反例见 $1\bullet 1\rightrightarrows 1$ 于 [Rom23命题 3.1.6 和例 3.1。7]。

注 7.6. 张量积与单位作为正规幺半函子，正规双幺半范畴具有编织幺半范畴中众所周知的相干性结果的类似结论 [JS93]。也就是说，仅由正规双幺半群范畴中的结构态射构成的任何形式图表都交换，见 [MP22，定理 5。18]。

7.1.1 双余幺单子

定义 7.7（[AM10，定义 6.25]）。设 $\mathfrak{D}$ 是一个双幺半范畴。$\mathfrak{D}$ 中的双幺半子是一个五元组 $(B,\mu,\eta,\Delta,\varepsilon)$，由 $(\mathfrak{D},\circ,\perp)$ 中的幺半群 (B,μ,η) 和 $(\mathfrak{D},\bullet,1)$ 中的余幺半群 (B,Δ,ε) 组成，并满足以下相容条件：

$$\begin{array}{ccccc} B\circ B & \xrightarrow{\mu} & B & \xrightarrow{\Delta} & B\bullet B \\ {\scriptstyle \Delta\circ\Delta}\downarrow & & & & \uparrow{\scriptstyle \mu\bullet\mu} \\ (B\bullet B)\circ(B\bullet B) & & \xrightarrow[\zeta]{} & & (B\circ B)\bullet(B\circ B) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} B\circ B & \xrightarrow{\varepsilon\circ\varepsilon} & 1\circ 1 \\ {\scriptstyle \mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \omega} \\ B & \xrightarrow[\varepsilon]{} & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \perp & \xrightarrow{\eta} & B \\ {\scriptstyle \nu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} \\ \perp\bullet\perp & \xrightarrow[\eta\bullet\eta]{} & B\bullet B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \perp & & \\ {\scriptstyle \eta}\downarrow & \searrow^{\iota} & \\ B & \xrightarrow[\varepsilon]{} & 1 \end{array}$$

命题 7.8 ([BS13])。 对于一个幺半群 b，在双幺半范畴 $(\mathcal{D},\circ,\bot,\bullet,1)$中，上的双幺半子结构与单子 $b\circ -$ 在 $(\mathcal{D},\bullet,1)$上的双单子结构之间存在双射对应。

例 7.9. 辫子幺半范畴中的双幺半子 $\mathcal{C}$ 与双幺半范畴中的双幺半子相同 $\mathcal{C}$ 见例7.3。由此可得，对象 $b\in\mathcal{C}$ 是双幺半子，当且仅当其诱导的单子 $b\otimes -$ 是 $\mathcal{C}$上的双单子。

例 7.10. 设 $\Bbbk$ 是一个交换环，且 A 是一个交换 $\Bbbk$-代数。在 [AM10，例 6。18]中证明了 A-双模范畴是双幺半范畴，其两个张量积定义如下：

$$M\bullet N:=M\otimes_A N:={}^{M\otimes_k N}\!/_{\langle ma\otimes n-m\otimes an\rangle},$$

and

$$M\circ N:=M\otimes_{A\otimes_k A}N:={}^{M\otimes_k N}\!/_{\langle amb\otimes n-m\otimes anb\rangle},$$

对所有 $a\in A$，$m\in M$、以及 $n\in N$。此外，根据 [AM10，例 6。44]可知，该双幺半范畴中的双幺半子是 Ravenel 意义下的 A-双代数胚，参见 [Rav86，定义 A1.1。1]。在此情形下，命题7.8给出了 [Szl03，定理 5.1 和 5。4]的一个特例。

定义 7.11（[AHLF18，第 7] 节）。范畴 $\mathcal{D}$ 上的双反幺半单子由范畴 $\mathcal{D}$ 上的单子（T，μ，η），以及分别定义在（$\mathcal{D}$，$\bullet$，1）上的双单子结构（T，$B_2^\bullet$，$B_0^\bullet$）和（$\mathcal{D}$，$\circ$，$\bot$）上的双单子结构（T，B_2°，B_0°）组成，并满足以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc}
T(1\circ 1) & \xrightarrow{T\varpi} & T1 \\
{\scriptstyle T^\circ_{2,1,1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T^\bullet_0} \\
T1\circ T1 & & \\
{\scriptstyle T^\bullet_0\circ T^\bullet_0}\downarrow & & \\
1\circ 1 & \xrightarrow[\varpi]{} & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
T\bot & \xrightarrow{T\nu} & T(\bot\bullet\bot) \\
{\scriptstyle T^\circ_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T^\bullet_{2,\bot,\bot}} \\
\bot & & T\bot\bullet T\bot \\
 & & \downarrow{\scriptstyle T^\circ_0\bullet T^\circ_0} \\
 & \xrightarrow{\nu} & \bot\bullet\bot
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
T\bot & \xrightarrow{T\iota} & T1 \\
{\scriptstyle T^\circ_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T^\bullet_0} \\
\bot & \xrightarrow[\iota]{} & 1
\end{array}
\tag{7.1.4}$$

$$\begin{array}{ccc}
T((a\bullet b)\circ(c\bullet d)) & \xrightarrow{T\zeta_{a,b,c,d}} & T((a\circ c)\bullet(b\circ d)) \\
{\scriptstyle T^\circ_{2,a\bullet b,c\bullet d}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T^\bullet_{2,a\circ c,b\circ d}} \\
T(a\bullet b)\circ T(c\bullet d) & & T(a\circ c)\bullet T(b\circ d) \\
{\scriptstyle T^\bullet_{2,a,b}\circ T^\bullet_{2,c,d}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T^\circ_{2,a,c}\bullet T^\circ_{2,b,d}} \\
(Ta\bullet Tb)\circ(Tc\bullet Td) & \xrightarrow[\zeta_{Ta,Tb,Tc,Td}]{} & (Ta\circ Tc)\bullet(Tb\circ Td)
\end{array}
\tag{7.1.5}$$

例 7.12。 设 $(\mathscr{C}, \otimes, 1)$ 是一个带有编织 σ的辫子幺半范畴，将其视为例 7.3中所述的双幺半范畴。在 B 上的双单子 $(\mathscr{C}, \otimes, 1)$ 若还满足等式 $B_2 \circ B\sigma = \sigma \circ B_2$，则是 $\mathscr{C}$上的双反幺半单子，其中两个弱幺半结构相同，而图表（7.1.4）的交换性意味着 $\mathscr{C}$的幺半结构态射提升到 B-代数范畴；参见命题 5.9。

例 7.13. 对于 $(\mathrm{Vect}, \otimes, \Bbbk)$ 中的双代数 B，自函子 $B \otimes -$ 是 $(\mathrm{Vect}, \otimes, \Bbbk, \otimes, \Bbbk)$ 中的双反幺半单子。对于 U、V、W、$X \in \mathrm{Vect}$，以及 $b \in B$、$u \in U$、$v \in V$、$w \in W$和 $x \in X$，图表（7.1.5）简化为

$$b_{(1)} \otimes u \otimes b_{(3)} \otimes w \otimes b_{(2)} \otimes v \otimes b_{(4)} \otimes x = b_{(1)} \otimes u \otimes b_{(2)} \otimes w \otimes b_{(3)} \otimes v \otimes b_{(4)} \otimes x,$$

这等价于 $b_{(1)} \otimes b_{(2)} = b_{(2)} \otimes b_{(1)}$；即 B 必须是余交换的 .

与双代数和双单子的 R-矩阵情形一样，要求双幺半范畴 $\mathfrak{D}$ 的交换态射提升到模范畴，是一个相当强的条件。

命题 7.14 ([AHLF18，定理 7.2])。 设 $\mathfrak{D}$ 是一个双幺半范畴，且T： $\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ 是一个单子。那么， $\mathfrak{D}$ 的结构态射和交换律提升到 $\mathfrak{D}^T$ 当且仅当 T 是一个双反幺半单子。

特别地，若 T 是一个双反幺半单子，则 $\mathfrak{D}^T$ 是一个双幺半范畴。

7.2 r-矩阵

不同于命题 7.14的情形，我们更感兴趣的是研究可以在 T 上附加哪些额外结构，使得 $\mathfrak{D}^T$成为双幺半范畴，而其交换态射则是通过对 $\mathfrak{D}$的交换态射进行“扭转”得到的。这推广了双代数和双单子的所谓R-矩阵（参见Kas98，第II] 部分，以及 [BV07，第 8 节。2]。

命题 7.15 ([BV07，定理 8.5])。 设 B 是幺半范畴 $\mathscr{C}$上的一个双单子。在 $\mathscr{C}^T$ 上的编织与其上的 R-矩阵一一对应 B。

双单子的 R-矩阵有一个关键特点：它们可以定义在不一定是编织幺半范畴的范畴上。我们对双幺半 R-矩阵的定义就体现了这一特点。

定义 7.16。 若范畴 $\mathfrak{D}$ 配备了两个幺半结构 $(\circ, \perp)$ 和 $(\bullet, 1)$，则称其为预双幺半。

定义 7.17。 设 $\mathfrak{D}$ 为一个预双幺半范畴。若 $\mathfrak{D}$ 上的单子 T 配备了分别基于 $(\mathfrak{D}, \circ, \bot)$ 和 $(\mathfrak{D}, \bullet, \mathbf{1})$ 的两个双单子结构，则称其为 $\mathfrak{D}$上的分别反幺半单子。

定义 7.18. 设 $\mathfrak{D}$ 是一个预双幺半范畴，T 是作用于 $\mathfrak{D}$ 上的分别余幺半单子。T 上的一个 *R*-矩阵 由一个自然变换组成

$$R \coloneqq \{ R_{a,b,c,d} \colon (a \bullet b) \circ (c \bullet d) \Longrightarrow (Ta \bullet Tc) \circ (Tb \bullet Td) \}_{a,b,c,d \in \mathfrak{D}},$$

以及 T-代数的态射

$$\nu \colon (\bot, T_0^\circ) \longrightarrow (\bot, T_0^\circ) \bullet (\bot, T_0^\circ), \qquad \varpi \colon (\mathbf{1}, T_0^\bullet) \circ (\mathbf{1}, T_0^\bullet) \longrightarrow (\mathbf{1}, T_0^\bullet),$$
$$\iota \colon (\bot, T_0^\circ) \longrightarrow (\mathbf{1}, T_0^\bullet),$$

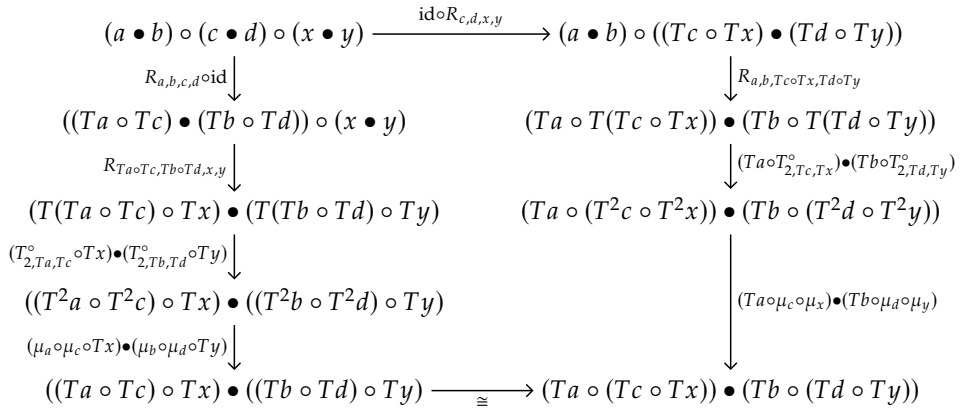
使得 $(\mathbf{1}, \varpi, \iota)$ 是 $(\mathfrak{D}^T, \circ, \bot)$ 中的幺半群；元组 $(\bot, \nu, \iota)$ 是 $(\mathfrak{D}^T, \bullet, \mathbf{1})$ 中的余幺半群；并且对所有 $a, b, c, d, x, y \in \mathfrak{D}$，下列图表交换：

$$\begin{array}{ccc}
\bot \circ (a \bullet b) & \xrightarrow{\nu \circ \mathrm{id}} & (\bot \bullet \bot) \circ (a \bullet b) \\
{\scriptstyle\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle R} \\
a \bullet b & & (T\bot \circ Ta) \bullet (T\bot \circ Tb) \\
 & {\scriptstyle\lambda^{-1} \bullet \lambda^{-1}}\searrow & \downarrow{\scriptstyle (T_0^\circ \circ \alpha) \bullet (T_0^\circ \circ \beta)} \\
 & & (\bot \circ a) \bullet (\bot \circ b)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
(a \bullet b) \circ \bot & \xrightarrow{\mathrm{id} \circ \nu} & (a \bullet b) \circ (\bot \bullet \bot) \\
{\scriptstyle\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle R} \\
a \bullet b & & (Ta \circ T\bot) \bullet (Tb \circ T\bot) \\
 & {\scriptstyle\lambda^{-1} \bullet \lambda^{-1}}\searrow & \downarrow{\scriptstyle (\alpha \circ T_0^\circ) \bullet (\beta \circ T_0^\circ)} \\
 & & (a \circ \bot) \bullet (b \circ \bot)
\end{array}
\tag{7.2.1}$$

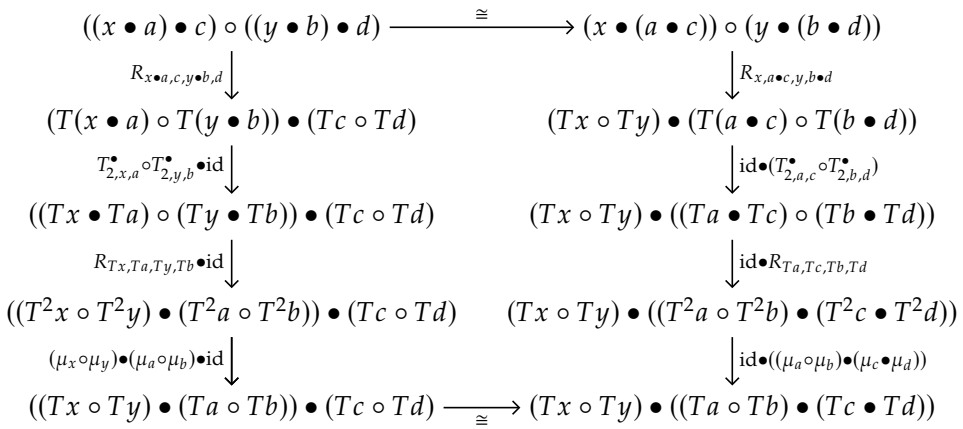
$$\begin{array}{ccc}
(\mathbf{1} \bullet a) \circ (\mathbf{1} \bullet b) & \xrightarrow{R} & (T\mathbf{1} \circ T\mathbf{1}) \bullet (Ta \circ Tb) \\
{\scriptstyle\lambda \circ \lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (T_0^\bullet \circ T_0^\bullet) \bullet (\alpha \circ \beta)} \\
a \circ b & & (\mathbf{1} \circ \mathbf{1}) \bullet (a \circ b) \\
 & {\scriptstyle\lambda}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \varpi \bullet \mathrm{id}} \\
 & & \mathbf{1} \bullet (a \circ b)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
(a \bullet \mathbf{1}) \circ (b \bullet \mathbf{1}) & \xrightarrow{R} & (Ta \circ Tb) \bullet (T\mathbf{1} \circ T\mathbf{1}) \\
{\scriptstyle\lambda \circ \lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\alpha \circ \beta) \bullet (T_0^\bullet \circ T_0^\bullet)} \\
a \circ b & & (a \circ b) \bullet (\mathbf{1} \circ \mathbf{1}) \\
 & {\scriptstyle\lambda}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \bullet \varpi} \\
 & & (a \circ b) \bullet \mathbf{1}
\end{array}
\tag{7.2.2}$$

$$\begin{array}{ccccc}
T((a \bullet b) \circ (c \bullet d)) & \xrightarrow{TR_{a,b,c,d}} & T((Ta \circ Tc) \bullet (Tb \circ Td)) & \xrightarrow{T^\bullet_{2,Ta \circ Tc, Tb \circ Td}} & T(Ta \circ Tc) \bullet T(Tb \circ Td) \\
{\scriptstyle T^\circ_{2,a \bullet b, c \bullet d}}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle T^\circ_{2,Ta,Tc} \bullet T^\circ_{2,Tb,Td}} \\
T(a \bullet b) \circ T(c \bullet d) & & & & (T^2 a \circ T^2 c) \bullet (T^2 b \circ T^2 d) \\
{\scriptstyle T^\bullet_{2,a,b} \circ T^\bullet_{2,c,d}}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle (\mu_a \circ \mu_c) \bullet (\mu_b \circ \mu_d)} \\
(Ta \bullet Tb) \circ (Tc \bullet Td) & & \xrightarrow[R_{Ta,Tb,Tc,Td}]{} & & (Ta \circ Tc) \bullet (Tb \circ Td)
\end{array}
\tag{7.2.3}$$

(7.2.4)



(7.2.5)



A *quasitriangular* opmonoidal monad is one equipped with an R-matrix.

例 7.19. 设 $(\mathscr{C}, \otimes, 1)$ 为一个严格幺半范畴，且 T 为 $\mathscr{C}$上的一个双单子。设 R 为 T 上在 [BV07第 8 节意义下的一个 R-矩阵。2], 并定义

$$S := \{\eta_a \otimes R_{b,c} \otimes \eta_d \colon a \otimes b \otimes c \otimes d \longrightarrow Ta \otimes Tc \otimes Tb \otimes Td\}_{a,b,c,d \in \mathscr{C}}.$$

于是， S 连同 ν、 ω 以及为恒等态射的 ι ，是 T 上的一个 R-矩阵，而 T 被视为预双幺半范畴 $\mathscr{C}$ 上的分别反幺半单子。

图表（7.2.1）与（7.2.2）可交换，因为 $(\beta \otimes \alpha)\, R_{a,\,b}$ 依 [BV07定理 8.5]是一个编织。图表（7.2.3）由图 7.1得出，其中 T_3 的定义如注 2.35。其余图表可类似地证明。

由 [BV07例 8.4] ，我们还可得到：双代数 B 上的每一个 R-矩阵都给出 $B \otimes -$ 上在定义 7.18意义下的一个 R-矩阵。

注 7.20. 请注意，例7.19 的逆命题不一定成立。设 $\mathscr{C}$ 是一个被视为预双幺半范畴的幺半范畴，并假设T 是 $\mathscr{C}$ 上的一个分别反幺半单子，其中两个 oplax 幺半

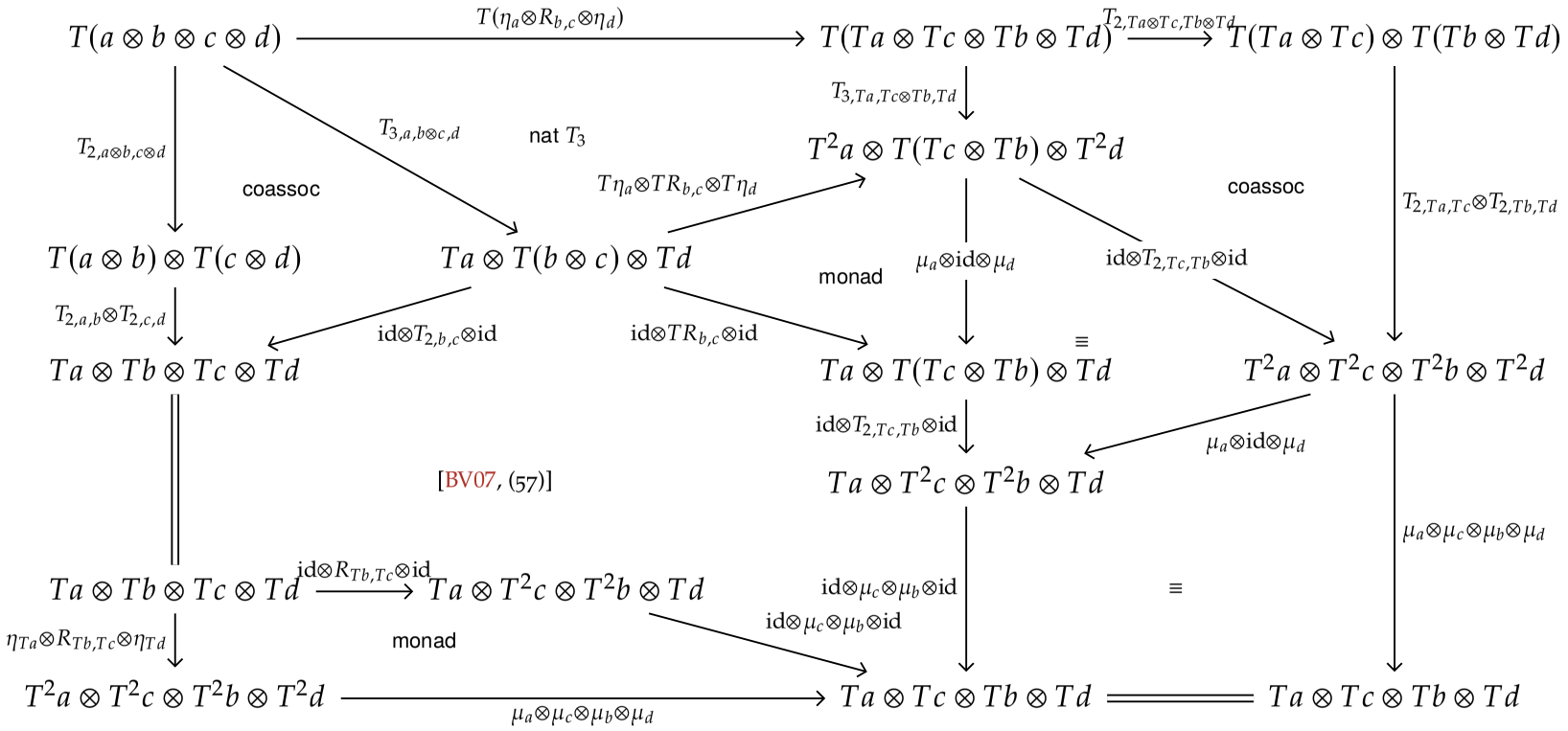


Figure 7.1: Verification that S satisfies Diagram (7.2.3).

结构相同。因此， T 上的 R-矩阵不一定会得到符合 [BV07第 8 节2], 意义的 R-矩阵，因为我们不要求 R 是 $\star$-可逆的[17], ；根据 [BV07定理 85] ，它与……一一对应 $\mathscr{C}^T$ 上的编织可逆。

[17] 自然变换R: $\otimes \Longrightarrow T \otimes_{\mathrm{op}} T$ 称为 $\star$-可逆的，如果存在一个“逆”自然变换 R^{-1}: $\otimes_{\mathrm{op}} \Longrightarrow T \otimes T$，使得 $(\mu \otimes \mu) \circ R^{-1} \circ R$ 等于 $\eta \otimes \eta$，反方向也同样如此。

根据下文的定理7.21 ，定义7.18 中的 R-矩阵与 $\mathscr{C}^T$上的双幺半结构相对应。由于 $\mathscr{C}^T$ 上的两个张量积一致，按照 [AM10第 6 节3], 中的类似论证，这迫使交换律来自一个松弛辫子。然而，没有先验理由认为这个态射可逆，参见例7.4。

7.2.1 从 R-矩阵到双幺半结构，再回到 R-矩阵

本节包含本章节的主要结果，可视为 [BV07中的定理 8 的类比5], ，也是对 [AHLF18中的定理 72]的非余交换对应结果。

定理 7.21。设 $\mathscr{D}$ 是一个预双幺半范畴，并假设 T 是 $\mathscr{D}$ 上的一个分别反幺半单子。对于所有 T-代数 (a, α)、(b, β)、(c, γ) 和 (d, δ)， T 上的一个准三角结构给出一个交换律

$$\xi := ((\alpha \circ \gamma) \bullet (\beta \circ \delta))R_{a,b,c,d} \colon (a \bullet b) \circ (c \bullet d) \longrightarrow (a \circ c) \bullet (b \circ d)$$

在 $\mathscr{C}^T$ 上。反过来， $\mathscr{D}^T$ 上的一个交换律 ξ 产生一个 R-矩阵

$$R := \xi_{Ta,Tb,Tc,Td}((\eta_a \bullet \eta_b) \circ (\eta_c \bullet \eta_d)) \colon (a \bullet b) \circ (c \bullet d) \longrightarrow (Ta \circ Tc) \bullet (Tb \circ Td)$$

在 T 上。这些构造互为逆元。

我们将定理7.21 的证明分为相应的几个方向。得到这些结果后，其余证明便显而易见。

证明。 结合命题7.22和 7.23 下文只需证明这些构造互为逆元。先计算一个方向：

$$\begin{aligned}
&((\alpha \circ \gamma) \bullet (\beta \circ \delta))\xi_{Ta,Tb,Tc,Td}((\eta_a \bullet \eta_b) \circ (\eta_c \bullet \eta_d)) \\
&\quad = ((\alpha \circ \gamma) \bullet (\beta \circ \delta))((\eta_a \circ \eta_c) \bullet (\eta_b \circ \eta_d))\xi_{a,b,c,d} && \xi\text{的自然性} \\
&\quad = ((\alpha\eta_a \circ \gamma\eta_c) \bullet (\beta\eta_b \circ \delta\eta_d))\xi_{a,b,c,d} && \bullet \text{和} \circ \text{的函子性} \\
&\quad = \xi_{a,b,c,d} && T\text{的单子性;}
\end{aligned}$$

反过来，我们有

$$\begin{aligned}
&((\mu_a \circ \mu_c) \bullet (\mu_b \circ \mu_d))R_{Ta,Tb,Tc,Td}((\eta_a \bullet \eta_b) \circ (\eta_c \bullet \eta_d)) \\
&\qquad = ((\mu_a \circ \mu_c) \bullet (\mu_b \circ \mu_d))((\eta_{Ta} \circ \eta_{Tc}) \bullet (\eta_{Tb} \circ \eta_{Td}))R_{a,b,c,d} \\
&\qquad = R_{a,b,c,d}.
\end{aligned}$$

□

命题 7.22。 设 $\mathcal{D}$ 是一个预双幺半范畴，且 T 是 $\mathcal{D}$ 上一个分别余幺半的拟三角单子，其 R-矩阵为 (R, ν, ϖ, ι)。那么 $\mathcal{C}^T$ 是一个双幺半范畴，其结构态射为 ν、 ϖ 和 ι，交换律为

$$\xi := ((\alpha \circ \gamma) \bullet (\beta \circ \delta))R_{a,b,c,d} \colon (a \bullet b) \circ (c \bullet d) \longrightarrow (a \circ c) \bullet (b \circ d)$$

对所有 （a、 α）、 （b、 β）、 （c、 γ）以及（d、 δ）$\in \mathcal{D}^T$。

证明。 $\xi \in \mathcal{D}^T((a \bullet b) \circ (c \bullet d), (a \circ c) \bullet (b \circ d))$这一断言——也就是说，$\xi$ 是 T-代数的态射——由图 (7.2.3) 得出，如图 7.2 所示。图 (7.1.1) 则由图 7.3 的交换性得出，其中为简洁起见，我们省略了相应的结合子；参见命题 7.5。图 (7.1.2) 的证明类似。最后，图 (7.2.1) 和 (7.2.2) 立即推出图 (7.1.3)。□

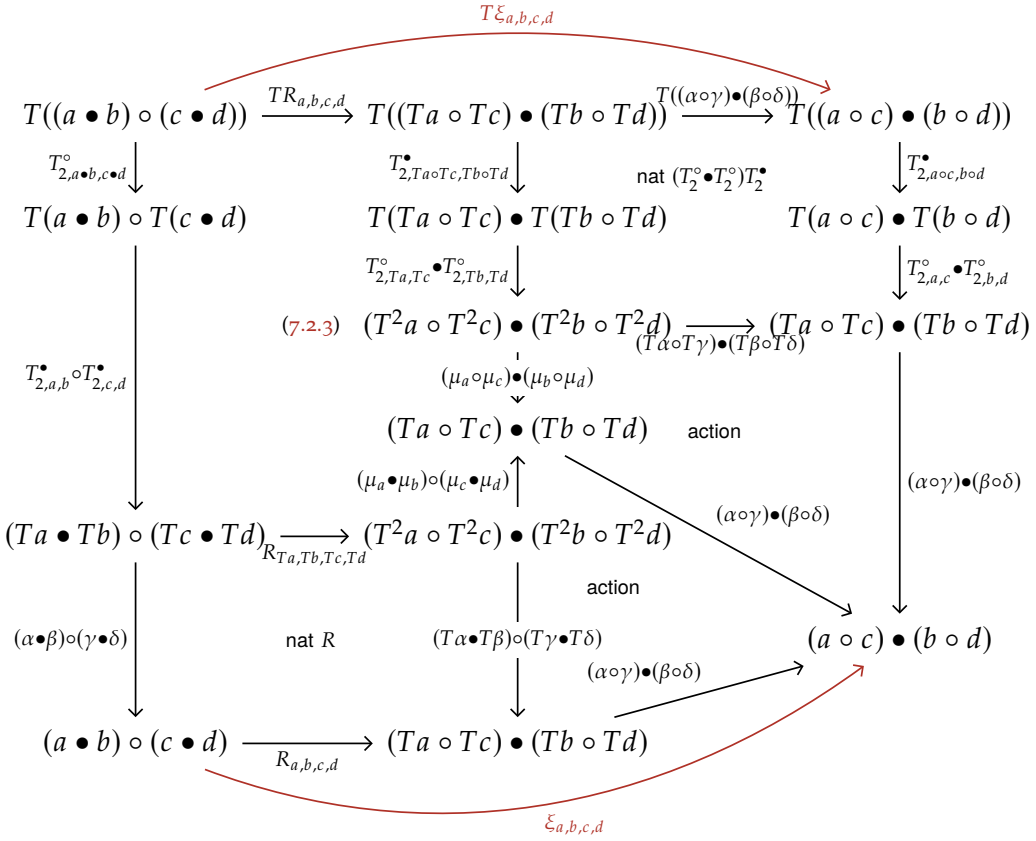
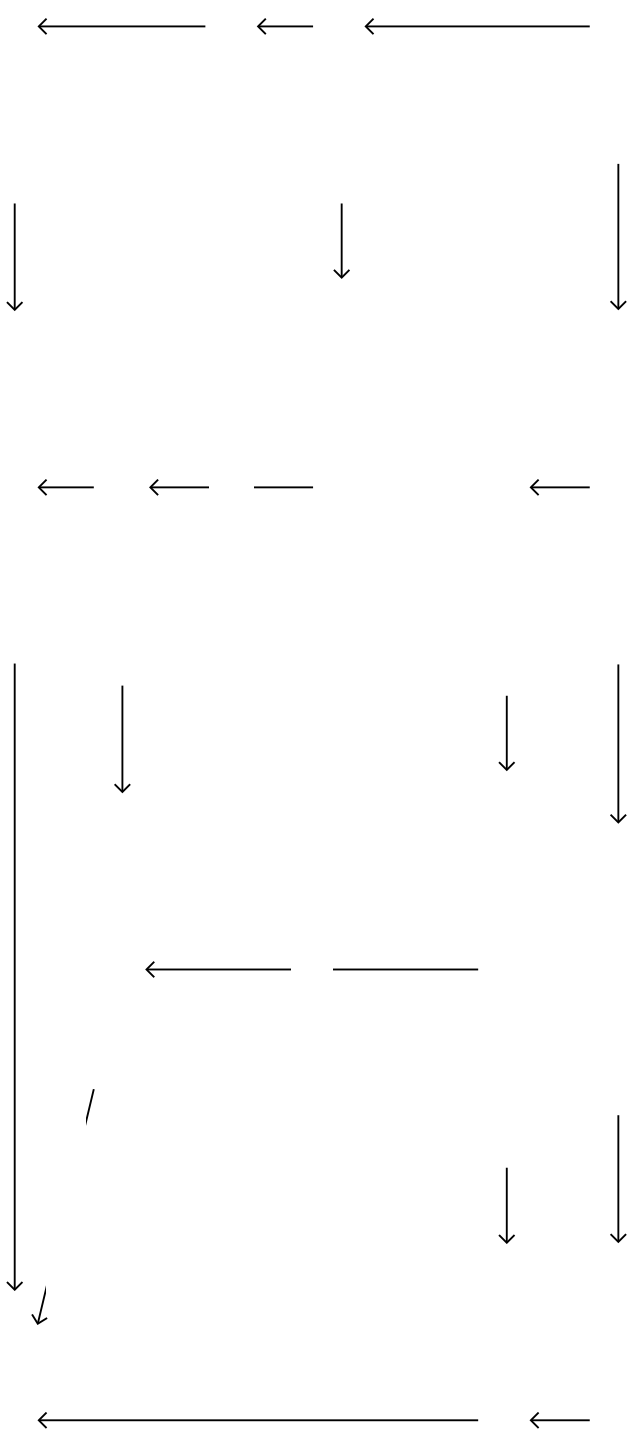


图 7.2：证明 ξ 是 T-代数的态射。



命题7.23。 设 $\mathcal{D}$ 为预双幺半范畴，T 为 $\mathcal{D}$上的分别反幺半单子，并设 $\mathcal{D}^T$ 为具有交换律的双幺半范畴

$$\xi_{a,b,c,d}\colon (a \bullet b) \circ (c \bullet d) \longrightarrow (a \circ c) \bullet (b \circ d).$$

于是， $\mathcal{D}^T$的结构态射与

$$R := \xi_{Ta,Tb,Tc,Td}((\eta_a \bullet \eta_b) \circ (\eta_c \bullet \eta_d))\colon (a \bullet b) \circ (c \bullet d) \longrightarrow (Ta \circ Tc) \bullet (Tb \circ Td)$$

共同给出 T的一个 R-矩阵。

证明。 首先，我们验证 R 满足图表（7.2.3）。设 a、b、c、$d \in \mathcal{D}^T$；则该结论由图 7.4的交换性得出。图表（7.2.4）成立是由于图 7.5，而图表（7.2.5）类似。

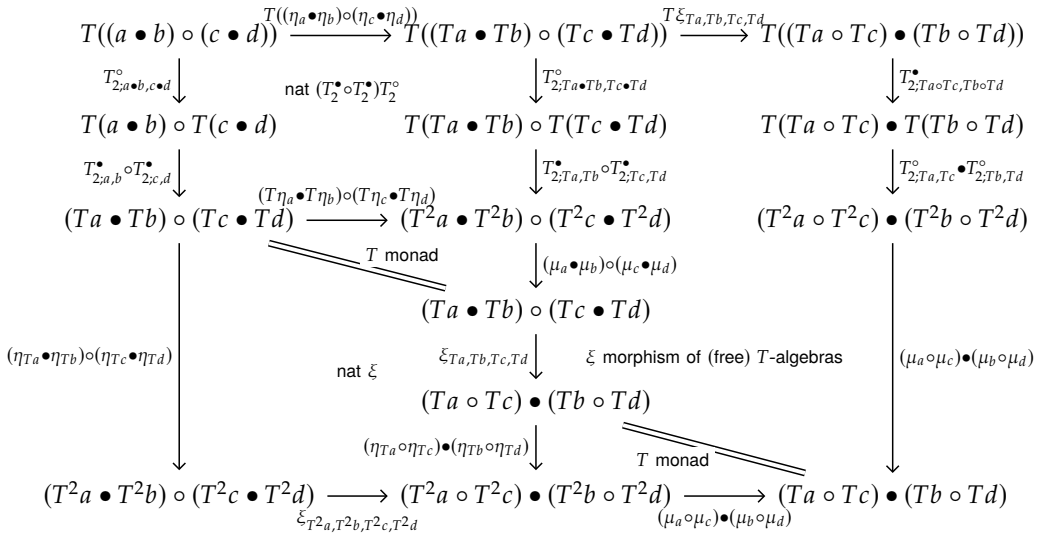
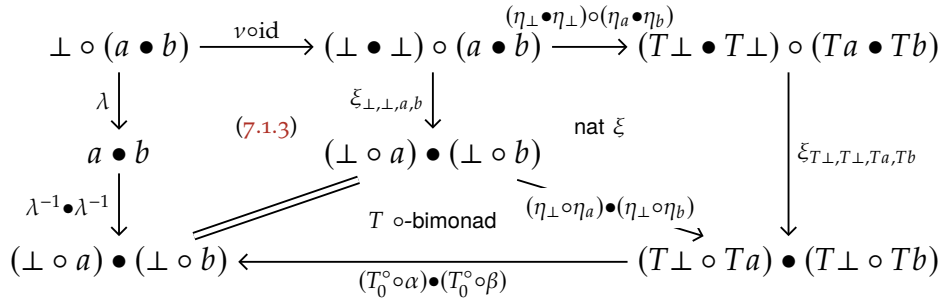
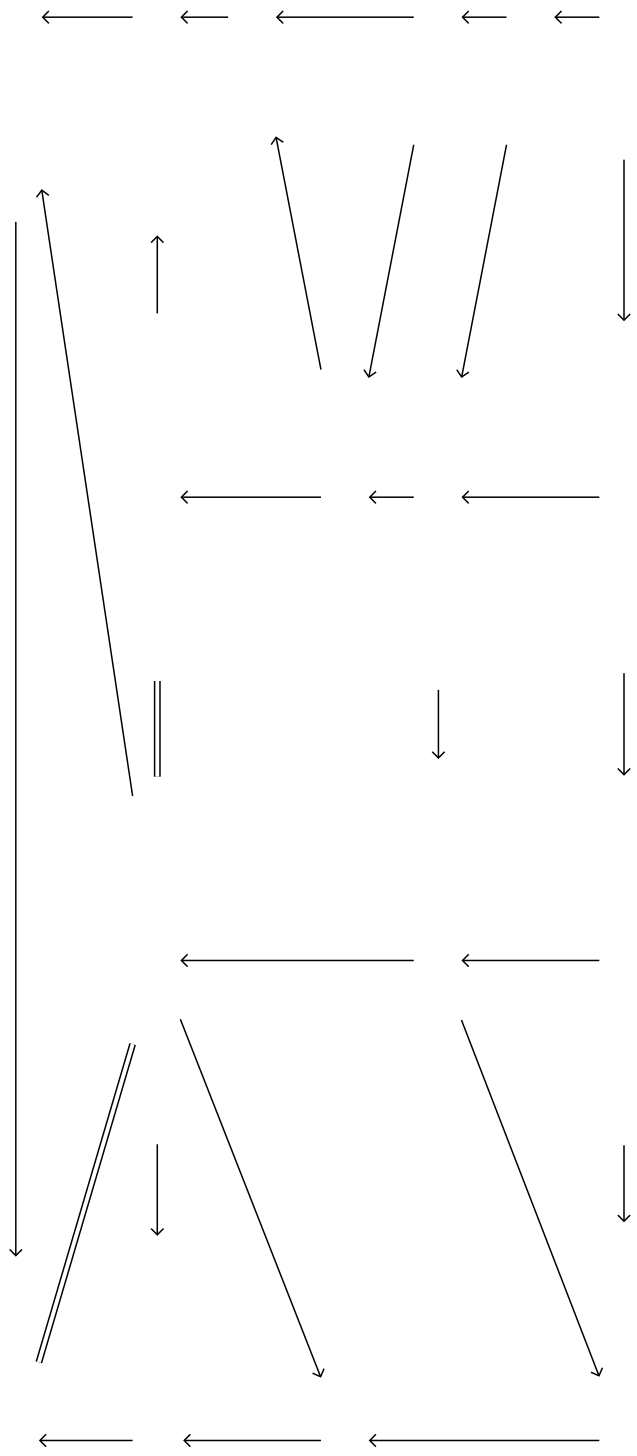


图 7.4： 映射 R 满足图表（7.2.3）。

剩下要证明的是图表（7.2.1）和（7.2.2）的交换性。例如，前一个图表中的第一个图表由以下图表的交换性得出



其他图表也类似。 □

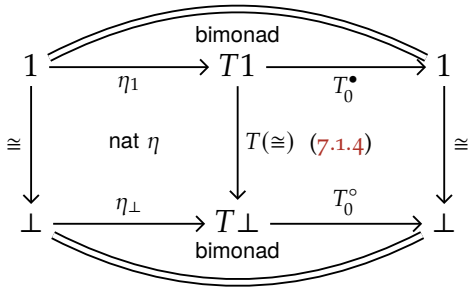


7.3 线性分配单子

定义 7.2中的正规双幺半范畴与线性逻辑有关：在 [GLF16，第 7] 页中证明了，每个正规双幺半范畴 $\mathfrak{D}$ 都具有线性分配范畴的结构；参见 [CS97]。在这种情况下，线性分配子由下式给出

$$\begin{aligned}
\partial_\ell^\ell &\colon a \circ (b \bullet c) \cong (a \bullet 1) \circ (b \bullet c) \xrightarrow{\zeta} (a \circ b) \bullet (1 \bullet c) \cong (a \circ b) \bullet c, \\
\partial_r^\ell &\colon a \circ (b \bullet c) \cong (1 \bullet a) \circ (b \bullet c) \xrightarrow{\zeta} (1 \circ b) \bullet (a \circ c) \cong b \bullet (a \circ c), \\
\partial_\ell^r &\colon (b \bullet c) \circ a \cong (b \bullet c) \circ (a \bullet 1) \xrightarrow{\zeta} (b \circ a) \bullet (c \circ 1) \cong (b \circ a) \bullet c. \\
\partial_r^r &\colon (b \bullet c) \circ a \cong (b \bullet c) \circ (1 \bullet a) \xrightarrow{\zeta} (b \circ 1) \bullet (c \circ a) \cong b \bullet (c \circ a).
\end{aligned} \tag{7.3.1}$$

