超几何与 q-超几何创造性望远镜法的阶数界

Hui Huang福州大学数学与统计学院，中国福州
350108 huanghui@fzu.edu.cn

arXiv:2602.19886v1 [cs.SC] 23 Feb 2026

摘要

借鉴符号积分中的一般框架，近期提出了一种基于统一约化的算法，用于计算超几何项和 q-超几何项的最小阶数望远镜算子。本文对此进行了更深入的探讨，并为该算法的终止性提出了一种新论证。这不仅独立证明了望远镜算子的存在性，还使我们能够为超几何项及其 q 类比项的望远镜算子阶数推导出统一的上界和下界。与文献中的已知界相比，对于超几何情形，我们的界与 2016年 得到的紧界完全相同；而对于 q-超几何情形，此前尚无下界已知，我们给出的上界有时优于已知上界，且从不更差。

1 引言

本文研究超几何项及其 q-类比。它们是组合数学中无处不在的对象。称一个关于两个离散变量 n, k 的数列 $f_{n,k}$ 为超几何项，如果两个移位商 $f_{n+1,k}/f_{n,k}$ 和 $f_{n,k+1}/f_{n,k}$ 都是关于 n 和 k 的有理函数；如果两个移位商都是关于 q^n 和 q^k 的有理函数，则称它为 q-超几何项。典型的例子分别是二项式系数$f_{n,k} = \binom{n}{k}$ 和高斯二项式系数

$$f_{n,k} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{cases} \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k (q;q)_{n-k}} & \text{if } 0 \le k \le n, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中 $(q;\, q)_k = \prod_{i=1}^{k}(1 - q^i)$ 是 q-Pochhammer 符号，且 $(q;q)_0 = 1$。

由 Zeilberger [19, 20, 21]，开创的创造性求和方法，如今是化简超几何项及其 q-类比的定和的主要技术。具体到超几何情形，该方法以超几何求和项 $f_{n,k}$ 为输入，求出一个与 k 无关的递推算子 L 和 k-移位算子 S_k，以及另一个超几何项 $g_{n,k}$，使得 $L(f_{n,k}) = g_{n,k+1} - g_{n,k}$。更确切地说，算子 L 具有如下形式： $L = c_0 + c_1 S_n + \cdots + c_\rho S_n^\rho$，其中 $c_0, \ldots, c_\rho$ 仅依赖于 n，而 S_n 是n-移位算子。我们称这样的 L 为 $f_{n,k}$ 的望远镜算子，并称 $g_{n,k}$ 为 L 的证书。望远镜算子和证书使我们能够导出递推方程，而感兴趣的定和（例如 $\sum_{k=0}^{n} f_{n,k}$）是这些方程的解，从而为这些和提供有用信息；更多细节见 [18] 。

在过去的35年里，创造性求和方法以各种方式得到了推广和改进。创造性望远镜法发展的最新趋势，是所谓的基于约化的方法，源自 [4]。这种方法的一个重要特点是，对于给定的项，可以灵活地构造望远镜算子，而无需构造证书。

这在一种典型情况下尤其有用：此时并不需要证书，而且证书比望远镜算子大得多（因而计算成本也高得多）。关于这种方法的出色介绍可见 [5]。

顾名思义，约化在基于约化的方法中发挥着根本作用。设 $\mathbb{K}$ 为特征为零的域。根据 [16, 定义 5，67], 针对移位情形给出的约化 red_k是从所考虑的定义域（例如 $\mathbb{D}$）到其自身的一个 $\mathbb{K}(n)$-线性映射，其中该定义域包含 $\mathbb{K}(n,k)$，且具有如下性质：对于所有 $f \in \mathbb{D}$，都存在一个 $g \in \mathbb{D}$，使得 $f - \mathrm{red}_k(f) = S_k(g) - g$。换言之，差值 $f - \mathrm{red}_k(f)$是一个可求和项。我们称 $\mathrm{red}_k(f)$为 f 关于约化 red_k的余数。基于约化的方法的基本思路如下：给定一个 $f \in \mathbb{D}$，我们不断计算 $\mathrm{red}_k(f)$、$\mathrm{red}_k(S_n(f))$、$\mathrm{red}_k(S_n^2(f))$.....，直到找到一个关于 $\mathbb{K}(n)$的非平凡线性依赖。一旦找到这样的依赖，例如对某些 c_0，.....，$c_\rho \in$，有 $c_0\,\mathrm{red}_k(f) + \cdots + c_\rho\,\mathrm{red}_k(S_n^\rho(f)) = 0$，且$\mathbb{K}(n)$不全为零，那么算子 $c_0 + \cdots + c_\rho S_n^\rho$ 就是 f的一个望远镜算子。

通常有两种常见方法可以保证上述过程终止。一种是证明由 $\mathrm{red}_k(f)$、$\mathrm{red}_k(S_n(f))$、$\mathrm{red}_k(S_n^2(f))\ldots$张成的 $\mathbb{K}(n)$-向量空间具有有限维，或者等价地，约化 red_k 是受限的（参见 [16, 定义 5.67]）。这样，当 ρ 超过该维数时，我们就可以确定会找到一个非平凡的线性依赖关系（从而找到一个望远镜算子）。这种方法的优点在于，它不仅独立地证明了望远镜算子的存在性，还给出了其阶数界。望远镜算子的阶数界有助于分析复杂度并提高创造性望远镜算法的效率。确保终止的另一种方法是证明，对于每个可求和项 f，都有 $\mathrm{red}_k(f) = 0$；或者等价地，约化 red_k 是完备的（参见 [16, 定义 5.67]）。这可以确保我们不会漏掉任何望远镜算子，并且只要已知望远镜算子存在，就能找到可能的最小者。这种方法需要预先知道望远镜算子的存在性，且不提供任何关于阶数的信息。我们指出，超几何项 [1], 、其 q-类比物 [10], 、三元有理函数 [9, 8, 7], 以及近期的 P-递归数列 [11]的望远镜算子存在性问题都已得到解决。

最近，Chen等人 [6] 提出了一种统一约化，并基于从符号积分改编而来的一般框架，为超几何项和 q-超几何项设计了后续的创造性望远镜算法。他们证明了这种约化是完备的。本文旨在延续他们的理论，并进一步证明这种约化也具有受限性。我们将以某种方式重新表述该理论，从而得到由余数生成的有限维$\mathbb{K}(n)$-向量空间。这使我们能够为超几何项和 q-超几何项的望远镜算子阶推导出统一的上下界，除存在性判据之外，还提供了另一种确保创造性望远镜算法终止的方法。与文献中已知的界相比，在超几何情形下，我们的界与 [14]给出的紧界完全相同。在q-超几何情形下，此前尚无下界；我们的上界至少与 [17] 中已知的上界一样好，尤其是对于“泛型输入”（因为后者在泛型情况下已是紧界）；不过，也存在一些例子，在这些例子中，我们的界优于已知界。

本文其余部分安排如下。下一节将回顾 [6]中建立的统一理论。在第 3 节，我们将介绍余数之间的一种内在关系，并据此在第 4 节得出超几何项和 q-超几何项的望远镜算子阶的统一上下界。本文最后将我们的界与文献中已知的界进行比较。

2 统一理论

全文中，设 $\mathbb{K}$ 为特征为零的域，$\mathbb{F} = \mathbb{K}(x)$ 和 $\mathbb{F}(y) = \mathbb{K}(x,\ y)$ 是关于 x 和 y 的有理函数域，其系数取自 $\mathbb{K}$。设 σ_x 和 σ_y 均为通常移位

算子，分别关于 x 和 y 定义如下:

$$\sigma_x(f(x,y)) = f(x+1,y) \quad \text{and} \quad \sigma_y(f(x,y)) = f(x,y+1),$$

或分别关于 x和 y 定义的 q-移位算子

$$\sigma_x(f(x,y)) = f(qx,y) \quad \text{and} \quad \sigma_y(f(x,y)) = f(x,qy)$$

对于任意 $f \in \mathbb{K}(x, y)$，其中 $q \in \mathbb{K}$ 既不为零，也不是单位根。我们将前一种情形称为通常移位情形，后一种称为 q-移位情形。数对 $(\mathbb{K}(x, y) \{\sigma_x, \sigma_y\})$ 构成一个部分 (q-)差分域。设 R是 $(\mathbb{K}(x, y) \{\sigma_x, \sigma_y\})$ 的一个部分（q-）差分环扩张，也就是说， R是一个包含 $\mathbb{K}(x, y)$ 的环，并带有两个指定的自同态 σ_x 和σ_y ，它们将 R 映射到自身，且在 $\mathbb{K}(x, y)$ 上的限制分别与先前定义的两个自同构一致。若元素 $c \in R$ 在 σ_x 和σ_y的作用下保持不变，则称其为常数。容易看出， R 中的所有常数构成 R的一个子环。

定义 2.1。 T 的 R 中的可逆元素称为σ_y-超几何项，如果存在$f \in \mathbb{F}(y)$ 使得 $\sigma_y(T) = fT$。我们称 f为 T 的σ_y-商。 T的 R中的可逆元素称为(σ_x,σ_y)-超几何项，如果它同时是 σ_x-超几何项和σ_y-超几何项。

对于给定的σ_y-超几何项 T，一个重要问题是判断是否存在另一个σ_y-超几何项 G，使得 $T = \Delta_y(G)$，其中 Δ_y 表示σ_y 与 R的恒等映射之差。如果这样的 G 存在，我们就称 T 是σ_y-可求和的。我们将这个问题称为σ_y-可求和性问题。解决σ_y-超几何项 T 的σ_y-可求和性问题的一个关键思想，是将其写成乘法分解 $T = fH$，其中$f \in \mathbb{F}(y)$，且 H 是一个具有某些良好性质的σ_y-超几何项（参见 [3, 10]），然后将问题归结为寻找一个有理函数 $g \in \mathbb{F}(y)$，使得

$$fH = \Delta_y(gH), \text{ or equivalently, } f = \Delta_K(g),$$

其中 $K = \sigma_y(H)/H$ 和 $\Delta_K = K\sigma_y - 1$ 是从 $\mathbb{F}(y)$ 到其自身的线性映射，将 $f \in \mathbb{F}(y)$映射为$K\sigma_y(f) - f$。这使我们的注意力从 σ_y-超几何项转向有理函数，并促使我们回顾 [6, §2.1] 正规多项式和特殊多项式的概念。

定义 2.2. 若多项式 $p \in \mathbb{F}[y]$ 满足最大公因式$(p, \sigma_y^\ell(p)) = 1$ 对任意非零整数 ℓ均成立，则称其为σ_y-正规 多项式；若 $p \mid \sigma_y^\ell(p)$ 对某个非零整数 ℓ成立，则称其为σ_y-特殊 多项式。

注意，文献中的 σ_y-正规多项式与 σ_y-自由多项式相同。多项式不一定是 σ_y-正规或 σ_y-特殊多项式，但 $\mathbb{F}[y]$中的不可约多项式必定是 σ_y-正规或 σ_y-特殊多项式。 $\mathbb{F}$ 中的所有元素都是 σ_y-特殊的，而 $\mathbb{F}[y]$ 中的多项式既是 σ_y-正规的又是 σ_y-特殊的，当且仅当它属于 $\mathbb{F} \setminus \{0\}$。