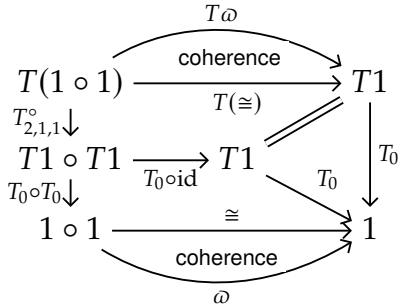
注 7.24。根据 [MP22，定理 5。18], 正规双幺半范畴满足强得多的相干性形式，因此要完整指定其上的结构所需的公理更少。若 T 是正规双幺半范畴 $(\mathfrak{D}, \circ, \bot, \bullet, 1)$ 上的双反幺半单子，则以下图表交换：



特别地， $T_0^\bullet$ 和 T_0° 互为共轭，且共轭由同构给出：

$$(T1 \xrightarrow{T_0^\bullet} 1) = (T1 \xrightarrow{T(\cong)} T\bot \xrightarrow{T_0^\circ} \bot \xrightarrow{\cong^{-1}} 1).$$

在此设定下，图表（7.1.4）自动成立。为简便起见，假设$\mathfrak{D}$ 是严格的，并记作 $T_0 ..= T_0^\bullet = T_0^\circ$。例如，我们有



(7.3.2)

备注 7.25. 有时，人们只考虑所谓的非平面线性分配范畴，参见 [CS97，第 2 节。1]。这些范畴中，只有 $\partial^\ell \iota$ 和 ∂^r_ι（方程（7.3.1）中的）存在。我们所说的线性分配范畴，在平面线性分配范畴中称为同上。

余单子将其基范畴的（非平面）线性分配结构提升到其余代数范畴的条件定义于 [Pas12，命题2。1]。为方便读者，下一命题用单子来表述这一关系。

命题 7.26. 设 $(\mathrm{L}, \otimes, \odot)$ 为非平面线性分配范畴，并假设单子 T 在L 上是分别余幺半群的。若图表

$$
\begin{array}{ccccc}
T(a \otimes (b \odot c)) & \xrightarrow{T^{\otimes}_{2,a,b\odot c}} & Ta \otimes T(b \odot c) & \xrightarrow{Ta \otimes T^{\odot}_{2,b,c}} & Ta \otimes (Tb \odot Tc) \\
{\scriptstyle T\partial_l}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \partial_l} \\
T((a \otimes b) \odot c) & \xrightarrow[T^{\odot}_{2,a\otimes b,c}]{} & T(a \otimes b) \odot Tc & \xrightarrow[T^{\otimes}_{2,a,b} \odot Tc]{} & (Ta \otimes Tb) \odot Tc
\end{array}
\tag{7.3.3}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
T((b \odot c) \otimes a) & \xrightarrow{T^{\otimes}_{2,b\odot c,a}} & T(b \odot c) \otimes Ta & \xrightarrow{T^{\odot}_{2,b,c} \otimes Ta} & (Tb \odot Tc) \otimes Ta \\
{\scriptstyle T\partial_r}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \partial_r} \\
T(b \odot (c \otimes a)) & \xrightarrow[T^{\odot}_{2,b,c\otimes a}]{} & Tb \odot T(c \otimes a) & \xrightarrow[Tb \odot T^{\otimes}_{2,c,a}]{} & Tb \odot (Tc \otimes Ta)
\end{array}
\tag{7.3.4}
$$

对所有 T-代数 a、b 和 c 都交换，则 L^T 是非平面线性分配的。

例 7.27. 令 $\otimes = \odot$，每个幺半范畴 $\mathscr{C}$ 都是线性分配范畴。线性分配子由结合子及其逆元给出。因此，双单子 B 在 $\mathscr{C}$ 上满足命题7.26的全部假设。图表（7.3.3）与（7.3.4）归结为 B_2的余结合性。

提升正规双幺半群范畴的交换态射，比只提升非平面线性分配子复杂得多；这与提升预双幺半群结构比提升完整的双幺半群结构更容易颇为相似。

例 7.28. 设 $\mathscr{C}$ 是一个辫子幺半范畴，由例 7.3 可知它是正规双幺半的。因此，线性分配子 $\partial^\ell \iota$ 是同构

$$
\partial^\ell_\ell \colon x \otimes (y \otimes z) \cong x \otimes (1 \otimes y) \otimes z \xrightarrow{x \otimes \sigma_{1,y} \otimes z} x \otimes (y \otimes 1) \otimes z \cong x \otimes (y \otimes z),
$$

且 ∂^r_r 与之类似。由命题 7.26，该结构提升到 $\mathcal{C}^{(B\otimes -)}$，它等于 B-模范畴（作用在 $\mathcal{C}$ 上）。与例7.27类似，图表（7.3.3）与（7.3.4）归结为 Δ 的余结合性。然而，任意双代数上的模并非都是辫化幺半群；例如参见 [EGNO15，例 8.3。5]。换言之，平面结构

$$\partial^\ell_r\colon x\otimes(y\otimes z)\cong 1\otimes(x\otimes y)\otimes z\xrightarrow{1\otimes\sigma_{x,y}\otimes z} 1\otimes(y\otimes x)\otimes z\cong y\otimes(x\otimes z),$$
$$\partial^r_\ell\colon (x\otimes y)\otimes z\cong x\otimes(y\otimes z)\otimes 1\xrightarrow{x\otimes\sigma_{y,z}\otimes 1} x\otimes(z\otimes y)\otimes 1\cong(x\otimes z)\otimes y,$$

不能提升到 B-模范畴。

如引言所述，平面双幺半范畴也能像双幺半范畴那样刻画并推广编织的概念。以下是对命题 7.26 的直接改述。

命题 7.29。 设 $(\mathrm{L},\otimes,\odot)$ 是一个带有分别反幺半单子 T 的线性分配范畴。如果除图表 (7.3.3) 和 (7.3.4) 外，对于所有 T-代数 a, b 和 c，以下图表也交换：

$$\begin{array}{ccccc}
T(a\otimes(b\odot c)) & \xrightarrow{T^{\otimes}_{2;a,b\odot c}} & Ta\otimes T(b\odot c) & \xrightarrow{Ta\otimes T^{\odot}_{2;b,c}} & Ta\otimes(Tb\odot Tc)\\
\downarrow{\scriptstyle T\partial^\ell_r} & & & & \downarrow{\scriptstyle \partial^\ell_r}\\
T(b\odot(a\otimes c)) & \xrightarrow[T^{\odot}_{2;b,a\otimes c}]{} & Tb\odot T(a\otimes c) & \xrightarrow[Tb\odot T^{\otimes}_{2;a,c}]{} & Tb\odot(Ta\otimes Tc)
\end{array}\tag{7.3.5}$$

$$\begin{array}{ccccc}
T((a\odot b)\otimes c) & \xrightarrow{T^{\otimes}_{2;a\odot b,c}} & T(a\odot b)\otimes Tc & \xrightarrow{T^{\odot}_{2;a,b}\otimes Tc} & (Ta\odot Tb)\otimes Tc\\
\downarrow{\scriptstyle T\partial^r_\ell} & & & & \downarrow{\scriptstyle \partial^\ell_r}\\
T(a\odot(c\otimes b)) & \xrightarrow[T^{\odot}_{2;a,c\otimes b}]{} & Ta\odot T(c\otimes b) & \xrightarrow[Ta\odot T^{\otimes}_{2;c,b}]{} & Ta\odot(Tc\otimes Tb)
\end{array}\tag{7.3.6}$$

那么 L^T 是线性分配的。

例 7.30。 设 $B\in\mathsf{Vect}$ 是一个双代数。考虑平面线性分配子 ∂^ℓ_r，对于所有 $b\in B, x\in a, y\in b$ 和 $z\in c$，图表 (7.3.5) 化为

$$b_{(1)}\otimes y\otimes b_{(2)}\otimes x\otimes b_{(3)}\otimes z = b_{(2)}\otimes y\otimes b_{(1)}\otimes x\otimes b_{(3)}\otimes z,$$

很容易看出，这等价于 $b_{(2)}\otimes b_{(1)} = b_{(1)}\otimes b_{(2)}$。

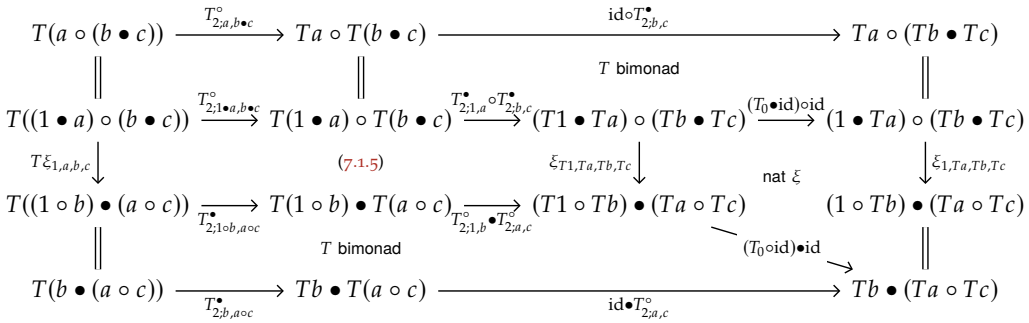
因此，线性分配单子似乎与第7.1.1节中的双余幺单子有关。

命题 7.31。令 $(\mathfrak{D}, \bullet, \circ, 1)$ 为一个正规双幺半范畴。那么，$\mathfrak{D}$ 上的双重对幺半单子是 $\mathfrak{D}$上的线性分配双单子。

证明。令 T 为 $\mathfrak{D}$ 上的一个余交换双单子，并将 $\mathfrak{D}$ 视为双幺半范畴。那么左左线性分配子 $\partial^{\ell} \iota$ 由下式给出

$$a \circ (b \bullet c) \cong (a \bullet 1) \circ (b \bullet c) \xrightarrow{\zeta} (a \circ b) \bullet (1 \circ c) \cong (a \circ b) \bullet c.$$

现在，图表（7.3.3）由图 7.6的交换性得到满足；图表（7.3.4）类似。图表（7.3.5）由下式得到满足



为便于阅读，我们假设正规双幺半群结构是严格的。图表（7.3.6）同理可得。□

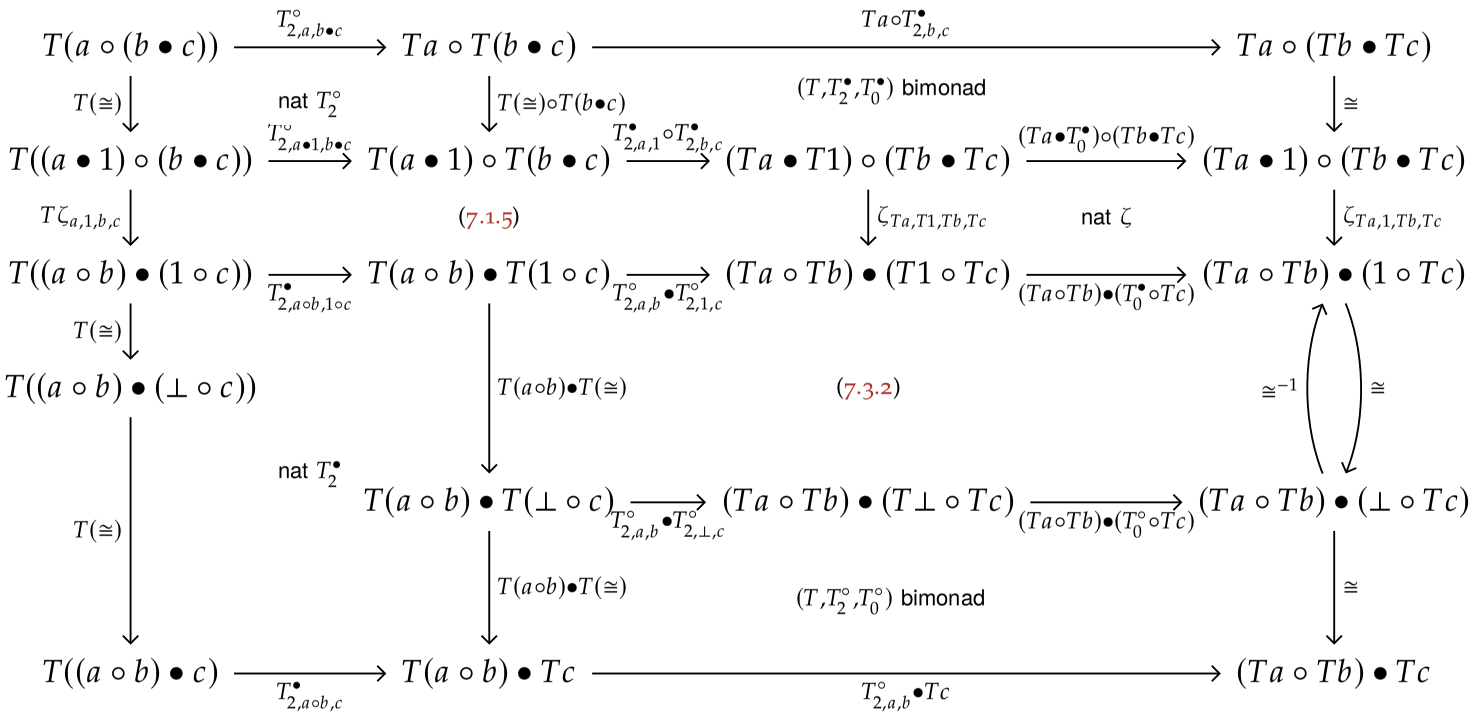


Figure 7.6: The left-left linear distributor satisfies Diagram (7.3.3).

人，这种最勇敢、最习惯忍受苦难的动物，并不会否认自身的痛苦：只要有人向他指出痛苦的意义，指出痛苦所为何来，他便会渴望痛苦，甚至主动寻求痛苦。

弗里德里希·尼采；《道德谱系》。

无穷且非刚性重构

8

本章的目标是推广下述定理：

定理 A ([Ost03，定理 1])。 设 $\mathscr{C}$ 是一个有限张量范畴，并设 M 是一个有限阿贝尔 $\mathscr{C}$-模范畴，使得求值函子 $-\triangleright m\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathrm{M}$对所有 $m \in \mathrm{M}$都是正合的。则存在一个代数对象 $A \in \mathscr{C}$，使得存在 $\mathscr{C}$-模范畴$\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A) \simeq \mathrm{M}$之间的等价。

该定理对 $\mathscr{C}$ 和 M 作出了若干假设：

- 有限性假设： $\mathscr{C}$ 和 M 均须为有限阿贝尔范畴。
- $\mathscr{C}$ 的幺半结构 $-\otimes=$ 与 M 的作用函子 $-\triangleright=$，均假设在两个变量上正合。
- $\mathscr{C}$上的刚性假设；也就是说，其中所有对象相对于其幺半结构都存在左对偶与右对偶。

我们将以一种大幅放宽前两类假设、并彻底去除第三类假设的方式推广定理 A 。如前所述，根据 [DSPS19，例 2。20]，这一重构不能仅依赖 $\mathscr{C}$中的代数对象，因此我们必须从更具单子观点的角度来处理定理 A 。我们的主要结果如下，它给出了右正合宽松 分类，涉及右正合宽松 $\mathscr{C}$-模单子。

定理 8.48 至 8.50。 假设 $\mathscr{C}$和 M 有足够多的投射对象（内射对象），且存在一个对象$l \in \mathrm{M}$ 满足：

- 存在一个右伴随函子 $\lfloor l, -\rfloor$（左伴随函子 $\lceil l, -\rceil$）是 $-\triangleright l$ 的伴随函子；
- 对于投射（内射）对象， $x \triangleright l$ 是投射（内射）对象；
- M 的任意投射（内射）对象都是形如 $x \triangleright l$ 的对象的直和项，其中 x 为投射（内射）。

设 T 为单子 $\lfloor l,\ -\triangleright l\ \rfloor$。则 M $\simeq \mathcal{C}^T$，且 T-模范畴的 $\mathcal{C}$-模结构由 *Kleisli* 范畴延拓而来。此外，这可延拓为一个双射

$$\begin{aligned}\{(\mathcal{M},\ell)\ as\ above\}/(\mathcal{M}\simeq\mathcal{N}) &\leftrightarrow \left\{\begin{matrix}Right\ exact\ lax\ \mathcal{C}\text{-}module\\ monads\ on\ \mathcal{C}\end{matrix}\right\}/(\mathcal{C}^T\simeq\mathcal{C}^S)\\ (\mathcal{M},\ell)&\longmapsto \lfloor \ell,-\triangleright\ell\rfloor\\ (\mathcal{C}^T,T1)&\longmapsto T\end{aligned}$$

对于张量范畴，这一陈述乍看之下似乎并不适用：非有限张量范畴通常没有足够多的投射对象或内射对象。然而，由于张量范畴的底层范畴等价于某个余代数的有限维余模范畴，张量范畴的 Ind-完备化有足够多的内射对象。此外，由于多张量范畴可以实现为局部有限可呈范畴中的紧对象范畴，我们可以使用特殊伴随函子定理的适当变体，参见命题 2.133 和 2.134，它们刻画了对象在 Ind(M)中存在内余 Hom 的条件。这样，我们便能够将定理 8.56和 8.57 的相应版本“拉回”到底层范畴中。

定理8.59。设 $\mathcal{C}$ 是一个多张量范畴，且 M 是一个阿贝尔 $\mathcal{C}$-模范畴，并且 Ind($\mathcal{C}$)-模范畴 Ind(M) 具有一个余闭的 Ind($\mathcal{C}$)-内射 Ind($\mathcal{C}$)-余生成元。

那么存在一个余代数对象 C，属于Ind($\mathcal{C}$)，使得Ind(M) $\simeq \mathrm{Comod}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{C})}C$。此外，M是紧 C-余模对象的范畴。。

考虑这样一个特殊情形：张量范畴 $\mathcal{C}$ 存在一个到范畴Vect的纤维函子 ${}^H\mathrm{Vect}$，其中对象为有限维向量空间，因此它与范畴 H上的有限维 Hopf 代数的有限维余模范畴幺半等价，参见 [Ulb90]。定理A 将有限 $\mathcal{C}$模范畴M实现为有限维 H余模代数上的有限维模范畴。由于 H 和 A 均为有限维，-模范畴与 ^{H}Vect-模范畴幺半等价于 H余模余代数 A^*的余模范畴。从这个意义上说，以下关于 Ind-完备化的定理的 Hopf理论推论，是定理A的直接推广。

推论8.60。设 H 为一个 *Hopf* 代数，且 $\mathscr{C} = {}^{H}\mathrm{Vect}$，这意味着存在一个幺半等价 $\mathrm{Ind}(\mathscr{C}) \simeq {}^{H}\mathrm{Vect}$。设 M为阿贝尔 $\mathscr{C}$-模范畴，并满足 Ind(M) 存在一个余闭Ind($\mathscr{C}$)-内射 Ind($\mathscr{C}$)-余生成元。

那么，存在一个（可能是无限维的） H-余模余代数 C，使得存在一个 $\mathrm{Ind}(\mathrm{M}) \simeq \mathrm{Comod}_H C$ 的 Ind($\mathscr{C}$)-模范畴等价，该等价限制为一个 $\mathscr{C}$-模等价 $\mathrm{M} \simeq 余模_H C$。

由于我们最一般的定理并不假设刚性，因此我们改用双范畴 Yoneda 引理，将 $\mathscr{C}$ 的对象 $\mathscr{C}$实现为其自身的 $\mathscr{C}$ -模自函子。随后，我们将宽松 $\mathscr{C}$-模自函子 $\mathscr{C}$ 视为 $\mathscr{C}$中对象的一种恰当推广，而宽松的 $\mathscr{C}$-模单子则是 $\mathscr{C}$中代数对象的相应推广。利用第 5.3 节的重构结果，(强) $\mathscr{C}$-模函子的右伴随具有典范的宽松结构，因此我们研究的（余）单子具有典范的（反）宽松结构，是 $\mathscr{C}$-模函子。

8.1 扩展模结构

我们遇到的另一个难点是：尽管宽松的 Kleisli 范畴 $\mathscr{C}$-模单子的 Kleisli 范畴自然是一个 $\mathscr{C}$-模范畴，但 Eilenberg–Moore 范畴却并非如此。本节将探讨在什么条件下，前者的 $\mathscr{C}$-模结构能够本质唯一地提升到后者。更准确地说，我们首先在定理8.9中证明唯一性，然后在假设（余）单子右正合（余单子的左正合）的条件下，利用所谓的 Linton 余等化子以及与 [AHLF18]中类似的多范畴技巧，在定理8.25中补充证明此类扩张的存在性。

假设 8.1。从现在起直到本论文结束，我们都默认所有范畴和函子均为 $\Bbbk$-线性的，其中的域为 $\Bbbk$。

我们仅考虑右正合的宽松 $\mathscr{C}$-模单子，这一点可由以下基本事实说明。

命题 8.2 ([BZBJ18，命题 3.2])。设 $\mathscr{A}$ 为阿贝尔，T 为一个右正合单子，作用在 $\mathscr{A}$，且 S 为一个左正合余单子，作用在 $\mathscr{A}$。则 $\mathscr{A}^T$ 与 $\mathscr{A}^S$ 为阿贝尔。

命题 8.3。设 $\mathscr{A}$ 是一个局部有限阿贝尔范畴，且 S 是 Ind($\mathscr{A}$) 上的左正合有限余单子。那么 $\mathrm{Ind}(\mathscr{A})^S$ 也具有 Ind(E) 的形式，其中E是一个局部有限阿贝尔范畴。此外，E 可以取为紧对象范畴

$\mathsf{Ind}(\mathscr{A})^S$中的对象；并且可以将其刻画为在遗忘函子 $F^S\colon \mathsf{Ind}(\mathscr{A})^S \longrightarrow \mathsf{Ind}(\mathscr{A})$下映至紧对象的对象。

特别地，若 S 是 $\mathscr{A}$上的左正合余单子，则有 $\mathsf{Ind}(\mathscr{A})^{\mathsf{Ind}(S)} \simeq \mathsf{Ind}(\mathscr{A}^S)$，且 $\mathscr{A}^S$ 是局部有限阿贝尔的。

证明。 设 D 是 $\Bbbk$-余代数，使得 $\mathscr{A} \simeq {}^D\mathsf{vect}$。那么我们还有$\mathsf{Ind}(\mathscr{A}) \simeq {}^D\mathsf{Vect}$。特别地，$S$ 是 ${}^D\mathsf{Vect}$上的余单子。由命题2.109，存在一个 D-D-双余模 C，使得 $S \cong C \square_D -$。

与 [Tak77，注 2.4], 类似，在此同构下， S 上的余单子结构对应于映射 $C \longrightarrow C\square_D C$ 和 $C \longrightarrow D$，它们赋予C $\Bbbk$-余代数结构，并使其成为一个余代数态射$C \longrightarrow D$。形式上， ${}^D\mathsf{Vect}$ 中的 S-余模是一个 D-余模，连同一个 C-余模结构，该结构沿余代数态射 $C \longrightarrow D$限制为给定的 D-余模。 ${}^D\mathsf{Vect}$ 中 S-余模之间的态射恰好是 C-余模态射，因此我们有

$$\mathsf{Ind}(\mathscr{A})^S \simeq ({}^D\mathsf{Vect})^S \simeq {}^C\mathsf{Vect}. \tag{8.1.1}$$

因此我们可以令 $\mathrm{E} = {}^C\mathsf{vect}$。$({}^D\mathsf{Vect})^S$ 中紧对象的刻画，就函子 F^S 的像而言，可立即由如下观察得出：在方程（8.1.1）的等价下，函子 F^S 不过是限制函子 ${}^C\mathsf{Vect} \longrightarrow {}^D\mathsf{Vect}$。

该陈述的第二部分可由如下观察得出：根据陈述的第一部分， $\mathscr{A}^S$ 是 $\mathsf{Ind}(\mathscr{A})^{\mathsf{Ind}(S)}$ 中的紧对象范畴，并且 $\mathscr{A}^S$ 也是 $\mathsf{Ind}(\mathscr{A}^S)$ 中的紧对象范畴。由于 $\mathsf{Ind}(\mathscr{A}^S)$ 与 $\mathsf{Ind}(\mathscr{A})^{\mathsf{Ind}(S)}$ 均为局部有限呈示，它们各自的紧对象范畴之间的等价便确立了这些范畴本身之间的等价。□

注 8.4. 设 T 是范畴 $\mathscr{C}$ 上的一个单子。对于 T-模 (x, α) 与 (y, β)，注意存在一个双射

$$\begin{aligned} \mathscr{C}^T(Tx, y) &\cong \mathscr{C}(x, y) \\ (f : Tx \longrightarrow y) &\longmapsto (f \circ \eta_x) \\ (\beta \circ Tg) &\longmapsfrom (g : x \longrightarrow y). \end{aligned} \tag{8.1.2}$$

这诱导出一个同构 $\mathscr{C}^T(T(-), =) \cong \mathscr{C}(-, =)$。根据$\iota$ 在等式（2.2.2）中的定义，左边也可由函子得到

$$\mathscr{C}^T \xrightarrow{\text{よ}} [(\mathscr{C}^T)^{\mathrm{op}}, \mathsf{Vect}] \xrightarrow{\iota^*} [\mathscr{C}_T{}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Vect}].$$

命题 8.3 在有限阿贝尔范畴情形下的类似结论更为简单。

命题 8.5。 设 T 是有限阿贝尔范畴 $\mathscr{A}$上的右正合单子。那么$\mathscr{A}^T$ 是一个有限阿贝尔范畴。

此外， $\mathscr{A}^T$ 中的任意投射对象都是形如 $\iota(P)$ 的某个对象的直和项，其中 $\iota\colon \mathscr{A}_T \longrightarrow \mathscr{A}^T$ 是式（2.2.2）的典范嵌入，并且 $P \in \mathscr{A}$-proj。将这种形式的对象所成的范畴记作$\mathsf{Kl}_p(T)$，我们得到一个等价

$$\mathscr{A}^T\text{-proj} \simeq \overline{\mathsf{Kl}_p(T)}$$

介于 $\mathscr{A}^T$ 的投射对象与 $\mathsf{Kl}_p(T)$ 的柯西完备化之间。

证明。设 A 为一个有限维 $\Bbbk$-代数，使得 $\mathscr{A} \simeq A\text{-mod}$。则存在一个 A-A-双模 B，使得 $T \cong B \otimes_A -$。类似于命题 8.3 的证明， T 上的单子结构对应于由一个有限维 $\Bbbk$-代数结构（在 B 上）与一个代数同态$A \longrightarrow B$ 组成的对。在此对应下，我们有 $\mathscr{A}^T \simeq B\text{-mod}$。后一范畴显然是有限阿贝尔范畴。

现在假设 $P \in \mathscr{A}$-投射。应用注 8.4，可得一个同构 $\mathscr{A}^T(\iota(P), -) \cong \mathscr{A}(P, -)$，这证明了左侧的正合性，因而 $\iota(P)$ 是投射的。对于 $(X, \alpha) \in \mathscr{A}^T$，利用 $\mathscr{A}$ 有足够多的投射对象这一事实，我们可以固定一个满态射 $q\colon Q \twoheadrightarrow X$ 于 $\mathscr{A}$ 中，其中 $Q \in \mathscr{A}$-投射。对于后一项断言，注意存在一个复合满态射

$$\iota(P) \xrightarrow{\iota(q)} \!\!\!\rightarrow \iota(X) = TX \xrightarrow{\alpha} \!\!\!\rightarrow X,$$

其中第一部分由于 ι 的右正合性而为满态射。 □

引理 8.6. 设 T 是 $\mathscr{A}$ 上的一个单子。嵌入 $\mathscr{A}^T \hookrightarrow [\mathscr{A}_T^{\mathrm{op}}, \mathsf{Vect}]$ 可限制为一个嵌入 $\mathscr{A}^T \hookrightarrow \mathrm{Fin}_{\mathrm{co}}(\mathscr{A}_T)$，其值域落在 $\mathscr{A}_T$ 的有限余完备化中。

证明。 设 (x, α) 和 (y, β) 是两个 T-代数。回顾一下，余等化子

$$T^2x \underset{T\alpha}{\overset{\mu_x}{\rightrightarrows}} Tx \xrightarrow{\alpha} \!\!\!\rightarrow x$$

在 $\mathscr{A}^T$ 中是绝对余等化子[18] 在 $\mathscr{A}$中；因此，它在 Yoneda 下的像嵌入よ产生了一个余等化子

$$\mathscr{A}(-, T^2x) \underset{(T\alpha)_*}{\overset{(\mu_x)_*}{\rightrightarrows}} \mathscr{A}(-, Tx) \xrightarrow{\alpha_*} \!\!\!\rightarrow \mathscr{A}(-, x).$$

[18] 余等化子称为绝对的，如果它被任意函子保留；详情请参见 [Par69]。

在经过方程（8.1.2）的同构后，可得到一个余等化子

$$\mathscr{A}^T(T(-),T^2x) \underset{(T\alpha)_*}{\overset{(\mu_x)_*}{\rightrightarrows}} \mathscr{A}^T(T(-),Tx) \xrightarrow{\alpha_*} \mathscr{A}^T(T(-),x),$$

而这又同构于

$$\mathscr{A}_T(-,Tx) \underset{(T\alpha)_*}{\overset{(\mu_x)_*}{\rightrightarrows}} \mathscr{A}_T(-,x) \xrightarrow{\alpha_*} \mathscr{A}^T(T(-),x).$$

由此得证。 □

命题 8.7. 设 T 是阿贝尔范畴 $\mathscr{A}$上的一个右正合单子。包含函子 $\mathscr{A}^T \hookrightarrow$ 有限 $\mathrm{co}(\mathscr{A}_T)$ 有一个左伴随，且该伴随的余单位是自然同构。此外，左伴随有限$\mathrm{co}(\mathscr{A}_T) \longrightarrow \mathscr{A}^T$ 是包含映射 $\iota\colon \mathscr{A}_T \hookrightarrow \mathscr{A}^T$的右正合延拓。

证明。由命题 8.2， $\mathscr{A}^T$ 是有限余完备的。类似于 [KS06，命题 6.3，1], 存在一个函子 $\mathrm{Fin}_{\mathrm{co}}(\mathscr{A}^T) \longrightarrow \mathscr{A}^T$，它延拓了函子$___\mathrm{Id}\colon \mathscr{A}^T \longrightarrow \mathscr{A}^T$；该函子将 $\mathrm{Fin}_{\mathrm{co}}(\mathscr{A}^T)$ 中某个 $x = \mathrm{colim}_i x_i$映到$___\mathrm{colim}_i x_i$中的 $\mathscr{A}^T$，其中 colim_i 表示形式添加的余极限。函子 $\mathrm{Fin}_{\mathrm{co}}(\mathscr{A}^T) \longrightarrow \mathscr{A}^T$是包含映射 $\mathscr{A}^T \hookrightarrow \mathrm{Fin}_{\mathrm{co}}(\mathscr{A}^T)$的左伴随。

另一方面，存在一个伴随

$$[\mathscr{A}_T^{\mathrm{op}}, \mathsf{Vect}] \underset{\iota^*}{\overset{\iota_!}{\rightleftarrows}} [(\mathscr{A}^T)^{\mathrm{op}}, \mathsf{Vect}], \tag{8.1.3}$$

其中 $\iota_!$是沿着 $よ_{\mathscr{A}^T} \circ \iota$的左 Kan 延拓 $よ_{\mathscr{A}_T}$，例如参见 [Str24a，推论 3。3]。方程（8.1.3）限制为一个伴随

$$\mathrm{Fin}_{\mathrm{co}}(\mathscr{A}_T) \underset{\iota^*}{\overset{\iota_!}{\rightleftarrows}} \mathrm{Fin}_{\mathrm{co}}(\mathscr{A}^T),$$

因为根据定义， $\iota_!$ 会将可表对象的有限余极限映射为可表对象的有限余极限，而 ι^* 也具有相同的性质，因为它保留余极限，并且根据引理8.6，会将可表对象映射为可表对象的有限余极限。因此，我们有以下交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathscr{A}^T & \rightleftarrows & \mathrm{Fin}_{\mathrm{co}}(\mathscr{A}^T) & \longleftarrow & \mathscr{A}^T \\ & \searrow & \uparrow \iota_! \dashv \downarrow \iota^* & & \uparrow \iota \\ & & \mathrm{Fin}_{\mathrm{co}}(\mathscr{A}_T) & \longleftarrow & \mathscr{A}_T \end{array}$$

这将嵌入 $\mathscr{A}^T \hookrightarrow \mathrm{Fin}_{\mathrm{co}}(\mathscr{A}_T)$ 实现为两个右伴随函子的复合，因此它本身也是一个右伴随函子。最后，这个复合

$$\mathscr{A}_T \longrightarrow \mathscr{A}^T \longrightarrow \mathrm{Fin}_{\mathrm{co}}(\mathscr{A}^T) \longrightarrow \mathscr{A}^T$$

自然同构于 $\iota\colon \mathscr{A}_T \hookrightarrow \mathscr{A}^T$，这就证明了后一个结论。

□

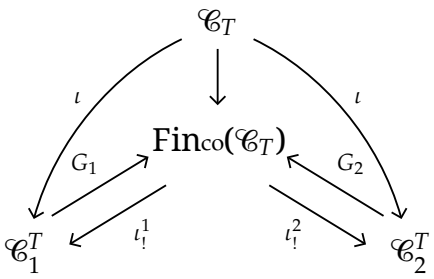
注 8.8. 换句话说，命题8.7 指出，对于右正合单子T 范畴 $\mathscr{A}^T$ 是一个反射子范畴——即包含函子存在左伴随的子范畴——，它属于 $\mathrm{Fin}_{\mathrm{co}}(\mathscr{A}_T)$。

接下来的结果证明了 Eilenberg–Moore 范畴上的模结构具有本质唯一性，前提是该结构由 Kleisli 范畴“诱导”而来。

定理 8.9. 设 $\mathscr{C}_T$ 为单子T 在 $\mathscr{C}$上的 ***Kleisli*** 范畴，并赋予一个固定的左 $\mathscr{C}$-模结构。给 $\mathscr{C}^T$ 赋予两种左 $\mathscr{C}$-模范畴结构$\mathscr{C}_1^T$ 和 $\mathscr{C}_2^T$，使得包含映射 $\iota\colon \mathscr{C}_T \hookrightarrow \mathscr{C}^T$ 给出强 $\mathscr{C}$-模函子$\mathscr{C}_T \longrightarrow \mathscr{C}^T$ 和 $\mathscr{C}_T \longrightarrow \mathscr{C}^T$。

Then there is an equivalence $\mathscr{C}_1^T \simeq \mathscr{C}_2^T$ of left $\mathscr{C}$-module categories.

证明。 考虑以下图表：



特别地，根据命题 5.32，在此图表中，每个函子都是宽松 $\mathscr{C}$-模函子，且每个伴随都是 $\mathscr{C}$-模伴随。我们声称，$\iota^2_! G_1\colon \mathscr{C}_1^T \longrightarrow \mathscr{C}_2^T$ 和 $\iota^1_! G_2\colon \mathscr{C}_2^T \longrightarrow \mathscr{C}_1^T$ 定义了 $\mathscr{C}$-模范畴之间互为拟逆的等价。事实上，

$$\iota^1_! G_2 \iota^2_! G_1 \xrightarrow{\varepsilon_2 \varepsilon_1} \mathrm{Id}_{\mathscr{C}_1^T}$$

是一个 $\mathscr{C}$-模同构。

类似地，存在一个 $\mathscr{C}$-模同构 $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}_2^T} \cong \iota^2_! G_1 \iota^1_! G_2$。 □

8.1.1 可扩张单子

定义 8.10. 如果一个宽松的 $\mathscr{C}$-模单子 T 作用于 $\mathscr{C}$-模范畴 M可扩张，则称之为可扩张；此时范畴 M^T 是一个 $\mathscr{C}$-模范畴，且嵌入$\iota\colon \mathrm{M}_T \hookrightarrow \mathrm{M}^T$ 是一个强 $\mathscr{C}$-模函子。

若 T 是可扩张的，我们将由 M_T 得到的、M^T 上本质上唯一的 $\mathscr{C}$-模结构称为 M^T上的扩张的 $\mathscr{C}$-模结构。

类似于定义8.10，可定义可扩张的反宽松 $\mathscr{C}$-模余单子，以及其余模上的扩张的模结构。

命题 8.11. 任一强 $\mathscr{C}$-模单子$(T, \mu, \eta)\colon \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ 都是可扩张的。

证明。 由于 T 尤其是一个宽松 $\mathscr{C}$-模单子，由命题5.35，比较函子 $K_T\colon \mathrm{M}_T \longrightarrow \mathrm{M}$ 是一个强 $\mathscr{C}$-模函子。类似地，由于 T 尤其是一个反宽松 $\mathscr{C}$-模单子，再次由命题5.35，我们亦得出比较函子 $K^T\colon \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}^T$ 是一个强$\mathscr{C}$-模函子。因此， $\iota = K^T K_T$ 是一个强 $\mathscr{C}$-模函子。 □

推论 8.12. 如果 $\mathscr{C}$ 是左刚性的，那么任意宽松的 $\mathscr{C}$-模单子都是可扩张的。

证明。 由命题 2.73可知，宽松的 $\mathscr{C}$-模单子自动是强$\mathscr{C}$-模单子。结论由命题 8.11 立即得出。 □

8.1.2 半单单子

本节我们来看看 半单单子——其模范畴是半单的单子。事实证明，这些单子总是可扩张的。回顾第 3.2.1 节中范畴的柯西完备化的定义。以下结果直接源于这样一个事实：对于单子 $T\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$，遗忘函子 $U^T\colon \mathscr{C}^T \longrightarrow \mathscr{C}$ 会创建极限。

引理 8.13. 柯西完备范畴上的单子的 *Eilenberg–Moore* 范畴本身也是柯西完备的。

命题 8.14. 设 $T\colon \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ 为阿贝尔范畴$\mathscr{A}$上的右正合单子。范畴 $\mathscr{A}^T$ 是半单的当且仅当 $\mathscr{A}_T$ 是半单的。在此半单情形下，扩张 $\iota\colon \mathscr{A}_T \longrightarrow \mathscr{A}^T$（即典范嵌入 $\iota\colon \mathscr{A}_T \longrightarrow \mathscr{A}^T$ 从等式（2.2.2）到柯西完备化的延拓）是范畴等价。

证明。 由于 $\mathscr{A}$ 是柯西完备的，伴随 $F_T\colon \mathscr{A} \rightleftarrows \mathscr{A}_T : U_T$ 可扩张为伴随 $F_T\colon \mathscr{A} \rightleftarrows \mathscr{A}_T\colon U_T$，使得 $U_T F_T = T$。

容易看出，所得的比较函子 $K\colon \mathscr{A}_T \longrightarrow \mathscr{A}^T$ 与 ι 的扩张 ι 自然同构。此外，由于 ι 是全忠实的，ι 也如此，因此它反映零对象，$U_T = U^T \circ \iota$ 和 U_T 也如此。

假设 $\mathscr{A}^T$ 是半单的。在 $\mathscr{A}^T$ 中的单态射和满态射由命题 2.85 分裂，因此它们也在全忠实函子 ι 下被反映。于是，$\mathscr{A}_T$ 是一个阿贝尔范畴，而 ι 是一个正合函子。特别地，$U_T \cong U_T \circ \iota$ 是正合且忠实的，因此它反映零对象。根据定理 2.92，K 是一个等价；特别地，$\mathscr{A}_T$ 是半单的。

现在假设 $\mathscr{A}_T$ 是半单的。那么 U_T 根据命题 2.85 是正合的，因此它再次满足定理 2.92 的假设。于是，$K\colon \mathscr{A}_T \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}^T$ 是一个等价；特别地，$\mathscr{A}^T$ 是半单的。□

定义 8.15. 我们称阿贝尔范畴 $T\colon \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ 上的右正合单子 $\mathscr{A}$ 是半单的，如果它满足命题 8.14 中的等价条件。

由于阿贝尔范畴的对偶范畴仍是阿贝尔范畴，且半单范畴的对偶范畴仍是半单范畴，因此命题 8.14 的类似结论也适用于余单子，我们也类似地定义半单余单子。

命题 8.16. 设 $T\colon \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ 是阿贝尔 $\mathscr{C}$-模范畴上的半单宽松 $\mathscr{C}$-模单子。则 T 可扩张。

证明。 由命题 8.14，函子 $\iota\colon \mathrm{M}_T \xrightarrow{\sim} \mathrm{M}^T$ 是一个等价。此外，根据命题 2.129，M_T 具有典范的 $\mathscr{C}$-模范畴结构，使得包含映射 $\mathrm{M}_T \hookrightarrow \mathrm{M}_T$ 是一个强 $\mathscr{C}$- 模函子。沿 $\mathscr{C}$ 传递 ι - 模结构，ι 便赋予其强 $\mathscr{C}$- 模函子结构，从而证明了结论。□

半单性也会“传递”到单子的左伴随函子。

引理 8.17. 设 $T\colon \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ 是阿贝尔范畴上的一个右正合单子，且 $S\colon \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ 是 T 的左伴随函子。那么，T 是半单的，当且仅当 S 是半单的。在这种情况下，存在一个等价 $\mathscr{A}^T \simeq \mathscr{A}^S$。

证明。 根据命题 8.14，T 是半单的，当且仅当 $\mathscr{A}_T$ 也是如此。此外，命题 2.26 中的等价关系可延拓为柯西完备化之间的等价关系：$\mathscr{A}_T \simeq \mathscr{A}_S$。因此，$\mathscr{A}_T$ 是半单的，当且仅当 $\mathscr{A}_S$ 是半单的；而这当且仅当 S 是半单的。由此证明了第一个结论。

后一个结论可由以下等价关系推出

$$\mathscr{A}^T \simeq \overline{\mathscr{A}_T} \simeq \overline{\mathscr{A}_S} \simeq \mathscr{A}^S. \qquad \square$$

命题 *8.18.* 设 $T\colon M \longrightarrow M$ 是阿贝尔 $\mathscr{C}$-模范畴 M 上的半单宽松 $\mathscr{C}$-模单子，且 $S\colon M \longrightarrow M$ 是 T 的左伴随函子。引理 *8.17* 中的等价 $M^T \simeq M^T$ 是一个 $\mathscr{C}$-模等价，其中 M^T 和 M^S 分别赋有 M_T 和 M_S 的扩展 $\mathscr{C}$-模结构。

证明。 沿用命题 8.16 的证明，函子 $\iota\colon \mathrm{M}_T \xrightarrow{\sim} \mathrm{M}^T$ 是一个 $\mathscr{C}$-模等价；对于 M^S 和 M_S，情况也类似。此外，由命题 2.129 可得一个 $\mathscr{C}$-模等价 $\mathrm{M}_T \simeq \mathrm{M}_S$，它来自 $\mathscr{C}$-模等价 $\mathrm{M}_T \simeq \mathrm{M}_S$（命题 5.37）。

由以下一系列 $\mathscr{C}$-模等价即可得出结论：

$$\mathscr{M}^T \simeq \overline{\mathscr{M}_T} \simeq \overline{\mathscr{M}_S} \simeq \mathscr{M}^S. \qquad \square$$

8.1.3 经由多作用范畴的 *Linton* 余等化子

存在一个相当一般的可延拓条件，在该条件下，甚至可以明确写出结果得到的 $\mathscr{C}$-模范畴在 Eilenberg–Moore 范畴上的模结构。现在我们的目标是建立定理8.25 和8.26。因此，在本节剩余部分，我们作出如下假设。

假设 8.19。

- 设 $\mathscr{C}$ 为一个阿贝尔幺半范畴，M 为一个阿贝尔 $\mathscr{C}$-模范畴。
- 作用函子 $\triangleright\colon \mathscr{C} \otimes_{\Bbbk} \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ 在两个变量上都是右正合的。
- 设 $T\colon \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ 为一个右正合的宽松 $\mathscr{C}$-模单子。

注意，由于例如命题8.2，其中许多假设已经是我们希望在本章节中发展理论所必需的。

在我们的表示中，我们紧密遵循 [AHLF18]，，其中可以找到关于松弛幺半单子而非松模单子的类似结果。因此，我们通常只描述使这些结果适用于我们情形所需的修正。

定义 8.20。 Linton余等化子 $x \blacktriangleright m\colon x \in \mathscr{C}$ 和 $(m, \nabla_m) \in \mathrm{M}^T$ 为：

$$x \blacktriangleright m \coloneqq \operatorname{coeq}\Big(T(x \triangleright Tm) \underset{\mu_{x\triangleright m} \circ T T_{\mathsf{a};x,m}}{\overset{T(x \triangleright \nabla_m)}{\rightrightarrows}} T(x \triangleright m) \Big).$$

由于 $\mathbb{M}^T$ 根据命题8.2是阿贝尔的，由余极限的函子性，我们得到一个函子 $- \blacktriangleright = : \quad \mathscr{C} \otimes_{\Bbbk} \mathbb{M}^T \longrightarrow \mathbb{M}^T$。

引理 8.21. 对于 $x \in \mathscr{C}$，函子 $x \blacktriangleright -: \mathbb{M}^T \longrightarrow \mathbb{M}^T$ 是右正合的。

证明. 这直接由 $T(x \triangleright T(-))$ 和$T(x \triangleright -)$ 的右正合性，以及 Linton余等化子的定义得出。□

引理 8.22. 存在一个自然同构 $1 \blacktriangleright - \cong \mathrm{Id}_{\mathscr{M}^T}$。

证明. 回顾一下，对于所有 T-代数 $m \in \mathbb{M}^T$，

$$T^2 m \underset{T\nabla_m}{\overset{\mu_m}{\rightrightarrows}} Tm \xrightarrow{\nabla_m} m$$

它是在 $\mathbb{M}^T$ 中的一个余等化子，由 $\mathbb{M}$ 中的底层分裂余等化子所生成。现在，

$$\begin{array}{ccc} T(1 \triangleright Tm) & \underset{\mu_{1\triangleright m} \circ TT_{\mathsf{a};1,m}}{\overset{T(1\triangleright\nabla_m)}{\rightrightarrows}} & T(1 \triangleright m) \\ {\scriptstyle T\lambda}\downarrow{\scriptstyle\cong} & & {\scriptstyle\cong}\downarrow{\scriptstyle T\lambda} \\ T^2 m & \underset{\mu_m}{\overset{T\nabla_m}{\rightrightarrows}} & Tm \end{array}$$

在 $\mathbb{M}^T$ 中定义了态射平行对范畴里的一个同构——上方的方块因 $\mathbb{M}$ 的左单位约束 λ 的自然性而交换，下方的方块则由 $- \triangleright =$ 的相干性而交换。该同构在余等化子层面诱导出一个同构，$m \cong 1 \blacktriangleright m$。此外，态射平行对的这一构造显然关于 m 自然，因此确立了余等化子同构的自然性。□

引理 8.23。 对于任意 $m \in \mathbb{M}$，.....的余等化子

$$T(x \triangleright T^2 m) \underset{\mu_{x\triangleright Tm} \circ TT_{\mathsf{a};x,Tm}}{\overset{T(x\triangleright\mu_m)}{\rightrightarrows}} T(x \triangleright Tm)$$

在 $\mathbb{M}^T$ 中关于 m 自然、可分裂，并且同构于 $T(x \triangleright m)$。换言之，自由 T-模上的 *Linton* 余等化子由 $x \blacktriangleright Tm \cong T(x \triangleright m)$ 给出。

证明。 分裂数据由以下内容给出

$$T(x \triangleright T^2 m) \underset{\mu_{x\triangleright Tm} \circ TT_{\mathsf{a};x,Tm}}{\overset{T(x\triangleright T\eta_m)}{\overset{T(x\triangleright\mu_m)}{\leftrightarrows}}} T(x \triangleright Tm) \xrightarrow[\mu_{x\triangleright m} \circ TT_{\mathsf{a};x,m}]{T(x\triangleright\eta_m)} T(x \triangleright m). \qquad \square$$

引理 8.24。 对于 x、 $y \in \mathcal{C}$，存在一个自然同构 $(x \otimes y) \blacktriangleright - \cong x \blacktriangleright (y \blacktriangleright -)$。

证明。 我们计算

$$\begin{aligned} x \blacktriangleright (y \blacktriangleright m) &= x \blacktriangleright \operatorname{coeq}(T(y \triangleright \nabla_m),\ \mu_{x \triangleright m} \circ TT_{\mathsf{a};y,m}) \\ &\cong \operatorname{coeq}(x \blacktriangleright T(y \triangleright \nabla_m),\ x \blacktriangleright \mu_{x \triangleright m} \circ TT_{\mathsf{a};y,m}) \\ &\cong \operatorname{coeq}(T(x \triangleright (y \triangleright \nabla_m)),\ \mu_{y \triangleright x \triangleright m} \circ T(T_{\mathsf{a};x,y \triangleright m} \circ y \triangleright T_{\mathsf{a};x,m})) \\ &\cong \operatorname{coeq}(T((x \otimes y) \triangleright \nabla_m),\ \mu_{(x \otimes y) \triangleright Tm} \circ TT_{\mathsf{a};x \otimes y,Tm}) \\ &= (x \otimes y) \blacktriangleright m, \end{aligned}$$

其中，第一个同构由引理 8.21得出，第二个由引理 8.23得出，第三个则由 $- \triangleright =$ 的相干性得出。 □

鉴于引理 8.22 和 8.24，要证明$- \blacktriangleright =$在 $\mathcal{C}$上定义一个 $\mathbf{M}^T$-模范畴结构，剩下的就是验证相干性公理。虽然可以通过图追逐完成这一点——参见 [Sea13，定理 2.6。4]——但我们选择给出一种更形式化的论证，仿照 [AHLF18] 在幺半单子类似情形中采用的多范畴方法。具体而言，我们将在本节余下部分证明以下两个结果。

定理 8.25。 函子 $- \blacktriangleright =: \mathcal{C} \otimes_{\Bbbk} \mathbf{M}^T \longrightarrow \mathbf{M}^T$ 在$\mathbf{M}^T$上定义一个左 $\mathcal{C}$-模范畴结构。

假设定理 8.25，我们有 $x \blacktriangleright Tm = T(x \triangleright m)$，因此包含映射 $\iota \colon \mathbf{M}_T \longrightarrow \mathbf{M}^T$（方程（2.2.2））的像是一个 $\mathcal{C}$-模子范畴，其中$\mathbf{M}_T$ 被赋予推论 5.33 的证明中所给出的作用。

定理 8.26. 唯一嵌入 $\iota : (\mathbf{M}_T, \triangleright_{\mathcal{M}_T}) \longrightarrow (\mathbf{M}^T, \blacktriangleright)$ 可以配备强 $\mathcal{C}$-模函子的结构。

现在让我们回顾多范畴理论，参见 [Her00；Lei04]。

定义 8.27. 一个（局部小的）多范畴$\mathbf{C}$ 由以下内容组成

- 一个对象类 $\operatorname{Ob}\mathbf{C}$（即 $\mathbf{C}$ 的对象），其中我们将 $x \in \mathbf{C}$ 记为 $x \in \operatorname{Ob}\mathbf{C}$；
- 对于任意有限序列 $(x_1, \ldots\ldots, x_n, y)$（$\mathbf{C}$ 中的对象），一组多态射 $\mathbf{C}(x_1, \ldots\ldots, x_n; y)$，从 $(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ 到 y；
- 对于每个 $x \in \mathbf{C}$，一个恒等多态射 $\mathrm{id}_x \in \mathbf{C}(x; x)$；以及

- 对于任意 $y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$，$(x_i)_{i=1}^n \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})^n$，以及

$$\left((u_1^1, \dots, u_1^{k_1}), \dots, (u_n^1, \dots, u_n^{k_n})\right) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})^{k_1+\cdots+k_n},$$

一个复合运算

$$\begin{aligned}&\mathbf{C}(x_1, \dots, x_n; y) \times \mathbf{C}(u_1^1, \dots, u_1^{k_1}; x_1) \times \cdots \times \mathbf{C}(u_n^1, \dots, u_n^{k_n}; x_n)\\ &\quad \longrightarrow \mathbf{C}(u_1^1, \dots, u_n^{k_n}; y),\end{aligned}$$

满足自然的结合律与单位性条件；例如参见 [Lei04，第 2 节。1] 或 [Her00，定义 2。1]。

由于我们希望多范畴和多作用范畴对应于$\Bbbk$-线性幺半范畴与模范畴，因此应以向量空间替代多重态射集合，并以张量积替代笛卡尔积。然而，由于我们的目标是证明定理 8.25，而这可以在底层（普通）范畴的层面上验证，因此这并非必要。以下定义是 [AM24定义 6 的一个非斜特例。9]。

定义 8.28。设 $\mathbf{C}$ 为一个（局部小）多范畴。一个（局部小）左多作用范畴 $\mathbf{M}$ 在 $\mathbf{C}$ 上的数据包括：

- 一个对象类 $\mathrm{Ob}\mathbf{M}$，其中对象属于 $\mathbf{M}$；记作 $m \in \mathbf{M}$，表示 $m \in \mathrm{Ob}\mathbf{M}$；
- 对于 $\mathbf{C}$ 中的对象的任意有限（可以为空）序列 $(x_1, \dots, x_n)$，以及 $\mathbf{M}$中的一对对象 (m, m')，存在一个由 $(x_1, \dots, x_n; m)$ 到 m' 的多态射集合 $\mathbf{M}(x_1, \dots, x_n; m; m')$；
- 对于每个 $m \in \mathbf{M}$，都有一个恒等多态射 $\mathrm{id}_m \in \mathbf{M}(m; m)$；以及
- 对于任意 $x \in \mathbf{C}$、$m, m', l \in \mathbf{M}$、$(x_i)_{i=1}^n \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})^n$，并且

$$\left((u_1^1, \dots, u_1^{k_1}), \dots, (u_n^1, \dots, u_n^{k_n})\right) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})^{k_1+\cdots+k_n},$$

一个复合运算

$$\begin{aligned}&\mathbf{M}(x_1, \dots, x_n; m; m') \times \mathbf{C}(u_1^1, \dots, u_1^{k_1}; x_1) \times \cdots \times \mathbf{C}(u_n^1, \dots, u_n^{k_n}; x_n)\\ &\quad \times \mathbf{M}(u_{n+1}^1, \dots, u_{n+1}^{k_{n+1}}; \ell; m) \longrightarrow \mathbf{M}(u_1^1, \dots, u_{n+1}^{k_{n+1}}; \ell; m').\end{aligned} \tag{8.1.4}$$

这些数据必须满足 [AM24定义 4.4 和定义 6 中的（未加标记的）结合律和单位性公理。9]。

记号 8.29。从现在起，我们经常会使用类似于 [Her00]的向量记号来简写对象序列；例如，用$\mathrm{fi}x$ 表示$(x_1,\dots,x_n)$，用$(\mathrm{fi}x_1,\mathrm{fi}x_2)$表示$(x_1^1,\dots,x_1^{n_1},x_2^1,\dots,x_2^{n_2})$。当不需要追踪元组的长度时，我们将使用这种记号，以求清晰简洁。本节余下部分也固定采用以下记号：令$\mathbf{C}$ 为一个多范畴，并令$\mathbf{M}$ 为一个$\mathbf{C}$-多作用范畴。

回顾 [Her00，第 8] 章：对于 C 中由对象构成的元组 $\mathrm{fi}x$，预泛箭头由 C 的一个对象 $\otimes(\mathrm{fi}x)$ 以及一个多态射$\pi\in\mathsf{C}(\mathrm{fi}x;\otimes(\mathrm{fi}x))$ 构成，并诱导出同构 $\mathsf{C}(\otimes(\mathrm{fi}x);y)\xrightarrow{\sim}\mathsf{C}(\mathrm{fi}x;y)$。如果 π 还进一步诱导出同构

$$\mathbf{C}(\vec{z},\otimes(\vec{x}),\vec{z'};y)\xrightarrow{\sim}\mathbf{C}(\vec{z},\vec{x},\vec{z'};y),$$

我们称 π 为泛的。如果 $\mathbf{C}$ 中的任意对象序列都是某个泛箭头的定义域，就称$\mathbf{C}$ 为可表的。$\mathbf{C}$ 的一个表示 是指为$\mathbf{C}$中每个对象序列选取一个泛箭头。

定义 8.30。 设$\mathbf{M}$ 为一个$\mathbf{C}$-多作用范畴。对于$\mathbf{C}$ 中的对象元组 $\mathrm{fi}x$ 以及 $m\in\mathbf{M}$，预泛箭头由一个对象 $\triangleright(\mathrm{fi}x;m)$ 和一个多态射 $\pi\in\mathbf{M}(\mathrm{fi}x;m;\triangleright(\mathrm{fi}x;m))$ 构成，并诱导出同构

$$\mathbf{M}(\triangleright(\vec{x};m);m')\xrightarrow{\sim}\mathbf{M}(\vec{x};m;m').$$

若 π 进一步诱导出同构

$$\mathbf{M}(\vec{y},\triangleright(\vec{x};m);m')\xrightarrow{\sim}\mathbf{M}(\vec{y},\vec{x};m;m'),$$

则称 π 为泛的。

定义 8.31. 我们称多态射 $\rho\in\mathbf{C}(\mathrm{fi}x;y)$ 在$\mathbf{M}$ 中是预泛的，如果它诱导出同构 $\mathbf{M}(y;m;n)\xrightarrow{\sim}\mathbf{M}(\mathrm{fi}x;m;n)$。若它还诱导出同构 $\mathbf{M}(\mathrm{fi}z,\ \mathrm{fi}x,\ \mathrm{fi}w;m;n)\xrightarrow{\sim}\mathbf{M}(\mathrm{fi}z,\ y,\ \mathrm{fi}w;m;n)$，则称它在$\mathbf{M}$中是泛的。

定义 8.32. 对于可表的$\mathbf{C}$ 以及$\mathbf{C}$的一个表示R，若对于$\mathbf{C}$ 中对象的每个序列 $\mathrm{fi}x$ 以及每个对象 $m\in\mathbf{M}$，都存在一个泛箭头 $\pi_{(\vec{x};m)}\in\mathbf{M}(\mathrm{fi}x;m;\triangleright(\mathrm{fi}x,\ m))$，并且$\mathsf{R}$ 的所有态射在$\mathbf{M}$中都是泛的，则称$\mathbf{M}$ 相对于R是可表的。

回想一下 [Her00，命题 8。5]多作用范畴中的泛箭头$\mathbf{C}$ 在复合下封闭。此外，若$\mathbf{C}$中的每个对象序列都是某个预泛箭头的定义域，且预泛箭头在复合下封闭，那么$\mathbf{C}$ 中的预泛箭头就是泛箭头。多作用范畴也有类似结果。

引理 8.33。

1. **C** 在 **M** 中的泛箭头与**M** 中的泛箭头复合后，得到**M**中的泛箭头。*2.* 若**C** 在 **M** 中的预泛箭头与**M** 中的预泛箭头复合后，得到**M**中的预泛箭头，那么**M** 中的预泛态射就是泛箭头。*3.* 若**C** 中的预泛箭头在**M**中预泛地作用，且**C** 和**M** 中的预泛箭头在**M**中对复合封闭，那么**M** 就是可表的。

证明。对于第一部分，设 $(\pi_0,\ \rho_1,\ \ldots\ldots,\ \rho_n,\ \pi_{n+1})$ 是**M**中的一个可复合序列，其中 $\pi_0,\ \pi_{n+1}$ 属于 **M**，且 $\rho_1,\ \ldots\ldots,\ \rho_n \in \mathbf{C}$，如方程（8.1.4）所示，其中所有元素在 **M**中都是泛的。复合 $\pi_0 \circ (\rho_1,\ \ldots\ldots,\ \rho_n,\ \pi_{n+1})$产生同构序列

$$\begin{aligned}&\mathbf{M}(\vec{x}, \triangleright(\otimes(\vec{y}_1), \ldots, \otimes(\vec{y}_n); \triangleright(\vec{y}_{n+1}, m)), -)\\ &\quad \cong \mathbf{M}(\vec{x}, \otimes(\vec{y}_1), \ldots, \otimes(\vec{y}_n); \triangleright(\vec{y}_{n+1}, m); -) \cong \mathbf{M}(\vec{x}, \ldots, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{n+1}; m; -),\end{aligned}$$

从而证明该复合的泛性。

对于第二部分，考虑以下映射链：

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}; m; -) &\to \mathbf{M}(\vec{x}, \otimes(\vec{y}), \vec{z}; m; -) \to \mathbf{M}(\otimes(\vec{x}), \otimes(\vec{y}), \otimes(\vec{z}); m; -)\\ &\to \mathbf{M}(\triangleright(\otimes(\vec{x}), \otimes(\vec{y}), \otimes(\vec{z}); m); -),\end{aligned}$$

其中，第一个态射由 **C** 的预泛箭头 $\rho_{\vec{x}}$ 诱导，第二个态射由 **C** 的预泛箭头 $\rho_{\vec{y}}$ 和 $\rho_{\vec{z}}$ 诱导，第三个则由泛箭头 $\pi_{(\vec{y}, \mathrm{fix},\ \mathrm{fiz};\ m)}$ 诱导。三个映射的复合是一个同构——因为它由预泛箭头的复合诱导——因而是一个预泛箭头。后两个映射的复合也同样如此。这两个观察证明了第一个映射的可逆性。

第三部分通过将上述第二部分的证明应用于**C**的预泛箭头情形得到证明。□

假设**C** 是可表的，令**R** 为**C**的一个表示，并假设**M** 相对于**R**是可表的。给定**C** 中的一列对象 $x_1, \ldots, x_n$ 以及**M**中的一个对象 m，在给定的表示中，将泛箭头复合成一个定义域为$(x_1, \ldots, x_n; m)$的泛箭头，其方式的集合与将词 $x_1 \cdots x_n m$ 括号化为长度至少为二的子词所得的集合之间存在典范双射。令 $\diamond$和 $\diamond'$ 为两个这样的括号化。我们将

相应泛箭头的余域记为 $\diamond(x_1,\ldots,x_n;m)$和 $\diamond'(x_1,\ldots,x_n;m)$，并将泛箭头本身记为$\pi_{\diamond(x_1,\ldots,x_n;m)}$ 和$\pi_{\diamond'(x_1,\ldots,x_n;m)}$。$\pi_{\diamond(x_1,\ldots,x_n;m)}$ 的泛性质蕴含存在唯一的箭头

$$\alpha^{\diamond,\diamond'}_{\vec{x},m}\colon \diamond(x_1,\ldots,x_n;m)\longrightarrow \diamond'(x_1,\ldots,x_n;m),$$

满足 $\alpha^{\diamond,\diamond'}_{\mathrm{fix},m}\circ\pi_{\diamond(\mathrm{fix},m)}=\pi_{\diamond'(\mathrm{fix},m)}$，它是可逆的，逆元为 $\alpha^{\diamond',\diamond}_{\mathrm{fix},m}$。

此外，$\alpha^{\diamond,\diamond''}_{x,m}=\alpha^{\diamond'}_{x\,\mathrm{fix},\ ,\diamond''\,\mathrm{fi},m}\circ\alpha^{\diamond,\diamond'}_{\mathrm{fix},m}$。因此，对于任意序列 $x_1,\ldots,x_n,m$，我们得到一个粗糙范畴[19]，其对象是 $x_1\cdots x_n m$ 的括号化以及 $\mathrm{Hom}(\diamond,\diamond')=\{\alpha^{\diamond,\diamond'}_{\mathrm{fix},m}\}$。态射 $\alpha^{\diamond,\diamond'}_{\mathrm{fix},m}$ 对所有 i 都关于 m 和 x_i 自然。

[19] 如果每个对象到任意其他对象之间都存在唯一态射，则称一个范畴为粗糙。

注 8.34。回顾一下，给定一个带有固定表示的可表多范畴 **C**，存在一个由此定义的幺半范畴 $\mathscr{C}$，其对象为 $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}\mathrel{..=}\mathrm{Ob}\,\mathbf{C}$，$\mathscr{C}(x,y)\mathrel{..=}\mathbf{C}(x;y)$，并且 $x\otimes y\mathrel{..=}\otimes(x,y)$ 是表示中从 (x,y) 出发的泛箭头$\pi_{\otimes(x,y)}$ 的陪域。$\mathscr{C}$ 的结合子由上文所述的 $\alpha^{(wx)y,\,wx\,w(xy),\,,\,y}$ 定义；单位性也可得到类似的态射。

与词在 **C** 中的括号化相关联的态射范畴 $\alpha^{\diamond,\diamond'}$ 的粗糙性，意味着五边形图和三角形图的交换性，从而确立了 $\mathscr{C}$ 的相干性和良定义性。

上述粗糙范畴确立了下述定义中的 $\mathscr{C}$-模范畴 M 的良定义性。

定义 8.35. 设**M** 是一个基于可表多范畴 **C** 的可表多作用范畴，且二者都配备了固定表示。令 $\mathscr{C}$ 为与 **C** 的表示相关联的幺半范畴。与**M** 的固定表示相关联的 $\mathscr{C}$-模范畴 M 定义如下：令 $\mathrm{Ob}\,\mathbf{M}\mathrel{..=}\mathrm{Ob}\,\mathrm{M}$，$\mathrm{M}(m,n)\mathrel{..=}\mathbf{M}(m;n)$，且 $x\triangleright m\mathrel{..=}\triangleright(x,m)$ 为泛箭头 $\pi_{\triangleright(x,m)}$ 的陪域。结合子 $(x\otimes y)\triangleright m\xrightarrow{\sim}x\triangleright(y\triangleright m)$ 由箭头$\alpha^{(xy)m,x\,m\,x(ym),y,}$给出，单位子也类似。

在建立了 [Her00 的充分类似结果后；Lei04], 我们继续讨论 [AHLF18 第 3] 节的类似结果。对于 $x_i\in\mathscr{C}$ 和 $m\in\mathrm{M}$，记作

$$\varphi\colon x_1\triangleright\cdots\triangleright x_n\triangleright Tm\longrightarrow T(x_1\triangleright\cdots\triangleright x_n\triangleright m)$$

对于通过反复应用 T的弱结构得到的态射，其中 $x_1\triangleright\cdots\triangleright x_n\triangleright m$ 应读作 $x_1\triangleright(\cdots\triangleright(x_n\triangleright m))$。

我们还将考虑余等化子图表

$$T(x_1 \triangleright \cdots \triangleright x_n \triangleright Tm) \xrightarrow[T\varphi]{} T^2(x_1 \triangleright \cdots \triangleright x_n \triangleright m) \xrightarrow[\mu]{} T(x_1 \triangleright \cdots \triangleright x_n \triangleright m) \qquad (8.1.5)$$

这是自反的，其公共截面为 $T(x_1 \triangleright \cdots \triangleright x_n \triangleright m) \xrightarrow{T(x_1 \triangleright \cdots \triangleright x_n \triangleright \eta_m)} T($ $x_1 \triangleright \cdots \triangleright x_n \triangleright Tm)$。

定义 8.36. 态射 $f\colon x_1 \triangleright \cdots \triangleright x_n \triangleright m \longrightarrow m'$ 称为 n-多重线性，如果以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} x_1 \triangleright \cdots \triangleright x_n \triangleright Tm & \xrightarrow{\varphi} & T(x_1 \triangleright \cdots \triangleright x_n \triangleright m) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle x_1 \triangleright \cdots \triangleright x_n \triangleright \nabla_m} & & \Big\downarrow{\scriptstyle Tf} \\ & & Tm' \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle \nabla_{m'}} \\ x_1 \triangleright \cdots \triangleright x_n \triangleright m & \xrightarrow[f]{} & m' \end{array}$$

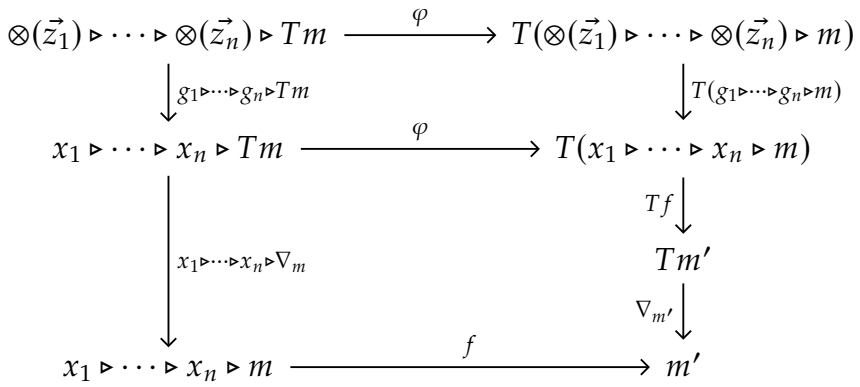
备注 8.37. 对于幺半范畴 $\mathscr{C}$，存在一个可表的多范畴 $\mathbf{C}$，其中 $\mathbf{C}(x_1, \ldots, x_n; y) \mathrel{..}= \mathscr{C}(x_1 \otimes (\cdots (x_{n-1} \otimes x_n) \ldots), y)$。于是，多态射 $\pi \in \mathbf{C}(x_1, \ldots, x_n; y)$ 是泛的，当且仅当它是一个同构 $\pi\colon x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \xrightarrow{\sim} y$。

类似地，给定一个 $\mathscr{C}$-模范畴，可得到一个定义在 $\mathbf{C}$ 上的可表多范畴 $\mathbf{M}$，满足 $\mathbf{M}(x_1, \ldots, x_n; m; n) = \mathbf{M}(x_1 \triangleright \cdots \triangleright x_n \triangleright m, m')$。泛箭头 $\pi \in \mathbf{M}(x_1, \ldots, x_n; m; m')$ 是一个同构 $\pi\colon x_1 \triangleright \cdots \triangleright m \xrightarrow{\sim} m'$。

引理 8.38. 对于一个 $\mathscr{C}$-模范畴 M，$\mathbf{M}$ 的多线性态射集合在与 $\mathbf{C}$ 的态射进行多重合成下保持稳定，从而构成一个 $\mathscr{C}$-多范畴，我们将其记为 $\mathbf{M}^{\varphi}$。

证明。 对于 $i = 1, \ldots, n$，考虑序列 fiz_i；态射 $\otimes(z_i) \xrightarrow{g_i} x_i$，其中 $\otimes(z_i)$ 同样采用最右结合的括号；以及一个多重线性态射 $f\colon x_1 \triangleright \ldots \triangleright x_n \triangleright m \longrightarrow m'$，其值属于 $\mathbf{M}$。结论立即由

交换性



其中顶面因 $\mathscr{C}$ 在 $\mathbf{M}$ 中的作用的自然性而交换。 □

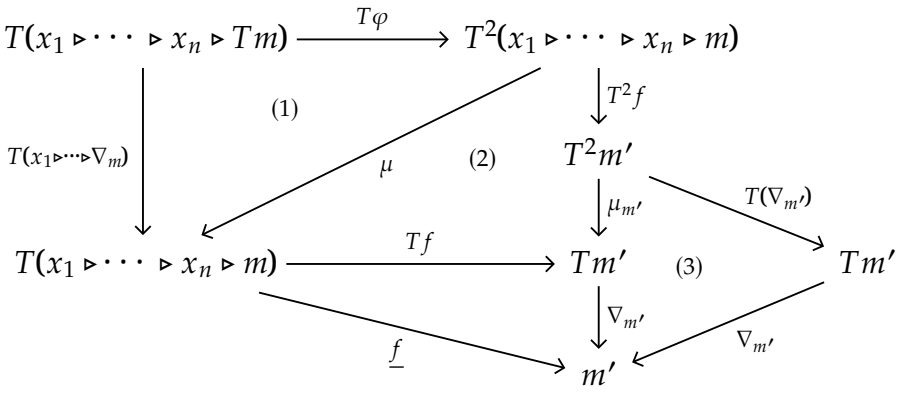
注意$\mathbf{M}^{\varphi}$ 可表将证明定理8.25，因为此时 $\mathscr{C}$-模范畴可以配备相容的结合子；见注记8.34 与定义8.35。

引理 8.39. 映射 f 是 n-多重线性的，当且仅当该映射

$$\underline{f} : T(x_1 \triangleright \ldots \triangleright x_n \triangleright m) \xrightarrow{Tf} Tm' \xrightarrow{\nabla_{m'}} m'$$

余等化图表（8.1.5），并且 f 在$\mathbf{M}^{\varphi}$ 中是预泛的，当且仅当 f 是同上的（泛）余等化子。

证明。考虑如下图表:



对这一对态射（8.1.5）进行余等化，恰好就是对上述图表中的面 (1) 进行余等化。因此，由于面 (2) 交换，这等价于 $\nabla_{m'}$ 对由面(1) 和 (2)共同构成的方形进行余等化。

注意，利用面 (3) 的交换性，将这个方形与 $\nabla_{m'}$ 复合，恰好得到 $\mathbf{M}^T(T(x_1 \triangleright \cdots \triangleright Tm),\ m')$ 中的一对态射；这对态射对应于 $\mathbf{M}(x_1 \triangleright \cdots \triangleright T(m),\ m')$ 中的一对态射，它们在 $\mathbf{M}^T(T(-),\ =) \cong \mathbf{M}(-,\ =)$ 下定义了 f 的多重线性。因此，第一条陈述中的两个条件都等价于该图表的交换性。

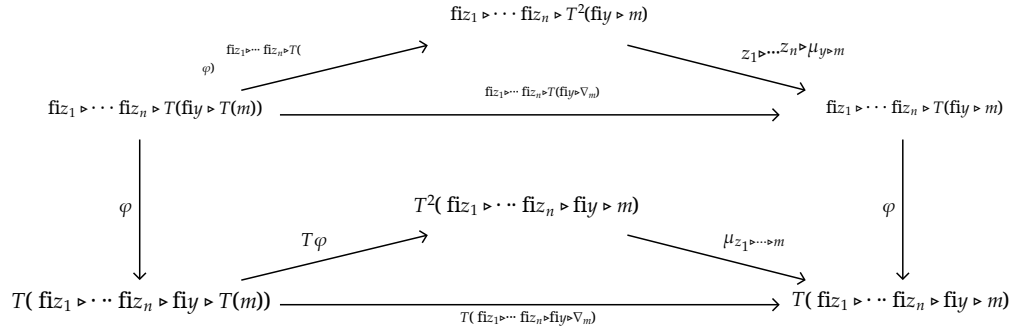
第二个陈述的证明与 [AHLF18，引理 3 类似。5] □

最后，为了证明定理 8.25 和 8.26，我们需要一个类似于 [AHLF18，命题 313]的结果。

命题 8.40。 多范畴$\mathbf{M}^\varphi$ 是可表的。

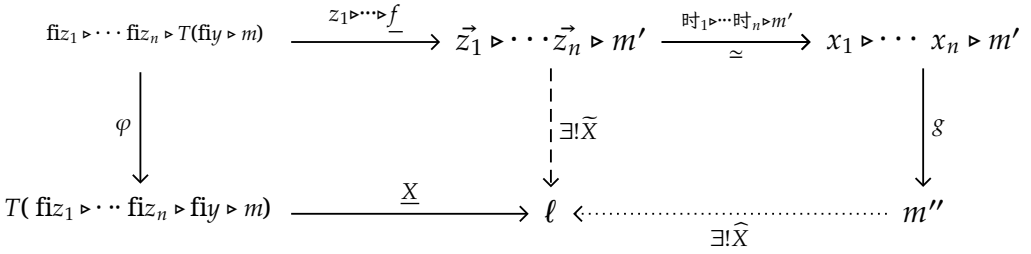
证明。设 $(x_1, \ldots, x_n, m')$ 是一列对象，其中 $x_i \in \mathcal{C}$ 和 $m' \in$属于 M。根据引理 8.39，图 (8.1.5) 的余等化子定义了 $\mathbf{M}^\varphi$ 中一个定义域为 $(x_1, \ldots, x_n; m')$ 的预泛映射。还需证明预泛映射的复合仍为预泛映射。因此，考虑序列 $\mathrm{fi}z_1, \ldots, \mathrm{fi}z_n$ 和 $\mathrm{fi}y$，C 的泛多重态射 $\mathrm{h}_i\colon \mathrm{fi}z_i \longrightarrow x_i$，以及泛多重态射 $f\colon (\mathrm{fi}y, m) \longrightarrow m'$ 和 $g\colon (\mathrm{fi}x, m') \longrightarrow m''$。

请看下面的图表：



与证明 [AHLF18 命题 3 类似。13], 这是一个从顶部三角形图表到下方图表的态射，其中顶部是 $(\mathrm{fi}z_1, \ldots, \mathrm{fi}z_n)$ 对 $(\mathrm{fi}y, m)$的 Linton 对上的作用，而底部是 $(\mathrm{fi}z_1, \ldots, \mathrm{fi}z_n, \mathrm{fi}y;\ m)$的 Linton 对。

现在，令 $X \in \mathbf{M}^\varphi(\mathrm{fi}z_1,\ \ldots\ldots,\ \mathrm{fi}z_n,\ \mathrm{fi}y;\ m;\ l)$。考虑图表



~其中 X 由引理 8.39， X 存在，因为它将上文倒数第二个图表中的底部 Linton 对余等化，而 $h_1 \triangleright \cdots \triangleright f$ 是同一图表中顶部 Linton 对的余等化子。

~与 [AHLF18 的引理 3 类似，11]可以证明 X 是多重线性的，因此 $h_1^{-1} \triangleright \cdots \triangleright h_n^{-1} \triangleright m'$ 也是多重线性的，因为 h_i 对所有 i 都是可逆的，因为它是^的预泛箭头，$\mathbf{C}$，因而也是泛箭头。这证明了 X 的存在性。

因此，多重线性态射 X 可经由 $g \circ (h_1, \ldots, h_n, f)$ 分解，并且~ ^根据 X 和 X 的唯一性，该分解也是唯一的。这证明了复合 $g \circ (h_1, \ldots, h_n, f)$ 的预泛性。□

8.2 内部投射对象与内射对象

定义 8.41。设 $\mathscr{C}$ 是一个阿贝尔幺半范畴，$\mathbf{M}$ 是一个阿贝尔 $\mathscr{C}$-模范畴。若对任意投射对象 $P \in \mathscr{C}$，对象 $P \triangleright M \in \mathbf{M}$ 都是投射的，则称对象 $M \in \mathbf{M}$ 为 $\mathscr{C}$-投射的。类似地，若对任意内射对象 $I \in \mathscr{C}$，对象 $I \triangleright M \in \mathbf{M}$ 都是内射的，则称 M 为 $\mathscr{C}$-内射的 。

下一个结果将 $\mathscr{C}$-投射的形式定义与阿贝尔范畴中投射对象的通常概念联系起来。

命题 8.42. 假设 $\mathscr{C}$ 和 $\mathbf{M}$ 有足够多的投射对象。设 M 是 $\mathbf{M}$ 的一个闭对象。那么 $\lfloor M, - \rfloor$ 是右正合的，当且仅当 M 是 $\mathscr{C}$-投射的。

证明。若 $\lfloor M, - \rfloor$ 是右正合的，且 P 是 $\mathscr{C}$ 中的一个投射对象，则 $P \triangleright M$ 是投射的，因为 $\mathbf{M}(P \triangleright M, -) \cong \mathscr{C}(P, \lfloor M, - \rfloor)$，这是若干右正合函子的复合，因此本身也是一个右正合函子。

假设 M 是 $\mathscr{C}$-投射的。令 $\operatorname{colim}_j N_j$ 为 $\mathbf{M}$ 中的一个有限余极限，并且 $X \in \mathscr{C}$。由于 $\mathscr{C}$ 有足够多的投射对象，因此有 $X \cong \operatorname{colim}_i Q_i$，从而将 X 实现为一个由投射对象构成的有限图表的余极限。于是我们有

$$
\begin{aligned}
\mathscr{C}(X, \lfloor M, \operatorname*{colim}_j N_j \rfloor) &\cong \mathscr{C}(\operatorname*{colim}_i Q_i, \lfloor M, \operatorname*{colim}_j N_j \rfloor) \\
&\cong \lim_i \mathscr{C}(Q_i, \lfloor M, \operatorname*{colim}_j N_j \rfloor) \cong \lim_i \mathscr{M}(Q_i \triangleright M, \operatorname*{colim}_j N_j) \\
&\cong \lim_i \operatorname*{colim}_j \mathscr{M}(Q_i \triangleright M, N_j) \cong \lim_i \operatorname*{colim}_j \mathscr{C}(Q_i, \lfloor M, N_j \rfloor) \\
&\cong \lim_i \mathscr{C}(Q_i, \operatorname*{colim}_j \lfloor M, N_j \rfloor) \cong \mathscr{C}(\operatorname*{colim}_i Q_i, \operatorname*{colim}_j \lfloor M, N_j \rfloor) \\
&\cong \mathscr{C}(X, \operatorname*{colim}_j \lfloor M, N_j \rfloor).
\end{aligned}
$$

□

将命题 8.42对偶化后，我们得到以下结果。

命题 8.43. 假设 $\mathscr{C}$ 和 $\mathbf{M}$ 有足够多的内射对象。令 M 为 $\mathbf{M}$中的一个余闭对象。那么，$\lceil M, -\rceil$ 是左正合的，当且仅当 M 是 $\mathscr{C}$-内射的。

定义 8.44. 设 $\mathscr{C}$ 为一个阿贝尔幺半范畴，$\mathbf{M}$ 为一个阿贝尔 $\mathscr{C}$-模范畴，且二者都有足够多的投射对象。称一个 $\mathscr{C}$-投射对象 M 为 $\mathscr{C}$-投射 $\mathscr{C}$-生成元，若对 $\mathbf{M}$ 中的任意投射对象 Q，都存在 $\mathscr{C}$中的一个投射对象 P，使得 Q 是 $P \triangleright M$的直和项。

类似地，若 $\mathscr{C}$和 $\mathbf{M}$ 都有足够多的内射对象，则称一个 $\mathscr{C}$-内射对象 M 为 $\mathscr{C}$-内射 $\mathscr{C}$-余生成元，若 $\mathbf{M}$ 中的任意内射对象 J 都是某个形如 $I \triangleright M$的对象的直和项，其中 I 是 $\mathscr{C}$中的一个内射对象。

命题 8.45. 假设 $\mathscr{C}$ 和$\mathbf{M}$ 都有足够多的投射对象。设 $M \in \mathbf{M}$ 是一个闭合的 $\mathscr{C}$-投射对象。若 M 是一个 $\mathscr{C}$-生成元，则 $\lfloor M, -\rfloor$ 反映零对象。

若 $\mathscr{C}$-投射 是一个 *Krull–Schmidt* 范畴，且 $\mathscr{C}$ 的每个不可分解投射对象都是某个简单对象的投射覆盖，则 $\lfloor M, -\rfloor$ 反映零对象，当且仅当 M 是一个 $\mathscr{C}$-生成元。

证明。 假设 M 是一个 $\mathscr{C}$-生成元。设 N 是 $\mathbf{M}$ 的非零对象，并设 $Q \twoheadrightarrow N$ 是从 $\mathbf{M}$ 中某个投射对象出发的满态射。设 P是 $\mathscr{C}$ 中的一个投射对象，使得 Q 是 $P \triangleright M$ 的一个直和项。那么 $\mathbf{M}(P \triangleright M, N)$ 非零，因为 $\mathbf{M}(Q, N)$ 是它的一个直和项。因此

$$0 \neq \mathscr{M}(P \triangleright M, N) \cong \mathscr{C}(P, \lfloor M, N \rfloor),$$

这表明 $\lfloor M, N \rfloor$非零。

对于后一个结论，设 Q' 是 $\mathbf{M}$ 的一个不可分解投射对象， S 是它的简单顶端。由于 $\lfloor M, S \rfloor \neq 0$，存在某个 $V \in \mathbf{M}$，使得 $\mathscr{C}(V, \lfloor M, S \rfloor) \neq 0$。设 $P' \twoheadrightarrow V$是从 $\mathscr{C}$中的某个投射对象出发的满态射。那么

$$0 \neq \mathscr{C}(V, \lfloor M, S \rfloor) \simeq \mathscr{C}(P', \lfloor M, S \rfloor) \simeq \mathscr{C}(P' \triangleright M, S).$$

由于 M 是 $\mathscr{C}$-投射的，对象 $P' \triangleright M$ 是投射的。因此， $\mathscr{C}(P' \triangleright M, S)$ 非零意味着 Q' 是 $P' \triangleright M$的一个直和项。□

更贴近经典情形的另一种定义是：若闭合$M \in \mathbf{M}$ 是一个 $\mathscr{C}$-生成元，当 $\lfloor M, -\rfloor$ 为忠实的，参见 [DSPS19，定义 2。21]。

对命题8.45作对偶化，就给出一个用余闭和 $\mathscr{C}$-内射对象表述的类似变体。

命题 8.46. 设 $\mathscr{C}$ 与 M 有足够多的内射对象，并设 $M \in \mathrm{M}$ 为一个余闭$\mathscr{C}$-内射对象。若 M 是一个 $\mathscr{C}$-余生成元，则 $\ulcorner M, -\urcorner$ 反射零对象。

如果 $\mathscr{C}$-内射 是一个 *Krull–Schmidt* 范畴，且 $\mathscr{C}$ 的每个不可分解内射对象都是某个简单对象的内射包，那么 $\ulcorner M, -\urcorner$ 反映零对象，当且仅当 M 是一个 $\mathscr{C}$-余生成元。

最后，我们简要介绍半单模范畴中的内投射对象和内内射对象。

命题 8.47. 设 $\mathscr{C}$ 是一个有足够多投射对象的幺半范畴，且M 是一个半单 $\mathscr{C}$-模范畴。

由于 M 是半单的，M 中的任意对象都是$\mathscr{C}$-投射的且$\mathscr{C}$-内射的。

对象 $M \in \mathrm{M}$ 是一个 $\mathscr{C}$-生成元，当且仅当任意简单对象 $S \in \mathrm{M}$ 都是某个形如 $P \triangleright M$ 的对象的直和项，其中 $P \in \mathscr{C}$-投射。

证明。回想一下，在半单阿贝尔范畴中，每个对象都是投射的。特别地，对于 $M \in \mathrm{M}$ 和 $P \in \mathscr{C}$-proj，$P \triangleright M$ 总是投射的，因此 M 中的每个对象都是 $\mathscr{C}$-投射的。

现在，设 $M \in \mathrm{M}$ 是一个 $\mathscr{C}$-生成元。由于简单对象 $S \in \mathrm{M}$ 是投射的，由 M 是一个 $\mathscr{C}$-生成元立即可知，对于某个 $P \in \mathscr{C}$-proj，S 是 $P \triangleright M$ 的一个直和项。

最后，假设每个简单对象都是某个 $P \in \mathscr{C}$ 的 $P \triangleright M$ 直和项，并令 $Q \in \mathrm{M}$-proj。由于 M 是半单的，对于 M 中的简单对象 S_i，我们有 $Q \cong \oplus_i S_i$。由于对于某个 $P_i \in \mathscr{C}$，S_i 是 $P_i \triangleright M$ 的一个直和项，因此计算得

$$Q \cong \oplus_i S_i \subseteq_{\oplus} \oplus_i (P_i \triangleright M) \cong (\oplus_i P_i) \triangleright M \overset{\text{def}}{=} P \triangleright M. \qquad \square$$

8.3 宽松模自函子的重构

T以下是我们最一般的模范畴重构结果 .