回顾一下，若对于任意非零整数 ℓ，最大公因式 $\gcd(a, \sigma_y^\ell(b)) = 1$，则两个多项式 $a, b \in \mathbb{F}[y]$ 称为 σ_y-互素 。注意，两个σ_y-互素多项式未必互素。下面介绍σ_y-正规多项式和 σ_y-特殊多项式所满足的良好乘法性质。

命题 2.3 （[6,命题 2.4]）。

(i) 在 $\mathbb{F}[y]$ 中，任意有限个两两σ_y-互素的 σ_y-正规多项式的乘积都是 σ_y-正规多项式。在 $\mathbb{F}[y]$ 中，σ_y-正规多项式的任意因子都是 σ_y-正规多项式。*(ii)* 在 $\mathbb{F}[y]$ 中，任意有限个 σ_y-特殊多项式的乘积都是 σ_y-特殊多项式。在 $\mathbb{F}[y]$ 中，任意非零σ_y-特殊多项式的因子都是 σ_y-特殊多项式。

众所周知，从 q-移位情形到通常情形的一个主要区别在于出现了非平凡的 σ_y-特殊多项式。

引理 2.4 ([6, 引理 2.7])。 设 p 是一个多项式，属于 $\mathbb{F}[y]$。

(i) 在通常移位情形下， p 是σ_y-特殊的，当且仅当 $p \in \mathbb{F}$。

(ii) 在 q-移位情形下， p 是σ_y-特殊的，当且仅当存在某个 $k \in \mathbb{N}$使得 $p/y^k \in \mathbb{F}$ 。

利用σ_y-正规多项式和σ_y-特殊多项式的理论， [6] 的作者提出了针对σ_y-超几何项的统一约化，无需求解任何辅助差分方程即可解决σ_y-可求和性问题。为了简洁地描述这一方法，我们需要回顾一些术语。

基于 [3, 10], ，若 $\mathbb{F}(y)$中的一个非零有理函数的分子为 u 、分母为 v，则称其为σ_y-约化的，如果对于任意整数 ℓ，$\gcd(u, \sigma_y^{\ell}(v)) = 1$ 。对于一个非零有理函数$f \in \mathbb{F}(y)$，存在两个非零有理函数 K, S ，它们属于 $\mathbb{F}(y)$，且 K 是σ_y-约化的，使得

$$f = K\frac{\sigma_y(S)}{S}.$$

这样的有序对(K, S)称为 f的有理标准形（简称RNF）。此外，我们称 K 为核，称 S 为 f对应的壳。这些量可以通过最大公因式计算构造出来（参见 [3, 10]）。

定义 2.5. 设 $K \in \mathbb{F}(y)$ 的分子为 u 、分母为 v。称非零多项式$p \in \mathbb{F}[y]$ 与 K强互素，如果对所有 $\ell \in \mathbb{N}$，$\gcd(u, \sigma_y^{\ell}(p)) = \gcd(v, \sigma_y^{-\ell}(p)) = 1$。

下述概念对于建立统一约化至关重要。

定义 2.6. 称 $\mathbb{F}(y)$ 中分子为 u 、分母为 v 的有理函数为 σ_y-标准，如果它是 σ_y-约化的，并且在 q-移位情形下，对任意负整数 ℓ，有 $u(0)q^{\ell} - v(0) \neq 0$ 。

由 [6, 命题 3.16], ， $\mathbb{F}(y)$ 中的每个非零有理函数都有一个可轻易计算的 σ_y-标准核。

对于非零多项式 $p \in \mathbb{F}[y]$，其关于 y 的次数（或 y-次数）记为 $\deg_y(p)$。我们约定 $\deg_y(0) = -\infty$。称 $\mathbb{F}(y)$ 中的有理函数为真分式，如果其分子的 y-次数小于其分母的次数。设 $K \in \mathbb{F}(y)$ 为 σ_y-标准，分子为 u、分母为 v。我们定义一个从 $\mathbb{F}[y]$ 到其自身的 $\mathbb{F}$-线性映射 ϕ_K ，它对所有 $p \in \mathbb{F}[y]$ 将 p 映为 $u\sigma_y(p) - vp$ ，并称之为相对于 K的多项式约化映射。ϕ_K 的像记作 $\mathrm{im}(\phi_K)$，是 $\mathbb{F}[y]$ 的一个 $\mathbb{F}$-线性子空间。设

$$\mathrm{im}(\phi_K)^{\top} = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\left\{y^d \mid d \in \mathbb{N} \text{ and } d \neq \deg_y(p) \text{ for all } p \in \mathrm{im}(\phi_K)\right\}.$$

则 $\mathbb{F}[y]$ $= \mathrm{im}(\phi_K) \oplus \mathrm{im}(\phi_K)^{\top}$，因此我们称 $\mathrm{im}(\phi_K)^{\top}$ 为 $\mathrm{im}(\phi_K$ 的标准补空间).

定义 2.7. 设 $K \in \mathbb{F}(y)$ 是以 v 为分母的 σ_y-标准的，并设 $f \in \mathbb{F}(y)$。若 $f - r \in \mathrm{im}(\Delta_K)$与 r 可写成如下形式，则 $\mathbb{F}(y)$ 中的另一有理函数 r 称为 f 关于 K 的 σ_y- 余数

$$r = h + \frac{p}{v}, \tag{1}$$

其中 $h \in \mathbb{F}(y)$ 是真分式，其分母为 σ_y-正规且与 K 强互素，并且$p \in \mathrm{im}(\phi_K)^{\top}$。为简便起见，若 f 可由上下文明确，我们仅称 r 为关于 K 的 σ_y-余数。此外，我们将 h 的分母称为 r 的显著分母 。

在 [6] 中发展的统一约化可陈述如下。

定理 2.8 ([6, 定理 3.18])**.** 对于 σ_y-超几何项 T ，其 σ_y-商具有一个σ_y-标准核 K 以及相应的壳 S，存在一个算法，可计算出有理函数 $g \in \mathbb{F}(y)$ 以及关于 K 的 σ_y-余数 r ，使得

$$T = \Delta_y(gH) + rH, \tag{2}$$

其中 $H = T/S$。此外， T 是 σ_y-可求和的，当且仅当 $r = 0$。

在创造性望远镜法的背景下，我们还需要考虑变量 x。令 $\mathbb{F}[S_x]$ 为 x 上关于 $\mathbb{F}$ 的线性递推算子环，其中交换规则为：对所有 $f \in \mathbb{F}$，有 $S_x f = \sigma_x(f)S_x$。算子 $L = \sum_{i=0}^{\rho} \ell_i S_x^i \in \mathbb{F}[S_x]$ 作用于一个 (σ_x, σ_y)-超几何项 T 的定义为

$$L(T) = \sum_{i=0}^{\rho} \ell_i \sigma_x^i(T).$$

定义 2.9。设 T 是一个(σ_x,σ_y)-超几何项。非零线性递推算子$L \in \mathbb{F}[S_x]$ 称为 T 的望远镜算子，如果存在一个(σ_x,σ_y)-超几何项 G，使得

$$L(T) = \Delta_y(G).$$

我们称 G 为 L 的对应证书。T 的阶 定义为其关于 S_x 的次数。

基于统一约化，文献 σ_x、σ_y进一步提出了一种高效的创造性望远镜算法，用于构造一个([6])-超几何项的望远镜算子。下面简要概述其主要思想。

设 T 是一个(σ_x,σ_y)-超几何项，其 σ_y-商具有一个 σ_y-标准核 K 及其对应的壳 S。将定理2.8 应用于 T 可得

$$T = \Delta_y(g_0 H) + r_0 H,$$

其中 $H = T/S$, $g_0 \in \mathbb{F}(y)$，且 r_0 是关于 K 的 σ_y-余项。如果 r_0 的显著分母不是整数线性的（见定义 4.1），那么根据存在性判据（参见 [1, 10]），T 不存在望远镜算子，因此算法终止。否则，T 必定存在望远镜算子。接下来将定理 2.8 应用于 $\sigma_x^i(T)$，并结合定理 4.1],，对所得的 σ_y-余项进行变换，再依次取 $i = 1$ 为 1、2、.....，从而得到 $g_i \in \mathbb{F}(y)$ 和关于 K 的 σ_y-余项 r_i，使得

$$\sigma_x^i(T) = \Delta_y(g_i H) + r_i H \quad \text{and} \quad \sum_{j=0}^{i} c_j r_j \text{ is a } \sigma_y\text{-remainder for all } c_j \in \mathbb{F}, \tag{3}$$

并在 r_i 中找到一个非平凡的 $\mathbb{F}$-线性依赖。任何这样的 $\mathbb{F}$-线性依赖都会触发算法，为 T 返回所需的望远镜算子。

上述算法的终止性由存在性判据保证，更多细节请参见 [6] 。本文接下来不使用该判据，而是通过证明在 (σ_y-余项 r_i 中产生的余项构成一个有限维向量空间3，该空间定义在 $\mathbb{F}$上，并在此过程中得到望远镜算子阶的上下界，从而将 [14]中的结果推广到也涵盖 q-移位情形。

3 余项之间的关系

本节首先讨论两个 σ_y-余项之间的一种内在关系，这两个余项与一个（σ_x，σ_y）-超几何项的不同 x-移位相关。以下定义在描述这种关系时起着关键作用。

定义 3.1. 两个 σ_y-正规多项式 $a, b \in \mathbb{F}[y]$ 称为 σ_y-相关，如果对于 $\mathbb{F}$ 上 a 的任意不可约因子 $f \in \mathbb{F}[y]$，其重数为 k，都存在一个整数 ℓ，使得 $\sigma_y^{\ell}(f)$是 b 的一个因子，且重数相同 k，反之亦然。

注意，上述定义中的整数 ℓ 是唯一的，因为 a和 b都是 σ_y-正规多项式。显然，σ_y-相关性是一种等价关系，而 $\mathbb{F}[y]$中的两个 σ_y-相关多项式具有相同的 y-次数。

引理 3.2 的证明 [6]实际上包含了下述更一般的结论，这将有助于探究所需的关系。

引理 3.2。设 $K \in \mathbb{F}(y)$ 的分母为 v，且设 $h \in \mathbb{F}(y)$ 为一个有理函数，其分母 d 是 σ_y-正规且与 K强互素。假设存在 $h \in \mathbb{F}(y)$ 和$p \in \mathbb{F}[y]$ 使得

$$h - \tilde{h} + \frac{p}{v} \in \mathrm{im}(\Delta_K).$$

那么，对于 $\mathbb{F}$ 上的 d 的任意不可约因子 $a \in \mathbb{F}[y]$，若其重数为 k，则存在一个整数 ℓ，使得 $\sigma_y^\ell(a)^k$ 整除 $\tilde{h}$ 的分母。

对于 $\mathbb{F}(y)$ 中的非零有理函数，以下命题揭示了相对于同一个核，其两个壳的σ_y-余项之间的关系。

命题 3.3。设 (K, S) 和 (K, S) 是非零有理函数 $f \in \mathbb{F}(y)$的两个有理标准形，其中 K 为 σ_y-标准。设 r 和 $\tilde{r}$ 分别为 S 和 S 相对于 K的σ_y-余项。则 r 和 $\tilde{r}$ 的显著分母是 σ_y-相关的。