定理 8.48. 设 $\mathscr{C}$ 是一个有足够多投射对象的幺半阿贝尔范畴，M 是一个有足够多投射对象的阿贝尔 $\mathscr{C}$-模范畴，并假设 $l \in \mathrm{M}$ 是一个闭合的 $\mathscr{C}$-投射 $\mathscr{C}$-生成元。那么存在一个 $\mathscr{C}$-模范畴之间的等价

$$\mathscr{M} \simeq \mathscr{C}^{\lfloor \ell, - \triangleright \ell \rfloor},$$

其中 $\mathscr{C}^{\lfloor \ell, - \triangleright \ell \rfloor}$ 通过 *Linton* 余等化子赋予扩展的 $\mathscr{C}$-模结构，见定理8.25。

证明。根据例 2.50，函子 $-\triangleright \mathbb{1}$ 是一个强 $\mathscr{C}$-模函子。由推论 5.29，其右伴随 $\lfloor \mathbb{1}, - \rfloor$ 是一个宽松 $\mathscr{C}$- 模函子。因此，所得的单子 $\lfloor \mathbb{1}, -\triangleright \mathbb{1} \rfloor$ 是一个右正合的宽松 $\mathscr{C}$-模单子。命题 5.35 表明，比较函子 $\mathscr{C}^{\lfloor \ell, -\triangleright \mathbb{1} \rfloor} \longrightarrow \mathbb{M}$ 是一个强$\mathscr{C}$-模函子。此外，由于命题 8.42 和 8.45，$\lfloor \mathbb{1}, - \rfloor$ 是右正合的，且反映零对象，因此我们可以应用定理 2.92，由此比较函子 $\mathbb{M} \longrightarrow \mathscr{C}^{\lfloor \ell, -\triangleright \mathbb{1} \rfloor}$ 是一个等价。沿此等价传递 $\mathscr{C}$-模结构，我们在 $\mathscr{C}^{\lfloor \ell, -\triangleright \mathbb{1} \rfloor}$上得到一个扩展的$\mathscr{C}$-模结构；由定理 8.9 可知，该结构必然就是定理 8.25 中的结构；这就证明了结论。□

利用定理 8.25，我们也可以给出一个逆命题。

定理 8.49. 设 $\mathscr{C}$ 是一个有足够多投射对象的幺半阿贝尔范畴，并设 T 是 $\mathscr{C}$ 上的右正合宽松 $\mathscr{C}$-模单子。那么 $T\mathbb{1}$ 是一个闭合的 $\mathscr{C}$-投射$\mathscr{C}$-生成元，且后者上的 $\mathscr{C}^T$-模范畴结构由定理 8.25给出。存在一个双射

$$\begin{aligned} \{ (\mathscr{M}, \ell) \text{ as in Theorem 8.48} \}\big/_{\mathscr{M} \simeq \mathscr{N}} &\overset{\cong}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{matrix} \text{Right exact lax } \mathscr{C}\text{-module} \\ \text{monads on } \mathscr{C} \end{matrix} \right\} \Big/ \mathscr{C}^T \simeq \mathscr{C}^S \\ (\mathscr{M}, \ell) &\longmapsto \lfloor \ell, - \triangleright \ell \rfloor \\ (\mathscr{C}^T, T\mathbb{1}) &\longmapsto T \end{aligned}$$

证明。 $T\mathbb{1}$ 是闭合的这一事实可直接由以下同构得出

$$\mathscr{C}^T(- \triangleright T\mathbb{1}, =) \overset{(i)}{\cong} \mathscr{C}^T(T(- \otimes \mathbb{1}), =) \simeq \mathscr{C}(- \otimes \mathbb{1}, U^T(=)) \simeq \mathscr{C}(-, U^T(=))$$

表明 $\lfloor T\mathbb{1}, \ - \rfloor \cong U^T$，其中 (i) 由引理 8.23得出。

对于 $P \in \mathscr{C}$-投射对象，$P \triangleright T(\mathbb{1}) \cong TP$ 由命题 8.5可知是投射对象。由同一结果，$T\mathbb{1}$ 是一个 $\mathscr{C}$-投射生成元，且 $\mathscr{C}^T$ 有足够多投射对象。

对于后一个断言，注意到 $\mathbb{M} \simeq \mathscr{C}^{\lfloor T\mathbb{1}, \ -\triangleright T\mathbb{1} \rfloor}$ 根据定理 8.48。最后，$\mathscr{C}^T \simeq \mathscr{C}^{\lfloor T\mathbb{1}, -\triangleright T\mathbb{1} \rfloor}$ 成立，因为由 $\lfloor T\mathbb{1}, \ - \rfloor \cong U^T$ 并利用伴随的唯一性，$F^T \cong - \triangleright T\mathbb{1}$ 我们推得 $T \cong \lfloor T\mathbb{1}, \ - \triangleright T\mathbb{1} \rfloor$。□

使用命题8.43和8.46 代替命题 8.42和8.45，我们得到对偶陈述。

定理 8.50. 设 $\mathscr{C}$ 为一个有足够多的内射对象的幺半阿贝尔范畴，M 为一个有足够多的内射对象的阿贝尔 $\mathscr{C}$-模范畴，并假设 $l \in \mathrm{M}$ 为一个余闭 $\mathscr{C}$-内射 $\mathscr{C}$-余生成元。

那么存在一个 $\mathscr{C}$-模范畴的等价

$$\mathscr{M} \simeq \mathscr{C}^{\lceil \ell, - \triangleright \ell \rceil},$$

其中 $\mathscr{C}^{\lceil \ell,\ - \triangleright l \rceil}$ 赋予了定理 *8.25* 中扩展的 -模结构。

定理 8.51。 设 $\mathscr{C}$ 是一个有足够多内射对象的幺半阿贝尔范畴，且 S是 $\mathscr{C}$上的一个左正合 *oplax* $\mathscr{C}$-模余单子。那么 $\mathscr{C}^S$，赋予定理 *8.25*中的 $\mathscr{C}$-模范畴结构后，是一个 $\mathscr{C}$-模范畴，并且 $S1$ 是一个余闭$\mathscr{C}$-内射 $\mathscr{C}$-生成元。存在一个双射

$$\left\{ (\mathscr{M}, \ell) \text{ as in Theorem } 8.50 \right\} \Big/ \mathscr{M} \simeq \mathscr{N} \leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \textit{Left exact oplax } \mathscr{C}\textit{-module} \\ \textit{comonads on } \mathscr{C} \end{matrix} \right\} / \mathscr{C}^S \simeq \mathscr{C}^G$$

$$(\mathscr{M}, \ell) \longmapsto \lceil \ell, - \triangleright \ell \rceil$$

$$\left(\mathscr{C}^S, S1\right) \longmapsto S$$

注意，定理 8.48 和8.50 并未对 M作任何有限性假设——此类条件通常会因存在闭合 $\mathscr{C}$-投射 $\mathscr{C}$-生成元，或余闭 $\mathscr{C}$-内射 $\mathscr{C}$-余生成元而被施加。

命题 8.52。 设 $\mathscr{C}$ 是一个有限阿贝尔幺半范畴，并假设M 是一个阿贝尔 $\mathscr{C}$-模范畴，且存在一个闭合 $\mathscr{C}$-投射 $\mathscr{C}$-生成元 $l \in \mathrm{M}$。那么M 是有限阿贝尔范畴。

证明。 由定理 8.48，我们有一个 $\mathscr{C}$-模等价 $\mathrm{M} \simeq \mathscr{C}^{\lfloor \ell, - \triangleright l \rfloor}$。由于$- \triangleright l$ 有右伴随函子，因此它是右正合的。由于 l 是 $\mathscr{C}$-投射的，函子$\lfloor l, - \rfloor$ 也右正合。因此，$\lfloor l, - \triangleright l \rfloor$ 是有限阿贝尔范畴 $\mathscr{C}$上的右正合单子。由命题 8.5，$\mathscr{C}^{\lfloor \ell, - \triangleright l \rfloor}$ 是有限阿贝尔的。□

用命题 8.3替代命题8.5，即可得到以下结论。

命题 8.53。 设 $\mathscr{C}$ 是一个局部有限阿贝尔幺半范畴，并设 M是一个有足够多内射对象的阿贝尔 $\mathscr{C}$-模范畴，且存在一个余闭的 $\mathsf{Ind}(\mathscr{C})$-内射 $\mathsf{Ind}(\mathscr{C})$-生成元 $l \in \mathrm{M}$。那么，M中的紧对象全子范畴是局部有限阿贝尔的。

在满足适当的有限性条件时，有限与局部有限阿贝尔范畴之间伴随函子的刻画，为模范畴中的对象是闭合或余闭的情形提供了充分条件。

命题 8.54。 设 $\mathscr{C}$ 是一个有限阿贝尔幺半群范畴，且M 是一个有限阿贝尔 $\mathscr{C}$-模范畴。那么，对象 $m \in \mathrm{M}$ 是闭合的，当且仅当函子$-\triangleright m$ 是右正合的。

证明。 这是命题 2.138的直接推论。 □

同理，利用命题 2.137，可证明如下结论。

命题 8.55。 设 $\mathscr{C}$ 是局部有限阿贝尔幺半范畴，且 M 是局部有限阿贝尔 $\mathscr{C}$-模范畴。对象 $l \in \mathrm{Ind}(\mathrm{M})$ 关于 $\mathrm{Ind}(\mathrm{M})$ 上诱导的 $\mathrm{Ind}(\mathscr{C})$-模结构余闭，当且仅当 $-\triangleright l : \mathscr{C} \longrightarrow \mathrm{Ind}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathrm{Ind}(\mathrm{M})$ 是左正合，且诱导函子 $-\triangleright l : \mathrm{Ind}(\mathrm{M})$ 是拟有限。

8.3.1 刚性幺半范畴与（有限）张量范畴

当 $\mathscr{C}$ 是刚性幺半范畴时，我们得到一个代数重构结果 .

定理 8.56。 设 $\mathscr{C}$ 是一个有足够多投射对象的刚性幺半阿贝尔范畴，M 是一个阿贝尔 $\mathscr{C}$-模范畴，并假设 $l \in \mathrm{M}$是一个闭合 $\mathscr{C}$-投射 $\mathscr{C}$-生成元。则存在一个代数对象 $A \in \mathscr{C}$，使得存在如下 $\mathscr{C}$-模范畴之间的等价

$$\mathrm{mod}_{\mathscr{C}} A \simeq \mathscr{M}.$$

证明。 由定理 8.48，我们有 $\mathscr{C}^{\lfloor l, -\triangleright l \rfloor} \simeq \mathrm{M}$ 作为 $\mathscr{C}$-模范畴。由命题 2.73，单子 $\lfloor l, -\triangleright l \rfloor : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$是一个强 $\mathscr{C}$-模函子，因为它是宽松的，并且 $\mathscr{C}$ 具有刚性。由命题 5.23可得结论。 □

定理 8.57。 设 $\mathscr{C}$ 是一个有足够多内射对象的刚性幺半阿贝尔范畴，M 是一个阿贝尔 $\mathscr{C}$-模范畴，并假设 $l \in \mathrm{M}$ 是一个余闭 $\mathscr{C}$-内射 $\mathscr{C}$-余生成元。则存在一个余代数对象 $C \in \mathscr{C}$，使得存在 $\mathscr{C}$-模范畴之间的等价余模$_{\mathscr{C}} C \simeq \mathrm{M}$。

回顾以下结果，其中 $\mathscr{C}$ 是一个多张量范畴。

定理 8.58 ([EGNO15，定理 7.10。1])。 设 $\mathscr{C}$ 是一个有限多张量范畴，且 M 是一个阿贝尔 $\mathscr{C}$-模范畴，使得

- 函子 $-\triangleright =$ 关于第一个变量是正合的（由于 $\mathscr{C}$ 是刚性的，它关于第二个变量总是正合的）；
- 存在一个 $\mathscr{C}$-投射 $\mathscr{C}$-生成元。

则存在一个代数对象 A 于 $\mathscr{C}$ 中，使得M $\simeq$ 模$_{\mathscr{C}}A$。

我们将此陈述推广到局部有限情形。

定理 8.59. 设 $\mathscr{C}$ 为一个多张量范畴，且设 M 为一个阿贝尔 $\mathscr{C}$-模范畴，使得 Ind($\mathscr{C}$)- 模范畴 Ind(M) 存在一个余闭的 Ind($\mathscr{C}$)- 内射 Ind($\mathscr{C}$)- 余生成元 l。

那么存在一个余代数对象 C，位于 Ind($\mathscr{C}$) 中，使得 Ind(M) $\simeq$ 余模$_{\mathrm{Ind}(\mathscr{C})}C$。因此，M 是紧 C-余模对象范畴。

证明。由定理 8.50，作为 Ind($\mathscr{C}$)-模范畴，有 Ind(M) $\simeq$Ind($\mathscr{C}$)$^{\lceil \ell, - \triangleright \mathrm{l} \rceil}$。根据命题 2.129，注意到 Ind($\mathscr{C}$) 和 Ind(M) 上的 Ind($\mathscr{C}$)-模范畴结构，分别是相应 $\mathscr{C}$-模范畴结构的有限扩张。类似地，$- \triangleright \mathrm{l} : \mathrm{Ind}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathrm{Ind}(\mathrm{M})$ 是 $- \triangleright \mathrm{l} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathrm{Ind}(\mathrm{M})$ 的扩张。在 Ind-完备化上，左伴随 $\lceil \mathrm{l}, - \rceil \colon \mathrm{Ind}(\mathrm{M}) \longrightarrow \mathrm{Ind}(\mathscr{C})$ 由引理 2.139 可知是有限的且保紧对象，因此限制为一个宽松的 $\mathscr{C}$-模函子 $\lceil \mathrm{l}, - \rceil \colon \mathrm{M} \longrightarrow \mathscr{C}$。

由于 $\mathscr{C}$ 具有刚性，受限的 $\mathscr{C}$-模函子 $\lceil l, - \rceil \colon \mathrm{M} \longrightarrow \mathscr{C}$ 实际上是一个强 $\mathscr{C}$- 模函子。其有限扩张 $\lceil l, - \rceil \colon \mathrm{Ind}(\mathrm{M}) \longrightarrow \mathrm{Ind}(\mathscr{C})$ 是一个强 Ind($\mathscr{C}$)- 模函子，而余单子 $\lceil l, - \triangleright l \rceil$ 是一个强Ind($\mathscr{C}$)-模单子。根据命题 5.23，它具有 $- \otimes C$ 的形式，其中的对象是Ind($\mathscr{C}$)中的一个余代数对象，因此

$$\mathrm{Ind}(\mathscr{M}) \simeq \mathrm{Ind}(\mathscr{C})^{\lceil \ell, - \triangleright \ell \rceil} \simeq \mathrm{Comod}_{\mathrm{Ind}(\mathscr{C})} C.$$

根据命题 8.3，M 由紧 C-余模对象组成，这些对象属于 $\mathscr{C}$。 □

推论 *8.60*。设 H 是一个霍普夫代数，并设 $\mathscr{C} = {}^{H}vect$；特别地，我们有一个幺半等价 $Ind(\mathscr{C}) \simeq {}^{H}Vect$。设 M 是一个阿贝尔 $\mathscr{C}$-模范畴，并且 $Ind(M)$ 这一 $Ind(\mathscr{C})$-模范畴具有一个余闭的 $Ind(\mathscr{C})$-内射 $Ind(\mathscr{C})$-余生成元。那么存在一个 H-余模余代数 C，使得存在一个等价 $Ind(M) \simeq Comod_H C$，它是 $Ind(\mathscr{C})$-模范畴之间的等价，并且限制为一个$\mathscr{C}$-模等价 $M \simeq comod_H C$。

8.4 宽松模单子的 Eilenberg–Watts 定理

双射的表述定理8.51表明，模范畴的重构理论具有 Morita 方面，因为对单子施加的等价关系与代数的 Morita 等价极为相似，并且可特化为后者。

在定理8.72中，我们刻画了从 Eilenberg–Moore 范畴到 $\mathscr{C}$-模单子的 Eilenberg–Moore 范畴之间的右正合宽松 $\mathscr{C}$-模函子：它们由 $\mathscr{C}$的自函子范畴中适当的双模对象来描述——这为单子的 Morita 等价这一概念赋予了精确定义，因此定理8.75给出了一个双射

$$\begin{aligned}\{(\mathscr{M},\ell)\text{ as in Theorem 8.50}\}\big/_{\mathscr{M}\simeq\mathscr{N}} &\overset{\simeq}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix}\text{Left exact oplax } \mathscr{C}\text{-mod-}\\ \text{ule comonads on } \mathscr{C}\end{matrix}\right\}\Big/_{\simeq\text{Morita}}\\ (\mathscr{M},\ell) &\longmapsto \lceil \ell, - \triangleright \ell \rceil\\ (\mathscr{M}^T, T1) &\longmapsfrom T\end{aligned}$$

我们先介绍一些术语。

定义 8.61. 设 $\mathscr{A}$ 是一个阿贝尔范畴，并假设 T 和 S 是 $\mathscr{A}$上的右正合单子。将它们视为$\mathsf{Rex}(\mathscr{A},\mathscr{A})$中的代数对象，则一个$T$-$S$-双作用函子 是$\mathsf{Rex}(\mathscr{A},\mathscr{A})$中的一个 T-S-双模对象。

换句话说，双作用函子 $F\colon \mathscr{A}\longrightarrow\mathscr{A}$ 是一个三元组（F，F_{la}，F_{ra}），由 $\mathscr{A}$ 上的一个右正合自函子以及变换 $F_{\mathsf{la}}\colon TF\Longrightarrow F$和 $F_{\mathsf{ra}}\colon FS\Longrightarrow F$组成，它们满足自然的单位性和结合律公理，并且彼此交换，即

$$\begin{array}{ccc} TFS & \xrightarrow{TF_{\mathsf{ra}}} & TF \\ {\scriptstyle F_{\mathsf{la}}S}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_{\mathsf{la}}} \\ FS & \xrightarrow[F_{\mathsf{ra}}]{} & F \end{array} \tag{8.4.1}$$

可交换。 T-S-双作用函子范畴记作 T-Biact-S。

假设 8.62. 在本节余下部分中，我们固定阿贝尔范畴 $\mathscr{A}$上的两个右正合单子 T 和 S。

注 8.63. 对于一个 T-S-双作用函子 F，左 T-作用 F_{la} 通过定义$\nabla_{Fa}\coloneqq F_{\mathsf{la};a}$，赋予任何形如 Fa（其中 $a\in\mathscr{A}$）的对象一个 T-模结构。根据 F_{la} 的自然性，任意态射 $f\in\mathscr{A}(a,\ b)$ 都提升为一个映射 $Ff\colon Fa\longrightarrow Fb$（属于$T$-模）。特别地，函子 F 可经由典范遗忘函子 $U^T\colon \mathscr{C}^T\longrightarrow\mathscr{C}$ 分解。我们记作 $F=U^T\circ\tilde{F}$。

定义 8.64. 给定一个 T-S-双作用函子 F，定义 $\tilde{F} \circ_S -\colon \mathscr{A}^S \longrightarrow \mathscr{A}^T$ 为

$$\tilde{F} \circ_S - := \operatorname{coeq}\left(FS \underset{F_{\mathrm{ra}}}{\overset{F\nabla}{\rightrightarrows}} F \right), \tag{8.4.2}$$

其中，对于 $x \in \mathscr{A}^S$，我们赋予 Fx 和 FSx 以 T-模结构，如注 8.63中所述。

定义8.64的函子性由余极限的函子性推出。

注 8.65。 由 F_{la} 的自然性以及图表（8.4.1）的交换条件，等式（8.4.2）中的两个态射都是 $\mathscr{A}^T$中的态射；由于 $\mathscr{A}^T$ 中的余等化子由 U^T创建，这个余等化子也是 $\mathscr{A}^T$中的余等化子。

命题 8.66。 设 T 和 S 是阿贝尔范畴 $\mathscr{A}$上的右正合单子。记 $\varepsilon^T := \varepsilon^{F^T \dashv U^T}$ 和 $\varepsilon^S := \varepsilon^{F^S \dashv U^S}$，则以下赋值扩张为范畴等价：

注意，这一赋值与定义6.1相似，只不过现在我们沿着两个伴随将 Φ推出。

$$\begin{aligned} \mathsf{Rex}(\mathscr{A}^S, \mathscr{A}^T) &\longleftrightarrow T\text{-}\mathsf{Biact}\text{-}S \\ \Phi &\longmapsto \left(U^T \Phi F^S,\ U^T \varepsilon^T \Phi F^S,\ U^T \Phi \varepsilon^S F^S\right) \\ \tilde{F} \circ_S - &\longmapsfrom F. \end{aligned}$$

证明。由于 F^S 是右正合的，且 U^T 是正合的，因此 $U^T \Phi F^S$ 是右正合的。

容易验证，变换 $U^S \varepsilon^T \Phi F^T$ 和 $U^T \Phi \varepsilon^S F^S$ 赋予 $U^T \Phi F^S$ 双作用函子的结构；并且对于自然变换 $\alpha\colon \Phi \Longrightarrow \Phi'$，由此得到的变换 $U^T \alpha F^S$ 是双作用函子态射。这证明了 $\mathsf{Rex}(\mathscr{A}^S, \mathscr{A}^T) \longrightarrow T\text{-}\mathsf{Biact}\text{-}S$ 的函子性。

要看出反向赋值是函子性的，注意到给定双作用函子的态射 $f\colon F \Longrightarrow G$，我们在 $\mathscr{A}^T$ 中得到一个叉图态射：

$$\begin{array}{ccc} FSx & \underset{F_{\mathrm{ra};x}}{\overset{F\nabla_x}{\rightrightarrows}} & Fx \\ {\scriptstyle f_{Sx}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_x} \\ GSx & \underset{G_{\mathrm{ra};x}}{\overset{G\nabla_x}{\rightrightarrows}} & Gx \end{array}$$

~ ~这诱导出一个余等化子的态射 $F \circ_S - \Longrightarrow G \circ_S -$。

现在我们证明，这些函子定义了彼此互为拟逆的等价关系——。首先，注意到 $U^T\Phi F^S = \Phi F^S \colon \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}^T$，因为 U^T在对象上是忠实且内射的，因此它是 1-范畴 $\mathsf{Cat}_{\Bbbk}$中的单态射。稍微滥用一下记号，参见备注 8.65，对于 $x \in \mathscr{A}^S$ 我们有

$$(\Phi F^S) \circ_S x = \operatorname{coeq}\Big(\Phi S^2 x \underset{\Phi S \nabla_x}{\overset{\Phi \mu^S_x}{\rightrightarrows}} \Phi S x \Big),$$

而由于 Φ 是右正合的，它同构于

$$\Phi\Big(\operatorname{coeq}\Big(S^2 x \underset{S\nabla_x}{\overset{\mu^S_x}{\rightrightarrows}} S x \Big)\Big).$$

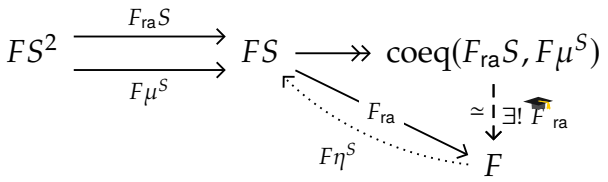
经由作用 $\nabla_x \colon Tx \longrightarrow x$，后一个余等化子典范地同构于 x，因此我们得到如下同构，它关于 Φ是自然的：

$$\Phi\hat{\nabla}_x \colon (\Phi F^S) \circ_S x \xrightarrow{\sim} \Phi x.$$

反之，设 F 为双作用函子，且 $x \in \mathscr{A}$。我们有

$$\Big(U^T(\tilde{F} \circ_S -)F^S\Big)(x) = \operatorname{coeq}\Big(FS^2 x \underset{F\nabla_{Sx} = F\mu^S_x}{\overset{F_{\mathsf{ra}; Sx}}{\rightrightarrows}} FSx \Big)$$

注意，F作为右 S-模对象，在此类对象的范畴中被表为一个余等化子，并且该余等化子在底幺半范畴 $\mathsf{Rex}(\mathscr{A}, \mathscr{A})$ 中还分裂。这在如下图表中标出：



由于 F_{ra} 是左 T-模对象的态射，我们发现 F_{ra} 定义了双作用函子 $U^T(\tilde{F} \circ_S -)F^S \cong F$ 的一个同构，且该同构关于 F是自然的。□

现在假设 $\mathscr{C}$ 和 $\mathbb{M}$ 是阿贝尔的，$- \triangleright =$ 在两个变量上都是右正合的，并且 S 和 T 是 $\mathbb{M}$ 上右正合的宽松 $\mathscr{C}$-模单子。

定义 8.67. M 的右正合宽松 $\mathscr{C}$-模自函子范畴 RexLax$\mathscr{C}$Mod(M,M) 中的一个 S-T-双模对象称为一个 宽松 $\mathscr{C}$-模 S-T- 双作用函子。我们将 S-T-双作用函子构成的范畴记为 S-Biact$_{\mathscr{C}}$-T。

换言之，宽松的 $\mathscr{C}$-模双作用函子是一个双作用函子 $(F,\ F_{\mathsf{la}},\ F_{\mathsf{ra}})$，满足 F: $\mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ 是一个右正合的宽松 $\mathscr{C}$- 模函子，且 F_{la} 和 F_{ra} 是 $\mathscr{C}$- 模变换。

定理 8.68。 命题 $\mathsf{Rex}(\mathrm{M}^T,\ \mathrm{M}^S) \simeq S$-双作用-$T$ 命题 8.66中的等价限制为一个忠实函子

$$\mathscr{C}\mathsf{EW}\colon \mathsf{LaxRex}(\mathscr{M}^T, \mathscr{M}^S) \longrightarrow S\text{-}\mathsf{Biact}_{\mathscr{C}}\text{-}T,$$

使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{LaxRex}(\mathscr{M}^T, \mathscr{M}^S) & \xrightarrow{\mathscr{C}\mathsf{EW}} & S\text{-}\mathsf{Biact}_{\mathscr{C}}\text{-}T \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{Rex}(\mathscr{M}^T, \mathscr{M}^S) & \xrightarrow{\simeq\ by\ 8.66} & S\text{-}\mathsf{Biact}\text{-}T \end{array} \tag{8.4.3}$$

竖直箭头分别是相应的遗忘函子，而范畴M^T 和M^S 都赋有定理 $\mathscr{C}$*8.25* 中的模结构 8.25。

证明。根据定理 8.26，类似于 [AHLF18，命题 3.10]，，函子 $F^T\colon \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}^T$ 是一个强 $\mathscr{C}$-模函子，F^S 也是如此。因此，根据推论 5.29，函子 U^S 是一个宽松的 $\mathscr{C}$-模函子，故对于宽松的 $\mathscr{C}$-模函子 $\Phi\colon \mathrm{M}^T \longrightarrow \mathrm{M}^S$，复合函子 $U^S\Phi F^T$ 是一个宽松的 $\mathscr{C}$-模函子。此外，命题 8.66 中给出的 $U^S\Phi F^S$ 上的 S-T-双作用结构可组合成一个宽松的 $\mathscr{C}$-模双作用函子；这也推广到由 $\mathscr{C}$-模变换导出的 $\mathscr{C}$-模双作用变换。

这定义了一个函子 $\mathscr{C}$EW，使得图表 (8.4.3) 可交换。它是忠实的，因为该图表中的其余函子也都是忠实的。□

引理 8.69。 设 $\Phi \in \mathsf{Rex}(\mathrm{M}^T, \mathrm{M}^S)$，并假设对所有 $m \in \mathrm{M}$ 都有

$$(\Phi T)_{\mathsf{a};m}\colon x \triangleright_{\mathscr{M}} \Phi T m \longrightarrow \Phi T(x \triangleright_{\mathscr{M}} m)$$

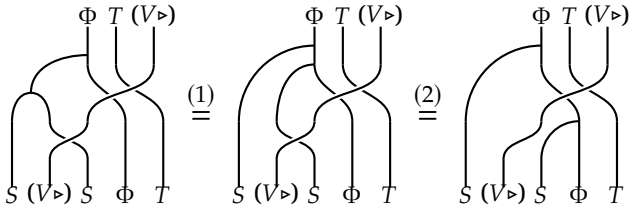
是双作用函子 $U^S\Phi F^T$ 上的一个宽松 $\mathscr{C}$-模双作用函子结构。因此我们有$(\Phi T)_{\mathsf{a}} = \mathscr{C}\mathsf{EW}(\Phi_{\mathsf{a};T(-)})$，其中

$$\Phi_{\mathsf{a};T(-)}\colon x \triangleright_{\mathscr{M}^S} \Phi T(-) \Longrightarrow \Phi(x \triangleright_{\mathscr{M}^T} T(-)) = \Phi(T(x \triangleright_{\mathscr{M}} -))$$

是使下图交换的唯一自然变换：

$$\begin{array}{ccccc} x \triangleright_{\mathcal{M}^S} \Phi T - & & & & \\ \uparrow\!\uparrow & \overset{\exists!\Phi_{\mathsf{a}}}{\searrow} & & & \\ S(x \triangleright_{\mathcal{M}} \Phi T -) & \xrightarrow[S(\Phi T)_{\mathsf{a}}]{} & S\Phi T x \triangleright_{\mathcal{M}} - & \xrightarrow[\Phi_{\mathsf{la}} T x \triangleright -]{} & \Phi T x \triangleright_{\mathcal{M}} - \end{array} \tag{8.4.4}$$

证明。为验证 Φ_{a} 定义良好，注意到态射 $(\Phi_{\mathsf{la}} T x \triangleright_{\mathcal{M}} -) \circ S(\Phi T)_{\mathsf{a}}$ 等化 $SS_{\mathsf{a};x}\Phi T$ 和 $Sx \triangleright_{\mathcal{M}} \Phi_{\mathsf{la}} T$：



上文中，(1) 由 $(\Phi T)_{\mathsf{la}}$ 是左 S-作用结构得出，而 (2) 则由它是一个 $\mathcal{C}$-模变换得出。

根据函子 $\mathcal{C}$EW的定义，我们有

$$\mathcal{C}\mathsf{EW}(\Phi_{\mathsf{a};T(-)}) = \Phi_{\mathsf{a};T(-)} \circ U^S_{\mathsf{a};x,\Phi T(-)},$$

其中 U^S_{a}是由 Porism 5.29诱导的 $\mathcal{C}$-模函子结构，定义在 U^S 上。更一般地，对于 $m \in \mathrm{M}$，映射 $U^S_{\mathsf{a};x,m}$ 由以下复合给出

$$x \triangleright_{\mathcal{M}} m \xrightarrow{\eta^S_{x \triangleright_{\mathcal{M}} m}} S(x \triangleright_{\mathcal{M}} m) \twoheadrightarrow x \triangleright_{\mathcal{M}^S} m,$$

其中后一个映射是到以下余等化子的投影：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{coeq}\Big(T(x \triangleright T^2 m) \rightrightarrows T(x \triangleright Tm)\Big) & = & S(x \triangleright m) \\ \downarrow{\scriptstyle T(x \triangleright \nabla_m)} \quad \downarrow{\scriptstyle T(x \triangleright \nabla_m)} & & \downarrow \\ \mathrm{coeq}\Big(T(x \triangleright T^2 m) \rightrightarrows Tx \triangleright Tm\Big) & = & x \triangleright m \end{array}$$

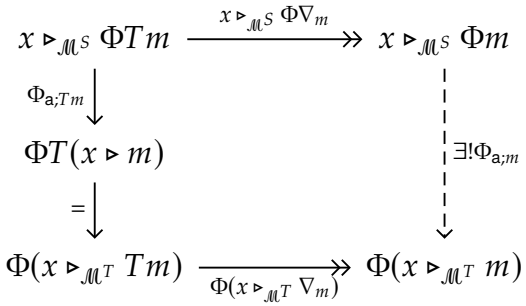
总而言之，我们发现 $\mathcal{C}\mathsf{EW}(\Phi_{\mathsf{a};T(-)})$ 由……的外部路径给出

$$\begin{array}{ccccccc} x \triangleright_{\mathcal{M}^S} \Phi T - & & & & & & \\ \uparrow\!\uparrow & & & \overset{\exists!\Phi_{\mathsf{a}}}{\searrow} & & & \\ S(x \triangleright_{\mathcal{M}} \Phi T -) & \xrightarrow[\eta_{x \triangleright_{\mathcal{M}} \Phi T -}]{} & S(x \triangleright_{\mathcal{M}} \Phi T -) & \xrightarrow[S(\Phi T)_{\mathsf{a}}]{} & S\Phi T x \triangleright_{\mathcal{M}} - & \xrightarrow[\Phi_{\mathsf{la}} T x \triangleright -]{} & \Phi T x \triangleright_{\mathcal{M}} - \end{array}$$

根据 S-作用结构的单位性 $(\Phi T)_{\mathsf{la}}$，它等于 $(\Phi T)_{\mathsf{a}}$。 □

对于 $m \in \mathrm{M}^T$，令 $\Phi_{\mathsf{a};m}$ 为满足以下条件的唯一映射：

(8.4.5)



交换。根据 $\Phi_{\mathsf{a};m}$ 的定义性质中的唯一性，这定义了一个自然变换

$$\Phi_{\mathsf{a}} : - \triangleright_{\mathscr{M}^S} \Phi(=) \Longrightarrow \Phi(- \triangleright_{\mathscr{M}^T} =).$$

引理 8.70. 对于 $\Phi \in \mathsf{Rex}(\mathrm{M}^T, \mathrm{M}^S)$，映射 $\Phi_{\mathsf{a}} : - \triangleright_{\mathscr{M}^S} \Phi(=) \Longrightarrow \Phi(- \triangleright_{\mathscr{M}^S} =)$由图表（ $\Phi_{\mathsf{a};Tm}$ ）中的态射扩展而来，定义了一个宽松 $\mathscr{C}$-模结构于 Φ。

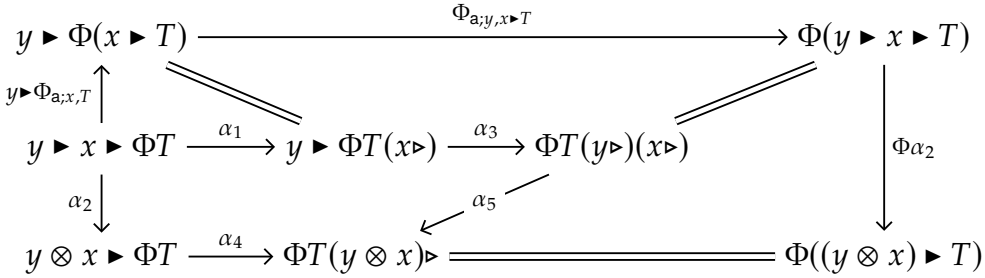
证明。为简化记号，我们将 $\triangleright$ 记作 $\triangleright_{\mathscr{M}}$，将 $\blacktriangleright$ 记作 $\triangleright_{\mathscr{M}^T}$ 和 $\triangleright_{\mathscr{M}^S}$，因为每次出现这些符号时，所指为何者都明确无歧义。我们还将 $x\triangleright$ 记作 $x \triangleright -$，并省略 $\mathbb{C}\mathsf{at}_{\Bbbk}$ 中的水平复合符号，直接将它们连接起来。因此，以下图表中每次出现的 $\circ$ 都表示自然变换的垂直复合。例如，

$$S(y\triangleright)S(x\triangleright)\Phi T \xrightarrow{S(y\triangleright)(\Phi_{\mathsf{la}} T(x\triangleright) \circ S(\Phi T)_{\mathsf{a},x})} S(y\triangleright)\Phi T(x\triangleright)$$

表示自然变换

$$S(y\triangleright S(x\triangleright \Phi T(-))) \xrightarrow{S(y\triangleright S(\Phi T)_{\mathsf{a};y,x})} S(y\triangleright S\Phi T(x\triangleright -)) \xrightarrow{S(y\triangleright \Phi_{\mathsf{la}} T(x\triangleright -))} S(y\triangleright \Phi T(x\triangleright -)).$$

由于 Φ_{a} 由 $\Phi_{\mathsf{a};T(-)}$唯一确定，因此只需证明



交换，其中我们定义 $\alpha_1 ..= y \blacktriangleright \Phi_{\mathsf{a},x}$, $\alpha_3 ..= \Phi_{\mathsf{a},y}(x\triangleright)$, $\alpha_4 ..= \Phi_{\mathsf{a},y\otimes x}$, 以及$\alpha_5 .. = \Phi T(\triangleright_{\mathsf{a},y,x})$。态射 α_2 由图 8.1 给出，其中每个标记的满态射都是其前一对态射的余等化子，每个虚线箭头都是由图表态射诱导的、余等化子之间的诱导态射，而点线箭头则来自余等化子的泛性质。余等化子 $(y, x) \blacktriangleright \Phi T$ 的记号旨在强调它与第 8.1.3 节多重作用范畴方法之间的联系。

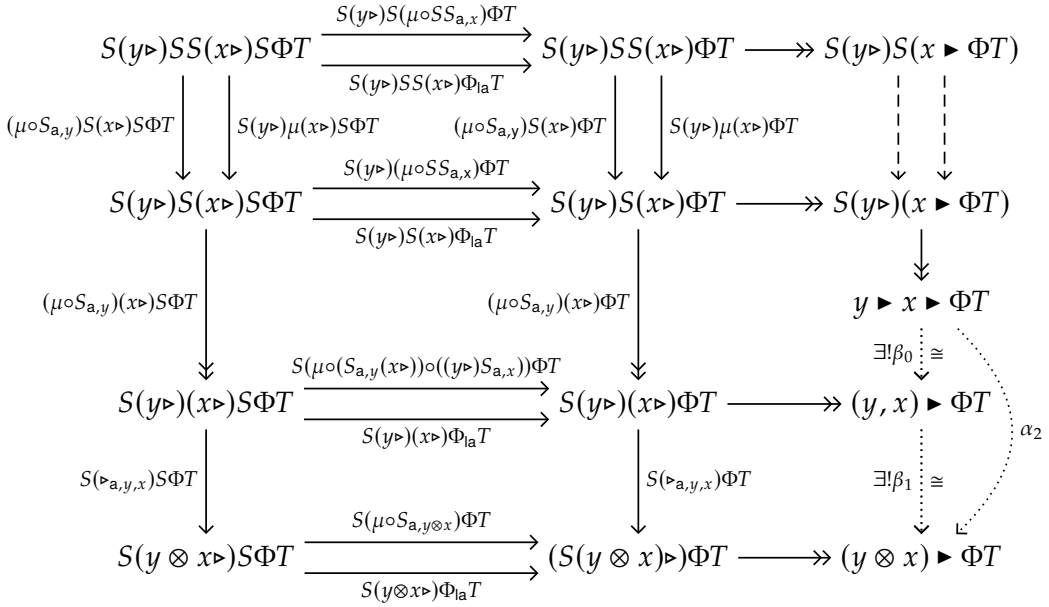
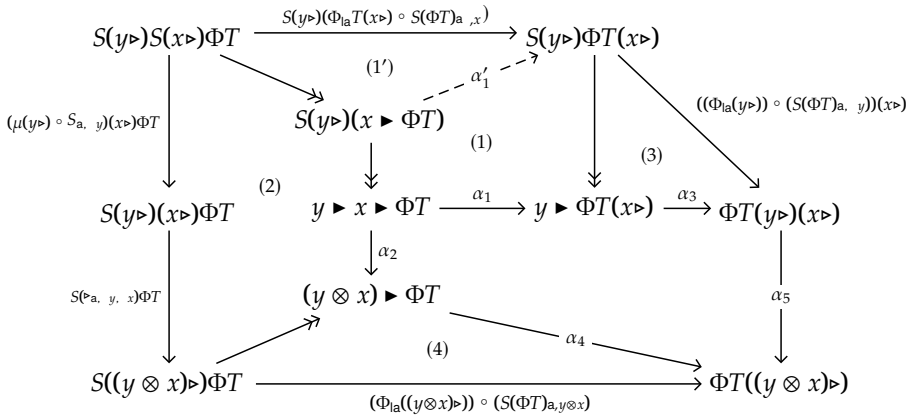


图 8.1：态射 α_2 的定义。

我们现在有该图表

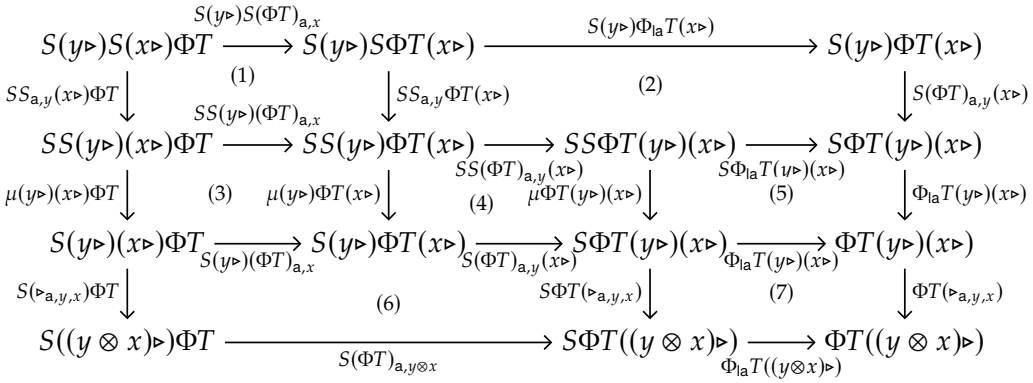


其带标记的面均交换，且用其所属面的标记装饰的态射，定义为使该面交换的态射；这通过余等化子的泛性质给出。

我们的目标是证明内部未标记面的交换性。由于其所有态射均由其余内部（交换）面所定义，且我们可以到达 $y \blacktriangleright x \blacktriangleright \Phi T$ 从 $S(y\triangleright)\,S(x\triangleright)\,\Phi T$ 经两个满态射，这一点由外部面的交换性所蕴含，而这由图8.2的内部面的交换性得出，其中

- 面 (1)、(3) 和 (4) 根据 $\mathbb{C}\mathrm{at}_{\Bbbk}$中的交换律可交换；
- 面 (2) 因 $S\Phi T \Longrightarrow \Phi T$ 是一个 $\mathscr{C}$-模映射，故根据 Φ_{la} 可交换；
- 面 (5) 根据作用的结合律 Φ_{la}可交换；
- 面 (6) 因 ΦT 是一个宽松 $\mathscr{C}$-模函子而可交换；并且
- 面 (7) 根据 Φ_{la}的自然性可交换。 □

图 8.2：箭头 Φ_{a} 在 Φ上定义了一个宽松 $\mathscr{C}$-模结构。

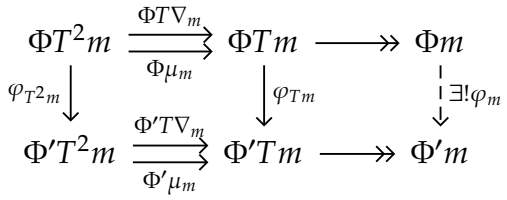


引理 8.71。 设 $\Phi, \Phi' \in \mathsf{LaxRex}(\mathrm{M}^T, \mathrm{M}^S)$ 且 $\phi\colon U^S\Phi F^T \Longrightarrow U^S\Phi' F^T$ 是一个宽松 $\mathscr{C}$-模双作用变换。那么

$$\varphi := \phi \circ_T - \colon \Phi \Longrightarrow \Phi'$$

是一个 $\mathscr{C}$-模变换。

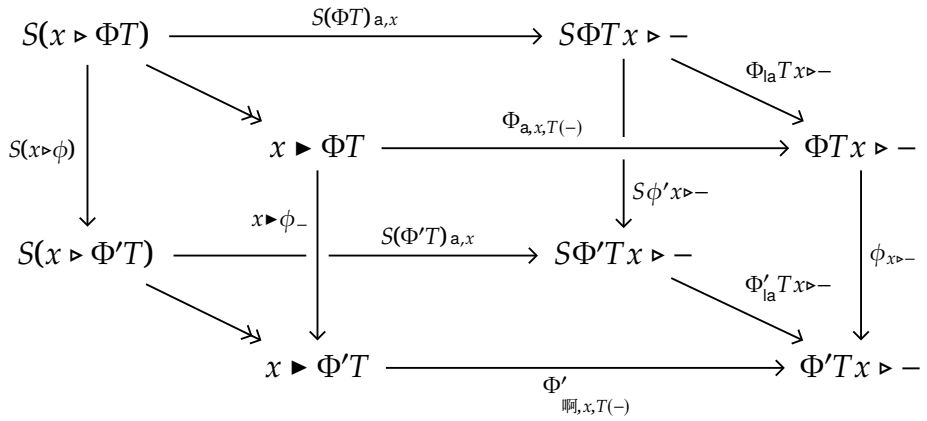
证明。 首先，注意到 φ 由$\varphi_{T(-)}$确定，如图表所示：



因此，只需证明对于任意的 $m \in \mathrm{M}$ 和 $x \in \mathscr{C}$，我们有

$$\Phi'_{\mathsf{a};x,Tm} \circ (x \blacktriangleright \phi_m) = \phi_{x\triangleright m} \circ \Phi_{\mathsf{a},x,T(m)}. \tag{8.4.6}$$

考虑以下图表：



其上、下面由 Φ_{a}的定义交换，如示意图（8.4.4）所示；其左面由 $x \triangleright -$的定义交换；其右面则因 ϕ 是双作用变换而交换。后面交换，因为 ϕ 是$\mathscr{C}$-模变换。前面的交换性恰好是等式（8.4.6），并且由于左上投影映射是满态射，只需在与其前复合之后验证其交换性，而这可由其余各面的交换性轻易得出。□

定理 8.72. 忠实函子

$$\mathscr{C}\mathsf{EW} \colon \mathsf{LaxRex}(\mathscr{M}^T, \mathscr{M}^S) \longrightarrow S\text{-}\mathsf{Biact}_{\mathscr{C}}\text{-}T$$

是定理8.68 的范畴等价。

证明。满性由引理 8.71 得出，因此尚需证明 $\mathscr{C}\mathsf{EW}$ 是本质满的。设 $F \in T\text{-}\mathsf{Biact}_{\mathscr{C}}\text{-}S$。由于命题 8.66 的函子是本质满的，我们可以假设 $F \cong U^S \Phi F^T$，对某个右正合的 $\Phi \colon \mathrm{M}^T \longrightarrow \mathrm{M}^S$。由引理 8.70，$(\Phi, \Phi_{\mathsf{a}}) \in \mathsf{LaxRex}(\mathrm{M}^T, \mathrm{M}^S)$，并且由于引理 8.69，$F \cong \mathscr{C}\mathsf{EW}((\Phi, \Phi_{\mathsf{a}}))$，从而给出本质满射。□

定义 8.73。 如果在 M 上存在右正合宽松 $\mathscr{C}$-模单子 T 和S，并且存在 $F \in T$-双作用函子$_{\mathscr{C}}$-S 和 $G \in S$-双作用函子$_{\mathscr{C}}$-T，使得作为宽松 $\mathscr{C}$-模双作用函子，有 $G \circ_T F \cong \mathrm{Id}_{\mathscr{M}^T}$ 和 $F \circ_S G \cong \mathrm{Id}_{\mathscr{M}^S}$，则称这两个单子 Morita 等价。

命题 8.74. 两个右正合的宽松 $\mathscr{C}$-模单子 T 和 S 在 M 上 *Morita* 等价，当且仅当存在一个 $\mathscr{C}$-模范畴等价 $\mathrm{M}^T \simeq \mathrm{M}^S$，其中 *Eilenberg–Moore* 范畴赋有定理 8.25中的扩展的 *Linton* 余等化子结构。

证明. 这是定理 8.72的直接推论，因为范畴等价是右正合的。 □

结合命题8.74 与定理 8.51，我们得到如下结论。

定理 8.75. 设 $\mathcal{C}$ 是一个有足够多内射对象的幺半阿贝尔范畴，且 T 是 $\mathcal{C}$ 上一个左正合宽松 $\mathcal{C}$-模余单子。存在一个双射

$$\begin{aligned}\{(\mathcal{M},\ell)\ \textit{as in Theorem 8.50}\}\big/_{\mathcal{M}\simeq\mathcal{N}} &\overset{\simeq}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix}\textit{Left exact oplax } \mathcal{C}\textit{-module}\\ \textit{comonads on } \mathcal{C}\end{matrix}\right\}\Big/_{\simeq_{Morita}}\\ (\mathcal{M},\ell) &\longmapsto \lceil \ell, - \triangleright \ell \rceil\\ (\mathcal{M}^T, T1) &\longmapsfrom T\end{aligned}$$

我很大！是电影变小了。

诺玛·戴斯蒙德；日落大道

9 Hopf 三模

定理 8.48 至 8.50 给出了非刚性情形下的一般重构结果 。近年来，这一情形在多个领域受到越来越多的关注，例如参见 [DSPS19； ALSW21]或 [Str24b，推论 10。11]然而，宽松$\mathscr{C}$-模单子在 $\mathscr{C}$ 上的理解不如单纯的代数对象 $\mathscr{C}$容易，而且一般而言确实可能显得难以理解。为说明情况并非一定如此，我们再次转向霍普夫代数情形。

回想一下，环范畴——即张量范畴的非刚性对应物，参见 [EGNO15 第 4.2 节与第 5 节4]——若容许到 vect 的纤维函子，则幺半等价于（未必是霍普夫代数的）双代数 B 上有限维左 B-余模所成的范畴。在本章中，我们证明， ${}^{B}\mathsf{Vect}$ 的左正合、有限且宽松的 ${}^{B}\mathsf{Vect}$-模自函子范畴，幺半等价于范畴 ${}^{B}_{B}\mathsf{Vect}^{B}$ ，即 *Hopf* 三模 [20] 的范畴： B-B- 双余 -
模，并带有一个额外的左 B-作用，且该作用是一个 B-B-双余模态射。

[20] “三模”这一术语基于 [Sho09]，并由 Ulrich Krähmer 建议，用以代替更为笨拙的记号，例如“(2,1)-霍普夫模”。

定理 9.2. 对于双代数 B *and* $\mathcal{V}$ ..= ${}^{B}\mathsf{Vect}$，存在一个幺半等价

$$ {}^{B}_{B}\mathsf{Vect}^{B} \simeq \mathsf{LexfLax}_{\mathcal{V}}\mathsf{Mod}(\mathcal{V},\mathcal{V}) $$

介于 *Hopf* 三模范畴与 $\mathcal{V}$ 上左正合有限宽松$\mathcal{V}$-模自函子范畴之间。

这类结构在 Hopf 模基本定理的拟双代数推广中占有重要地位，参见 [HN99； Sar17]。此等价将宽松的 ${}^{B}\mathsf{Vect}$-模单子与霍普夫三模代数对应起来：一个霍普夫三模 A ，连同满足代数对象通常的结合律和单位公理的映射 $A \square A \longrightarrow A$ 和 $B \longrightarrow A$。

若 B 是无限维的，定理 8.50 应能利用 ${}^{B}\mathsf{Vect}$ 中内射对象的存在性，得到关于余伴随函子 ${}^{B}\mathsf{Vect}$ 模余单子 $\lceil X, - \triangleright X \rceil$ 的重构。由于我们的结果仅为宽松 ${}^{B}\mathsf{Vect}$ 模函子提供代数实现，因此我们将自身限制在以下情形：

假设 $-\triangleright X$ 是正合的，则 $-\triangleright X$ 同时存在左伴随和右伴随。在这种情况下，我们得到一个伴随 $\lceil X, -\triangleright X\rceil \dashv \lfloor X, -\triangleright X\rfloor$。

由于单子是右伴随函子，$\lceil X,\ -\triangleright X\rceil$的 Eilenberg–Moore 范畴并不等价于关联的霍普夫三模代数 $\lfloor X,\ X\rfloor$的模范畴，而是等价于其反模范畴：这类结构在所谓的半无限同调代数领域得到了广泛研究，[Pos10]。另一方面，Kleisli 范畴彼此等价，并再次控制 ${}^{B}\mathsf{Vect}$ 模结构，因此可以直接从霍普夫三模代数中读出。由此得到以下结果。

定理9.23。设 M 是一个局部有限阿贝尔 ${}^{B}\mathsf{vect}$-模范畴，满足定理 8.50 的假设。存在一个霍普夫三模代数 $A \in {}^{B}_{B}\mathsf{vect}^{B}$，使得存在一个等价 $\mathsf{Ind}(\mathrm{M}) \simeq A$-余模，它是 ${}^{B}\mathsf{vect}$-模范畴之间的等价，其中右侧的 ${}^{B}\mathsf{vect}$-模结构由自由 A-模范畴延拓而来。该等价限制在$\mathrm{M} \simeq A$-反模上。

由于我们的重构结果的这种代数实现乍看之下似乎难以用于计算，我们给出两个具体例子，在其中为给定的模范畴确定一个三模代数。

第一个例子见第9.4节，其中 B 是唯一一个非群的二元幺半群的半群代数。这个例子旨在与 [DSPS19例 2.20], 非常相似：一个简单对象在一个不可分解对象上的作用为零。我们还将展示，在这个例子上应用普通的“刚性”重构过程，会得到与 ${}^{B}\mathsf{vect}$ 对自身的正则作用所对应的代数对象相同的 ${}^{B}\mathsf{vect}$ 中的代数对象，因此无法对模范畴进行分类。

第二个例子见第9.5节。假设 B 是任意的，我们确定由纤维函子 ${}^{B}\mathsf{vect} \longrightarrow \mathsf{vect}$给出的模函子所对应的霍普夫三模代数。

最后，定理 8.75 的 Morita 理论结果，为定义9.26中的霍普夫三模代数相对于其反模的 Morita 等价给出了一个精确概念。这带来了一个关于^{B}vect-模范畴的 Morita 定理，即定理9.28。

作为另一项应用，我们利用三模重构，为 Hopf 模基本定理的一个变体给出范畴论解释。

命题 9.38 与推论 9.45。函子 ${}^{B}\mathsf{Vect} \longrightarrow {}^{B}_{B}\mathsf{Vect}^{B}$ 对应于强 ${}^{B}\mathsf{Vect}$-模自函子在宽松 ${}^{B}\mathsf{Vect}$-模自函子范畴中的包含映射，根据米田引理与定理 9.2。后者——以及

因而也包括前者——函子是等价，当且仅当 ${}^{B}\mathsf{vect}$ 是左刚性的，而这成立当且仅当 B 具有扭曲对极。

在命题 9.49中，我们证明，霍普夫单子的融合算子T 在幺半范畴 $\mathcal{W}$ 上可以解释为规范反松模结构的相干胞，该结构定义在T上。这一结果有力地逆转了以下事实：刚性范畴上的（反）松模函子自动是强函子。具体而言，我们给出了一个特定的模函子，它是强函子当且仅当该范畴是刚性的。这一结果将幺半范畴上单子的附加结构解释为该单子上（反）松模函子结构的态射，这与 [FLP24的定理 3.17 和 3.18],类似；后者研究的是 Frobenius 单体函子，而非霍普夫单子。

9.1 双余模及其图形演算

在介绍霍普夫三模之前，我们先来讨论 B 上的双余模，其含义见第2.6节，以及它们的弦图表示。

假设 9.1. 在本章中，固定一个域 $\Bbbk$ 以及其上的一个双代数 B 。记$\mathcal{V} ..= {}^{B}\mathsf{Vect}$ 为左 B-余模范畴。

在介绍所有相关概念和记号之后，我们的首要目标是证明以下定理。

定理 9.2. 存在一个幺半等价

$$\begin{aligned} {}^{B}_{B}\mathsf{Vect}^{B} &\longrightarrow \mathsf{LexfLax}\mathcal{V}\mathsf{Mod}(\mathcal{V},\mathcal{V}) \\ X &\longmapsto (X \,\square\, -, \chi) \end{aligned} \tag{9.1.1}$$

介于 *Hopf* 三模范畴与 $\mathcal{V}$-模自函子范畴之间；后者由 $\mathcal{V}$上的左正合、有限、宽松 χ -模自函子构成，其中 9.6中的方程（9.2.4）给出了定义中的交换态射。

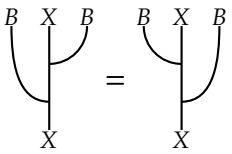
方程（9.1.1）中的拟逆通过在内射生成元 $\mathcal{V}$处取值，将一个左正合、有限、宽松的 B-模函子映到相应对象。定理 9.2的证明将推迟到第 9.2节。

记号 9.3. B 上的双余模由一个向量空间 X、一个左余作用$\lambda\colon\ X \longrightarrow B \otimes_{\Bbbk} X$ 以及一个右余作用 $\rho\colon\ X \longrightarrow X \otimes_{\Bbbk} B$组成，使得

$$(B \otimes_{\Bbbk} \rho) \circ \lambda = (\lambda \otimes_{\Bbbk} B) \circ \rho.$$

在图形记号中，我们写作

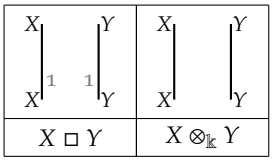
(9.1.2)



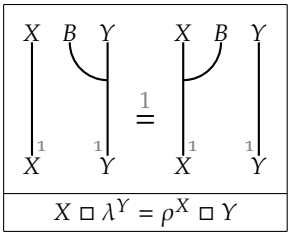
例 9.4. 与例2.108类似，我们可以构造两个双余模的余张量积 $(X,\ \lambda^X,\ \rho^X)$ 和 $(Y\ \lambda^Y,\ \rho^Y)$在 B上。这就是等化子

$$X \,\square\, Y \longhookrightarrow X \otimes_{\Bbbk} Y \underset{X\otimes_{\Bbbk}\lambda^Y}{\overset{\rho^X\otimes_{\Bbbk}Y}{\rightrightarrows}} X \otimes_{\Bbbk} B \otimes_{\Bbbk} Y.$$

我们的图形演算必须区分两个双余模在 $\Bbbk$ 上的张量积与它们的余张量积。特别是，我们必须指出后者允许哪些额外变换：余张量积中经等化的作用将以灰色标注。



我们将以下列方式表示可以交换相应左作用和右作用这一事实：

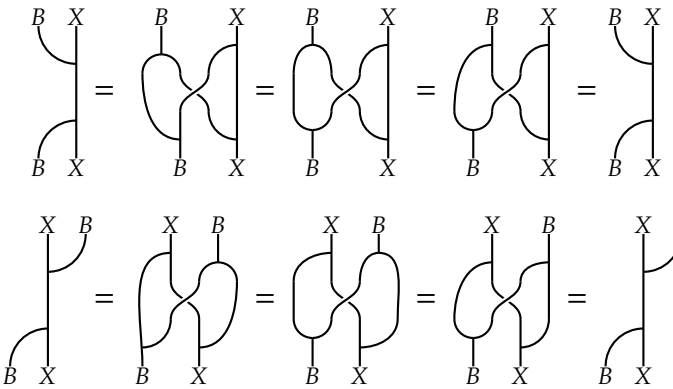


9.2 从霍普夫三模到宽松模函子

本章中，我们给出定理9.2的证明。

定义 9.5. 一个 *Hopf* 三模（在 B 上）由双余模 X 以及一个左 B-作用 α：$B\otimes_{\Bbbk} X \longrightarrow X$ 组成，使得 α 是左、右 B-余模态射。我们记作 $X \in {}^B_B\mathsf{Vect}^B$。

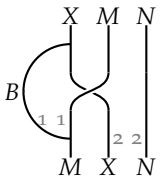
或者，定义 9.5 也可以施加如下条件： λ 与 ρ 分别是左、右 B-模态射。这一等价在弦图式重述中很容易看出：



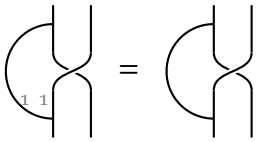
(9.2.1)

定义 9.6。 令 $X \in {}^{B}_{B}\mathsf{Vect}^{B}$。对于所有 $M, N \in {}^{B}\mathsf{Vect}$，定义交换态射 $\chi_{M,N}$：$M \otimes_{\Bbbk} (X \square N) \longrightarrow X \square (M \otimes_{\Bbbk} N)$ 如下：

注意，交换态射与例 2.54 中的 Yetter–Drinfeld 编织相似。



特别地，注意到



因为余作用 $M \longrightarrow B \otimes_{\Bbbk} M$ 的像包含于余张量积 $B \square M$中。

引理 9.7。 交换态射是定义良好的左 B-余模态射。

证明。 为证明良定义性，我们需要证明 $\chi_{M,N}$的像包含于 $X \square (M \otimes_{\Bbbk} N)$，对所有 $M, N \in {}^{B}\mathsf{Vect}$均成立。这可由图9.1中的计算得出。

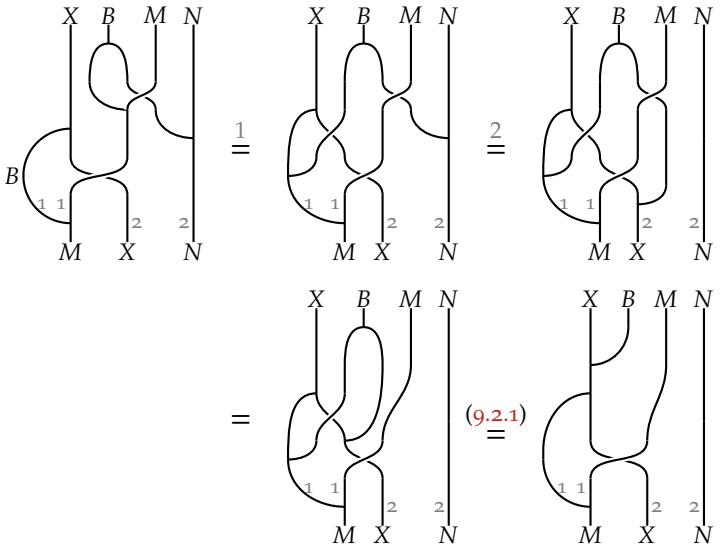
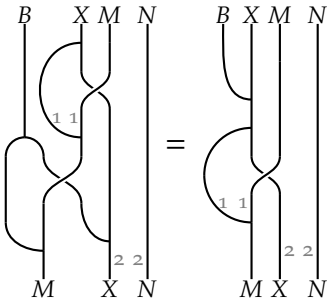


图 9.1：$\chi_{M,N}$ 的像包含于 $X \square (M \otimes_{\Bbbk} N)$中。

图示地，χ 是左 B-余模态射这一事实意味着



利用这一点，图 9.2 中的计算完成了证明。 □

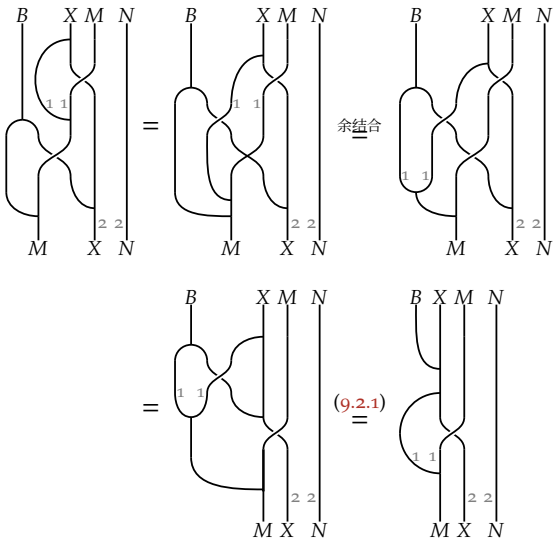


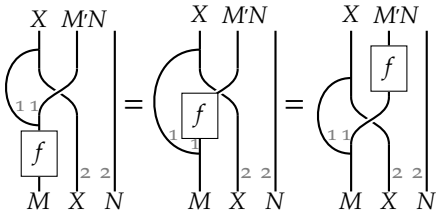
图 9.2：箭头 χ 是左B-余模的态射。

引理 9.8. 交换态射是一种编织；也就是说，它对两个变量都是自然的，并且对于所有 M、N、$P \in {}^{B}\mathsf{Vect}$，以下图表均可交换：

$$\begin{array}{ccccc} M \otimes_{\Bbbk} (N \otimes_{\Bbbk} (X \square P)) & & \xrightarrow{M\otimes_{\Bbbk}\chi_{N,P}} & & M \otimes_{\Bbbk} (X \square (N \otimes_{\Bbbk} P)) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & & & \downarrow{\scriptstyle \chi_{M,N\otimes_{\Bbbk}P}} \\ (M \otimes_{\Bbbk} N) \otimes_{\Bbbk} (X \square P) & \xrightarrow[\chi_{M\otimes_{\Bbbk}N,P}]{} & X \square ((M \otimes_{\Bbbk} N) \otimes_{\Bbbk} P) & \xrightarrow[\alpha]{} & X \square (M \otimes_{\Bbbk} (N \otimes_{\Bbbk} P)) \end{array} \tag{9.2.2}$$

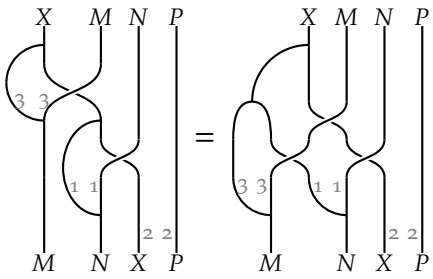
$$\begin{array}{ccc} \Bbbk \otimes_{\Bbbk} (X \square M) & \xrightarrow{\chi_{\Bbbk,N}} & X \square (\Bbbk \otimes_{\Bbbk} M) \\ & {\scriptstyle \lambda_{X\square M}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle X\square\lambda_N} & \\ & X \square N & \end{array} \tag{9.2.3}$$

证明。 交换态射在第二个变量中总是自然的。为了证明其在第一个变量中的自然性，设 $f\colon M \longrightarrow M'$ 是一个左余模态射。那么



其中，第一个等式是因为 f 是一个左余模态射，第二个等式则由编织的自然性得到。

图表（9.2.2）交换等价于下面的图表；根据 X 上作用的结合律，这一点显然成立。



图表（9.2.3）由 X 上作用的单位性得到。 □

引理9.7和9.8合起来说明这个定义良好的箭头

$$\chi\colon - \otimes_{\Bbbk} (X \square =) \Longrightarrow X \square (- \otimes_{\Bbbk} =)$$

满足图表 (9.2.2) 和 (9.2.3)。由此可得以下结果。

命题 9.9。 这一对 $(X \,\square\, -, \chi)$ 定义了一个宽松的 ${}^{B}\mathsf{Vect}$-模函子。

我们可以将这一对应推广到态射。

引理 9.10. 设 $f \in {}^{B}_{B}\mathsf{Vect}^{B}(X, Y)$ 是霍普夫代数三模之间的态射。那么

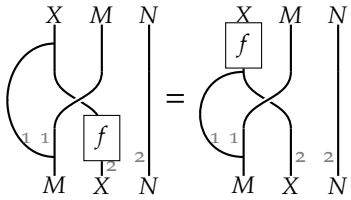
$$f \,\square\, -\colon X \,\square\, - \Longrightarrow Y \,\square\, -$$

是一个 ${}^{B}\mathsf{Vect}$-模变换。

证明。 我们需要证明

$$\big(f \,\square\, (M \otimes_{\Bbbk} N)\big) \circ \chi^{X}_{M,N} = \chi^{Y}_{M,N} \circ \big(M \otimes_{\Bbbk} (f \,\square\, N)\big).$$

用我们的图形语言来说，这意味着



这立即由 f 是模态射得出。 □

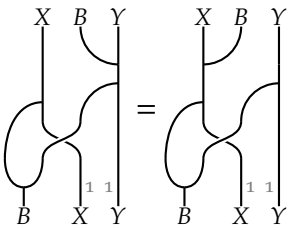
回顾记号 $\mathcal{V} \coloneqq {}^{B}\mathsf{Vect}$。根据前面的讨论，存在一个良定义的函子

$$\Sigma\colon {}^{B}_{B}\mathsf{Vect}^{B} \longrightarrow \mathsf{LexfLax}\mathcal{V}\mathsf{Mod}(\mathcal{V}, \mathcal{V}), \qquad X \longmapsto (X \,\square\, -, \chi), \tag{9.2.4}$$

为了完成定理 9.2 的证明，我们必须证明 Σ 是一个幺半函子，同时也是范畴等价。

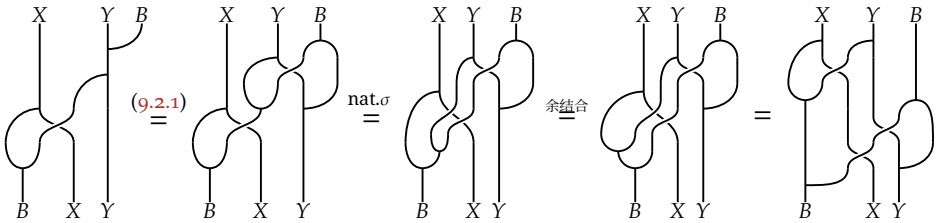
引理 9.11。 设 $X, Y \in {}^{B}_{B}\mathsf{Vect}^{B}$。它们的余张量积 $X \,\square\, Y$ 是一个霍普夫三模，其左作用由 $b(x \otimes y) \coloneqq b_{(1)}x \otimes b_{(2)}y$ 对角给出。

证明。 首先，我们证明 B 的对角作用作为映射 $B \otimes_{\Bbbk} (X \,\square\, Y) \longrightarrow X \,\square\, Y$ 是良定义的；也就是说，



这可由图 9.3 中的计算得到。

只需证明该作用是左、右 B-余模态射。前一种情况由图 9.4 得出，而后一种情况可计算如下：



□

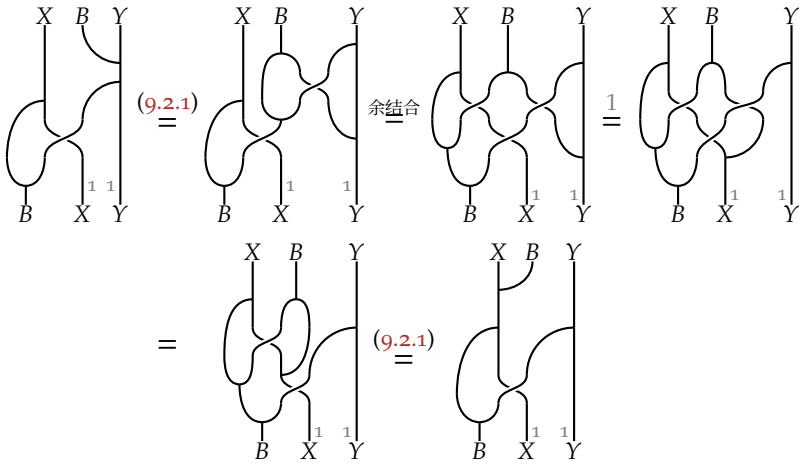


图 9.3：对角作用在余张量积上定义良好。

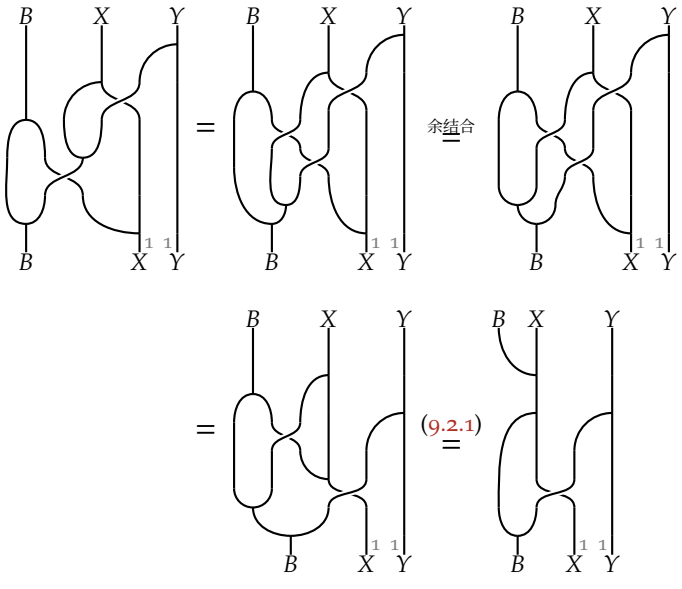


图 9.4：余张量积的作用是一个右 B-余模态射。

命题 9.12。 设 χ^X 和 χ^Y 如定义 9.6所述。那么

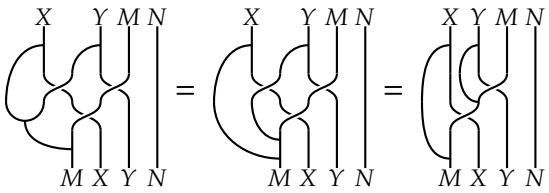
$$\chi^X \diamond \chi^Y \cong \chi^{X \square Y},$$

其中 $\diamond$是松弛模态射的乘法胞；也就是说，

$$(X \square -, \chi^X) \diamond (Y \square -, \chi^Y) := (X \square Y \square -, \chi^X \diamond \chi^Y).$$

换言之，函子 Σ 由方程（9.2.4）定义，是强幺半函子。

证明。 结合律由余作用的余结合性和辫的自然性得出：



单位性显然成立。 □

为完成定理 9.2的证明，还需证明强幺半函子 Σ 由方程（9.2.4）定义，是一个等价。我们将证明它是全忠实且本质满的。

命题 9.13. 函子 Σ 是全忠实的。

证明. 为证明 Σ 是忠实的，假设 $f, g\colon X \longrightarrow Y$ 是 Hopf 三模态射，且 $f \square - \cong g \square -$。那么

$$\begin{array}{ccc} X \square B & \overset{f \square B}{\underset{g \square B}{\rightrightarrows}} & Y \square B \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ X & \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} & Y \end{array}$$

交换，因此结论成立。

为了证明 Σ 是满的，假设 $\varphi\colon X \square - \Longrightarrow Y \square -$ 是一个 $\mathcal{V}$-模变换。根据命题2.109，我们需要证明诱导箭头

$$\hat{\varphi}_B\colon X \cong X \square B \xrightarrow{\varphi_B} Y \square B \cong Y$$

是 Hopf 三模的态射。对于 Hopf 三模 $M \in {}^B_B\mathsf{Vect}^B$，态射 φ_M: $X \square M \longrightarrow Y \square M$ 以及诱导态射 $\hat{}\varphi_B$ 可以用弦图表示如下：

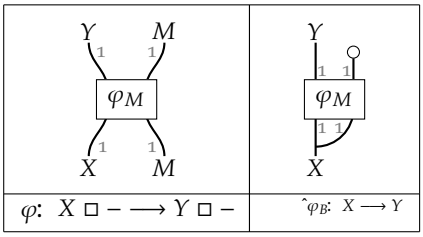
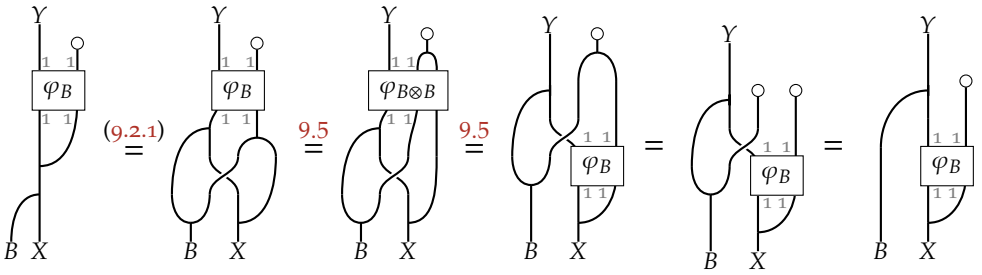


图 9.5 汇总了以下记号中 χ 和 φ 的若干性质。根据图 $\hat{}\varphi_B$ 9.6中的计算，箭头 是左右余模态射。同样，φ_B 是左模态射，这可由以下结论推出：