证明。由于 (K, S) 与 (K, S) 均为 f 的有理标准形，我们有 $f = K\sigma_y(S)/S = K\sigma_y(S)/S$，并且于是 $\sigma_y(S/S) = S/S$。注意在 q-移位情形中，q 不是单位根。因此由从 [6, 引理 2.6] 可知，在通常移位与 q-移位情形中均有 $S/S \in \mathbb{F}$，即 $S = cS$ 对某个非零元 $c \in \mathbb{F}$。由于 r 与 $\tilde{r}$ 是σ_y-余项，分别属于 S 与 S 关于 K，
我们有 $S - r \in \mathrm{im}(\Delta_K)$ 与 $S - \tilde{r} \in \mathrm{im}(\Delta_K)$。因此 $cr - \tilde{r} \in \mathrm{im}(\Delta_K)$。

设 d 与 d 在 $\mathbb{F}[y]$ 中分别为 r 与 $\tilde{r}$ 的显著分母，并记

$$r = h + \frac{p}{v} \quad \text{and} \quad \tilde{r} = \tilde{h} + \frac{\tilde{p}}{v},$$

其中 $h, \tilde{h} \in \mathbb{F}(y)$ 均为真分式，分母分别为 $d, \tilde{d}$，$p, \tilde{p} \in \mathrm{im}(\phi_K)^\top$，且 v是 K的分母。由此可得

$$ch - \tilde{h} + \frac{cp - \tilde{p}}{v} \in \mathrm{im}(\Delta_K).$$

注意，ch 和 h 都是 $\mathbb{F}(y)$中的真有理函数，其分母 d 和 d 均为σ_y-正规且与 K强互素。若 $d \in \mathbb{F}$，则 $h = 0$，从而 $-h+(cp-\tilde{p})/v \in \mathrm{im}(\Delta_K)$，由 [6, 定理 3.5], 可得 $h = 0$，所以 $d \in \mathbb{F}$，结论显然成立。假设 $d \notin \mathbb{F}$，并令 $a \in \mathbb{F}[y]$ 为 d 在 $\mathbb{F}$ 上的一个不可约因子，其重数为 k。由引理 3.2 可知，存在一个整数 ℓ，使得 $\sigma_y^\ell(a)^k$ 整除 $\tilde{d}$。这意味着 $\sigma_y^\ell(a)$ 是 d 在 $\mathbb{F}$ 上的一个不可约因子，其重数（记为 k'）至少为 k。将引理 3.2 应用于 $\tilde{h}$，可知对于某个 $i \in \mathbb{Z}$，$\sigma^{\ell+i}(a)^{k'}$ 整除 d。由于 d 是σ_y-正规，且 a 是 d的一个因子，重数为 k，因此有 $i = -\ell$ 和 $k' \le k$，由此得到 $k' = k$。因此，$\sigma_y^\ell(a)$ 是 d 的一个因子，重数为 k。现在，在上述论证中交换 ch 与 h（从而也交换 d 与 d）的角色，我们得出：对于 d 在 $\mathbb{F}$ 上的任意不可约因子 $\tilde{a} \in \mathbb{F}[y]$，若其重数为 k，则存在一个整数 $\tilde{\ell}$，使得 $\sigma_y^{\tilde{\ell}}(\tilde{a})$ 是 d 的一个因子，且重数相同，为 $\tilde{k}$。因此，根据定义，d和 d 是σ_y-相关的。

□

为了研究不同核的情况，我们回顾 [6] 中的一些概念。

多项式 p 在 $\mathbb{F}[y]$ 中称为 σ_y-首一的，如果它相对于 y 在通常移位情形下是首一的，或者 q-首一的，即 $p\,|_{y=0} = 1$，在 q-移位情形下是首一的。$\mathbb{F}(y)$ 中的有理函数称为 σ_y-首一的，如果其分子和分母都是 σ_y-首一的。所谓 $\mathbb{F}(y)$ 中有理函数的因子，是指其分子或分母的因子。设 $f \in \mathbb{F}(y)$ 是 σ_y-首一的。引理 2.4

于是可知， f的所有不可约因子都是σ_y-正规因子。此外，对于所有 $\ell \in \mathbb{Z}$， $\sigma_y^{\ell}(f)$仍然是σ_y-首一的。设 p是 $\mathbb{F}[y]$ 中的非零多项式， $\alpha = \sum_{i=m}^{n} k_i \sigma_y^i$是 $\mathbb{Z}[\sigma_y, \sigma_y^{-1}]$中的 Laurent 多项式。我们定义

$$p^{\alpha} = \prod_{i=m}^{n} \sigma_y^i(p)^{k_i}.$$

显然， p^{α}是多项式，当且仅当 α属于 $\mathbb{N}[\sigma_y, \sigma_y^{-1}]$。回顾一下，若 $a = cb$ 对 $c \in \mathbb{F}$成立，则 $\mathbb{F}[y]$ 中的两个多项式 a、b互为相伴元。根据定义 11] 和定义 1]，如果存在某个$\ell \in \mathbb{Z}$，使得 a 是 σ_y^{ℓ}（b）的相伴元，那么称两个多项式 a、 $b \in \mathbb{F}[y]$ 是σ_y-等价的。显然，这定义了一种等价关系；通过比较系数，可以轻松判断两个多项式是否σ_y-等价。

设 f 是 $\mathbb{F}$（y）中的一个有理函数。将 f 在 $\mathbb{F}$上的σ_y-正规不可约因子与σ_y-特殊不可约因子分开后，可将其分解为

$$f = f_s f_n, \tag{4}$$

其中 f_s， $f_n \in \mathbb{F}$（y），的分子和分母均为σ_y-特殊的，并且 f_n 在 $\mathbb{F}$ 上的每个不可约因子都是σ_y-正规的。我们将（4）称为σ_y-分裂因式分解，其对象为 f。如果进一步要求 f_n 是σ_y-首一的，则这种因式分解是唯一的。将 $\mathbb{F}$上 f_n 的σ_y-等价不可约因子归在一起，我们进一步将 f 写成如下形式

$$f = f_s p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}, \tag{5}$$

其中 $m \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{Z}[\sigma_y, \sigma_y^{-1}] \setminus \{0\}$, 每个 $p_i \in \mathbb{F}[y]$ 都是 σ_y-首一且在 $\mathbb{F}$上不可约的，并且这些 p_i 两两 σ_y-等价。我们称 (5) 为 σ_y-因式分解，它分解的是 f。

引理 3.4。 设 $r \in \mathbb{F}(y)$ 具有 σ_y-分裂因式分解 $r = r_s r_n$。假设 r_n 是 σ_y-首一的，且 $r = \sigma_y(f)/f$，其中 $f \in \mathbb{F}(y)$是非零有理函数。记 $r_n = a/d$， 其中a、 $d \in \mathbb{F}[y]$， 且 最大公因式$(a, d) = 1$。那么

(i) 在通常移位情形下， r_s 等于 *1*；在 q-移位情形下，它是 q 的幂。

(ii) 存在一一对应关系 φ， 将 a 和 d 在 $\mathbb{F}$ 上的 σ_y-首一不可约因子的多重集对应起来，使得对于所有整除 a的 $p \in \mathbb{F}[y]$， p 和 $\varphi(p)$ 都是 σ_y-等价的。

证明。假设 f具有如下形式的 σ_y-因式分解（5）。由于 $r = \sigma_y$（f）$/f$，我们得到

$$r_s r_n = \frac{\sigma_y(f_s)}{f_s} \prod_{i=1}^{m} p_i^{\beta_i},$$

其中，对所有 $i = 1$, ..., m， $\beta_i = \sigma_y \alpha_i - \alpha_i \neq 0$。注意到， f_s 的分子和分母是σ_y-特殊的，并且所有 p_i 都是σ_y-首一且在 $\mathbb{F}$上不可约。由于 r_n 是σ_y-首一的，根据σ_y-分裂因式分解的唯一性，我们得出

$$r_s = \frac{\sigma_y(f_s)}{f_s} \quad \text{and} \quad r_n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\beta_i}.$$

由引理 2.4立即可得（i）部分。为验证（ii）部分，只需证明每个关于 σ_y 的 β_i 的所有系数之和均为零，这一点又由 β_i的定义显然可得。

□

下文探讨非零有理函数在 $\mathbb{F}(y)$中的两个有理标准形之间的联系。我们指出，通常移位版本已见于 [3, 定理 2]。

引理 3.5. 设(K, S)和(K, S)是非零有理函数 $f \in \mathbb{F}(y)$的两个有理标准形。Let

$$K = K_s K_n \quad and \quad \tilde{K} = \tilde{K}_s \tilde{K}_n$$

分别是 K 和 K 的σ_y-分裂因式分解，其中 K_n、K_n 是σ_y-首一的。则

(i) 在通常移位情形下， K_s/K_s 等于 *1*；在 q-移位情形下，它是 q 的幂。

(ii) 存在一一对应关系 φ，将 K_n 和 K_n 在 $\mathbb{F}$ 上的分母中的σ_y-首一不可约因子的多重集对应起来，使得对于所有整除 K_n 的分母的 $a \in \mathbb{F}[y]$， a 和 $\varphi(a)$ 是σ_y-等价的。

(iii) 存在一一对应关系 ψ，将 K_n 和 K_n 在 $\mathbb{F}$ 上的分子中的σ_y-首一不可约因子的多重集对应起来，使得对于所有整除 K_n 的分子的 $b \in \mathbb{F}[y]$， b 和 $\psi(b)$ 是σ_y-等价的。

证明。由于 (K, S) 和 (K, S) 都是 f 的有理标准形，我们有

$$f = K\frac{\sigma_y(S)}{S} = \tilde{K}\frac{\sigma_y(\tilde{S})}{\tilde{S}}, \quad \text{that is,} \quad \frac{K}{\tilde{K}} = \frac{\sigma_y(\tilde{S}/S)}{\tilde{S}/S}.$$

注意 K/K 具有一个 σ_y -分裂因式分解 $K/K = r_s r_n$，其中 $r_s = K_s/K_s$，K_n/K_n 且 r_n 是σ_y-首一的。这些断言由引理3.4 以及如下观察得出：K_n 与 K_n 均为σ_y-约化的。□

接下来的两个引理建立了有理标准形的若干变换，这些变换保持相伴的σ_y-余项的显著分母。它们的证明将利用下述由 [6,§3.3]中所发展的多项式约化得到的直接推论。

事实 3.6. 设 $K \in \mathbb{F}(y)$ 是分母为 v的σ_y-标准的。则对每个多项式 $a \in \mathbb{F}[y]$，存在 $g \in \mathbb{F}(y)$与 $p \in \mathrm{im}(\phi_K)^\top$，使得 $a = \Delta_K(g) + p/v$。