□

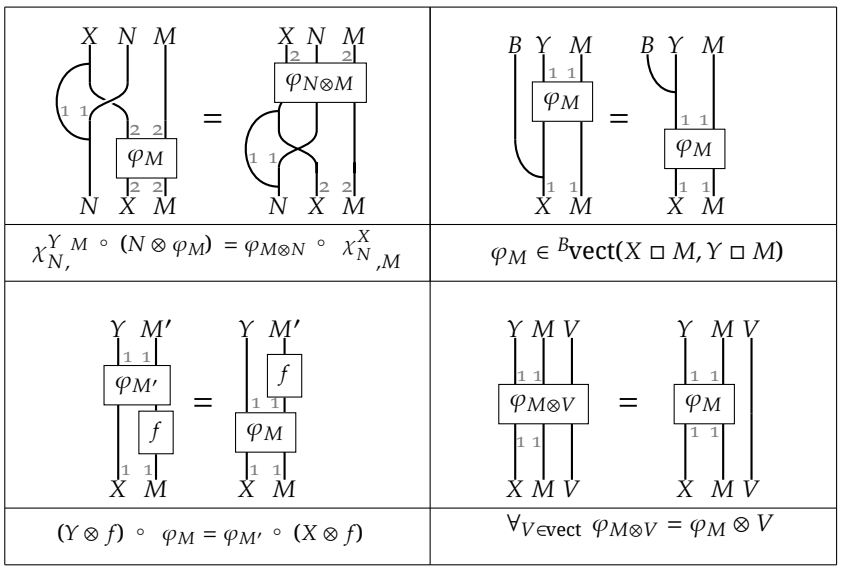


图 9.5：态射 χ 和 φ 的性质。

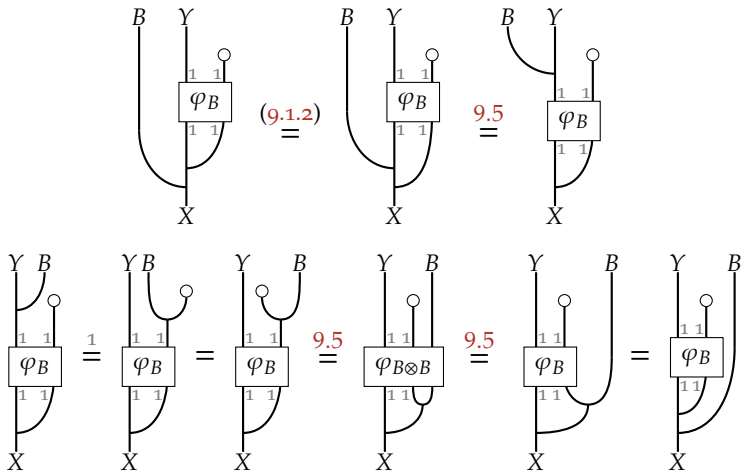
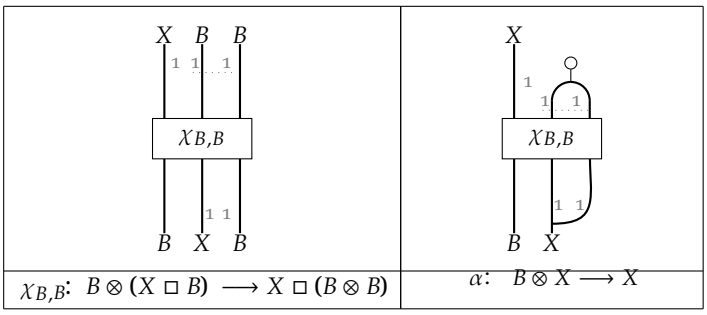


图 9.6：验证 $\hat{}\varphi_B$ 是左余模态射和右余模态射。

命题 9.14. 函子 Σ 是本质满的。

证明。 假设 $\Phi \in \mathsf{LexfLax}\mathcal{V}\mathsf{Mod}(\mathcal{V},\mathcal{V})$。由于 Φ 是左正合且有限的，根据命题 2.109，存在一个 B-B-双余模 X，使得 $\Phi \cong X \,\square\, -$ 作为函子。我们将证明，若 $X \,\square\, -$ 是松弛模态射，则 X 将带有左模结构，从而成为 Hopf 三模。

按如下方式定义 X 上的 B-作用：



上文中，我们选择将$\chi_{B,\ B}$——见定义 9.6——表示为一个方框。其含义是，该作用将 X 变成一个霍普夫三模。

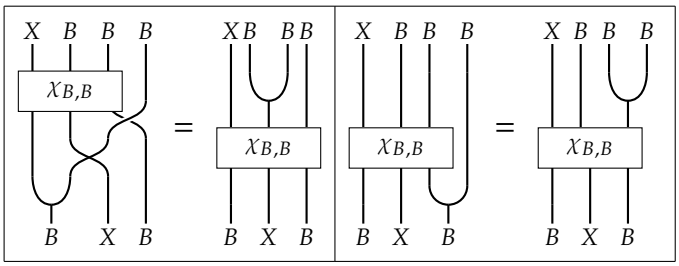
为简洁起见，在弦图证明中，除非执行相应的变换，否则我们将省略灰色的作用指示符。

要证明 α 是一个双余模态射，只需注意到左余模态射 $\chi_{B,\ B}$ 也是一个右余模态射，因为此时 α 是由双余模态射复合而成的。

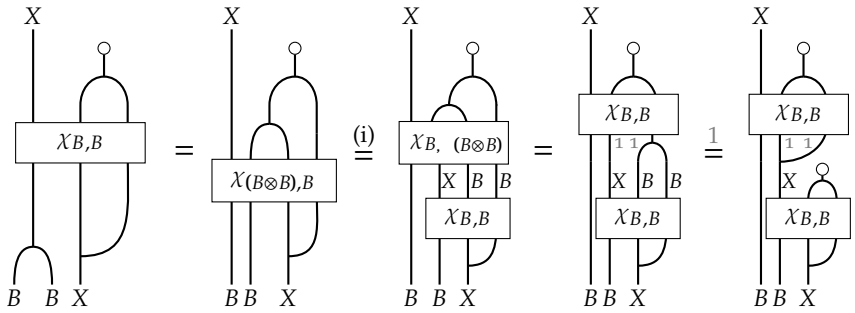
注意，χ 是函子的自然变换，这些函子在每个变量上都是左正合且有限的，从 ${}^B\mathsf{Vect} \otimes_{\Bbbk} {}^B\mathsf{Vect}$ 到 ${}^B\mathsf{Vect}$。由于 $\chi_{B,B}$ 是该变换在

$$\chi_{B,-} \colon B \otimes_{\Bbbk} (X \,\square\, -) \Longrightarrow X \,\square\, (B \otimes_{\Bbbk} -)$$

在 $^{B}\mathsf{Vect}$的内射生成元处取值所得，因此它是一个右余模态射；参见命题 2.84和 2.109。类似地，$\chi_{B,B}$ 是 $\chi_{-,B}$: $- \otimes_{\Bbbk} (X \square B) \Longrightarrow X \square (- \otimes_{\Bbbk} B)$ 在内射生成元处取值所得，因此$\chi_{B,B}$ 也与这一额外的余模结构相容：

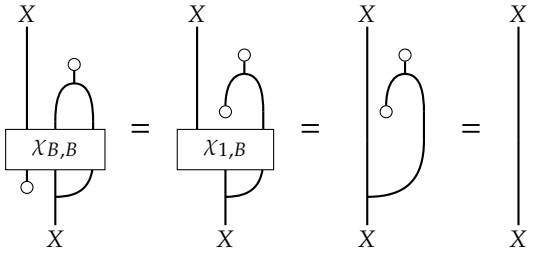


现在我们来验证， α 实际上是一个 B-模态射。对于 α的乘法单位元，计算如下



其中，(i)用到了$(X \square -, \chi)$是一个 $^{B}\mathsf{Vect}$-模函子的事实。

α 的单位性由 χ的自然性、$(X \square -, \chi)$作为 $^{B}\mathsf{Vect}$-模函子所满足的幺元公理，以及 B 和 X的单位性推出：



剩下需要证明的是 $\Sigma(\alpha) = \chi_{B,\,B}$。必要的计算见图 9.7，其中等式 (i) 成立，是因为 $\chi_{B,\,B}$ 在两个变量上都是右余模态射；而 (ii) 则由 χ 的自然性得出。□

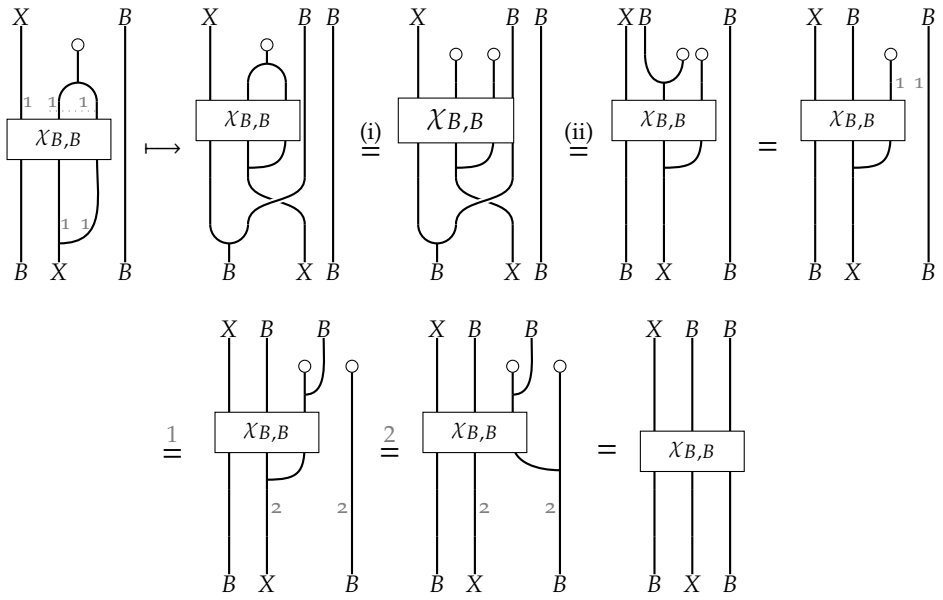


图 9.7：验证$\Sigma(\alpha)=\chi_{B,B}$。

9.3 霍普夫三模代数上的反模重构

我们强调，我们仍然是在假设8.1和9.1成立的条件下进行讨论。

定义 9.15。霍普夫三模代数由幺半范畴$({}^B_B\mathsf{Vect}^B, \square, B)$中的一个代数对象构成。更明确地说，它由一个 Hopf 三模 $A \in {}^B_B\mathsf{Vect}^B$以及三重模态射 $\mu\colon A \square A \longrightarrow A$和 $\eta\colon B \longrightarrow A$构成，并满足结合律和单位性条件。

定义 9.16。一个左模若基于一个 Hopf 三模代数，则是 A-模对象，属于${}^B_B\mathsf{Vect}^B$-模范畴 ${}^B\mathsf{Vect}$，其含义见定义2.98。因此，它由一个左 B-余模 M 以及一个 B-余模同态 $A \square M \longrightarrow M$构成，并满足关于 μ 和 η的结合律和单位性条件。

与定义 9.16 类似，我们定义在 A 上的右模。A 上的模是自由的，如果它具有形式 $(A \square N, \mu \square N)$。

我们也可以对偶化该定义：我们将范畴${}^B_B\mathsf{Vect}_B$ 中的对象称为霍普夫项模。一个*Hopf* 三模余代数是余代数对象 C，位于幺半范畴$({}^B_B\mathsf{Vect}_B, \otimes_B, B)$之中，而在 C上的余模是一个左 B-模N，连同一个 B-模同态 $N \longrightarrow C \otimes_B N$，并满足通常的余作用公理。$C$ 上的右余模可类似地定义。

注 9.17. 在 ${}^B_B\mathsf{Vect}^B$ 与 $\mathsf{LexfLax}\mathcal{V}\mathsf{Mod}(\mathcal{V},\mathcal{V})$ 之间由方程（9.2.4）给出的等价下，${}^B_B\mathsf{Vect}^B$-模范畴 $\mathcal{V} = {}^B\mathsf{Vect}$对应于

LexfLax$\mathcal{V}$Mod$(\mathcal{V},\mathcal{V})$ 在 $\mathcal{V}$ 上的求值作用。因此，霍普夫三模代数 A 上的模范畴恰好是单子 $A\square -$ 的 Eilenberg–Moore 范畴。A 上的自由模子范畴是该单子的 Kleisli 范畴在典范嵌入下的像

$$({}^{B}\mathsf{Vect})_{A\square -} \xrightarrow{\iota} ({}^{B}\mathsf{Vect})^{A\square -}.$$

设 $A \in {}^{B}_{B}\mathsf{Vect}^{B}$ 为一个 Hopf 三模代数，使得 ${}^{B}A$ 是拟有限的，即相应的宽松 ^{B}Vect-模函子 $A\square -$ 具有左伴随 上同调$_{B}(A,-)$，依命题 2.26，它典范地是一个余单子。

定义 9.18. 一个 A 上的左反模是$({}^{B}\mathsf{Vect})^{\mathrm{co}}$ 中的一个对象 $\hom_{B}(A,\ -)$。

具体而言，这意味着一个左反模是一个左 B-余模 M，连同一个左 B-余模同态 $M \longrightarrow$ 上同调$_{B}(A,M)$，从而赋予 M 以 ^{B}Vect 中在上同调$_{B}(A,-)$ 上的余模结构。

一个反模是**自由** 的，如果它位于典范嵌入的像中

$$({}^{B}\mathsf{Vect})_{\mathrm{cohom}_{B}(A,-)} \xhookrightarrow{\iota} ({}^{B}\mathsf{Vect})^{\mathrm{cohom}_{B}(A,-)}.$$

换言之，对于左 B-余模 M，它具有 $\mathrm{cohom}_{B}(A,\ M)$ 的形式，且其余作用具有如下形式

$$\mathrm{cohom}_{B}(A,M) \xrightarrow{\mu^{*}} \mathrm{cohom}_{B}(A\square A,M) \cong \mathrm{cohom}_{B}(A,\mathrm{cohom}_{B}(A,M)).$$

我们将自由反模的范畴记作 A-ContramodFree。

类似地，Hopf 三模余代数 C 上的左反模范畴 C-Contramod，是对于余单子 $C\otimes_{B}-$的右伴随 $\mathrm{Hom}_{B}(C,\ -)$ 所对应的单子 $({}_{B}\mathsf{Vect})^{\mathrm{Hom}_{B}(C,\ -)}$的 Eilenberg–Moore 范畴。自由反模的定义与 Hopf 三模的情形类似。

注 9.19。 类似于定义 9.18 中的反模在更多同调背景下得到了广泛研究，尤其参见 [Pos10]。遗忘左 B-模结构后，Hopf 三模代数产生了所谓的半代数；而遗忘左 B-余模结构后，Hopf 三模余代数产生了所谓的*bocs*——双模对象、余代数结构。

引理 9.20。 设 A 是一个霍普夫三模代数。其作用

$$V \triangleright (A\square M) := A\square (V\otimes M), \qquad \textit{for all } V \in \mathsf{Vect} \textit{ and } M \in {}^{B}\mathsf{vect}$$

赋予自由 A-模范畴 A-ModFree 一个典范的 ^{B}Vect-模范畴结构。类似地，通过作用 $V \triangleright$上同调$_{B-}(A, N)$..=上同调$_{B-}(A, V \otimes N)$， A-ContramodFree也是一个 ^{B}Vect-模范畴。这两个 ^{B}Vect-模范畴典范等价。

证明。 根据定义，我们有 A-模自由 $=$ $({}^{B}\mathrm{Vect})_{A\square -}$。由于 A 是一个霍普夫代数三模代数，单子 $A \square -$是一个宽松的 ^{B}Vect-模单子，因此 Kleisli 范畴 $({}^{B}\mathrm{Vect})_{A\square -}$ 是一个 ^{B}Vect-模范畴，如推论 5.33所述；并且不难验证，引理中描述的映射恰好对应于同上中的映射。

对 A-余模自由也有类似的考虑，使用等式

$$A\text{-ContramodFree} = ({}^{B}\mathrm{Vect})_{\mathrm{cohom}_{B-}(A,-)}$$

以及这一事实：由于 上同调$_{B-}$（A， $-$） 是宽松的 ^{B}Vect-模单子的左伴随函子 $A \square -$，根据推论 ^{B}Vect-模余单子的宽松反向版本 5.29。

这两个 ^{B}Vect-模范畴之间所断言的等价性直接由命题 5.37得出。 □

回顾 [Tak77， 1.12] 中的结果：上同调$_{B-}$（A， $-$） 当且仅当 A 是一个内射的左 B-余模时，才是正合的。

命题 9.21。 若 ${}^{B}A$ 作为左 B-模是内射的，则引理 ^{B}Vect-模范畴在 A-ContramodFree 上的结构 可扩展为 ^{B}Vect-模范畴在 A-Contramod上的结构，具体含义见定理 8.25。

证明。 对于定理 8.25的余单子对偶，只需注意到余单子 上同调$_{B-}(A,\ -)$ 是左正合的；根据 ${}^{B}A$ ，由 [Tak77， 1.12]，当且仅当 ${}^{B}A$ 是内射的□

定理 9.22。 设 B 是一个双代数，且M 是 ^{B}vect上的局部有限阿贝尔模范畴，并且存在一个 ^{B}Vect-内射的 ^{B}Vect-余生成元 $X \in \mathrm{Ind}(\mathrm{M})$，使得 $- \triangleright X$: ${}^{B}\mathrm{vect} \longrightarrow \mathrm{Ind}(\mathrm{M})$ 是正合且拟有限的。那么存在一个霍普夫三模代数(A, μ, η)，使得 ${}^{B}A$ 是拟有限且内射的，因而是有限余生成内射的，并且存在一个 ^{B}Vect-模范畴等价

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{M}) \simeq A\text{-Contramod},$$

介于Ind(M) 与左 A-反模范畴之间。 ^{B}Vect-模结构在 A-余模上得以延拓，按定义 8.10的意义，这一延拓来自范畴A-余模Free，亦即自由左 A-反模所成的范畴。

该等价限制为M $\simeq$ A-余模之间的等价，其中M 与有限维 A-反模范畴等价。

证明。再次记 $\mathcal{V} ..= {}^{B}\mathrm{Vect}$。由于 $- \triangleright X\colon {}^{B}\mathrm{vect} \longrightarrow \mathrm{Ind(M)}$ 是右正合的，它在 $\mathrm{Ind}({}^{B}\mathrm{vect}) \cong \mathcal{V}$ 上的延拓有一个右伴随函子 $\lfloor X, - \rfloor$，由命题 2.133 可知。类似地，由于 $- \triangleright X\colon {}^{B}\mathrm{vect} \longrightarrow \mathrm{Ind(M)}$ 是左正合的，它在 $\mathcal{V}$ 上的延拓也左正合，并且根据假设还是拟有限的。因此，由命题 2.134，函子 $- \triangleright X\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathrm{Ind(M)}$ 也有一个左伴随函子 $\lceil X, - \rceil$。由此我们得到 $\mathcal{V}$ 上的一个宽松 oplax $\mathcal{V}$- 模余单子 $\lceil X, - \triangleright X \rceil$，以及一个右伴随宽松 $\mathcal{V}$- 模单子 $\lfloor X, - \triangleright X \rfloor$。

根据定理 9.2，我们有同构 $\lfloor X,\ - \triangleright X \rfloor \cong \lfloor X,\ B \triangleright X \rfloor \square -$，即宽松的 $\mathcal{V}$-模单子，其中 $\lfloor X,\ B \triangleright X \rfloor$ 是一个 Hopf 三模代数。我们将 $\lfloor X,\ B \triangleright X \rfloor$ 记为 A。由于 $A \square -$ 存在左伴随，${}^{B}A$ 是拟有限的。

根据伴随的唯一性，可得同构 $\lceil X,\ - \triangleright X \rceil \cong$ 上同调$_{B}(A,\ -)$。这是 $\mathcal{V}$-模余单子的一个同构，因为 $\mathcal{V}$-模余单子结构是从相应右伴随函子上彼此同构的反宽松 $\mathcal{V}$-模单子结构提升而来的。

根据定理8.50，我们有一个等价$\mathrm{Ind(M)} \simeq \mathcal{V}^{\lceil X,\ - \triangleright X \rceil}$的 $\mathcal{V}$-模范畴。特别地，函子 $\lceil X,\ - \rceil$ 是余单子可化的，因此是正合的，见定理2.92。根据假设，它的右伴随 $- \triangleright X$也如此，因此余单子 $\lceil X,\ - \triangleright X \rceil$ 是正合的；由 [Tak77, 1.12] 且由于它同构于上同调$_{B}(A,\ -)$，这意味着 ${}^{B}A$具有内射性。

$\mathcal{V}$-模在 $\mathcal{V}^{\lceil X,\ - \triangleright X \rceil}$ 上的结构由$\mathcal{V}_{\lceil X,\ - \triangleright X \rceil}$延拓而来。由相关余单子的同构 $\lceil X,\ - \triangleright X \rceil \cong$ 上同调$_{B}(A,\ -)$，可得一个 $\mathcal{V}$-模范畴的等价

$$\mathcal{V}^{\lceil X, - \triangleright X \rceil} \simeq \mathcal{V}^{\mathrm{cohom}(A, -)},$$

以及一个等价$\mathcal{V}_{\lceil X, - \triangleright X \rceil} \simeq \mathcal{V}_{\mathrm{cohom}(A, -)}$。此外，根据定义

$$\mathcal{V}^{\mathrm{cohom}(A,-)} = A\text{-Contramod} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{V}_{\mathrm{cohom}(A,-)} = A\text{-ContramodFree},$$

由此得到所需的等价$\mathrm{Ind(M)} \simeq A$-余模。

限制等价$\mathrm{M} \simeq A$-反模由命题8.3得出。特别地，我们利用如下观察：一个反模是紧的，当且仅当其底 B-余模也是紧的，当且仅当它是有限维的。

□

在有限维情形下，类似的结果使用投射对象。

定理 9.23。设 B 是一个有限维双代数，且 M 是 Bvect 上的有限阿贝尔模范畴，它包含一个对象 $X \in \mathrm{M}$，使得 X 是 Bvect-投射的 Bvect-生成元；并且 $- \triangleright X\colon B$vect $\longrightarrow \mathrm{M}$ 是正合的。

那么存在一个有限维 *Hopf* 三模余代数 $C \in {}^{B}_{B}\mathsf{vect}_B$，使得 ${}_BC$ 是投射的，并且存在一个 ${}_B$vect-模范畴之间的等价

$$\mathcal{M} \simeq C\text{-contramod}$$

在 M 与有限维左 C-反模范畴之间。${}_B$vect-模结构是在 C-反模上从自由左 A-反模扩展而来的。

证明。 这与定理 9.22的证明类似，只需改用定理 8.48 而非定理 8.50 ，并用命题 8.5替代命题 8.3。 □

在半单情形下，反模与模等价。

定义 9.24。 我们称 Hopf 三模代数 A 是 半单的 ，如果单子 $A \square -$按照定义 8.15的意义是半单的。

命题 9.25。 对于半单 *Hopf* 三模代数 $A \in {}^{B}_{B}\mathsf{Vect}^B$，存在一个 A-模 $\simeq A$-反模之间的、关于 ^{B}Vect的模范畴等价。

证明。 这是命题8.18 应用于单子 $A \square -$。 □

9.3.1 反模的 *Morita* 等价

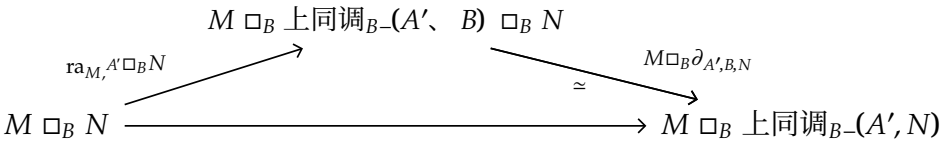
定义 9.26。 我们称两个 Hopf 三模代数 A、$A' \in {}^{B}_{B}\mathsf{Vect}^B$（其中 ${}^BA$ 和 ${}^BA'$ 是拟有限的）是反 *Morita* 等价 的，如果余单子上同调$_B$–(A、 –) 与上同调$_B$–(A'、 –) 是 Morita 等价的。

更明确地说，定义 9.26 表明， A 和 A' 是反 Morita 等价的，当且仅当存在 M、 $N \in {}^{B}_{B}\mathsf{Vect}^B$ ，并且在 ${}^{B}_{B}\mathsf{Vect}^B$中具有余作用态射

$$\mathrm{la}_{M,A} : M \longrightarrow \mathrm{cohom}_{B-}(A, M), \quad \mathrm{ra}_{N,A} : N \longrightarrow N \square_B \mathrm{cohom}_{B-}(A, B),$$
$$\mathrm{la}_{N,A'} : N \longrightarrow \mathrm{cohom}_{B-}(A', N), \quad \mathrm{ra}_{M,A'} : M \longrightarrow M \square_B \mathrm{cohom}_{B-}(A', B),$$

使得

- 在 ${}^{B}_{B}\mathsf{Vect}^B$ 中，存在一个同构，将.....的等化子



与 A 联系起来，并交织了两个余作用 $A \longrightarrow A \square_B \operatorname{cohom}_{B-}(A, B)$ 和 $A \longrightarrow \operatorname{cohom}_{B-}(A, A)$；这两个余作用来自 A 上的代数结构，而等化子上的余作用则由 $\mathrm{ra}_{N,A}$ 和 $\mathrm{la}_{M,A}$ 诱导。这里，$\partial_{A',B,N}$是 [Tak77, 1.13], 中的同构；它是可逆的，因为 ${}^B A'$ 是内射的。

- 在 ${}^B_B\mathsf{Vect}^B$ 中，还存在一个类似的同构，它介于一个类似定义的等化子与 M、N 角色互换后得到的等化子之间，以及 A, 。

命题 9.27。 对于 A, A' 如定义 9.26所述，以下条件等价：

(i) A 与 A' 反 *Morita* 等价；*(ii)* A-余模 $\simeq A'$-余模作为 ${}^B\mathsf{Vect}$-模范畴；*(iii)* A-余模 $\simeq A'$-余模作为 ${}^B\mathsf{Vect}$-模范畴。

证明。 (i) 与 (ii) 的等价是命题 8.74在$\mathcal{C} = {}^B\mathsf{Vect}$中的一个特例。由于范畴等价保持紧对象，(iii)由(ii)推出。最后，若 F 是一个如 (iii)所述的等价，则 $\mathsf{Ind}(F)$ 是一个如 (ii)所述的等价。 □

结合命题 9.27与定理 9.22，我们得到如下关于定理8.75的代数实现：

定理 9.28. 存在一个双射

$$\{(\mathcal{M}, X) \text{ as in Theorem } 9.22\}/_{\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}} \overset{\cong}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{matrix} \text{Left finitely cogenerated} \\ \text{injective Hopf trimodule} \\ \text{algebras over } B \end{matrix} \right\} \Big/ \simeq_{cMorita}.$$

9.4 非刚性重构的一个半单例子

我们现在给出定理8.50与9.22的一个具体应用，用以描述非刚性范畴的模范畴；在这些情形中，针对刚性范畴的通常重构过程并不能得到正确结果。

设 $S = \{e, s\}$ 为不是群的交换二元幺半群，其单位元为 e。特别地，$s^2 = s$ 是幂等元。幺半群代数 $\Bbbk[S]$上有限维模的范畴 $\mathsf{rep}(S)$ 是半单的，其简单对象有两个同构类，由一维表示 $\Bbbk_{\mathrm{triv}}$ 与 $\Bbbk_{\mathrm{grp}}$给出。在 $\Bbbk_{\mathrm{triv}}$ 中，元素 s 以 1 作用，而在$\Bbbk_{\mathrm{grp}}$ 中则以 0 作用。 $\Bbbk[S]$ 上的标准余乘法中， e 与 s

是类群元，从而使 $\Bbbk[S]$ 成为双代数。$\Bbbk[S]$ 上有限维余模的范畴 $\mathsf{corep}(S)$ 等价于 S-分次有限维空间的范畴 vect^S。因此，它同样是秩二半单的——我们将简单对象记为 δ_e 与 δ_s。

上的幺半结构 $\mathsf{rep}(S)$ 满足 $\Bbbk_{\mathrm{grp}} \otimes \Bbbk_{\mathrm{grp}} \cong \Bbbk_{\mathrm{grp}}$。事实上，Grothendieck 环 $[\mathsf{rep}(S)]$ 的这一表示 $\mathsf{rep}(S)$ 唯一确定了$\mathsf{rep}(S)$作为半单幺半范畴的结构，参见 [SCZ23，命题 3。5]。因此，我们得到幺半等价

$$\mathsf{rep}(S) \simeq \mathsf{corep}(S) \simeq \mathsf{vect}^S,$$

因为在后一种情况下，我们有 $\delta_s \otimes \delta_s \cong \delta_s$。

现在让我们聚焦于定理8.50的余代数框架，研究$\mathsf{corep}(S)$上的模范畴。

[21] A $\mathscr{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 称为不可分解的，如果它不能分解为$\mathscr{C}$-模子范畴的直和。

半单的 $\mathsf{corep}(S)$-模范畴 $(\mathcal{M}, \triangleright)$ 是不可分解的[21] 当且仅当当且仅当在 $\mathcal{M}$ 的简单对象基下，描述 δ_s 对 Grothendieck 环 $[\mathcal{M}]$ 的作用的矩阵 $[\delta_s]_{\mathcal{M}}$ 是不可分解的。但 $[\delta_s]$ 是幂等的，因此它必定是 1×1-矩阵 (1)；并且作为一个范畴，$\mathcal{M}$ 必须满足 $\simeq \mathsf{vect}$。于是，我们要么有 $\delta_s \triangleright - \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{M}}$，要么有 $\delta_s \triangleright - \cong 0$。类似于 [EGNO15, 例7.4.10]，可以通过证明二阶上同调群 $H^2(S, \Bbbk^\times)$ 是平凡的，说明满足其中一个条件的任意两个模范畴都是等价的。事实上，$\psi \in Z^2(S, \Bbbk^\times)$ 必须满足关系 $\psi(e,s) = \psi(e,e) = \psi(s,e)$，因此令 $\sigma(e) .. = \psi(e,e)$ 且 $\sigma(s) ..= \psi(s,s)$，即可将其写成 $\psi(x,y) = \sigma(x)-\sigma(xy)+\sigma(y)$。纤维函子 $\mathrm{Fr} : \mathsf{corep}(S) \longrightarrow \mathsf{vect}$ 满足条件 $\delta_s \triangleright - \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{M}}$。

反过来，假设我们有一个满足 $\delta_s \triangleright - \cong 0$ 的不可分解模范畴 $\mathcal{M}$。设 $X \in \mathcal{M}$ 是一个简单对象。可以验证，X 满足定理 8.50 的假设。给定 $V \in \mathsf{corep}(S)$，我们有

$$\lceil X, V \triangleright X \rceil_s = \mathsf{corep}(S)(\lceil X, V \triangleright X \rceil, \delta_s) \cong \mathsf{corep}(S)(V \triangleright X, \delta_s \triangleright X),$$

对于 δ_e，类似地也成立。

利用 $\delta_s \triangleright X \cong 0$ 和 $\delta_e \triangleright X \cong X$，我们得到 $\lceil X, \ \delta_e \triangleright X \rceil \cong \delta_e$ 以及 $\lceil X, \ \delta_s \triangleright X \rceil = 0$。为描述在命题 2.109 的对应关系下与函子$\lceil X, \ - \triangleright X \rceil$ 对应的双余模，我们注意到双余模可以视为一个 $S \times S$-分次空间，而余张量积由下式给出

$$(V \,\square\, W)_{x,y} = \bigoplus_{z \in S} V_{x,z} \otimes W_{z,y}.$$

利用这一点，我们得到 $\lceil X,\ -\triangleright X\rceil \cong \delta_{e,\ e}\ \square\ -$，其中 $\delta_{e,\ e}$ 是集中在次数（$e,\ e$）上的一维空间。因此，单位 Hopf 三模同态 $\Bbbk[S]\longrightarrow\lceil X,\ \Bbbk[S]\triangleright X\rceil$ 的核必为子模 $\Bbbk\{s\}$，所以重构的 Hopf 三模 $\lceil X,\ \Bbbk[S]\triangleright X\rceil$ 由 $\Bbbk[S]/\Bbbk\{s\}$给出。作为双余模，它确实集中在次数（$e,\ e$）上；作为模，它同构于 $\Bbbk_{\mathrm{grp}}$。复合

$$\lceil X,\delta_e\triangleright X\rceil\otimes\lceil X,\delta_e\triangleright X\rceil\longrightarrow\lceil X,\delta_e\triangleright X\rceil$$

将 $\mathrm{id}_X\otimes\mathrm{id}_X$ 映到 id_X，对应于代数结构

$$\begin{aligned}\Bbbk[S]/\Bbbk\{s\}\ \square\ \Bbbk[S]/\Bbbk\{s\}\simeq\Bbbk[S]/\Bbbk\{s\}\otimes\Bbbk[S]/\Bbbk\{s\}&\longrightarrow\Bbbk[S]/\Bbbk\{s\}\\(e+\Bbbk\{s\})\otimes(e+\Bbbk\{s\})&\longmapsto(e+\Bbbk\{s\}),\end{aligned}$$

而这个乘法定义了一个霍普夫三模代数。

为了验证范畴 $\Bbbk[S]/\Bbbk\{s\}$-余模满足我们先前对 M 所作的假设，注意到自由模 $\Bbbk[S]/\Bbbk\{s\}\ \square\ B$是一维的，因此是半单的，这表明 $\Bbbk[S]/\Bbbk\{s\}$ 上的模范畴是秩一的半单范畴。因此，由命题 9.25 可得

$$\Bbbk[S]/\Bbbk\{s\}\text{-Contramod}\simeq\Bbbk[S]/\Bbbk\{s\}\text{-Mod}.$$

此外，$\delta_s\triangleright\Bbbk[S]/\Bbbk\{s\}=\Bbbk[S]/\Bbbk\{s\}\ \square\ \delta_s=0$，这对应于 $\delta_s\triangleright X=0$.

如果我们转而遵循 [EGNO15 第 7], 章中描述的重构过程，那么重构所得的代数对象将是 $\mathsf{corep}(S)$ 中表示预层 $\mathrm{M}(-\triangleright X,X)$ 的对象 A。我们看到必有 $A\cong\delta_e$，并且 δ_e 上的代数结构是唯一的。然而，$\delta_e\cong 1_{\mathsf{corep}(S)}$，因此

$$\mathrm{Mod}(\delta_e)\simeq\mathsf{corep}(S)\neq\mathscr{M},$$

这表明，在此非刚性情形下，针对刚性幺半范畴上的模范畴的重构过程会失效。它还说明，这种失效在半单情形下就已经可以观察到。

9.5 一个霍普夫代数三模代数：构造纤维函子

本节讨论 Hopf 三模代数的一般构造，它涵盖了第 $\mathsf{corep}(S)$ 9.4 节中讨论的剩余不可分解半单模范畴，该范畴基于 9.4。

命题 9.29。 $\Bbbk$ 向量空间 $B \otimes_{\Bbbk} B$ 构成一个 *Hopf* 三模，其余作用为

$$b \otimes c \longmapsto b_{(1)} \otimes b_{(2)} \otimes c, \qquad c \otimes b \longmapsto c \otimes b_{(1)} \otimes b_{(2)},$$

及作用

$$x \otimes b \otimes c \longmapsto x_{(1)} b \otimes x_{(2)} b.$$

我们将其记为 $B \bullet B$。

证明。 显然， $B \bullet B$ 是一个双余模，因为两个余作用分别由 B 在相应的 Let 上给出。

因此，我们首先验证该作用是左、右余模的态射；也就是说， $B \bullet B$ 属于 ${}_B\mathsf{Vect}^B$ ，并且 ${}^B_B\mathsf{Vect}$。前者由图9.8得出，后者则源于图9.9中的计算。□

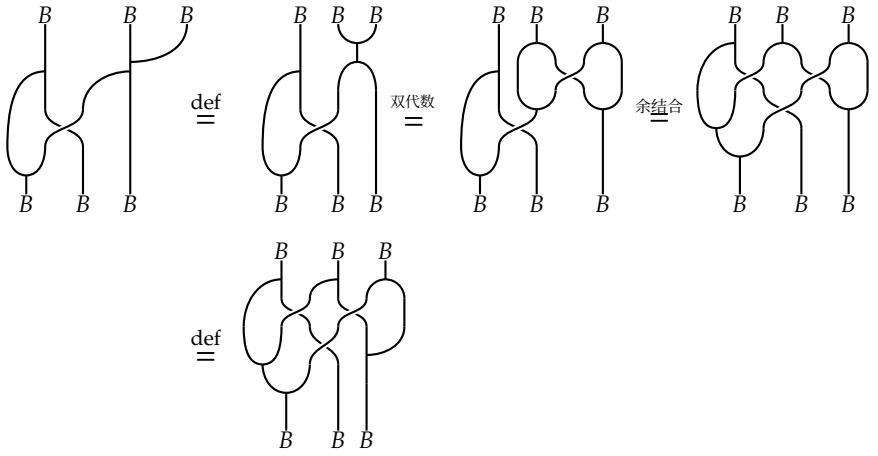


图 9.8: $B \bullet B$ 的作用是左余模之间的态射。

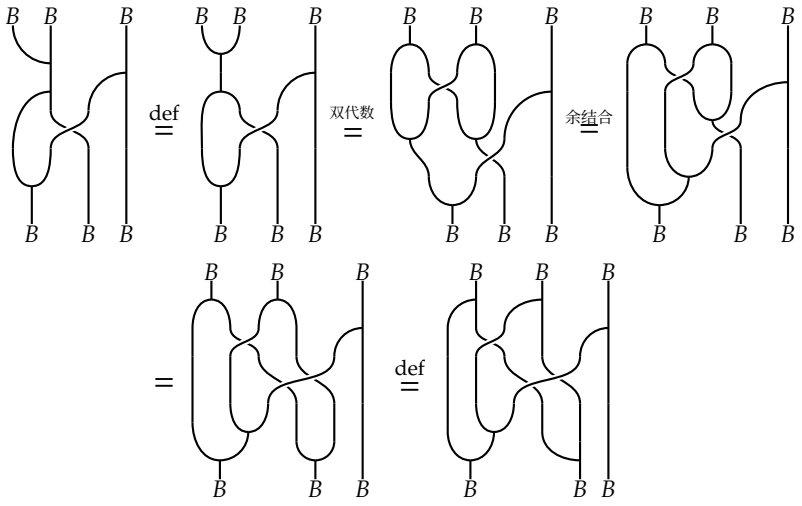
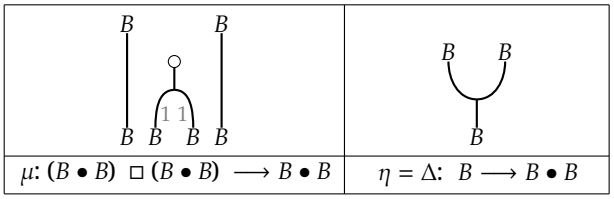


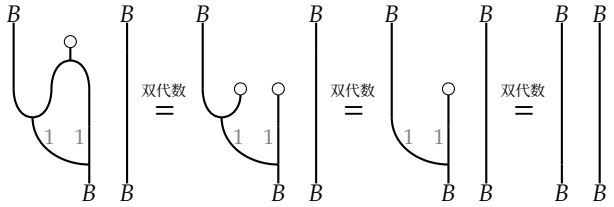
图 9.9: $B \bullet B$ 的作用是右余模之间的态射。

命题 9.30。命题 $B \bullet B$ 中的霍普夫三模9.29 *is an algebra object in* ${}^{B}_{B}\mathsf{Vect}^{B}$。

证明。 我们将 $B \bullet B$ 的乘法和单位定义为

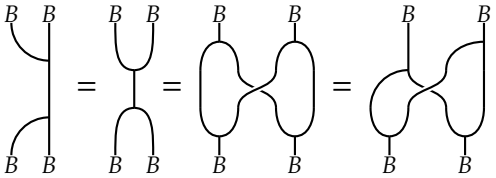


其中，我们用一个小白点表示余单位 ε，它属于 B；并且，我们采用与第9.1节相同的编号系统来表示余张量积。显然， μ是结合的，左单位性由以下内容得出：



并且右单位性类似。

立即可知 μ 是一个 ${}^{B}\mathsf{Vect}^{B}$-态射，并且对于 $\eta = \Delta$ 这由余结合性得出。为完成证明，我们只需证明二者都是左 B-模的态射，这由图9.10以及如下计算得出：



□

定义 9.31. 设 $J\colon (B \bullet B)\text{-ModFree} \longrightarrow \mathsf{Vect}$ 为由$J((B \bullet B) \,\square\, M) = M$ 以及局部映射给出的函子

$$J_{M,N}\colon (B \bullet B)\text{-ModFree}\big((B \bullet B) \,\square\, M, (B \bullet B) \,\square\, N\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(M,N)$$
$$\sigma \longmapsto (\varepsilon \otimes \varepsilon \,\square\, \mathrm{id}_N) \circ (\sigma(1 \otimes 1 \otimes -))$$

引理 9.32. 定义 9.31 给出了一个 ${}^{B}\mathsf{Vect}$-模范畴之间的等价。

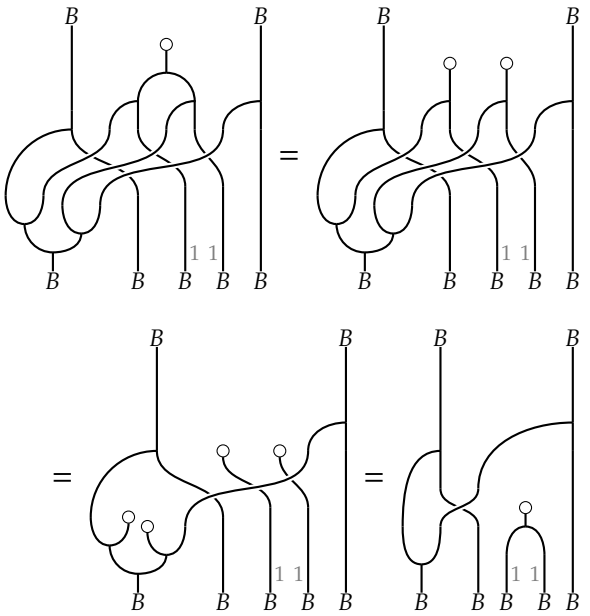


图 9.10：单位 $\eta = \Delta$是左B-模的一个态射。

证明. 首先，假设 J 是一个函子；我们将证明它是 (${}^B\mathsf{Vect}$)-模范畴之间的等价。令 $V \in \mathsf{Vect}$。本质满射性由下式可得

$$V \cong \Bbbk^{\dim V} \cong J((B \bullet B) \square \Bbbk^{\dim V}_{\mathrm{triv}}).$$

J 是全忠实的这一事实，由于$J_{M,\ N}$定义为这些同构的复合，因此成立

$$(B \bullet B)\text{-}\mathrm{ModFree}\big((B \bullet B) \square M, (B \bullet B) \square N\big) \xrightarrow{-\circ\eta} {}^B\mathsf{Vect}(M, (B \bullet B) \square N)$$
$$\xrightarrow{(B\otimes\varepsilon\square N)\circ-} {}^B\mathsf{Vect}(M, B \otimes N) \xrightarrow{(\varepsilon\otimes N)\circ-} \mathsf{vect}(M, N).$$

第一个态射是形如 $\mathcal{A}^T(TX, TY) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(X, TY)$的同构，其中单子 $T \coloneqq (B \bullet B) \square -$ 定义在范畴 $\mathcal{A} \coloneqq {}^B\mathsf{Vect}$ 上，见注 8.4。第二个同构只是与同构 $(B \bullet B) \square N = B \otimes B \square N \xrightarrow{B\otimes\varepsilon\square N} B \otimes N$ 作后复合，因为 $B \square N \xrightarrow{\varepsilon\square N} N$ 是一个同构。第三个是形如 $\mathrm{B}^C(CX, CY) \xrightarrow{\sim} \mathrm{B}(CX, Y)$的同构，其中余单子 $K \coloneqq B \otimes -$ 定义在范畴 $\mathrm{B} \coloneqq \mathsf{Vect}$ 上。

最后，J 是一个（${}^B\mathsf{Vect}$）模函子：对于$W \in {}^B\mathsf{Vect}$，我们有

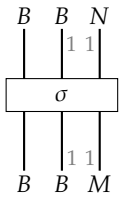
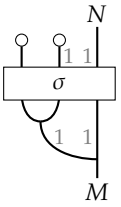
$$W \triangleright J(B \bullet B \square M) = W \otimes M = J(B \bullet B \square (W \otimes M)) = J(W \triangleright B \bullet B \square M).$$

因此，如果 J 定义了一个函子，它就是 (${}^B\mathsf{Vect}$)-模范畴之间的等价 .