引理 3.7. 假设σ_y 是 q-移位算子。设(K, S) 是非零有理函数 $f \in \mathbb{F}(y)$ 的一个有理标准形，其中 K 是σ_y-标准的，并设 r 是 S 关于 K的一个σ_y-余数。则对任意 $m \in \mathbb{N}$，该对

$$(\tilde{K}, \tilde{S}) = (q^{-m}K, y^m S)$$

是 f 的有理标准形，且 K 是σ_y-标准的。此外，存在一个 S 关于 K 的σ_y-余数，其显著分母与 r相同。

证明。令 $m \in \mathbb{N}$，并设 $(K, S) = (q^{-m}K, y^m S)$。由于 K 是σ_y-标准的， K也是如此。通过观察以下事实即可得到第一个断言：

$$f = K\frac{\sigma_y(S)}{S} = q^{-m}K\frac{\sigma_y(y^m S)}{y^m S} = \tilde{K}\frac{\sigma_y(\tilde{S})}{\tilde{S}}.$$

由于 r是 S关于 K的σ_y-余数，我们有 $S - r \in \mathrm{im}(\Delta_K)$，因此对于某个 $g \in \mathbb{F}(y)$，有 $S - r = \Delta_K(g)$。由此可得 $S - y^m r = y^m \Delta_K(g) = \Delta_{\tilde{K}}(y^m g) \in \mathrm{im}(\Delta_{\tilde{K}})$。因此，只需证明 $y^m r$ 存在关于 K 的σ_y-余数，且其显著分母等于 r的显著分母。将 r写成 $r = h + p/v$的形式，其中 $h \in \mathbb{F}(y)$ 是一个真分式，其分母 d 是σ_y-正规且与 K强互素， $p \in \mathrm{im}(\phi_K)^\top$，而 v 是 K 的分母。于是$y^m r = y^m h + y^m p/v$. 由于 d 是σ_y-正规的，由引理 2.4 (ii) 可得 $y \nmid d$，因此 d仍是 $y^m h$的分母。通过带余除法，并随后对商部分应用事实 3.6，我们可以找到 $\tilde{g} \in \mathbb{F}[y]$、$\tilde{h} \in \mathbb{F}(y)$ 和 $\tilde{p} \in \mathrm{im}(\phi_{\tilde{K}})^\top$，使得

$$y^m r = \Delta_{\tilde{K}}(\tilde{g}) + \tilde{h} + \frac{\tilde{p}}{v},$$

且 h 是分母为 d 的真分式。因此， $h + \tilde{p}/v$ 是 $y^m r$ （从而也是 S）关于 K 的一个σ_y-余数，其显著分母与 r 相同。□

引理 3.8. 设 (K, S) 为非零有理函数 $f \in \mathbb{F}(y)$ 的一个有理标准形，其中 K 是σ_y-标准的，并设 r 为 S 关于 K 的一个 σ_y-余数。设 $a \in \mathbb{F}[y]$ 为 K 在 $\mathbb{F}$ 上的一个 σ_y-首一不可约因子，并将 $K = u/v$ 写成满足 u、 $v \in \mathbb{F}[y]$ 且 最大公因式 $(u, v) = 1$。

(i) 若 $a \mid v$，则这一对

$$(\tilde{K}, \tilde{S}) = \left(\frac{u}{\tilde{v}\sigma_y(a)}, aS\right) \quad with\ \tilde{v} = \frac{v}{a} \in \mathbb{F}[y]$$

~ ~是 f 的有理标准形，且 K 是σ_y-标准的。此外，存在一个 S 关于 K 的σ_y-余数，其~与 r具有相同的显著分母。

(ii) 若 $a \mid u$，则这一对

$$(\tilde{K}, \tilde{S}) = \left(\frac{\tilde{u}\sigma_y^{-1}(a)}{v}, \sigma_y^{-1}(a)S\right) \quad with\ \tilde{u} = \frac{u}{a} \in \mathbb{F}[y]$$

~ ~是 f 的有理标准形，且 K 是σ_y-标准的。此外，存在一个 S 关于 K 的σ_y-余数，其~与 r具有相同的显著分母。

~ ~证明。 (i) 假设 $a \mid v$，并令 $\tilde{v} = v/a \in \mathbb{F}[y]$。设 $(K, S = u/\tilde{v}\sigma_y\ a \quad aS \qquad K)$ ((( )))。由于是 σ_y- 标准的，且 a 是 v的一个 σ_y- 首一因子，我们可知 K 也为 σ_y- 标准的。因此，注意到下式即可得到第一个断言：

$$f = K\frac{\sigma_y(S)}{S} = \frac{u}{\tilde{v}a}\frac{\sigma_y(S)}{S} = \frac{u}{\tilde{v}\sigma_y(a)}\frac{\sigma_y(aS)}{aS} = \tilde{K}\frac{\sigma_y(\tilde{S})}{\tilde{S}}.$$

由于 r是 S关于 K的σ_y-余数，我们有 $S-r \in \mathrm{im}(\Delta_K)$，因此对某个 $g \in \mathbb{F}(y)$，有 $S-r = \Delta_K(g)$ ~。由此可得 $S - ar = a\Delta_K(g) = \Delta_{\tilde{K}}(ag) \in \mathrm{im}(\Delta_{\tilde{K}})$。因此，只需证明 ar 关于 K 有一个σ_y-余数，其显著分母等于 r的显著分母。将 r 写成 $r = h + p/v$的形式，其中 $h \in \mathbb{F}(y)$是一个真分式，其分母 d 为σ_y-正规，且与 K 互素，并且 $p \in \mathrm{im}(\phi_K)^\top$。于是 $ar = ah + p\,\sigma_y(a)/(\tilde{v}\sigma_y(a))$。由于 d 与 K 和 $a \mid v$强互素，可知最大公因式$(a, d) = 1$，因此 d 仍是 ah的分母。通过带余除法，并随后对商部分应用事实 3.6，我们可以找到 $\tilde{g} \in \mathbb{F}[y]$、 $\tilde{h} \in \mathbb{F}(y)$和 $\tilde{p} \in \mathrm{im}(\phi_{\tilde{K}})^\top$，使得

$$ar = \Delta_{\tilde{K}}(\tilde{g}) + \tilde{h} + \frac{\tilde{p}}{\tilde{v}\sigma_y(a)},$$

~ ~且 h 是分母为 d 的真分式。因此， $h + \tilde{p}/(\tilde{v}\sigma_y($ $a))$ 是 ar （以及~ ~，故 S）关于 K 的一个 σ_y-余数，其显著分母与 r 相同。

(ii) 按照与 (i) 部分类似的思路，可以证明这些断言。 □

现在，我们可以将命题 3.3 推广到核不同的情形。

~ ~**命题 3.9**。 设 (K, S) 和 (K, S) 是非零有理函数 $f \in \mathbb{F}(y)$~的两个有理标准形，其中 K、 K 均为 σ_y-标准。设 r 是 S 关于 K 的一个 σ_y-余数，且 $\tilde{r}$ 是 S 关于 K 的一个 σ_y-~ ~余数。那么， r 和 $\tilde{r}$ 的显著分母是 σ_y-相关的。

~证明。 设 d和 d 分别是 r 和 $\tilde{r}$的显著分母。设

$$K = K_s K_n \quad \text{and} \quad \tilde{K} = \tilde{K}_s \tilde{K}_n$$

~ ~是 σ_y-分裂因式分解 K 和 K，分别满足 K_n， K_n 且为 σ_y-首一。由于~ ~(K, S) 和 (K, S) 都是 f的有理标准形，由引理 3.5 (i)，

$$\frac{\tilde{K}_s}{K_s} = \begin{cases} 1 & \text{in the usual shift case,} \\ q^m \text{ for some } m \in \mathbb{Z} & \text{in the } q\text{-shift case.} \end{cases}$$

注意，在 q-移位情形下，不失一般性，我们可以假设 $m \geq 0$，否则可以交换 K 和 K 的角色。借助引理 3.7，我们发现，在两种情形下，都存在一个 $K, S)$ 的有理标准形 f，使得其核 K 是 σ_y-标准的，并且具有一个 σ_y-分裂因式分解

$$\bar{K} = \bar{K}_s \bar{K}_n, \quad \text{where } \bar{K}_s = K_s \text{ and } \bar{K}_n = \tilde{K}_n,$$

且壳 S 关于 K 的 σ_y-余数具有显著分母 d。

根据引理 3.5 (ii)，存在一一对应 φ，将 σ_y-首一不可约因子的多重集与 K_n 和 K_n 的分母的多重集对应起来，它们在 $\mathbb{F}$ 上满足：对于所有整除 K_n的分母的 $a \in \mathbb{F}[y]$， a 和 $\varphi(a)$ 是 σ_y-等价的。若 $K_n \in \mathbb{F}[y]$，则 K_n也成立，这意味着 K 和 K 具有相同的分母，因为 K_n 和 K_n 都是 σ_y-首一的。现在假设 $K_n \notin \mathbb{F}[y]$，并令 $a \in \mathbb{F}[y]$ 为 K_n 的分母在 $\mathbb{F}$上的一个 σ_y-首一不可约因子。则对于某个 $\ell \in \mathbb{Z}$，有 $\varphi(a) = \sigma_y^\ell(a)$。若 $\ell < 0$，则反复对 $\bar{K}, \bar{S})$ 使用引理 3.8 (i)，可得到 f 的一个新有理标准形 (K', S')，使得 $K' = \bar{K}\sigma_y^\ell(a)/a$ 是 σ_y-标准的，且 S'关于 K' 的 σ_y-余数具有显著分母 d。类似地，在 $\ell > 0$的情况下，我们可以反复对 (K, S) 使用引理 3.8 (i)，得到一个新的有理标准形 (K', S')，满足 $K' = Ka/\sigma_y^\ell(a)$ 是 σ_y-标准的，且 S' 关于 K' 的 σ_y-余数具有显著分母 d。注意，与原来的核 K 和 K相比，新核 K' 与另一个核在 $\mathbb{F}$ 上共有更多一个 σ_y-首一不可约因子（按重数计）。

将上述论证应用于σ_y在 $\mathbb{F}$ 上 K_n的分母的每个3.8 -首一不可约因子，并以同样方式对分子应用引理 3.8 (ii)，最终得到 f 的两个新有理标准形，其中核相等且σ_y-标准，而壳分别具有σ_y-余项，其显著分母为 d 和 d。由命题 3.3 可知， d 与 d 是σ_y-相关的。□

可以证明，算子 σ_x 的作用保持具有 σ_y-标准核的有理标准形，以及壳的相伴元σ_y-余项。

引理 *3.10.* 设 (K, S) 是非零有理函数 $f \in \mathbb{F}(y)$ 的一个有理标准形，其中 K 是σ_y-标准的；设 r 是 S 关于 K 的一个 σ_y-余项，其显著分母为 d。那么对于每个 $i \in \mathbb{N}$，数对 $(\sigma_x^i(K)\ \sigma_x^i(S))$ 是 $\sigma_x^i(f)$ 的一个有理标准形，$\sigma_x^i(K)$ 是 σ_y-标准的，并且$\sigma_x^i(r)$ 是 $\sigma_x^i(S)$ 关于 $\sigma_x^i(K)$ 的一个 σ_y-余项，其显著分母为 $\sigma_x^i(d)$。

证明。 设 $i \in \mathbb{N}$。由于 (K, S) 是 f 的有理标准形，因此我们有 $f = K\sigma_y(S)/S$，从而

$$\sigma_x^i(f) = \sigma_x^i(K)\sigma_x^i\Big(\frac{\sigma_y(S)}{S}\Big) = \sigma_x^i(K)\frac{\sigma_y(\sigma_x^i(S))}{\sigma_x^i(S)}.$$

注意，对于任意 $a, b \in \mathbb{F}[y]$，当且仅当 $\gcd(\sigma_x^i(a)\ \sigma_x^i(b)) = 1$ 时，$\gcd(a, b) = 1$。另请注意，在 q-移位情形下，对于任意 $a \in \mathbb{F}[y]$，$\sigma_x^i(a)\ |_{y=0} = \sigma_x^i(a\ |_{y=0})$。因此，由于 K 的 σ_y-标准性，我们得到 $\sigma_x^i(K)$ 是 σ_y-标准的，进而 $(\sigma_x^i(K)\ \sigma_x^i(S))$ 是 $\sigma_x^i(f)$ 的有理标准形。

由于 r 是关于 K 的 S 的 σ_y-余数，因此 $S - r \in \mathrm{im}(\Delta_K)$，从而对于某个 $g \in \mathbb{F}(y)$，有 $S - r = \Delta_K(g)$。于是，$\sigma_x^i(S) - \sigma_x^i(r) = \sigma_x^i(\Delta_K(g)) = \Delta_{\sigma_x^i(K)}(\sigma_x^i(g)) \in \mathrm{im}(\Delta_{\sigma_x^i(K)})$。接下来只需证明，$\sigma_x^i(r)$ 是关于 $\sigma_x^i(K)$ 的 σ_y-余数，且其显著分母为 $\sigma_x^i(d)$。设 $r = h + p/v$，其中 $h \in \mathbb{F}(y)$ 是真分式，其分母 d 为 σ_y-正规且与 K 强互素，$p \in \mathrm{im}(\phi_K)^\top$，而 v 是 K 的分母。于是 $\sigma_x^i(r) = \sigma_x^i(h) + \sigma_x^i(p)/\sigma_x^i(v)$。显然，$\sigma_x^i(h) \in \mathbb{F}(y)$ 仍是真分式，其分母 $\sigma_x^i(d)$ 为 σ_y-正规且与 $\sigma_x^i(K)$ 强互素。为证明 $\sigma_x^i(p) \in \mathrm{im}(\phi_{\sigma_x^i(K)})^\top$，注意到对于任意 $a \in \mathbb{F}[y]$，$a \in \mathrm{im}(\phi_K)$ 当且仅当 $\sigma_x^i(a) \in \mathrm{im}(\phi_{\sigma_x^i(K)})$。由于 $\sigma_x^i \circ \deg_y = \deg_y \circ \sigma_x^i$，阶梯基中所有元素在自同构 σ_x^i 下的像构成 $\mathrm{im}(\phi_{\sigma_x^i(K)})$ 的一个阶梯基（此处阶梯基是指不同元素的 y 次数互不相同的 $\mathbb{F}$-基）。这意味着 $\mathrm{im}(\phi_K)^\top$ 与 $\mathrm{im}(\phi_{\sigma_x^i(K)})^\top$ 共享同一个阶梯基。因此，由 $p \in \mathrm{im}(\phi_K)^\top$ 可得 $\sigma_x^i(p) \in \mathrm{im}(\phi_{\sigma_x^i(K)})^\top$。据此，$\sigma_x^i(r)$ 是关于 $\sigma_x^i(K)$ 的 $\sigma_x^i(S)$ 的 σ_y-余数，其显著分母为 $\sigma_x^i(d)$。

□

所需关系如下。

命题 3.11。 设 T 是一个(σ_x,σ_y)-超几何项，其 σ_y-商具有一个 σ_y-标准核 K 以及相应的壳 S，并令 $H = T/S$。那么，对于每个 $i \in \mathbb{N}$，都存在一个有理函数 $g_i \in \mathbb{F}(y)$ 以及一个关于 K 的 σ_y-余数 r_i，使得

$$\sigma_x^i(T) = \Delta_y(g_i H) + r_i H. \tag{6}$$

此外，设 r 是 S 关于 K 的一个 σ_y-余数，且 d是其显著分母。那么，对于每个 $i \in \mathbb{N}$， r_i 在 (6) 中的显著分母与 σ_x^i- 相关， $\sigma_x^i(d)$。

证明。 设 $i \in \mathbb{N}$, $f = \sigma_y(T)/T$和 $N = \sigma_x(H)/H$。则 $f, N \in \mathbb{F}(y)$。由于 $T = SH$，我们有 $K = \sigma_y(H)/H$ 以及

$$\sigma_x^i(T) = \sigma_x^i(SH) = \sigma_x^i(S)\sigma_x^{i-1}(N)\cdots\sigma_x(N)NH = \tilde{S}H,$$

其中 $\tilde{S} = \sigma_x^i(S)\sigma_x^{i-1}(N)\ \cdots\sigma_x(N)N$。由此可得

$$\sigma_x^i(f) = \sigma_x^i\Big(\frac{\sigma_y(T)}{T}\Big) = \frac{\sigma_y(\sigma_x^i(T))}{\sigma_x^i(T)} = \frac{\sigma_y(\tilde{S}H)}{\tilde{S}H} = K\frac{\sigma_y(\tilde{S})}{\tilde{S}}.$$

注意到 K是 σ_y-标准的。因此，$(K, \tilde{S})$ 是 $\sigma_x^i(f)$ 的有理标准形。这意味着 $\sigma_x^i(T)$ 可视为一个 (σ_x, σ_y)-超几何项，其 σ_y-商具有一个 σ_y-标准核 K，以及相应的壳 $\tilde{S}$。将定理 2.8 应用于 $\sigma_x^i(T)$, 得到 (6)，其中 $g_i \in \mathbb{F}(y)$，且 r_i是相对于 K 的一个σ_y-余数。因此，第一个断言得证。

为证明第二个断言，我们注意到 (K, S) 是 f 的有理标准形，其中 K 是 σ_y-标准的。由于 r 是 S 相对于 K 的一个 σ_y- 余数，且其显著分母为 d，根据引理 3.10，数对 $(\sigma_x^i(K)\ \sigma_x^i(S))$ 是 $\sigma_x^i(f)$ 的有理标准形， $\sigma_x^i(K)$ 是 σ_y- 标准的，并且 $\sigma_x^i(r)$ 是 $\sigma_x^i(S)$ 相对于 $\sigma_x^i(K)$ 的一个 σ_y-余数，其显著分母为 $\sigma_x^i(d)$。注意， $\sigma_x^i(T) = \tilde{S}H$且 $K = \sigma_y(H)/H$。因此，根据 (6), $\tilde{S} = \Delta_K(g_i) + r_i$，这意味着 r_i是 $\tilde{S}$ 相对于 K 的一个 σ_y-余数。由于 $(K, \tilde{S})$ 也是 $\sigma_x^i(f)$ 的有理标准形，我们由命题 3.9 得出， r_i 的显著分母与 $\sigma_x^i(d)$ 是 σ_y-相关的。 □

4 阶数上下界

沿用命题 3.11 中引入的记号，通过了解每个 r_i在（6）中与初始 σ_y-余数 r 之间的联系，我们在本节中进一步论证：这些 r_i 可以如此选取，使得它们的所有显著分母都整除某个预先指定的先验倍数，只要 r 的显著分母是整数线性的，从而得到望远镜算子的阶的上下界。

我们首先回顾整数线性有理函数的概念。

定义 4.1. 不可约多项式 p （在 $\mathbb{K}[x, y]$ 中）称为整数线性（在 $\mathbb{K}$ 上），如果存在不全为零的 m、$n \in \mathbb{Z}$，使得 p 与 $\sigma_x^m\sigma_y^n(p)$ 互为相伴元。 $\mathbb{K}[x, y]$ 中的多项式称为整数线性（在 $\mathbb{K}$ 上），如果其所有不可约因子均为整数线性的。 $\mathbb{F}(y)$ 中的有理函数称为整数线性（在 $\mathbb{K}$ 上），如果其分母与分子均为整数线性的。

我们参考 [12, 13]以了解判定有理函数整数线性性的算法。名称中的“整数线性”属性由以下命题所说明。

P命题 4.2 ([6, 命题 5.4]). 设 p 是 $\mathbb{K}[x, y]$ 中的不可约多项式 .

(i) 在通常移位情形下， p 是整数线性的，当且仅当存在某个$P(z) \in \mathbb{K}[z]$，使得 $= P(\lambda x + \mu y)$ 为 (x, y)，且 λ和 $\mu \in \mathbb{Z}$ 不同时为零。

(ii) 在 q-移位情形下， p 是整数线性的，当且仅当存在某个$P(z) \in \mathbb{K}[z]$，使得 $= x^{\alpha}y^{\beta}P(x^{\lambda}y^{\mu})$ 为 $p(x,y)$，且 α、β、λ和$\mu \in \mathbb{Z}$满足 λ和μ不同时为零。

设 p 是 $\mathbb{K}[x,y]$中的一个整数线性不可约多项式。根据命题 4.2，存在一对 $(P(z)\ \{\lambda,\mu\}) \in \mathbb{K}[z] \times \mathbb{Z}^2$ 满足

$$p(x,y) = P(\lambda x + \mu y) \quad \big(\text{resp. } p(x,y) = x^{\alpha}y^{\beta}P(x^{\lambda}y^{\mu})\big) \tag{7}$$

在通常移位情形（分别地， q-移位情形）下，其中 α， $\beta \in \mathbb{Z}$ 在给定一对 $(P(z)\ \{\lambda,\mu\})$ 后可唯一确定。若进一步施加以下条件，这样的一对便是唯一的：

(i) $\gcd(\lambda,\mu) = 1$ 和 $\mu \geq 0$;

(ii) $(\lambda,\mu) = (1,0)$ if $p \in \mathbb{K}[x]$ and $(\lambda,\mu) = (0,1)$ if $p \in \mathbb{K}[y]$;

(iii) 在 q-移位情形下， $P(0) \neq 0$，

并将其称为 p 的单变量表示。现在假设 $(P(z)\ \{\lambda,\mu\})$ 是 p 的单变量表示。我们指出，在 q-移位情形下，式 (7) 中出现的 $x^{\alpha}y^{\beta}$ 将是相对于纯字典序 $x \prec y$ 的 p 的尾单项式，因此有 α, $\beta \geq 0$。由于 $\gcd(\lambda,\mu) = 1$ 和 $\mu \geq 0$，存在唯一的整数 s,t 满足约束：若 $\lambda\mu \neq 0$，则 $0 \leq s < \mu$ 且 $|t| < |\lambda|$；若 $\mu = 0$，则 $(s,t) = (1,0)$；若$\lambda = 0$，则 $(s,t) = (0,1)$，使得 $s\lambda + t\mu = 1$。定义算子

$$\delta_{\lambda,\mu} = \sigma_x^s\sigma_y^t.$$

于是 $\delta_{\lambda,\mu}(P(z)) = \sigma_z(P(z))$，其中在通常移位情形下 $z = \lambda x + \mu y$，在 q-移位情形下 $z = x^{\lambda}y^{\mu}$，因此我们可以将整线性多项式视为单变量多项式。此外，后文中我们会频繁用到以下平凡关系

$$\delta_{\lambda,\mu}^{\lambda}(p) = c_1\sigma_x(p) \quad \text{and} \quad \delta_{\lambda,\mu}^{\mu}(p) = c_2\sigma_y(p) \quad \text{for some } c_1,c_2 \in \mathbb{K}.$$