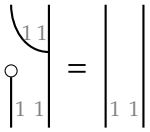
剩下要验证的是 J 的函子性。令

$$\sigma \in (B \bullet B)\text{-ModFree}((B \bullet B) \square M, (B \bullet B) \square N),$$
$$\tau \in (B \bullet B)\text{-ModFree}((B \bullet B) \square N, (B \bullet B) \square W).$$

我们用图示地表示这些态射：

	
$\sigma \in (B \bullet B)$-模自由$((B \bullet B) \square M,\ (B \bullet B) \square N)$	$J(\sigma) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(M,\ N)$

……的函子性 J 由图 9.11可知；(i) 和 (ii) 成立是因为



等式 (iii) 由 τ 是一个 $(B \bullet B)$-模态射而成立，(iv) 可由以下计算得出，其中用到 B 是一个双代数：

$$\varepsilon(b_{(1)}b_{(2)}) \otimes b_{(3)} = \varepsilon(b_{(1)})\varepsilon(b_{(2)}) \otimes b_{(3)} = \varepsilon(b_{(1)}\varepsilon(b_{(2)})) \otimes b_{(3)} = \varepsilon(b_{(1)}) \otimes b_{(2)} = b,$$

并且 (v) 可由类似的计算得出。 □

推论 9.33。 单子 $(B \bullet B) \square -$ 是半单的，并且存在一个 ${}^{B}\mathsf{Vect}$-模范畴等价 $(B \bullet B)$-模 $\simeq \mathsf{Vect}$。

9.6 霍普夫模基本定理

定义 9.34 ([Mon93，命题 1.5。10])。 设 B 是一个双代数。对于 B，扭曲反极 B 是双代数 B^{cop}的一个对极。[22]

[22] 等价地，扭曲反极是 B的反向的一个对极。

~~**注 9.35.** Hopf 代数存在扭曲反极 S 当且仅当其自身的对极 S 可逆，此时有 $S^{-1} = \tilde{S}$。值得注意的是，有限维 Hopf 代数总是存在扭曲反极。

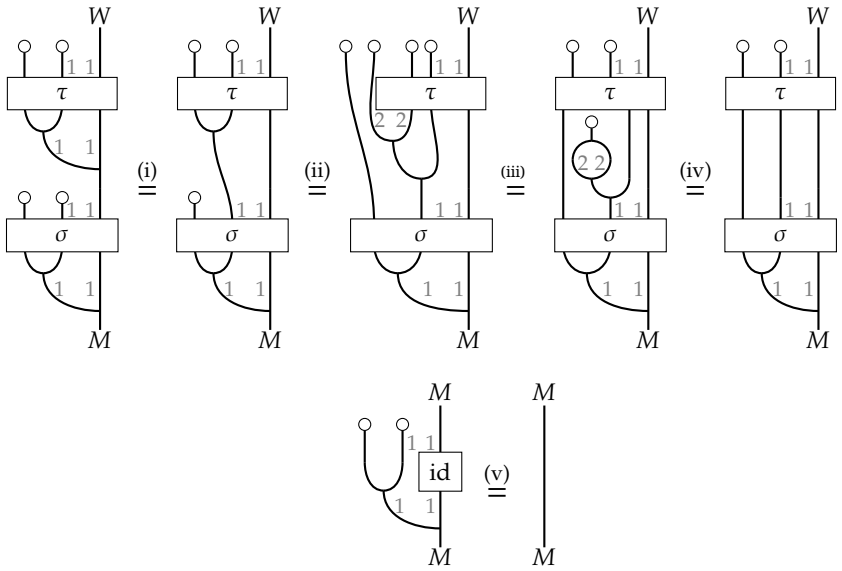


图 9.11：指派 J 是函子性的。

引理 9.36是一个众所周知的结果，例如参见 [EGNO15，定理 5.4.1.(2)]。我们强调，尽管其前半部分看似与 [EGNO15定理 5.4.1.(2)], 的论断相反——该论断认为反极的存在对应于右刚性而非左刚性——但这是因为我们考虑的是左余模，而非右余模。引理 9.36的后一个论断可由前一个论断利用等价 $({}^{B}\mathsf{Vect})^{\mathrm{rev}} \simeq {}^{B^{\mathrm{op}}}\mathsf{Vect}$ 得出。

引理 9.36. 设 B 为双代数。则 ${}^{B}\mathsf{vect}$ 是右刚性的，当且仅当 B 具有对极。类似地，${}^{B}\mathsf{vect}$ 是左刚性的，当且仅当 B 具有扭曲反极。

下一个定理在拟双代数的框架下已于 [HN99，命题 3。11] 以及 [Sar17，定理 3。9], 中给出，作为 Larson 与 Sweedler 的 Hopf 模结构定理的推广 [LS69]。

定理 9.37. 设 B 为双代数。函子 $- \otimes B \colon {}_{B}\mathsf{Vect} \longrightarrow {}_{B}\mathsf{Vect}_{B}^{B}$ 是一个等价，当且仅当 B 具有对极。

本节接下来将说明，定理 9.37 的一个变体可由以下一般性陈述推导得出。

命题 9.38。 设 $\mathscr{C}$ 是一个左闭幺半范畴，其中每个左 $\mathscr{C}$-模自函子都是强的——换句话说，幺半嵌入

$$\mathsf{Str}\mathscr{C}\mathsf{Mod}(\mathscr{C},\mathscr{C}) \hookrightarrow \mathsf{Lax}\mathscr{C}\mathsf{Mod}(\mathscr{C},\mathscr{C})$$

是一个等价。则 $\mathscr{C}$ 是左刚性的。

证明。由于 $\mathcal{C}$ 是左闭的，对每个 $x \in \mathcal{C}$，存在强 $\mathcal{C}$-模自函子 $- \otimes x$的右伴随 $\lfloor x, -\rfloor$。由推论 5.29，函子 $\lfloor x, -\rfloor$是 $\mathcal{C}$的宽松 $\mathcal{C}$-模自函子，因而由假设，它是强模自函子。命题 2.51 给出一个对象 ${}^{\vee}x$，使得存在 $\mathcal{C}$-模函子的同构 $\lfloor x, -\rfloor \cong - \otimes {}^{\vee}x$。于是我们得到 $\mathcal{C}$-模函子的伴随 $- \otimes x \dashv - \otimes {}^{\vee}x$，由 [Kel72，第102–103]页可知，$({}^{\vee}x, x)$是 $\mathcal{C}$中的对偶对。由此可知 $\mathcal{C}$ 是左刚性的。□

注 9.39。 给定一个刚性幺半范畴 $\mathcal{C}$，注意到其上的每个宽松 $\mathcal{C}$-模自函子 $\mathcal{C}$ 根据命题 2.73都会自动成为强函子。结合命题 9.38，这就给出了一个刻画：一个（左）闭合幺半范畴何时为（左）刚性的，仅基于其宽松 $\mathcal{C}$-模函子。这是模函子的一个特殊性质，因为正如第3.1.2 节 中所见，普通伴随不足以实现这样的刻画。

现在定义函子 $B \otimes -$，它类似于定理 $- \otimes B$ 中的 $- \otimes B$ 9.37。

定义 9.40。 定义函子 $B \otimes -\colon {}^{B}\mathsf{Vect} \longrightarrow {}^{B}_{B}\mathsf{Vect}^{B}$，将一个左$B$-余模 M 映射为三模 $B \otimes M$，其左、右余作用以及左作用定义为

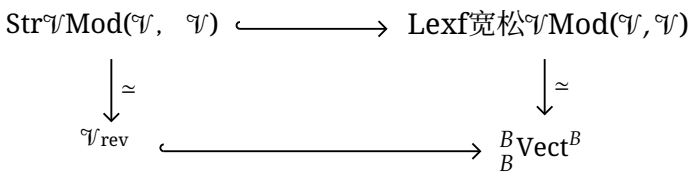
$$b \otimes m \longmapsto b_{(1)} m_{(-1)} \otimes b_{(2)} \otimes m_{(0)}; \quad b \otimes m \longmapsto b_{(1)} \otimes m \otimes b_{(2)}; \quad a \otimes b \otimes m \longmapsto ab \otimes m;$$

其中我们以自然的方式将其扩展到态射。容易验证，$B \otimes M$ 定义了一个霍普夫代数三模，并且 $B \otimes -$ 定义了一个函子。

备注 9.41。 比较定义9.40 与定理 9.37，我们指出两点差异。首先，我们所研究的函子的定义域是 B上的余模范畴，而不是模范畴。这只是为了与第9.2节保持一致；针对模也可以毫不费力地构造出相应的变体。其次，我们所研究的函子赋予一个左余模一个额外的右侧余模结构，以及一个左侧模结构，而不是右侧模结构。我们将看到，它与函子$\mathsf{Vect} \longrightarrow {}_{B}\mathsf{Vect}^{B}$有关；已知当 B 具有扭曲反极时，该函子是一个等价；例如参见 [Mon93，第 1.9 节。4]。

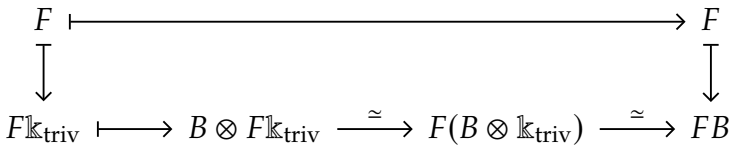
现在我们为定义 9.40 中的函子给出一个范畴论解释。回顾第 $\mathcal{V}_{-} = {}^{B}\mathsf{Vect}$ 节中的记号 9.2。

命题 9.42. 图表



在霍普夫三模意义下交换。其上方的水平箭头是自然包含函子，左侧的垂直箭头是命题 2.51中的等价，右侧的垂直箭头是定理 9.2中的等价，下方的水平箭头是定义 9.40中的函子。

证明。 在图表中追踪函子 F，我们得到如下结果：



容易验证，此次追踪底行所示的同构关于 F 是自然的，而且是幺半的。□

推论 9.43。 若定义 $B \otimes -$ *9.40* 中的函子 是等价，则 B存在扭曲反极。

证明。 由命题 9.42， $B\otimes-$是等价，当且仅当嵌入

$$\mathsf{Str}\mathcal{V}\mathsf{Mod}(\mathcal{V},\mathcal{V}) \hookrightarrow \mathsf{Lexf}\mathsf{Lax}\mathcal{V}\mathsf{Mod}(\mathcal{V},\mathcal{V})$$

是等价，因此假设它确实是等价。

对于 $M \in {}^{B}\mathsf{Vect}$， $-\otimes_{\Bbbk} M$ 的右伴随由命题 2.134可知是有限的，因为 $-\otimes_{\Bbbk} M$ 将有限维余模映为有限维余模。于是右伴随是一个有限的左正合宽松 $\mathcal{V}$-模函子。根据假设，它是强的，因此具有形式 $-\otimes {}^{\vee}M$，其中 ${}^{\vee}M \in \mathcal{V}$。由于纤维函子 $U\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathsf{Vect}$ 是强幺半的，我们有 ${}^{\vee}M \cong M^{*}$。这表明 ${}^{B}\mathsf{Vect}$ 是左刚性的；由引理9.36， B 存在扭曲反极。□

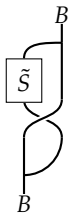
命题 9.44. 如果双代数 B 存在扭曲反极，那么定义 $B\otimes-$定义9.40 中的函子就是一个等价。

证明. 由于函子 $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathsf{LexfLax}\mathcal{V}\mathsf{Mod}(\mathcal{V},\mathcal{V})$ 总是全忠实的，因此根据命题 $B\otimes -$ 命题 9.42，函子也如此。接下来只需证明 $B\otimes -$ 是本质满的。

根据 [Mon93，第 1.9 节，4],对于$X \in {}_B\mathsf{Vect}^B$，复合映射

$$\Gamma\colon X \xrightarrow{\Delta_X} X\otimes B \xrightarrow{\mathsf{t}\otimes B} X^{\mathrm{co}B}\otimes B \xrightarrow{\sigma_{X^{\mathrm{co}B},B}} B\otimes X^{\mathrm{co}B}$$

是${}_B\mathsf{Vect}^B$中的一个同构，其中 $X^{\mathrm{co}B} = \{\, m\in X \mid \Delta_X^r(m) = m\otimes 1\,\}$，而t是投影，其图示表示为



Γ 的逆元由左 B作用在 X上的限制 $\nabla_X|_{\mathrm{co}B}\colon B\otimes X^{\mathrm{co}B}\longrightarrow X$ 给出。

对于 $X\in {}^B\mathsf{Vect}_B$，余不变元空间 $X^{\mathrm{co}B}$ 是X的左 B-子余模，因为 X 是一个双余模。容易验证 $\nabla_X|_{\mathrm{co}B}\colon B\otimes X^{\mathrm{co}B}\longrightarrow X$ 是一个左 B-余模态射，因此也是${}^B_B\,\mathsf{Vect}^B$中的态射，使函子 $B\otimes -$ 本质满。□

推论 9.45. 一个双代数 B 容许扭曲反极，当且仅当函子$B\otimes -$ （定义 9.40 ）是一个等价。

注 9.46. 由此可见，至关重要的是第 9.2 节将 Hopf 三模等同于有限 松弛模函子。给定一个无限维余模 M在 B上，函子 $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(M,-)\colon {}^B\mathsf{Vect}\longrightarrow {}^B\mathsf{Vect}$被赋予宽松 ${}^B\mathsf{Vect}$-结构，凭借定理5.28，但其本身并非有限。

9.7 Hopf 单子的融合算子

与我们对定理9.37 在第9.6节中的研究类似，Bruguières、Lack 与 Virelizier 在 [BLV11] 中的结果可用于刻画幺半范畴的刚性。

引理 9.47. 设 $F\colon \mathcal{C}\rightleftarrows\mathcal{D}\colon U$为一个反强幺半伴随。$U$ 的强幺半结构通过如下定义，使 $\mathcal{C}$ 成为一个 $\mathcal{D}$-模范畴：

$$-\triangleright = \;:=\; U(-)\otimes =.$$

该结果的一个采用“Doi–Koppinen 数据”的变体见 [KKS15第 5 节。5]。

相对于这一 $\mathfrak{D}$-模结构，$\mathfrak{C}$ 上的双单子 $T ..= UF$ 成为一个反宽松 $\mathfrak{D}$-模单子。相干态射定义如下：

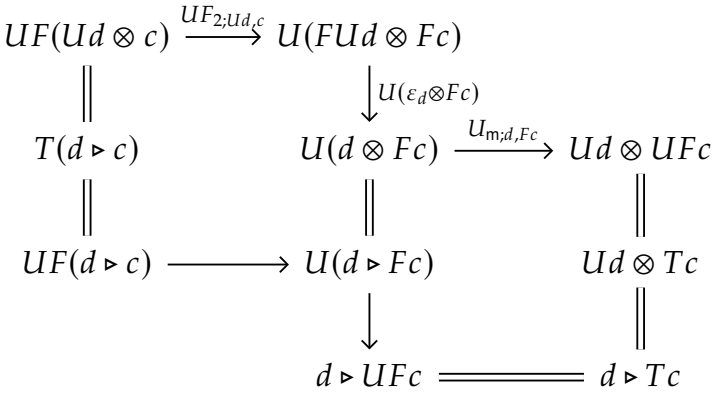
$$T_{\mathsf{a};d,c} : T(d \triangleright c) = T(Ud \otimes c) \xrightarrow{T_{2;Ud,c}} TUd \otimes Tc \xrightarrow{U\varepsilon_d \otimes Tc} Ud \otimes Tc, \tag{9.7.1}$$

对所有 $c \in \mathfrak{C}$ 和 $d \in \mathfrak{D}$均成立。特别地，对于 $x \in \mathfrak{C}$，相干态射$T_{\mathsf{a};Fx,\ c}$ 恰好是 T 在(x, c)处的右融合算子。换言之，$T_{\mathsf{a};Fx,\ c} = T_{\mathsf{rf};x,\ c}$。

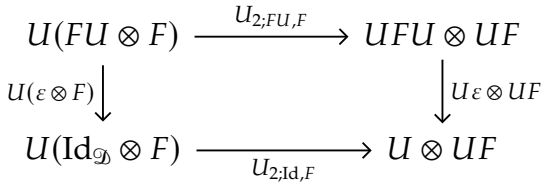
证明。 第一个结论是结构传递中的一个众所周知的结果。对于 $y \in \mathfrak{D}$， $\mathfrak{D}$-模结构在 U 上由以下态射给出

$$U_{\mathsf{m}} : d \triangleright Uy = Ud \otimes Uy \xrightarrow{\sim} U(d \otimes y) = U(d \triangleright y).$$

对于第二个结论，注意到根据推论 5.29， F 继承了一个 oplax$\mathfrak{D}$-模函子结构，它来自 $\mathfrak{D}$-模结构，该结构是强的，定义在 U上。作用于 $\mathfrak{D}$上的 oplax T -模函子由下图上半部分给出；为清晰起见，图中还包含了下半部分：



要证明该态射等于方程（9.7.1）中定义的态射，注意到以下由函子的自然性可知交换的图表 U_2:



由定义可知 $\mu = U\varepsilon F$，将 $d = Fx$ 代入方程（9.7.1）可得$T_{\mathsf{a};Fx,\ c} = T_{\mathsf{rf};x,\ c}$，由此即证。□

引理 9.48。 设 $\mathscr{C}$ 是一个范畴， $f, g\colon x \longrightarrow y$ 是 $\mathscr{C}$中的一对平行态射，且余等化子 $\operatorname{coeq}(f, g)$ 存在。若 $G, H\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ 是一对保该余等化子的函子， $\alpha\colon G \Longrightarrow H$ 是一个自然变换，则 α_x 和 α_y可逆蕴含 $\alpha_{\operatorname{coeq}(f,g)}$也可逆。

证明。 令 $c ::= \text{为 } \operatorname{coeq}(f, g)$，并记 $p\colon y \twoheadrightarrow c$ 为典范投影。我们处于以下情形：

$$\begin{array}{ccccc} Gx & \underset{Gg}{\overset{Gf}{\rightrightarrows}} & Gy & \xrightarrow{Gp} & Gc \\ {\scriptstyle \alpha_x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_y} & & \\ Hx & \underset{Hg}{\overset{Hf}{\rightrightarrows}} & Hy & \xrightarrow{Hp} & Hc \end{array}$$

于是我们计算得

$$Hp \circ \alpha_y \circ Gf = Hp \circ Hf \circ \alpha_x = Hp \circ Hg \circ \alpha_x = Hp \circ Gg \circ \alpha_x,$$

由此可知，根据 Gc 的泛性质，存在唯一的箭头 $!\colon Gc \longrightarrow Hc$，使其等于 α_c。由于 α_x 和 α_y 可逆，我们还得到唯一的箭头 $Hc \longrightarrow Gc$，很容易看出它是 α_c 的逆元。□

命题 9.49。 双单子 T 在幺半范畴上的右融合算子$\mathscr{C}$ 可逆，当且仅当引理 $\mathscr{C}^T$-模结构在 T 中的相干态射 9.47 可逆。

换言之， T 是右 *Hopf*，当且仅当它是一个强 $\mathscr{C}^T$-模单子。

证明。 由于根据引理 9.47， T 的右融合算子是 $\mathscr{C}^T$-模函子结构相干态射的一个特例，该结构定义在 T上，因此显然， T 是一个强 $\mathscr{C}^T$-模单子意味着右融合算子可逆。

为证明反向结论，假设右融合算子可逆；特别地，根据引理 9.47，态射$T_{\mathsf{a};Fx,c}$ 可逆。回顾一下，任意T-代数（x， α） $\in \mathscr{C}^T$ 都是以下图表的余等化子

$$T^2x \underset{T\alpha}{\overset{\mu_x}{\rightrightarrows}} Tx \xrightarrow{\alpha} x$$

在 $\mathscr{C}^T$ 中。换言之， x是从 FTx 到 Fx 的态射的 U-分裂余等化子，因为 Fx 是 x 上的自由 T- 模。

考虑自然变换 $T_{\mathsf{a};-,c}:\ T(-\triangleright c)\longrightarrow -\triangleright Tc$。我们有

$$T(-\triangleright c)=T(U(-)\otimes c)=(-\otimes c)\circ U,$$

这意味着 $T(-\triangleright c)$ 保持余等化子 $\mathsf{coeq}(T\alpha,\ \mu_x)$：先将其映射为 U 下的分裂余等化子，再予以保持，因为分裂余等化子是绝对的。

同理，$-\triangleright Tc=U(-)\otimes Tc=(-\otimes Tc)\circ U$ 也保持这个余等化子。由 $T_{\mathsf{a};x、c}$、$T_{\mathsf{rf};x、c}=T_{\mathsf{a};Fx、c}$ 以及 $T_{\mathsf{rf};Tx、c}=T_{\mathsf{a};FTx、c}$ 的可逆性假设，根据引理 9.48，可得□

参考文献

[AC12] Marcelo Aguiar 和 Stephen Chase。关于双代数的广义 Hopf 模，载于：范畴理论与应用27 (2012)，第 263–326 页（引文见第 2，5、117、122、123、129）。

[AEBSJ01] Jiří Adámek、Robert El Bashir、Manuela Sobral 和 Velebil Jiří。关于函子它们是松弛满态射。载于：*Theory Appl.Categ.* 8（2001），第 509–521 页。国际标准连续出版物号：1201-561X（引自第 76 页）。

[AHLF18] Marcelo Aguiar、Mariana Haim 和 Ignacio López Franco。关于高阶幺半范畴上的单子高阶幺半范畴。载于：应用范畴结构 26.3（2018年），第 413–458 页。国际标准连续出版物号：0927-2852。数字对象标识符：10.1007/s10485-017-9497-8（引用于第157、161、162、166、179、186、188、192、195、196、206页）。

[ALSW21] Robert Allen、Simon Lentner、Christoph Schweigert和Simon Wood。顶点算子代数模范畴的对偶结构以及Feigin–Fuchs玻色子。载于：*arXiv*预印本（2021年）。arXiv：2107.05718 [math.QA]（引自第213页）。

[AM10] Marcelo Aguiar 和 Swapneel Mahajan。幺半函子、物种与霍普夫代数。第 29 卷。CRM专著丛书。肯尼思·布朗和 Stephen Chase、André Joyal 作序。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2010 年，第 lii+784。国际标准书号:978-0-8218-4776-3. 数字对象标识符: 10.1090/crmm/029 (引自第 157–161、166页)。

[AM24] Nathanael Arkor 和 Dylan McDermott。《相对单子的形式理论》单子》。载于：纯粹与应用代数杂志 228.9 (2024)。编号 107676，第 107 页。国际标准连续出版物号：0022-4049。数字对象标识符：10.1016/j.jpaa.2024.107676 (引自第 2、189页)。

[Bac16] David Bachiller。《关于抱子的猜想的反例》。载于：《代数杂志》453（2016年），第160–176页。国际标准连续出版物号：0021-8693。数字对象标识符：10.1016/j.jalgebra.2016.01.011（引自第87页）。

[Bae29] Reinhold Baer。《关于群胚概念的引入》。德语。载于：*J. Reine Angew. Math.* 160（1929年），第199–207页。国际标准连续出版物号：0075-4102。数字对象标识符：10.1515/crll.1929.160.199 (引文见第92页)。

[Bar79] Michael Barr。*-自治范畴。附录由 Po-Hsiang Chu。第 752 卷。数学讲义。施普林格，Cham，1979（引文见第 57、58，82)。

[BCZ13] Gabriella Böhm、Yuanyuan Chen 和 Liangyun Zhang。关于霍普夫幺半群双幺半范畴中。载于：《代数杂志》394（2013年），第139–172页。国际标准连续出版物号：0021-8693。数字对象标识符：10.1016/j.jalgebra.2013.07.016（引自第157、158页）。

[BD13] Mitya Boyarchenko 和 Vladimir Drinfeld。秉承格罗滕迪克与韦尔迪耶思想的对偶形式体系。载于：《量子拓扑学》4.4（2013年），第447–489页。国际标准连续出版物号：1663-487X。数字对象标识符：10.4171/QT/45（引自第57、61–63、65页）。

[BD86] Francis Borceux与Dominique Dejean。范畴中的柯西完备化论。载于：范畴拓扑与微分几何笔记 27.2（1986），第133–146页。国际标准连续出版物号：2681-2363（引用于第76、77页）。

[Bec69] Jon Beck. 分配律。载于：三元组与范畴同调研讨会理论（苏黎世联邦理工学院，*1966/67*）。施普林格，柏林，1969，页码 119–140（引文见页码 2，18）。

[Bén67] Jean Bénabou. 双范畴导论。Jean Bénabou 等，《中西部范畴研讨会报告》。数学讲义 47，1-77（1967）。1967年。数字对象标识符：10.1007/BFb0074299 （引自第2页）。

[BFSV03] Cornel Balteanu、Zbigniew Fiedorowicz、Roland Schwänzl与Rainer Vogt。迭代幺半范畴。载于：*Adv. Math.* 176.2（2003年），第277–349页。国际标准连续出版物号：0001-8708. 数字对象标识符：10.1016/S0001-8708(03)00065-3 （引自第157页）。

[BHM02] Nick Benton、John Hughes 和 Eugenio Moggi。《单子与效应》。载于：应用语义学。国际暑期学校 *APPSEM 2000，Caminha，* 葡萄牙，*2000*年*9*月*9*日至*15*日。高级讲座。柏林：施普林格，2002，页码 42–122。国际标准书号：3-540-44044-5（引自第 2页）。

[BHV24] Eliezer Batista、William Hautekiet 和 Joost Vercruysse。《余单子性偏余模定理。载于：*Quaest.Math.* 47.7（2024），第 1461–1503 页。国际标准连续出版物号：1607-3606。 数字对象标识符：10.2989/16073606.2024.2322011 （引自第2页）。

[BKP89] Richard Blackwell、Gregory M. Kelly 和 John Power。二维单子理论。载于：纯粹与应用代数杂志59.1（1989），第 1–41 页。国际标准连续出版物号：0022-4049。数字对象标识符：10.1016/0022-4049(89)90160-6 （引自第2页）。

[BLV11] Alain Bruguières、Steve Lack 和 Alexis Virelizier。《霍普夫单子》在单胚范畴中。载于：《数学进展》227.2（2011），第 745–800 页。国际标准连续出版物号：0001-8708。 数字对象标识符： 10.1016/j.aim.2011.02.008 （引用页码：2、117、122、241）。

[BM12] Michael Batanin 和 Martin Markl。范畴中的中心与同伦中心，恩富化幺半范畴。载于：*Adv. Math.* 230.4-6 (2012)，第 1811–1858 页。国际标准连续出版物号：0001-8708。数字对象标识符：10.1016/j.aim.2012.04.011 (引自第158页)。

[BMS24] John W. Barrett、Catherine Meusburger 和 Gregor Schaumann。Gray 带对偶的范畴及其图表。英文。载于：*Adv. Math.* 450 (2024)。编号 109740，第 129 页。国际标准连续出版物号：0001-8708。数字对象标识符：10.1016/j.aim.2024.109740（引自第46页）。

[Boa95] J. Michael Boardman。《广义上同调中的稳定运算》。载于：《代数拓扑手册》。North-Holland，阿姆斯特丹，1995年，第585–686。数字对象标识符：10.1016/B978-044481779-2/50015-8 （引自第117页）。

[Böh21] Gabriella Böhm。霍普夫幺半群的 Maschke 型定理。载于：理论与应用范畴论。36（2021年），第 9–47 页。国际标准连续出版物号：1201-561X（引自第 157 页）。

[布05] Serge Bouc。射影 Mackey 函子的 Burnside 维数。载于：*RIMS Kôkyûroku* 1440（2005），第 107–120 页。国际标准连续出版物号：1880-2818（引自第 85 页）。

[BP15] Andrej Bauer 与 Matija Pretnar。使用代数效应与处理器。载于：《逻辑与代数编程方法期刊》 84.1（2015）。特刊：第23届北欧编程理论研讨会（NWPT 2011）特刊：Domains X，关于定义域的国际研讨会 理论与应用，第 108–123 页。国际标准连续出版物号：2352-2208。数字对象标识符：https://doi.org/10.1016/j.jlamp.2014.02.001（引于第2页）。

[Brz20] Tomasz Brzeziński。三元组：典范子、理想和模。载于：*Journal of* 纯粹与应用代数 224.6（2020年），第 39 页。国际标准连续出版物号：0022-4049。数字对象标识符：10.1016/j.jpaa.2019.106258（引于第92页）。

[BS13] Thomas Booker 和 Ross Street。Tannaka 对偶与卷积，发表于 双幺半范畴。《*TheoryAppl. Categ.*》28（2013年），第166–205页。国际标准连续出版物号：1201-561X（引文见第157、161页）。

[BV07] Alain Bruguières 和 Alexis Virelizier。霍普夫单子。发表于：数学进展 学215.2（2007年），第679–733页。国际标准连续出版物号：0001-8708。数字对象标识符：10.1016/j.aim.2007.04.011（引自第2、3、6、14、117、121、134、142、151–155、157、162、164–166）。

[BV12] Alain Bruguières 和 Alexis Virelizier。《霍普夫单子的量子双》与范畴中心。载于：美国数学会汇刊 364.3（2012年），第1225–1279页。国际标准连续出版物号：0002-9947。数字对象标识符：10.1090/S0002- 9947-2011-05342-0（引自第 34，122、137、138、140–144、146、147、149、151页）。

[Byo24] Nigel P. Byott。关于有限可解群全纯群中的不可解传递子群 有限可解群。《代数杂志》638 (2024)，第 1–31 页。国际标准连续出版物号：0021-8693。数字对象标识符：10.1016/j.jalgebra.2023.10.001（引自第87页）。

[BZBJ18] David Ben-Zvi、Adrien Brochier 和 David Jordan。《在曲面上积分量子群》。载于：《拓扑学杂志》11.4（2018年），第 874–917 页。国际标准连续出版物号：1753-8416。数字对象标识符：10.1112/topo.12072（引文见第 1、2、37、179 页）。

[BZFN10] David Ben-Zvi、John Francis 和 David Nadler。积分变换与导出代数几何中的 Drinfeld 中心。载于：《美国数学会杂志》23.4 (2010)，第 909–966 页。国际标准连续出版物号：0894-0347。数字对象标识符：10.1090/S0894-0347-10-00669-7 (引文见第1页)。

[Cas05] Guido Castelnuovo。关于属于 一张不规则曲面。法语。载于：*Comptes rendus hebdomadaires des séances* 科学院140 (1905)，第 220–222 页（引文见第30页）。

[Cer43] Jeremiah Certaine。《群》的三元运算 $(abc) = ab^{-1}c$。载于：《美国数学会通报》49 (1943), pp. 869–877. 国际标准连续出版物号：0002-9904. 数字对象标识符：10.1090/S0002-9904-1943-08042-1 (cit. on p. 93)。

[CG22] Matteo Capucci 和 Bruno Gavranović。《面向实际应用的 Actegories-数学家。载于：*arXiv*预印本（2022年）。arXiv：2203.16351 [范畴论]（引自第1页，53)。

[CM00] Alain Connes 和 Henri Moscovici。循环上同调与霍普夫代数对称性。载于：数学物理快报52.1（2000年）。Moshé Flato 会议 1999年（第戎），第1–28页。国际标准连续出版物号：0377-9017。数字对象标识符：10.1023/A:1007698216597（引自第91页）。

[CM99] Alain Connes 和 Henri Moscovici。循环上同调与 Hopf 代数。载于：数学物理快报 48.1 (1999)。Moshé Flato（1937–1998），第 97–108 页。国际标准连续出版物号：0377-9017。数字对象标识符：10.1023/A:1007527510226（引自第91页）。

[CMZ97] Stefaan Caenepeel、Gigel Militaru 和 Shenglin Zhu。《交叉模与 Doi-Hopf模》。载于：以色列数学杂志 100 (1997)，第 221–247 页。国际标准连续出版物号：0021-2172。数字对象标识符：10.1007/BF02773642（引自第 35页）。

[CS97] J. Robin B. Cockett 和 Robert A. G. Seely。《弱分配范畴》。载于：纯粹与应用代数杂志 114.2 (1997)，第 133–173 页。国际标准连续出版物号：0022-4049。数字对象标识符：10.1016/0022-4049(95)00160-3（引用于第6、171、172页）。

[CSST22] Tullio Ceccherini-Silberstein、Fabio Scarabotti 与 Filippo Tolli。表示-论：有限群扩张。克利福德理论，麦基障碍，以及轨道方法。Springer 数学专著。Cham：施普林格，2022年。国际标准书号：978-3-031-13872-0; 978-3-031-13875-1; 978-3-031-13873-7. 数字对象标识符：10.1007/978-3-031-13873-7（引自第88页）。

[CSZ25] Kevin Coulembier、Mateusz Stroiński 和 Tony Zorman。单代数与正合模范畴。载于：*arXiv*预印本（2025）。arXiv：2501.06629 [math.RT]（引自第3页）。

[Day06] Brian Day。紧卷积。载于：*arXiv*预印本(2006)。arXiv：数学 / 0605463 [范畴论] (引自第72页)。

[Day07] Brian Day。结合方案、经典有理共形场论以及幺半函子的中心范畴。在：*arXiv*预印本(2007年)。arXiv：数学/0702208 [范畴论] (引自第1页)。

[Day71] Brian Day。双闭范畴的构造。载于：澳大利亚数学会会刊 5（1971），第 139–140 页。国际标准连续出版物号：0004-9727。数字对象标识符：10.1017/S0004972700046979（引文见第 50、51 页）。

[Day73] Brian Day。关于幺半局部化的注记。载于：澳大利亚数学会会刊 8（1973），第1–16页。国际标准连续出版物号: 0004-9727. 数字对象标识符:10.1017/S0004972700045433（引用于第66页）。

[Del90] 皮埃尔·德利涅。坦纳范畴。（坦纳范畴）。法语。《格罗滕迪克纪念文集》，纪念60岁诞辰的论文集，A. 格罗滕迪克。卷II，数学进展87，111-195（1990）。1990（引用于第2页）。

[DIW11] Marian Deaconescu、I. Martin Isaacs 和 Gary L. Walls。《有限群的特征子群布尔代数》载于：数学文献97.1（2011），第 17–24 页。国际标准连续出版物号：0003-889X。数字对象标识符：10.1007/s00013-011-0283-9（引自第82页）。

[Dri87] Vladimir Drinfeld。《量子群》。国际数学家大会论文集，伯克利/加利福尼亚州。1986，第 1 卷，798-820（1987）。1987（引自第34页）。

[DS03] Brian Day 与 Ross Street。松幺半群、伪operad与卷积。英语。载于：图示态射与应用。*AMS* 特别会议，主题为代数、范畴论与拓扑学中的图示态射，旧金山，*CA, USA, 10*月*21*日至*22*日，*2000*年。普罗维登斯，罗得岛州：美国数学学会（AMS），2003年，第75–96页。国际标准书号：0-8218-2794-4（引文见第46页）。

[DS07] Brian Day 和 Ross Street。函子幺半范畴的中心。载于：代数、几何与数学物理中的范畴。卷 431。Contemp。数学。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2007年，第 187–202 页。数字对象标识符：10.1090/conm/431/08273 （引于第 137、142页）。

[DS25] Max Demirdilek 与 Christoph Schweigert。用于 Frobenius 的曲面图格罗滕迪克-韦尔迪耶范畴中的代数与 Frobenius-Schur指标ies。载于：*arXiv*预印本 （2025）。arXiv：2503.13325 [范畴论] （引用于第46页）。

[DS97] Brain Day 与 Ross Street。幺半双范畴与Hopf代数胚。载于：*Adv. Math.* 129.1（1997年），第 99–157 页。国际标准连续出版物号：0001-8708。数字对象标识符：10.1006/aima.1997.1649 （引自第45页）。

[DSPS19] Christopher L. Douglas、Christopher Schommer-Pries 和 Noah Snyder。模范畴的平衡张量积。载于：京都数学杂志 *59.1*（2019），第 167–179 页。国际标准连续出版物号：2156-2261。数字对象标识符：10.1215/21562261-2018- 0006（引自第2、33、177、197、213、214页）。

[DT21] Themba Dube 和 Ali Taherifar。关于零化子理想格及其应用。载于：《代数通讯》49.6（2021年），第 2444–2456 页。国际标准连续出版物号：0092-7872。数字对象标识符：10.1080/00927872.2021.1872588 （引自第82页）。

[EGNO15] Pavel Etingof、Shlomo Gelaki、Dmitri Nikshych 和 Victor Ostrik。《张量范畴》。卷 205。数学综述与专著。美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2015 年，第 xvi+343 页。国际标准书号：978-1-4704-2024-6. 数字对象标识符: 10.1090/surv/205 (引文见第 1, 2, 8, 9, 21, 22, 24,25, 30,31, 34, 36–38, 59, 173, 201, 213, 232, 233, 238).