对于 Laurent 多项式 $\alpha = \sum_{i=m}^{n} k_i\delta_{\lambda,\mu}^i$，其中 $\mathbb{Z}[\delta_{\lambda,\mu},\delta_{\lambda,\mu}^{-1}]$，我们类似地定义

$$p^{\alpha} = \prod_{i=m}^{n} \delta_{\lambda,\mu}^i(p)^{k_i}.$$

现在我们将 σ_y-等价的概念扩展到双变量情形。设 a、b 是 $\mathbb{K}[x,y]$中的两个不可约多项式。若对于某些整数 m、n， a 是 $\sigma_x^m\sigma_y^n(b)$ 的相伴元，则称 a 与 b 是 (σ_x,σ_y)-等价的。这仍然是一种等价关系。进一步假设 a和 b都是整线性多项式，其单变量表示分别为 $(P(z)\ \{\lambda,\mu\})$ 和 $(Q(z)\ \{\nu,\omega\})$。不难看出， a、b是 (σ_x,σ_y)-等价的，当且仅当 $(\lambda,\mu) = (\nu,\omega)$ 且 $P(z)\ Q(z)$ 是 σ_z-等价的；在这种情况下，对于某个整数 ℓ， a 是 $\delta_{\lambda,\mu}^{\ell}(b)$ 的相伴元。

设 d 是 $\mathbb{F}[y]$ 中的一个 σ_y-正规整线性多项式。将属于同一个（σ_x, σ_y）-等价类的因子归在一起，我们可以将 d 分解为

$$d = c\,p_1^{\alpha_1}\cdots p_m^{\alpha_m}, \tag{8}$$

其中 $c \in \mathbb{F}$， $m \in \mathbb{N}$，每个 $p_i \in \mathbb{K}[x,y]$ 都是 σ_y-正规、整线性、不可约的，并且具有单变量表示（$P_i(z)\ \{\lambda_i,\mu_i\}$），其中 $\mu_i > 0$ 和 $P_i(z)$ 都是 σ_z-首一的，并且每个 $\alpha_i \in \mathbb{N}[\delta_{\lambda_i,\mu_i},\delta_{\lambda_i,\mu_i}^{-1}] \setminus \{0\}$。此外，这些 p_i 两两（σ_x, σ_y）-不等价。与单变量情形类似，分解（8）并不唯一；然而，分量 $p_i^{\alpha_i}$由 d唯一确定，因为 $\mathbb{F}[y]$ 是一个唯一分解整环。

回顾一下，对于两个整数 λ， μ，且满足 $\mu \neq 0$， λ 模 μ 的余数以及 λ 除以 μ 的商分别定义为满足 $\lambda = \mu j + i$ 和 $0 \leq i < |\mu|$ 的唯一整数 i 和 j。为方便起见，我们有时将余数 i 记作（λ 模 μ）。

为了描述σ_y-余项的显著分母的一个倍式，下面我们引入若干引理。第一个引理是 [14, 引理 5.3] 的推广版本。

引理 4.3. 设 $K \in \mathbb{F}(y)$ 为 σ_y-约化的，并设 $p \in \mathbb{F}(y)$ 为 σ_y-正规且在 $\mathbb{F}$ 上不可约。则存在整数 m，使得 $\sigma_y^m(p)$ 与 K强互素。

证明。设 u和 v 分别是 K的分子和分母。以下可分为三种情形。

情形 *1*。对所有整数 ℓ，$\sigma_y^\ell(p) \nmid u$且 $\sigma_y^\ell(p) \nmid v$。根据定义，p与 K强互素。令 $m = 0$，即可得到引理。

情形 *2*。对某个整数 k，$\sigma_y^k(p) \mid u$。由于 K是σ_y-约化的，对每个整数 ℓ，最大公因式 $\gcd(\sigma_y^\ell(p),\ v) = 1$。令 $m = \max\{i \in \mathbb{N} \mid \sigma_y^i(p) \mid u\} + 1$。由于 p是σ_y-正规化的，这是一个有限整数。根据定义，$\sigma_y^m(p)$与 K强互素。

情形 *3*。对某个整数 k，$\sigma_y^k(p) \mid v$。由于 K是σ_y-约化的，对每个整数 ℓ，最大公因式 $\gcd(\sigma_y^\ell(p),\ u) = 1$。令 $m = \min\{i \in \mathbb{N} \mid \sigma_y^i(p) \mid v\} - 1$。由于 p是σ_y-正规化的，这是一个有限整数。根据定义，$\sigma_y^m(p)$与 K强互素。 □

下一个引理表明，将σ_y-正规、整数线性且不可约的多项式在 $\mathbb{K}[x, y]$ 中视为单变量多项式并进行移位后，只会产生有限多个σ_y-等价类。

引理 4.4。设 $p \in \mathbb{K}[x, y]$ 是σ_y-正规、整数线性、不可约的，且具有单变量表述 $(P(z)\ \{\lambda, \mu\})$，其中 $\mu > 0$。那么，多项式 μ

$$p,\ p^{\delta_{\lambda,\mu}},\ \ldots,\ p^{\delta_{\lambda,\mu}^{\mu-1}}$$

两两σ_y-不等价。此外，对于所有 $\ell \in \mathbb{Z}$，$p^{\delta_{\lambda,\ \mu}^\ell}$ 与 $p^{\delta_\lambda^{(\ell \bmod \mu),\ \mu}}$ 是σ_y-等价的。

证明。若 $\mu = 1$，则无需证明。现在假设 $\mu > 1$。于是 $p \notin \mathbb{K}[x] \cup \mathbb{K}[y]$。要验证第一个断言，只需证明 p 与所有 $p^{\delta_\lambda^i}$（$_\mu$，其中 $i = 1$，...，$\mu-1$）均σ_y-不等价。假设存在整数 i，满足 $1 \le i \le \mu-1$，使得 p 和 $p^{\delta_\lambda^i,\ \mu}$是$\sigma_y$-等价的。那么，对某个整数 ℓ，p 是 $\sigma_y^\ell(p^{\delta_\lambda^i,\mu})$ 的相伴元。由于 $(P(z)\ \{\lambda, \mu\})$ 是 p的单变量表示，因此可得 $P(z) \mid \sigma_z^{i+\mu\ell}(P(z))$。注意，由于$1 \le i \le \mu - 1$，$i + \mu\ell \neq 0$。因此，$P(z) \in \mathbb{K}[z]$ 是 σ_z-特殊的。根据引理 2.4，在通常移位情形下，$P(z) \in \mathbb{K}$；或者在 q-移位情形下，对于某个整数 k，$P(z)/z^k \in \mathbb{K}$。注意，在 q-移位情形下，$P(0) \neq 0$。因此，两种情形下都有 $P(z) \in \mathbb{K}$。于是，在通常移位情形下有 $p \in \mathbb{K}$；或者在 q-移位情形下，对于 $c \in \mathbb{F}$ 和 α，有 $p = c\,x^\alpha y^\beta$，这将导致矛盾，因为 p 是不可约的，而 $p \in \mathbb{K}[x] \cup \mathbb{K}[y]$。因此，第一个断言成立。

令 $\ell \in \mathbb{Z}$，并令 i，j 分别为 ℓ 模 μ 的余数和 ℓ 除以 μ 的商。于是 $\ell = \mu j + i$ 和 $0 \le i \le \mu - 1$。由于 $(P(z)\ \{\lambda, \mu\})$ 是 p的单变量表示，我们可知 $p^{\delta_{\lambda,\ \mu}^\ell}$ 是 $\sigma_y^j(p^{\delta_{\lambda,\ \mu}^i})$ 的相伴元，这意味着 $p^{\delta_{\lambda,\ \mu}^\ell}$ 与 $p^{\delta_{\lambda,\ \mu}^i}$模 σ_y 等价。 □

下面我们推导一个“局部”倍式，它是后续命题所述一般情形的重要组成部分。

引理 4.5. 设 $K \in \mathbb{F}(y)$ 是σ_y-约化的，$p \in \mathbb{K}[x, y]$ 是整数线性、不可约的，且其单变量表示为 $(P(z)\ \{\lambda, \mu\})$，其中 $\mu > 0$；设 $\alpha \in \mathbb{N}[\delta_{\lambda,\mu}, \delta_{\lambda,\mu}^{-1}] \setminus \{0\}$ 的关于 $\delta_{\lambda,\ \mu}$ 的最大系数为 k。假设 p^α 是σ_y-正规且与 K 强互素。那么存在 p^α 的一个倍式 $D \in \mathbb{K}[x, y]$，它是σ_y-正规的，与 K 强互素，并且与多项式σ_y 相关

$$p^{k(1-\delta_{\lambda,\mu}^\mu)/(1-\delta_{\lambda,\mu})}.$$

证明。令 Λ 为 α的支撑集，也就是具有如下性质的指标 $i \in \mathbb{Z}$ 的集合：$\delta_{\lambda,\mu}^i$ 在 α 中的系数非零，并令

$$\bar{\Lambda} = \{0, 1, \ldots, \mu - 1\} \setminus \{(i \mod \mu) \mid i \in \Lambda\}.$$

由于 p^α 是 σ_y-正规，因此 $p^{\delta^i_{\lambda,\mu}}$ 对任意 $i \in \mathbb{Z}$也都是如此。对于每个 $j \in \bar{\Lambda}$，根据引理 4.3，存在一个整数 ℓ_j，使得 $\sigma_y^{\ell_j}(p^{\delta^j_{\lambda,\mu}})$（因而 $p^{\delta^{j+\mu\ell_j}_{\lambda,\mu}}$）与 K强互素。由于 $\alpha \in \mathbb{N}[\delta_{\lambda,\mu}, \delta^{-1}_{\lambda,\mu}] \setminus \{0\}$，我们有 $k > 0$。定义

$$\beta = k\Big(\sum_{i\in\Lambda} \delta^i_{\lambda,\mu} + \sum_{j\in\bar{\Lambda}} \delta^{j+\mu\ell_j}_{\lambda,\mu}\Big)$$

以及 $D = p^\beta$。显然，$\beta \in \mathbb{N}[\delta_{\lambda,\mu}, \delta^{-1}_{\lambda,\mu}] \setminus \{0\}$，$D \in \mathbb{K}[x,y]$ 以及 $p^\alpha \mid D$。由于 p^α 和 $p^{\delta^{j+\mu\ell_j}_{\lambda,\mu}}$ 与互素于 K，所以 D也是如此。由σ_y-正规性可知 p^α，根据引理4.4可得，$\Lambda \cup \bar{\Lambda}$ 恰有 μ 个元素，且不同元素模 μ的余数各不相同。再次根据引理4.4，存在一个一一对应 φ，对应于这两个集合之间

$$\Big\{p^{\delta^i_{\lambda,\mu}}\Big\}_{i\in\Lambda} \cup \Big\{p^{\delta^{j+\mu\ell_j}_{\lambda,\mu}}\Big\}_{j\in\bar{\Lambda}} \quad \text{and} \quad \Big\{p, p^{\delta_{\lambda,\mu}}, \ldots, p^{\delta^{\mu-1}_{\lambda,\mu}}\Big\},$$