[EK66] Samuel Eilenberg 和 Gregory M. Kelly。闭范畴。载于：会议论文集范畴代数（加利福尼亚州拉霍亚，*1965*年）。施普林格，纽约，1966年，第 421–562（引自第26页）。

[EM65] Samuel Eilenberg 和 John C. Moore。伴随函子和三元组。载于：伊利诺伊州期刊数学9（1965年），第 381–398 页。国际标准连续出版物号：0019-2082（引自第2页）。

[ESZ21] Mohamed Elhamdadi、Masahico Saito 和 Emanuele Zappala。堆与三元自分配上同调。载于：《代数通讯》49.6 (2021年), 第 2378–2401 页。国际标准连续出版物号: 0092-7872. 数字对象标识符: 10 . 1080/ 00927872. 2020年. 1871484(引自第 92页)。

[FD93] Benson Farb 和 R. Keith Dennis。《非交换代数》。第 144 卷。数学研究生教材。纽约：施普林格出版社，1993。国际标准书号：9780387940571（引自第75页）。

[FGJS22] Jürgen Fuchs、César Galindo、David Jaklitsch 和 Christoph Schweigert。球形 Morita 背景与相对 Serre 函子。载于：*arXiv*预印本 （2022年）。arXiv： 2207.07031 [范畴论] （引自第 1页）。

[FH23] Bojana Femić 和 Sebastian Halbig。范畴中心与 Yetter–Drinfel'd-模作为 2-范畴（双）松结构。载于：*arXiv*预印本 （2023）。arXiv：2306.05337 [范畴论] （引自第 34、94、95、143页）。

[FLP24] Johannes Flake、Robert Laugwitz 和 Sebastian Posur。Frobenius 单体函子，来自双伴随及其向 Drinfeld 中心的提升。载于：*arXiv* 电子预印本（2024）。arXiv：2410。08702 [范畴论]（引自第 215页）。

[Fre69] Armin Frei。《三元组的一些评论》。载于：《数学杂志》109 (1969)，第 269–272 页。国际标准连续出版物号：0025-5874。数字对象标识符：10.1007/BF01110118（引自第16页）。

[FRS02] Jürgen Fuchs、Ingo Runkel 和 Christoph Schweigert。TFT 构造 RCFT 关联函数。一：配分函数。载于：《核物理》，*B* 646.3 (2002)，第 353–497 页。国际标准连续出版物号：0550-3213。数字对象标识符：10.1016/S0550-3213(02)00744-7（引自第 1页）。

[FSS20] Jürgen Fuchs、Gregor Schaumann 和 Christoph Schweigert。有限范畴的 Eilenberg-Watts 演算与双模 Radford S^4 定理。载于：美国数学会汇刊 373.1（2020年），第 1–40 页。国际标准连续出版物号：0002-9947。数字对象标识符：10.1090/tran/7838（引于第55页）。

[Gar22] Richard Garner。双范畴。《Bicat-》研究院的讲授课程 *egories*、范畴化与量子理论。2022年（引自第10页）。

[Gir71] Jean Giraud。《非阿贝尔上同调》。法语。第179卷。《数学科学基础》施普林格，Cham，1971年（引自第92页）。

[GKKP22] Nan Gao、Julian Külshammer、Sondre Kvamme 和 Chrysostomos Psaroudakis。《物种的单态射范畴的一种函子性方法》。I. 载于：《当代数学通讯》24.6（2022年）。编号/期号 2150069，第 55 页。国际标准连续出版物号：0219-1997。数字对象标识符：10.1142/S0219199721500693（引自第36页）。

[GLF16] Richard Garner 与 Ignacio López Franco。交换性。载于：*J. Pure Appl.* 代数 220.5（2016年），第1707–1751页。国际标准连续出版物号：0022-4049。数字对象标识符：10.1016/j.jpaa.2015.09.003（引用于第6，157，160，171页）。

[GNN09] Shlomo Gelaki、Deepak Naidu 与 Dmitri Nikshych。分次的中心融合范畴。载于：《代数与数论》3.8（2009年），第959–990页。国际标准连续出版物号：1937-0652. 数字对象标识符：10.2140/ant.2009年.3.959（引用于第34页）。

[God58] Roger Godement。代数拓扑与层论。法语。第13卷。斯特拉斯堡大学数学研究所出版物。Hermann，巴黎，1958（引用于第2页）。

[GPS95] Robert Gordon、John Power 与 Ross Street。三范畴的相干性。第558卷。美国数学会纪要。罗德岛州普罗维登斯：美国数学学会（AMS），1995。国际标准书号：978-0-8218-0344-8；978-1-4704-0137-5。数字对象标识符：10.1090/memo/0558（引用于第12、43页）。

[Gra80] John W. Gray。闭范畴、松极限与同伦极限。载于：*J. Pure* 应用代数 19 (1980)，第 127–158 页。国际标准连续出版物号：0022-4049。数字对象标识符：10.1016/0022-4049(80)90098-5（引于第48页）。

[GS16] Richard Garner 和 Michael Shulman。充实范畴作为自由余完备化的化。在：*Adv. Math.* 289 (2016年)，第 1–94 页。国际标准连续出版物号：0001-8708。数字对象标识符：10.1016/j.aim.2015.11.012（引于第43页）。

[Gur06] Nick Gurski。《三范畴的代数理论》。芝加哥大学，数学系，2006 年（引文见第 12、43 页）。

[Hal21] Sebastian Halbig。《广义 Taft 代数与对合对》。载于：《代数通讯》0.0 (2021年), 第 1–15 页。 数字对象标识符: 10.1080/00927872.2021.1939043. 电子预印本：https://doi.org/10.1080/00927872.2021.1939043 （引用于页码 33、91、99）。

[她00] Claudio Hermida。《可表示多范畴》。载于：*Adv. Math.*151.2（2000年），第 164–225 页。 国际标准连续出版物号：0001-8708。 数字对象标识符：10.1006/aima.1999.1877 （引自第188–190, 192).

[HH92] Peter N. Hoffman 和 John F. Humphreys。《对称群的射影表示。*Q*-函数与移位杨表。牛津数学专著。牛津：克拉伦登出版社，1992 年。国际标准书号：0-19-853556-2（引自第88页）。

[HK19] Sebastian Halbig 和 Ulrich Krähmer。一种没有模对合对的霍普夫代数。载于：物理学中的几何方法 *XXXVII*。数学趋势。比克豪泽/施普林格，Cham，2019，第 140–142 页。 数字对象标识符: 10.1007/978-3-030-34072-8_14 (引文见第 33、99 页)。

[HKRS04] Piotr M. Hajac、Masoud Khalkhali、Bahram Rangipour 和 Yorck Sommerhäuser. 稳定反 Yetter–Drinfeld 模。载于：数学报告。法国科学院。巴黎 338.8（2004），第 587–590 页。国际标准连续出版物号：1631-073X。数字对象标识符：10.1016/j.crma.2003.11.037 （引自第 24、91、137、151页）。

[HKS19] Mohammad Hassanzadeh、Masoud Khalkhali 和 Ilya Shapiro。幺半-oidal 范畴、2-迹和循环上同调。载于：加拿大数学通报。《加拿大数学通报》62.2（2019），第293–312页。国际标准连续出版物号：0008-4395。数字对象标识符：10.4153/cmb-2018-016-4 （引用于第34、98页）。

[HL17] Christopher D. Hollings 与 Mark V. Lawson。Wagner 的理论之广义堆。施普林格，Cham，2017，第 xv+189 页。国际标准书号：978-3-319-63620-7；978-3-319-63621-4（引用于第92页）。

[HL18] Masahito Hasegawa 和 Jean-Simon P. Lemay。《线性分配与否定、星自对偶性和霍普夫单子》。载于：范畴理论与应用范畴 33（2018年），第 1145–1157 页。 国际标准连续出版物号：1201-561X（引自第2、126页）。

[HN99] Frank Hausser 和 Florian Nill。《拟Hopf代数积分理论》。载于：*arXiv*预印本（1999）。arXiv：数学/9904164 [数学问答] （引自第213、238页）。

[HP02] Martin Hyland 和 John Power。伪交换单子与伪闭合 2-范畴。载于：纯粹与应用代数杂志175.1-3（2002），第141–185页。国际标准连续出版物号：0022-4049。数字对象标识符：10.1016/S0022-4049(02)00133-0 （引自第52页）。

[HP07] Martin Hyland 和 John Power。《泛代数的范畴论理解》：Lawvere理论与单子。载于：计算、意义，与逻辑。献给 *Gordon Plotkin* 的论文集。阿姆斯特丹：爱思唯尔，2007年，第437–458页。 数字对象标识符： 10.1016/j.entcs.2007.02.019 （引自第2页）。

[Hub61] Peter J. Huber。《一般范畴中的同伦论》。载于：数学年刊 144 (1961)，第361–385页。国际标准连续出版物号：0025-5831。数字对象标识符：10.1007/BF01396534 （引用于第2页）。

[HZ23] Sebastian Halbig 和 Tony Zorman。《幺半范畴中的对偶性》。载：*arXiv*预印本 (2023)。arXiv：2301.03545 [范畴论] (引文见第 3、4页)。

[HZ24a] Sebastian Halbig 和 Tony Zorman。《余模单子的图示》。载于：应用范畴结构 32（2024）。编号 27，第 17 页。国际标准连续出版物号：0927-2852。数字对象标识符：10.1017/CBO9781139542333 （引用于第 3、5 页）。

[HZ24b] Sebastian Halbig 与 Tony Zorman。枢纽性、扭曲中心以及霍普夫单子的反双。载于：*Theory Appl. Categ.*41（2024），第 86–149 页。国际标准连续出版物号：1201-561X（引用于第 3、5、6 页）。

[IK86] Geun Bin IM 和 Gregory M. Kelly。卷积幺半结构的一个泛性质。载于：纯粹与应用代数杂志 43.1 (1986), 第 75–88. 国际标准连续出版物号: 0022-4049. 数字对象标识符:https://doi.org/10.1016/0022-4049(86)90005-8 (引自第 51页).

[JS85] André Joyal 和 Ross Street。《编织幺半范畴》。载于：*Macquarie* 数学报告。卷 85-0067。1985 年（引文见第26页）。

[JS86] André Joyal 和 Ross Street。《编织幺半范畴》。载于：*Macquarie* 数学报告。卷 86-0081。1986 年（引文见第26页）。

[JS91] André Joyal 和 Ross Street。张量演算的几何 I. 收录于：*Adv. Math.* 88.1 (1991), 第 55–112 页。国际标准连续出版物号：0001-8708。数字对象标识符：10.1016/0001-8708(91)90003-P (引自第 19、35 页）。

[JS93] André Joyal 和 Ross Street。编织张量范畴。收录于：*Advances in Mathematics*102.1 (1993), 第 20–78 页。国际标准连续出版物号：0001-8708。数字对象标识符：10.1006/aima.1993年.1055 (引文见第 26、160页)。

[JY21] Niles Johnson 和 Donald Yau。《二维范畴》。牛津大学出版社，2021年1月31日。国际标准书号：9780191914850。数字对象标识符：10.1093/oso/9780198871378.001.0001 (引文见第 9、10、12、26、38、43、44、94页)。

[Kas98] Christian Kassel。《量子群》。载于：代数与算子理论（塔什干，*1997*）。Kluwer 学术出版社，多德雷赫特，1998，第 213–236 页（引自第 34、66，67、107–112、162）。

[Kel05] Gregory M. Kelly。《富化范畴论基本概念》。载于：重印。*Theory Appl. Categ.* 2005.10（2005），第 1–136 页（引自第 48、49，51、127）。

[Kel72] Gregory M. Kelly。多变量函子演算。I。Cat 中的相干性——范畴，数学讲义 281，66–105（1972）。1972年（引用于第 28、239页）。

[Kel74] Gregory M. Kelly。教义伴随。悉尼范畴研讨会论文集，1972/1973，数学讲义 420，257-280（1974）。1974（引用于第 117、120、121）。

[Kel82] Gregory M. Kelly。《富化范畴论基本概念》。第 64 卷。伦敦伦敦数学学会讲义系列。剑桥大学出版社，剑桥。伦敦数学学会，伦敦，1982 年（引自第 52 页）。

[KK14] Niels Kowalzig 和 Ulrich Krähmer。Ext 上的巴塔林-维尔科维斯基结构与 Tor。英文。载于：《纯粹与应用数学杂志》697 (2014)，第 159–219 页。国际标准连续出版物号：0075-4102。数字对象标识符：10.1515/crelle-2012-0086 (引自第 1 页)。

[KKS15] Niels Kowalzig、Ulrich Krähmer 和 Paul Slevin。由伴随产生的循环同调来自伴随。在：*Theory Appl. Categ.* 30（2015），第 1067–1095 页。国际标准连续出版物号：1201-561X（引用于第 2、241页）。

[KL00] Gregory M. Kelly 和 Stephen Lack。论具有选定余极限的范畴的单子性。载于：*TheoryAppl. Categ.* 7（2000年），第 148–170 页。国际标准连续出版物号：1201-561X（引自第52页）。

[KL01] Thomas Kerler 和 Volodymyr V. Lyubashenko。非半单拓扑三维流形（带角）的量子场论。第 1765 卷。讲义数学笔记。施普林格出版社，柏林，2001 年，第 vi+379页。国际标准书号：3-540-42416-4（引自第 117页）。

[KL97] Gregory M. Kelly 和 Stephen Lack。《性质类结构》。载于：*Theory Appl. Categ.* 3（1997），第 213–250 页。国际标准连续出版物号：1201-561X（引自第 52页）。

[Kle65] Heinrich Kleisli。每个标准构造都由一对伴随函子函子诱导而来。载于：《美国数学会会刊》16 (1965)，第 544–546 页。国际标准连续出版物号：0002-9939。数字对象标识符：10.2307/2034693（引自第 2 页）。

[Kle90] Mark Kleiner。伴随单子与 Kleisli 范畴的一个同构。载于：《代数杂志》133.1 (1990)，第 79–82 页。国际标准连续出版物号：0021-8693。数字对象标识符：10.1016/0021-8693(90)90069-Z (引文见第17页)。

[Koc95] Anders Kock。使结构与单位互为伴随函子的单子。载于：*J. Pure Appl. Algebra*104.1 (1995)，第 41–59 页。国际标准连续出版物号：0022-4049。数字对象标识符：10.1016/0022-4049(94)00111-U (引文见第52页)。

[Kow24] Niels Kowalzig。中心、迹函子与循环上同调。载于：*Commun.* 当代数学 26.3（2024）。编号/期号 2250079，第 54 页。国际标准连续出版物号：0219-1997。数字对象标识符：10.1142/S0219199722500791（引自第 34、98页）。

[KR93] Louis H. Kauffman 和 David E. Radford。有限维 Drinfel'd 双是带状霍普夫代数的充要条有限维 Drinfel'd 双成为带辫霍普夫代数的条件-gebra. 载于：代数学杂志 159.1（1993），第 98–114 页。国际标准连续出版物号：0021-8693。数字对象标识符：10.1006/jabr.1993.1148（引于第 33页）。

[克雷49] 马克·格里戈里耶维奇·克雷因。双紧群与二次块代数的对偶原理。俄文。载于：苏联科学院报告 69（1949），第 725–728（引于第 2页）。

[KS06] 柏原正树和皮埃尔·沙皮拉。《范畴与层》。卷332。数学科学基础教程。柏林：施普林格，2006。国际标准书号：3-540-27949-0。数字对象标识符：10.1007/3-540-27950-4（引自第51、182页）。

[Lac10] Stephen Lack。Icons。载于：应用范畴结构 18.3（2010），第289–307页。国际标准连续出版物号：0927-2852。数字对象标识符：10.1007/s10485-008-9136-5（引文见第12页）。

[Lam99] 林节玄。模与环讲义。第189卷。数学研究生教材。纽约：施普林格，1999。国际标准书号：0-387-98428-3（引文见第64页）。

[Lei04] Tom Leinster。高阶算子，高阶范畴。第298卷。伦敦数学。社会讲义笔记丛书。剑桥：剑桥大学出版社，2004。国际标准书号：0-521-53215-9（引自第 188、189、192 页）。

[Lew72] Geoffrey Lewis。闭函子的一致性。范畴中的一致性，数学讲义 281，148-195（1972年）。1972年（引自第160页）。

[LF11] Ignacio López Franco。KZ 2-单子的伪交换性。载于：*Adv.* 数学228.5（2011），第2557–2605页。国际标准连续出版物号：0001-8708。数字对象标识符：10.1016/j.aim.2011.06.039（引自第52页）。

[LFV20] Ignacio López Franco 和 Christina Vasilakopoulou。双幺半范畴，测量余幺半群与富化。载于：*arXiv*预印本（2020年）。arXiv：2005.01340 [范畴论]（引自第157页）。

[Lin66] Fred Linton。《方程理论的若干方面》。载于：范畴拉霍亚代数。施普林格，1966年，第84–94页（引文见第2页）。

[Lin76] Harald Lindner。《关于麦基函子的一个评论》。载于：《数学手稿》18（1976年），第273–278页。国际标准连续出版物号：0025-2611。数字对象标识符：10.1007/BF01245921（引文见第58、80、85）。

[LMGRSW24] Yu Leon Liu、Aaron Mazel-Gee、David Reutter、Catharina Stroppel 和 Paul Wedrich。《Soergel 双模的辫化幺半（∞，2）范畴》。载于：*arXiv*预印本（2024）。arXiv：2401.02956 [math.QA]（引自第1页）。

[Lor21] Fosco Loregian。《（余）端演算》。第468卷。伦敦数学会讲义丛书。剑桥大学出版社，剑桥，2021年，第308页。国际标准书号：978-1-108-74612-0（引自第30、48页）。

[LR88] Richard G. Larson 和 David E. Radford。半单余半单霍普夫代数代数。载于：《美国数学杂志》110.1（1988年），第187–195页。国际标准连续出版物号：0002-9327。数字对象标识符：10.2307/2374545（引自第73页）。

[LS02] Stephen Lack 和 Ross Street。单子形式理论 II。载于：《纯粹应用代数 175.1-3 (2002)，第 243–265 页。国际标准连续出版物号：0022-4049。数字对象标识符：10.1016/S0022-4049(02)00137-8（引自第2页）。

[LS69] Richard G. Larson 和 Moss E. Sweedler。一种结合的正交双线性霍普夫代数形式。载于：《美国数学杂志》91 (1969)，第 75–94 页。国际标准连续出版物号：0002-9327。数字对象标识符：10.2307/2373270（引于第 8、238 页）。

[LT22] Stephen Lack 和 Giacomo Tendas。富集语境中的平坦余极限与滤过余极限语境。载于：《数学进展》404 (2022年8月)，第 108381 页。国际标准连续出版物号：0001-8708. 数字对象标识符：10.1016/j.aim.2022.108381（引于第 76、77 页）。

[Lur04] Jacob Lurie。《几何堆的 Tannaka 对偶》。载于：*arXiv*预印本 (2004)。arXiv：数学/0412266 [数学.AG]（引自第2页）。

[McC02] Paddy McCrudden。反幺半单子。载于：理论与应用范畴 10 (2002)，第19期，469–485（引自第3、5、118、121、139页）。

[ML63] Saunders Mac Lane。《自然结合性与交换性》。载于：莱斯大学研究丛书49（1963），第28–46页（引文见第24，26页）。

[ML98] Saunders Mac Lane。《工作数学家的范畴论》。第二版。第5卷。《数学研究生教材》。施普林格出版社，纽约，1998，第 xii 页+314。国际标准书号：0-387-98403-8（引自第 9、28、41 页）。

[MLM92] Saunders Mac Lane 和 Ieke Moerdijk。《几何与逻辑中的层：拓扑斯理论入门》。Universitext。纽约等地：施普林格出版社，1992. 国际标准书号: 0-387-97710-4（引自第17页）。

[MMMT19] Marco Mackaay、Volodymyr Mazorchuk、Vanessa Miemietz 和 Daniel Tubbenhauer。通过（余）代数1-态射构造单传递2-表示。载于：《印第安纳大学数学杂志》68.1（2019），第1–33页。国际标准连续出版物号：0022-2518。数字对象标识符：10.1512/iumj.2019.68.7554（引于第 2、53页）。

[Moe02] Ieke Moerdijk。张量范畴上的单子。载于：《纯粹与应用代数杂志》168.2-3 (2002).《范畴论 1999》（科英布拉），第189–208页。国际标准连续出版物号：0022-4049。数字对象标识符：10.1016/S0022-4049(01)00096-2（引自第2、3、5、117、118、121页）。

[Mog89] Eugenio Moggi。计算 λ 演算与单子。计算机科学逻辑计算机科学，第四届年度研讨会论文集，太平洋格罗夫/加利福尼亚州（美国），1989年，14-23（1989）。1989年（引自第2页）。

[Mog91] Eugenio Moggi。《计算的概念与单子》。载于：*Inf.Comput.* 93.1（1991），第 55–92 页。国际标准连续出版物号：0890-5401。数字对象标识符：10.1016/0890- 5401(91)90052- 4（引于第2页）。

[Mon93] Susan Montgomery。《霍普夫代数及其在环上的作用》。第 82 卷。Reg. 数学会议丛书。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会，1993年。国际标准书号：0-8218-0738-2（引自第 22、237、239、241页）。

[MP22] Cary Malkiewich 和 Kate Ponto。《双范畴、松函子与影的相干性》。载于：*Theory Appl. Categ.* 38（2022年），第 328–373 页。国际标准连续出版物号：1201-561X（引自第 160、171页）。

[Müg13] Michael Müger。《量子物理与语言学：一种组合式、文法论述》。载于：Chris Heunen、Mehrnoosh Sadrzadeh 和 Edward Grefenstette 编。牛津大学出版社，2013年。第六章（引自第102页）。

[MW11] Bachuki Mesablishvili 和 Robert Wisbauer。《双单子与霍普夫单子》关于范畴。在：*K*-理论杂志。*K*-理论及其在代数中的应用，几何、分析与拓扑7.2（2011），第 349–388 页。国际标准连续出版物号：1865-2433。数字对象标识符：10.1017/is010001014jkt105（引自第 117、144 页）。

[NS07] Siu-Hung Ng 和 Peter Schauenburg。《高阶 Frobenius-Schur 指标》关于主轴范畴。载于：霍普夫代数及其推广。第 441 卷。Contemp. 数学。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2007年，第 63–90 页。数字对象标识符：10.1090/conm/441/08500（引自第32页）。

[NW17] Susan B. Niefield 和 Richard J. Wood。余指数可化性与射影性：幺半环、环与量子格。载于：*Theory Appl.Categ.* 32 (2017)，第 1222–1228 页。国际标准连续出版物号: 1201-561X（引自第28、64、79页）。

[Ost03] Viktor Ostrik。模范畴、弱 Hopf 代数与模不变-量。在：变换群8.2（2003年），第177–206页。国际标准连续出版物号：1083-4362。数字对象标识符：10.1007/s00031-003-0515-6（引自第1、7、33、177页）。

[Par69] Robert Paré. 绝对余等化子。范畴论 同调论
应用，西雅图研究中心 Battelle 纪念研究所会议论文集，1968 年，第 1 卷，讲义。
数学札记 86，132-145 (1969)。1969（引自第 181页）。

[Pas12] Craig Pastro。关于星自对偶余单子的注记。载于：*Theory Appl. Categ.*
26 (2012)，第 194–203 页。 国际标准连续出版物号：1201-561X（引用见第 3、6、157、172 页）。

[Pas24] James Pascaleff。泊松几何、幺半福谷范畴与交-
换 Floer 上同调环。载于：*Enseign. Math. (2)*70.3-4 (2024)，第 313–
381。 国际标准连续出版物号：0013-8584。 数字对象标识符：10.4171/LEM/1071 （引用见第 1 页）。

[PJW93] Simon Peyton Jones 和 Philip Wadler。《命令式函数式编程》。
载于：美国计算机协会 *SIGPLAN-SIGACT* 第*20*届编程语言原理研讨会论文集
编程语言。POPL '93。美国南卡罗来纳州查尔斯顿：
美国计算机协会，1993年，71–84页。国际标准书号：0897915607。数字对象标识符：
10.1145/158511.158524。网址：https://doi.org/10.1145/158511.158524
（引自第2页）。

[Pos10] Leonid Positselski。《半模与半余模的同调代数》。
结合代数结构的半无限同调代数。
附录 C，与 Dmitriy Rumynin 合作。附录 D，与
Sergey Arkhipov 合作。第 70 卷。Mon. Mat.，波兰科学院数学研究所，新系列。
巴塞尔：Birkhäuser，2010。国际标准书号：978-3-0346-0435-2；978-3-0346-0436-9。数字对象标识符：
10.1007/978-3-0346-0436-9 （引自第 214、227页）。

[PP02] Gordon Plotkin 和 John Power。计算概念决定单子。
载于： 软件科学与计算结构基础。第五届国际
会议，*FOSSACS 2002*，作为联合欧洲会议的一部分举行，主题为
软件理论与实践，*ETAPS 2002*，法国格勒诺布尔，*2002*年*4*月*8*日至*12*日。
论文集。柏林：施普林格，2002，页码 342–356。国际标准书号：3-540-43366-X（引自
第 2页）。

[PP09] Gordon Plotkin 和 Matija Pretnar。《代数效应的处理器》。载于：程-
序语言与系统。第*18*届欧洲编程研讨会，
ESOP 2009，作为联合举办的欧洲软件理论与实践会议的一部分
软件，*ETAPS 2009*，英国约克，*2009*年*3*月*22*日至*29*日。论文集。柏林：
施普林格，2009年，第80–94页。国际标准书号：978-3-642-00589-3。DOI：10.1007/978-3-
642-00590-9_7 （引自第2页）。

[预09] Mike Prest。纯性、谱与局部化。第121卷。数学百科全书及其应用。
剑桥：剑桥大学出版社，2009年。国际标准书号：978-0-521-87308-6
（引用于第77页）。

[Prü24] Heinz Prüfer。《阿贝尔群理论》。载于：数学杂志
20.1（1924年），第165–187页。国际标准连续出版物号：0025-5874。数字对象标识符：10.1007/BF01188079（引用于
第92页）。

[PS07] Elango Panchadcharam 和 Ross Street。紧闭
范畴上的 Mackey 函子。载于：同伦与相关结构杂志 2.2（2007年），第 261–293 页。国际标准连续出版物号：2193-
8407（引文见第70、80、85、86页）。

[PS09] Craig Pastro 和 Ross Street。闭范畴、星自对偶性与单-
子余单子。载于：《代数杂志》321.11（2009年），第3494–3520页。国际标准连续出版物号：0021-8693。
数字对象标识符：10.1016/j.jalgebra.2008.05.004（引自第3页）。

[Rav86] Douglas C. Ravenel。《复配边与球面的稳定同伦群》
。卷 121。纯粹与应用数学，Academic Press。Academic Press，新
约克，纽约州，1986（引自第161页）。

[Rie17] Emily Riehl。《语境中的范畴论》。Aurora：Dover Modern Math
原版。Dover Publications，2017，第272页。国际标准书号：9780486820804。网址：https:
//math.jhu.edu/~eriehl/context.pdf（引自第9、13、31页）。

[Rom23] Mario Román。《幺半上下文理论》。博士论文。塔林大学
技术学院，2023年（引自第160页）。

[Rom24] Mario Román。《物理双幺半范畴的弦图》。载于：*arXiv*
预印本（2024）。arXiv：2406.19816 [范畴论]（引自第157页）。

[Sar17] Paolo Saracco。《拟Hopf双模结构定理》。发表于：应用
范畴结构 25.1（2017），第3–28页。国际标准连续出版物号：0927-2852。数字对象标识符：10.1007/s10485-
015-9408-9（引自第213、238页）。

[Sch00a] Peter Schauenburg。量子群胚的对偶与双（$\times_R$-霍普夫
代数）。载于：*Hopf*代数理论的新趋势。研讨会论文集
关于量子群与霍普夫代数，阿根廷科尔多瓦山脉*La Falda*，
*1999*年*8*月*9–13*日。罗德岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），
2000年，第273–299页。国际标准书号：0-8218-2126-1（引自第1页）。

[Sch00b] Peter Schauenburg。《霍普夫子代数上的忠实平坦性：反例》。
载于：《环论与代数表示之间的相互作用》。论文集
会议论文集，西班牙穆尔西亚。纽约：Marcel Dekker，2000年，第331–
344。国际标准书号：0-8247-0367-7（引自第62页）。

[Sch01] Peter Schauenburg。将幺半范畴转化为严格范畴。载于：纽约
约克数学杂志 7 (2001)，第 257–265 页（引自第32页）。

[Sch13] Daniel Schäppi。《Tannaka 对偶的形式理论》。第 357 卷。Astérisque。
巴黎：法国数学会（SMF），2013年。国际标准书号：978-2-85629-773-5
（引自第2页）。

[Sch99] Peter Schauenburg。《Doi-Koppinen 霍普夫代数模范畴等价的实例——
包括 Yetter-Drinfeld 模》。载于：《比利时数学会公报》——
Simon Stevin 6.1（1999），第 91–98 页。国际标准连续出版物号：1370-1444（引自第35页）。

[SCZ23] Hua Sun、Hui-Xiang Chen 和 Yinhuo Zhang。关于秩二半单张量
范畴的笔记。载于：*arXiv*预印本（2023）。arXiv：2312.06943 [范畴论]
（引自第232页）。

[海13] Gavin J. Seal。《张量、单子与作用》。载于：*Theory Appl. Categ.* 28（2013年），
第403–434页。国际标准连续出版物号：1201-561X（引自第188页）。

[塞尔11] Peter Selinger。《幺半范畴图形语言综述》。
载于：物理学的新结构。卷 813。物理学讲义丛书。施普林格，
海德堡，2011 年，第 289–355 页。数字对象标识符：10.1007/978-3-642-12821-9_4（引自
第 19、27页）。

[Shi15] Kenichi Shimizu。枢纽覆盖与Frobenius-Schur指标。载于：代数学杂志 428 (2015)，第357–402页。 国际标准连续出版物号：0021-8693。数字对象标识符：10.1016/j.jalgebra.2015.01.014 (引自第33页)。

[Shi17] Kenichi Shimizu。幺半中心与特征代数。载于：杂志纯数学与应用代数 221.9 (2017)，第2338–2371页。国际标准连续出版物号：0022-4049。数字对象标识符：10.1016/j.jpaa.2016.12.037 （引用于第143页）。

[Shi19] Kenichi Shimizu。非退化条件，适用于辫子有限张量范畴。载于：《数学进展》 355 (2019)。编号106778，第36页。国际标准连续出版物号：0001-8708。数字对象标识符：10.1016/j.aim.2019.106778 (引文见第 92、107页）。

[Shi23a] Kenichi Shimizu。有限张量范畴的 Drinfeld 中心的枢轴结构。载于：纯粹与应用代数杂志 227.7（2023）。编号 107321，第 30 页。国际标准连续出版物号：0022-4049。数字对象标识符:10.1016/j.jpaa.2023.107321 (引文见第 92、98、101、107页）。

[Shi23b] Kenichi Shimizu。余模代数的相对 Serre 函子。载于：《代数杂志》634 (2023)，第 237–305 页。国际标准连续出版物号：0021-8693。数字对象标识符：10.1016/j.jalgebra.2023.07.015 (引自第1页)。

[Sho09] Boris Shoikhet。霍普夫代数、四模与 n 重幺半范畴ies。载于：*arXiv*预印本(2009年)。arXiv：0907。3335 [范畴论] (引自第213页)。

[Ško07] Zoran Škoda. 量子堆、cops 与堆范畴。载于：数学通讯 12.1 (2007年)，第 1–9 页。 国际标准连续出版物号：1331-0623（引自第 92，98页）。

[SR72] Neantro Saavedra Rivano. 坦纳范畴。法语。卷 265。Lect. 数学讲义。施普林格，Cham，1972年（引自第 2页）。

[SS22] Brandon T. Shapiro 和 David I. Spivak。《用于组合依赖的双幺半结构》。组合依赖。*arXiv*预印本 （2022年）。arXiv：2210.01962 [范畴论]（引文见第157页）。

[Str03] Ross Street。《幺半双范畴中的函子演算》。英文。载于：应用。范畴结构11.3（2003年），第219–227页。国际标准连续出版物号：0927-2852。数字对象标识符：10.1023/A:1024247613677（引自第46页）。

[Str23] Catharina Stroppel。范畴化：缠结不变量与拓扑量子场论。在：国际数学家大会*2022，ICM 2022*，赫尔辛基，芬兰，线上，*2022*年*7*月*6–14*日。第*2*卷。全体会议讲座。柏林：欧洲数学学会（EMS），2023，页码 1312–1353。 数字对象标识符： 10.4171/ICM2022/109 （引自第 1页）。

[Str24a] Mateusz Stroiński。伴随存在时的恒等态射。载于：国际数学研究纪要。 2024.18（2024），页码 12711–12745。 国际标准连续出版物号：1073-7928。 数字对象标识符： 10.1093/imrn/rnae166 （引自第182页）。

[Str24b] Mateusz Stroiński。《模范畴、内部双模与Tambara模》。载于：伦敦数学会会刊 *(3)*128.5 (2024)。编号 e12596，第 84 页。国际标准连续出版物号：0024-6115。数字对象标识符：10.1112/plms.12596 (引于第 1、2、213页)。

[Str72] Ross Street。《单子形式理论》。载于：纯粹与应用代数2.2 (1972年)，第 149–168 页。国际标准连续出版物号：0022-4049。数字对象标识符：10.1016/0022-4049(72)90019-9 (引文见第 2、14、 16、18、 139 页)。

[SW24] Catharina Stroppel 和 Paul Wedrich。A 型 Soergel 双模上的编织：半严格性与自然性。载于：*arXiv*预印本（2024）。arXiv：2412.20587 [数学问答]（引自第1页）。

[SZ24] Mateusz Stroiński 与 Tony Zorman。模范畴的重构，在无限情形与非刚性情形。载于：*arXiv*预印本 (2024). arXiv: 2409.00793 [math.QA]（引用于第3、5、7、8页）。

[Szl03] Kornél Szlachányi。幺半 Eilenberg-Moore 构造与双代-数胚。载于：纯粹与应用代数杂志 182.2-3（2003年），第287–315页。国际标准连续出版物号：0022-4049。数字对象标识符:10.1016/S0022-4049(03)00018-5 (引自第 161页)。

[Szl09] Kornél Szlachanyi. 纤维函子、幺半群拓扑与双代数胚的 Tannaka 对偶双代数胚。载于：*arXiv*预印本（2009年）。arXiv：0907.1578 [math.QA]（引自第 2页）。

[Szl12] Kornél Szlachányi。《偏斜幺半范畴与双代数胚》。载于：*Advances* 数学进展 231.3-4 (2012)，第 1694–1730 页。国际标准连续出版物号：0001-8708。数字对象标识符：10.1016/j.aim.2012.06.027（引于第25页）。

[Tak77] Mitsuhiro Takeuchi。余模范畴的 Morita 定理。载于：*J. Fac.* 东京大学理学部 *I A* 24 (1977)，第 629–644 页。国际标准连续出版物号：0040-8980（引于第 42、54、180、228、229、231页）。

[Tan38] Tadao Tannaka. 关于非交换拓扑群的对偶定理。德语。载于：东北数学杂志 45（1938），第 1–12 页。国际标准连续出版物号：0040-8735（引自第 2页）。

[Thé95] Jacques Thévenaz。*G*-代数与模表示论。牛津数学专著。牛津：克拉伦登出版社，1995。国际标准书号：0-19-853587-2（引自第 85页）。

[Thr48] Robert McDowell Thrall。关于拟 Frobenius 代数的一些推广。载于：美国数学会汇刊 64（1948），第 173–183 页。国际标准连续出版物号：0002-9947。数字对象标识符：10.2307/1990561（引自第 84页）。

[Tor24] Takeshi Torii。《映射幺半范畴与对偶幺半 ∞-范畴》。载于：*arXiv*预印本（2024）。arXiv：2406.00223 [范畴论]（引自第 157页）。

[TP97] Daniele Turi 和 Gordon Plotkin。迈向一种数学化的操作语义学。载于：《第十二届 *IEEE* 逻辑与计算机科学年会论文集。1997 年，第 280–291 页。数字对象标识符：10.1109/LICS.1997.614955（引文见第 2 页）。

[TV17] Vladimir Turaev 和 Alexis Virelizier。《幺半范畴与拓扑场论》。第 322 卷。《数学进展》。Birkhäuser/Springer，Cham，2017，第 xii 页+523。国际标准书号：978-3-319-49833-1；978-3-319-49834-8。数字对象标识符：10.1007/978-3-319-49834-8（引用于第14、30、36、117、121、129、130页）。

[TW95] Jacques Thévenaz 与 Peter Webb。Mackey 函子的结构。载于：美国数学会汇刊 347.6（1995），第 1865–1961 页。国际标准连续出版物号：0002-9947。数字对象标识符：10.2307/2154915（引用于第58、80、85、86页）。

[Ulb90] Karl-Heinz Ulbrich。《关于霍普夫代数与刚性幺半范畴》。载于：以色列数学杂志 72.1-2 (1990)，第 252–256 页。国际标准连续出版物号：0021-2172。数字对象标识符：10.1007/BF02764622（引自第 62、178 页）。

[Wad92] Philip Wadler。理解单子。载于：数学结构与计算机科学 2.4（1992），第 461–493 页。国际标准连续出版物号：0960-1295。数字对象标识符：10.1017/S0960129500001560（引见第 2页）。

[Wad93] Philip Wadler。函数式编程的单子。载于：程序设计演算。柏林，海德堡：施普林格·柏林·海德堡，1993 年，第 233–264 页。国际标准书号：978-3-662-02880-3（引自第2页）。

[Wag21] Friedrich Wagemann。《交叉模》。第82卷。德·格鲁伊特数学研究。De Gruyter，2021年10月25日。国际标准书号：9783110750959（引自第58、86、87页）。

[Wal70] Robert F. C. Walters。《泛代数的范畴方法》。博士论文。澳大利亚国立大学，1970年（引自第 2页）。

[Web00] Peter Webb。《Mackey 函子的指南》。载于：《代数手册》第*2*卷。阿姆斯特丹：North-Holland，2000年，第805–836页。国际标准书号：0-444-50396-X（引自第 58页）。

[Wil08] Simon Willerton。《霍普夫单子的图示方法》。载于：*Arabian*《科学与工程 *C* 期刊》主题专刊“代数与……的相互作用余代数结构（理论与应用）”*2008*年*12*月；第 *33* 卷，第 *2C*，*561-585*。（2008）（引自第 21、46 页）。

[Wor88] Stanisław L. Woronowicz。紧矩阵伪群的 Tannaka–Krein 对偶群。扭曲SU(N)群。载于：*Inventiones Mathematicae* 93.1（1988年），第35–76页。国际标准连续出版物号：0020-9910. 数字对象标识符：10.1007/BF01393687（引用于第2页）。

[Yet90] David N. Yetter。量子群与幺半cat-的表示egories。载于：剑桥哲学会数学汇刊108.2（1990），第261–290页。国际标准连续出版物号：0305-0041. 数字对象标识符：10.1017/S0305004100069139（引用于第22、27、34页）。

[Zöb76] Volker Zöberlein. 2-范畴上的教义。载于：《数学杂志》148 (1976年), 第267–279。国际标准连续出版物号：0025-5874。数字对象标识符：10.1007/BF01214522（引自第52页）。

[Zor25] Tony Zorman。双幺半 R-矩阵。载于：*arXiv*预印本（2025）。arXiv：2503.03445 [范畴论]（引自第3、6页）。

图 目 录

2.1 基本弦图约定.20 2.2 幺半范畴 $(\mathscr{C}, \otimes, 1)$ 的张量积和单位的图示.46 2.3 反松幺半函子 $F\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ 的余乘法. . 47 2.4 反松幺半函子的余结合性和余单位性条件.47 2.5 η 和 ε 成为反松变换的条件. . . . . 48 4.1 $Z(\mathscr{C})$ 在 $Z({}_L\mathscr{C})$ 和 $Z(\mathscr{C}_R)$ 上的典范作用.95 4.2 $\mathrm{coev}_\alpha^\ell$ 和 $\mathrm{coev}_\alpha^{-\ell}$ 的性质.101 4.3 ρ_{a_1} 和 ρ_{a_2} 的诱导枢轴结构相同. . . . . 103 4.4 引理 4.30 的验证.105 5.1 B 成为双单子的显式条件.119 5.2 双单子的乘法和单位成为反松幺半自然变换的条件.119 5.3 余模函子的余作用的余结合性和余单位性条件.124 5.4 余模单子的乘法和单位成为余模函子态射的条件.126 5.5 余模伴随的弦图条件. . . . . 129 5.6 G 的余结合条件 .131 6.1 伴随、单子以及中心和反中心的各种版本交织而成的网络.138 6.2 态射 λ 和 $Z_{L;\mathsf{a}}$ 满足相同的泛性质. . . . . 148 6.3 Z_L 和 $Z_{L\rtimes H}$ 的余作用与遗忘函子相容.150 7.1 验证 S 满足图 (7.2.3).165 7.2 证明 ξ 是 T-代数的态射.167 7.3 证明 ξ 满足图 (7.1.1).168 7.4 映射 R 满足图 (7.2.3).169 7.5 R-矩阵满足图 (7.2.4).170 7.6 左左线性分配子满足图 (7.3.3). 175

8.1 态射 α_2 的定义.209 8.2 态射 Φ_{a} 在 Φ 上定义了一个宽松的 $\mathscr{C}$-模结构. . . . . 210 9.1 $\chi_{M,N}$ 的像包含于 $X \square (M \otimes_{\Bbbk} N)$ 中 .218 9.2 态射 χ 是左 B-余模的态射.218 9.3 对角作用在余张量积上定义良好. . . . 221 9.4 余张量积的作用是右 B-余模态射.221 9.5 态射 χ 和 φ 的性质.223 9.6 验证 $\hat{}\varphi_B$ 是左右余模态射. . . . 224 9.7 验证 $\Sigma(\alpha) = \chi_{B,B}$.226 9.8 $B \bullet B$ 的作用是左余模的态射. . . . . 234 9.9 $B \bullet B$ 的作用是右余模的态射. . . . . 234 9.10 单位 $\eta = \Delta$ 是左 B-模的模态射.236 9.11 指派 J 具有函子性.238

本人特此声明，本论文是在未接受他人不当帮助、未使用所列辅助工具以外的任何其他工具的情况下完成的；直接或间接取自外部来源的观点均已明确注明。本论文此前从未以相同或相似的形式提交给国内或国外的其他考试机构。

Tony Zorman 德
累斯顿，2025年4月1日