使得对于前一个集合中的所有 a，a 和 $\varphi(a)$ 是σ_y-等价的。由 μ多项式 p、$p^{\delta_{\lambda,\mu}}$、……、$p^{\delta^{\mu-1}_{\lambda,\mu}}$ 的σ_y-非等价性可知，D 和 $p^{k(1-\delta^\mu_{\lambda,\mu})/(1-\delta_{\lambda,\mu})}$ 都是σ_y-正规的，因此它们是σ_y-相关的。

□

以下引理可从 [6, 定理 41]的证明中提取。

引理 4.6。设 $K \in \mathbb{F}(y)$ 为 σ_y-标准，设 $d \in \mathbb{F}[y]$ 为 σ_y-正规且与 K强互素，并设 s 为关于 K的一个 σ_y-余数。那么存在一个关于 K的σ_y-余数 t，使得 $s - t \in \mathrm{im}(\Delta_K)$，且 t的显著分母与 d互素。

现在，我们可以得到本节开头承诺的先验倍数了。

命题 4.7。设 T 为一个 (σ_x, σ_y)-超几何项，其 σ_y-商具有一个 σ_y-标准核 K 及相应的壳 S；再设 r 为关于 S 的 σ_y-余数，且其显著分母 d 是整数线性的，并具有如下因式分解 (8)。对所有 $j = 1, \ldots, m$，令 k_j 为 α_j 关于 $\delta_{\lambda,\mu}$的最大系数，并定义

$$D_0 = \prod_{j=1}^{m} p_j^{k_j(1-\delta^{\mu_j}_{\lambda_j,\mu_j})/(1-\delta_{\lambda_j,\mu_j})}.$$

那么，$D_0 \in \mathbb{K}[x,y]$ 是σ_y-正规形式，并且存在 d 的一个倍式 $D \in \mathbb{F}[y]$，它是σ_y-正规形式，与 K强互素，且与 D_0 满足σ_y-相关，使得对每个 $i \in \mathbb{N}$，式 *(6)* 均成立，其中$H = T/S$、$g_i \in \mathbb{F}(y)$，而 r_i 是关于 K 的一个σ_y-余数，其显著分母 d_i整除 D。特别地，d_0 和 d 互为相伴元。

证明。由引理 4.4 可知，D_0 的σ_y-正规性显而易见，且p_j彼此(σ_x,σ_y)-不等价。由于 d 是σ_y-正规形式，且与 K强互素，根据命题 2.3 (i)，$p_j^{\alpha_j}$ 也具有这些性质。对所有 $j = 1$，……，m，将引理 4.5 应用于式 (8) 中的 $p_j^{\alpha_j}$，可得 $p_j^{\alpha_j}$的一个倍式 $D_j \in \mathbb{K}[x,y]$，它是σ_y-正规形式，与 K强互素，且与多项式满足σ_y-相关

$$p_j^{k_j(1-\delta^{\mu_j}_{\lambda_j,\mu_j})/(1-\delta_{\lambda_j,\mu_j})}.$$

令 $D = D_1 \cdots D_m$。则 $D \in \mathbb{K}[x,y]$。由于 p_j两两（σ_x, σ_y）不等价，因此 D_j互素，且也与 σ_y 互素。因此，$d \mid D$ 在 $\mathbb{F}[y]$ 和 D 中再次是σ_y-正规，与 K强互素，并且与 D_0存在 σ_y 关系。

令 $i \in \mathbb{N}$。根据命题3.11，存在一个有理函数 $g_i \in \mathbb{F}(y)$以及一个σ_y-余数r_i，相对于 K，使得（6）成立。不失一般性，我们还可以假设显著分母 d_i（属于 r_i）与σ_y-互素，这是因为否则根据引理4.6

应用于 D 和 r_i后，我们总能将（ r_i 式（6）中的 d_i 替换为具有所需性质的一个。我们声称，这样的 D 实际上在 $\mathbb{F}[y]$中整除 $d_i \in \mathbb{F}$。若 $d_i \in \mathbb{F}$，该结论显然成立。

现在假设 $d_i \notin \mathbb{F}$，并令 $a_i \in \mathbb{F}[y]$ 为 d_i 在 $\mathbb{F}$上的一个不可约因子。由于 d_i 与σ_y关于 $\sigma_x^i(d)$ 相关（见命题 3.11），存在 $a \in \mathbb{F}[y]$ 的一个不可约因子 d，其在 $\mathbb{F}$上满足 a_i 与σ_y关于 $\sigma_x^i(a)$ 等价。由因式分解（8）可得

$$a \text{ is an associate of } p_j^{\delta^{\ell}_{\lambda_j,\mu_j}} \quad \text{and thus} \quad \sigma_x^i(a) \text{ is an associate of } p_j^{\delta^{\ell+\lambda_j i}_{\lambda_j,\mu_j}},$$

其中 j，$\ell \in \mathbb{Z}$ 且 $1 \le j \le m$。这意味着 a_i 与 $p_j^{\ell+\lambda_j i}$关于 σ_y等价 δ_{λ_j,μ_j}，根据引理 4.4，它又与 $\mathbb{F}$上的 D_0 的一个不可约因子关于 σ_y等价。由于 D_0 与 D 关于 σ_y相关，存在 $\mathbb{F}$ 上的 D 的一个不可约因子与 a_i关于 σ_y等价。由于 d_i 与 D关于σ_y互素，我们得出 $a_i \mid D$。由 a_i的任意性可知，$d_i \mid D$。特别地，$d_0 \mid D$。由于 d_0 与 d关于 σ_y相关，$d \mid D$，且 D 是 σ_y-正规元，因此可知 d_0与 d 仅相差一个属于 $\mathbb{F}$的非零元素，也就是说，它们互为相伴元。□

我们在下一个定理中给出望远镜算子阶数的上界和下界。注意，在通常移位情形中，以下断言 (ii) 和 (iii) 分别与定理 5.5 和 5.6 [14], 一致。

定理 4.8。采用命题 4.7中引入的记号，以下断言成立：

(i) A nonzero operator $L = \sum_{i=0}^{\rho} \ell_i S_x^i \in \mathbb{F}[S_x]$ *is a telescoper for* T *if and only if* $\sum_{i=0}^{\rho} \ell_i r_i = 0$.

(ii) 存在关于 T 的望远镜算子，其最小阶数不超过 $\dim(\mathrm{im}(\phi_K)^{\top}) + \deg_y(D_0)$；将 $K = u/v$ 写作 u、$v \in \mathbb{F}[y]$ 和 $\gcd(u, v) = 1$，可将其化为

$$\max\{\deg_y(u), \deg_y(v)\} - [\![0 \le \deg_y(u - v) \le \deg_y(u) - 1]\!] + \sum_{j=1}^{m} k_j \mu_j \deg_z(P_j(z))$$

在通常移位情形中，或

$$\max\{\deg_y(u), \deg_y(v)\} + [\![K \text{ is a nonpositive power of } q]\!] + \sum_{j=1}^{m} k_j \mu_j^2 \deg_z(P_j(z))$$

在 q-移位情形中。

(iii) 假设 r 非零。对于所有 $i = 1, \ldots, m$，令 Λ_i 为 α_i的支撑集，并写作 $\alpha_i = \sum_{j \in \Lambda_i} k_{ij} \delta^j_{\lambda_i,\mu_i}$，其中 $k_{ij} \in \mathbb{Z}^+$。那么，T的望远镜算子的阶至少为

$$\max_{1 \le i \le m,\, j \in \Lambda_i} \min\{\rho \in \mathbb{Z}^+ \mid k_{ij} \le k_{i\ell} \text{ and } j \equiv \ell + \lambda_i \rho \mod \mu_i \text{ for some } \ell \in \Lambda_i\}.$$

证明。(i) 令 $L = \sum_{i=0}^{\rho} \ell_i S_x^i$，其中 $\rho \in \mathbb{N}$且 $\ell_0, \ldots, \ell_\rho \in \mathbb{F}$，并非全为零。利用6)，取 $i = 0, \ldots, \rho$，得到

$$L(T) = \Delta_y\Big(\sum_{i=0}^{\rho} \ell_i g_i H\Big) + \Big(\sum_{i=0}^{\rho} \ell_i r_i\Big) H. \tag{9}$$

对于 $i = 0, \ldots, \rho$，由于 d_i整除 D，我们可以将 r_i写成如下形式

$$r_i = \frac{a_i}{D} + \frac{p_i}{v}, \tag{10}$$

其中 $a_i \in \mathbb{F}[y]$ 满足 $\deg_y(a_i) < \deg_y(D)$，$p_i \in \mathrm{im}(\phi_K)^{\top}$，且 v 是 K的分母。于是

$$\sum_{i=0}^{\rho} \ell_i r_i = \frac{\sum_{i=0}^{\rho} \ell_i a_i}{D} + \frac{\sum_{i=0}^{\rho} \ell_i p_i}{v}.$$

注意，对所有 $i=0,\ldots,\rho$，都有 $\deg_y(a_i) < \deg_y(D)$。因此 $\deg_y(\sum_{i=0}^{\rho}\ell_i a_i) < \deg_y(D)$。由于 D 是σ_y-正规且与 K强互素，我们可知 $\sum_{i=0}^{\rho}\ell_i a_i/D$ 是关于 $\mathbb{F}(y)$的真分式有理函数，其分母是σ_y-正规且与 K强互素。因为 $\sum_{i=0}^{\rho}\ell_i p_i \in \mathsf{im}(\phi_K)^{\top}$，根据定义，$\sum_{i=0}^{\rho}\ell_i r_i$ 又是关于 K的σ_y-余数。由定理 2.8以及（9）可知，L 是 T 的望远镜算子，当且仅当 $\sum_{i=0}^{\rho}\ell_i r_i = 0$。

(ii) 设 $\rho \in \mathbb{N}$，并对 $i=0,\ldots,\rho$，将 r_i 写成形式 (10)。由于 D 与 K强互素，我们有最大公因式$(D,v)=1$。注意到每个 p_i 中非零项的总数不超过 $\dim(\mathsf{im}(\phi_K)^{\top})$，因为 $p_i \in \mathsf{im}(\phi_K)^{\top}$。因此，每当 $\rho \geq \deg_y(D) + \dim(\mathsf{im}(\phi_K)^{\top})$ 时，$r_0,\ldots,r_\rho$在 $\mathbb{F}$上线性相关。由第 (i) 部分，T 具有望远镜算子，且其最小阶数不超过 $\deg_y(D) + \dim(\mathsf{im}(\phi_K)^{\top})$，其精确公式由 [6, 命题 3.12] 以及如下观察得到

$$\deg_y(D) = \deg_y(D_0) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} k_j \mu_j \deg_z(P_j(z)) & \text{in the usual shift case,} \\ \sum_{j=1}^{m} k_j \mu_j^2 \deg_z(P_j(z)) & \text{in the } q\text{-shift case.} \end{cases}$$

(iii) 由于 $r \neq 0$，项 T不是σ_y-可求和的，因此其望远镜算子的阶至少为一。设 $L=\sum_{i=0}^{\rho}\ell_i S_x^i$ 是 T的一个最小阶数望远镜算子，其中 $\rho \in \mathbb{Z}^+$ 且 $\ell_0,\ldots,\ell_\rho \in \mathbb{F}$不全为零。则由第 (i) 部分得 $\sum_{i=0}^{\rho}\ell_i r_i = 0$。对 $i=0,\ldots,\rho$，记 $r_i = h_i + p_i/v$，其中 $h_i \in \mathbb{F}(y)$ 是以 d_i为分母的真分式，$p_i \in \mathsf{im}(\phi_K)^{\top}$，且 v 是 K 的分母。由于诸 d_i 与 K强互素，它们都与 v互素。由 $\sum_{i=0}^{\rho}\ell_i r_i = 0$ 可得

$$\ell_0 h_0 + \ell_1 h_1 + \cdots + \ell_\rho h_\rho = 0.$$

根据部分分式分解，对于 $\mathbb{F}$ 上 d_0 的任意不可约因子 $a \in \mathbb{F}[y]$，若其重数为 $k>0$，则存在一个整数 n，使得 $1 \leq n \leq \rho$，从而 a^k 也是 d_n 的因子。于是，由于根据命题 3.11，d_n 与 $\sigma_x^n(d)$ σ_y相关，因此 a 与 $\sigma_x^n(d)$ 在 $\mathbb{F}$ 上重数至少为 k 的某个不可约因子 $\tilde{a} \in \mathbb{F}[y]$ σ_y等价。注意，d_0 和 d 是相伴元，且 d 有因式分解 (8)，其中 p_i 两两σ_y不等价。因此，对于所有 $i=1$、.....、m 和 $j \in \Lambda_i$，存在 $n_{ij} \in \mathbb{N}$，使得 $1 \leq n_{ij} \leq \rho$ 且 $\ell \in \Lambda_i$，

$k_{ij} \leq k_{i\ell}$ 和 $p_i^{\delta_{\lambda_i}^{j}}$ μ_i 与 $p_i^{\delta_{\lambda_i}^{\ell+\lambda_i n_{ij}}}$ σ_y等价，或者等价地，$j \equiv \ell + \lambda_i n_{ij}$ 模 μ_i.

令 n_{ij} 为具有此性质的最小项。由于项 T 不存在阶小于 $\max_{1\leq i\leq m,\, j\in\Lambda_i}\{n_{ij}\}$ 的望远镜算子，故断言成立。 □

例 4.9。假设 σ_x 和 σ_y 都是通常移位算子。令 $T(x,y)=\binom{x+2y}{y}$。那么 T 是一个 (σ_x,σ_y)-超几何项，其 σ_y-商具有一个 σ_y-标准核 $K=(x+2y+1)(x+2y+2)/((y+1)(x+y+1))$，以及相应的壳 $S=1$。此外，$r=(-x^2+x+2y+2)/(3v)$ 是 S 关于 K 的一个 σ_y-余数，其中 $v=(y+1)(x+y+1)$。由定理 4.8，T 的望远镜算子的最小阶数不超过 $\dim(\mathsf{im}(\phi_K)^{\top})=2$，而这恰好是 T 的望远镜算子的实际最小阶数。

例 4.10. 假设 σ_x 和 σ_y 都是 q-移位算子。设 $T(n,k)=\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$。那么，$T$ 是一个 (σ_x,σ_y)-超几何项，其 $\sigma_x(T(n,k)) = T(n+1,k)$、$\sigma_y(T(n,k)) = T(n,k+1)$，且 $q^n=x$, $q^k=y$；其 σ_y-商具有一个 σ_y-标准核 $K=(x-y)/(y(qy-1))$，以及相应的壳 $S=1$。此外，$r=(x-y)/v$ 是 S 关于 K的一个 σ_y-余数，其中 $v=y(qy-1)$。根据定理 4.8，T 的望远镜算子的最小阶数不超过 $\dim(\mathsf{im}(\phi_K)^{\top})=2$，这恰好是 T的望远镜算子的实际最小阶数。

5 阶数界的比较

关于望远镜算子的阶数界已有大量研究 [17] ，其中推导出了通常移位情形和 q-移位情形下的上界；而在 [2] 中则得到了通常移位情形下的一个下界。我们尚未发现其他关于q-移位情形下界的研究。由于 [14] 已经对通常移位情形的阶数界进行了比较，因此本节将注意力限制在 q-移位情形，并将我们的阶数上界与 Apagodu 和 Zeilberger 得到的上界进行比较 [17]。

在本节中，设 n, k 是两个不同的离散变量。那么 q^n, q^k 在 $\mathbb{K}$ 上超越，因为 $q \in \mathbb{K}$ 既不是零，也不是单位根。这意味着， q^n, q^k 上的所有有理函数在 $\mathbb{K}$ 上构成一个定义良好的域，记作 $\mathbb{K}(q^n, q^k)$。在前几节中取 $x = q^n$ 和 $y = q^k$ ，所有结论仍然成立。现在考虑 $\mathbb{K}(q^n, q^k)$ 上如下形式的一个 q-真分式超几何项

$$T(n,k) = p\,\xi^k q^{\gamma k(k-1)/2} \prod_{i=1}^{m} \frac{(q;q)_{\alpha_i n+\alpha_i' k+\alpha_i''}(q;q)_{\beta_i n-\beta_i' k+\beta_i''}}{(q;q)_{\mu_i n+\mu_i' k+\mu_i''}(q;q)_{\nu_i n-\nu_i' k+\nu_i''}}, \tag{11}$$

其中 $p \in \mathbb{K}[q^n, q^{-n}, q^k, q^{-k}]$, $\xi \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ 不是 q 的整数次幂， $\gamma, \alpha_i'', \beta_i'', \mu_i'', \nu_i'' \in \mathbb{Z}$, $m, \alpha_i, \alpha_i', \beta_i, \beta_i', \mu_i, \mu_i', \nu_i, \nu_i' \in \mathbb{N}$。注意，隐含假设四种类型的 q-Pochhammer 符号数量相同，并不会失去一般性，因为我们总可以添加更多项 $(q;q)_{0n\pm 0k+0}$ 来使其平衡。进一步假设不存在满足 $1 \le i, j \le m$ 的整数 i, j，使得

$$\begin{aligned} &\{\alpha_i = \mu_j, \quad \alpha_i' = \mu_j', \quad \alpha_i'' - \mu_j'' \in \mathbb{N}\} \\ \text{or} \quad &\{\beta_i = \nu_j, \quad \beta_i' = \nu_j', \quad \beta_i'' - \nu_j'' \in \mathbb{N}\}, \end{aligned}$$

这保证了 Laurent 多项式 p在（11）中尽可能“大”。然后 Apagodu 和 Zeilberger 在 [17, q-定理] 中指出， T 的望远镜算子的最小阶数的上界为

$$B_{AZ} = \max\Big\{\gamma + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i'^2, \sum_{i=1}^{m} \mu_i'^2\Big\} + \max\Big\{-\gamma + \sum_{i=1}^{m} \nu_i'^2, \sum_{i=1}^{m} \beta_i'^2\Big\}, \tag{12}$$

该界在一般情形下是精确的。接下来我们证明，上面给出的数 B_{AZ} 至少是将定理 4.8 （ii）应用于 T所得到的上界。必要时对（11）中的项重新排序，令 Λ 为指标 $i \in \mathbb{N}$ 的最大集合，这些指标具有 $1 \le i \le m$ 且满足

$$\begin{aligned} &\{\alpha_i = \mu_i, \quad \alpha_i' = \mu_i', \quad \mu_i'' - \alpha_i'' \in \mathbb{N}\} \\ \text{or} \quad &\{\beta_i = \nu_i, \quad \beta_i' = \nu_i', \quad \nu_i'' - \beta_i'' \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

于是 T 可改写为

$$T(n,k) = f\xi^k q^{\gamma k(k-1)/2} \prod_{i=1,\, i\notin\Lambda}^{m} \frac{(q;q)_{\alpha_i n+\alpha_i' k+\alpha_i''}(q;q)_{\beta_i n-\beta_i' k+\beta_i''}}{(q;q)_{\mu_i n+\mu_i' k+\mu_i''}(q;q)_{\nu_i n-\nu_i' k+\nu_i''}},$$

其中 $f \in \mathbb{K}(q^n, q^k)$。通过直接计算，我们确认 $T(n, k+1)/T(n, k)$ 具有如下形式的有理标准形

$$\Big(\xi q^{\gamma k} \prod_{i=1,\, i\notin\Lambda}^{m} \frac{(q^{\alpha_i n+\alpha_i' k+\alpha_i''+1};q)_{\alpha_i'}(q^{\nu_i n-\nu_i' k+\nu_i''-\nu_i'+1};q)_{\nu_i'}}{(q^{\mu_i n+\mu_i' k+\mu_i''+1};q)_{\mu_i'}(q^{\beta_i n-\beta_i' k+\beta_i''-\beta_i'+1};q)_{\beta_i'}},\ f\Big),$$

其中 $(a;q)_m = \prod_{i=0}^{m-1}(1-aq^i)$，对于 $a \in \mathbb{K}(q^n, q^k)$ 以及 $m \in \mathbb{N}$ 满足 $(a;q)_0 = 1$。注意，根据引理 3.5，非零有理函数 $\mathbb{K}(q^n, q^k)$ 的所有核的分子和分母在 q^k中的次数都相同。因此，采用

定理 4.8中引入的记号，我们得到

$$\deg_{q^k}(u) = \sum_{i=1,\, i\notin\Lambda}^{m} (\alpha_i'^2 + \nu_i'^2) + \max\Big\{ \sum_{i=1,\, i\notin\Lambda}^{m} (\beta_i'^2 - \nu_i'^2) + \gamma, 0 \Big\}$$

$$\text{and} \quad \deg_{q^k}(v) = \sum_{i=1,\, i\notin\Lambda}^{m} (\mu_i'^2 + \beta_i'^2) + \max\Big\{ - \sum_{i=1,\, i\notin\Lambda}^{m} (\beta_i'^2 - \nu_i'^2) - \gamma, 0 \Big\}.$$

此外，注意到 ξ 不是 q 的整数次幂，并且壳 f 的分母由整系数线性不可约因子组成，这些因子分别整除（$1-q^{\mu_i n+\mu_i' k+\ell}$）或 $q^{\nu_i' k}$（$1-q^{\nu_i n-\nu_i' k+\ell}$），其中 $i\in\Lambda$ 且 $\ell\in\mathbb{Z}$。因此，我们得出结论，定理4.8（ii）给出的界至多为

$$\max\{\deg_{q^k}(u), \deg_{q^k}(v)\} + \sum_{i\in\Lambda} \Big(\frac{\mu_i'^2}{\gcd(\mu_i, \mu_i')} + \frac{\nu_i'^2}{\gcd(\nu_i, \nu_i')} \Big),$$

这不超过 B_{AZ}，因为$\alpha_i' = \mu_i'$ 且$\beta_i' = \nu_i'$ 对所有 $i\in\Lambda$都成立。在一般情况下，定理4.8（ii）中的上界与 B_{AZ}一样好。不过，在某些情况下，我们的界可能会紧得多。

例 5.1。 考虑一个形式如下的 q-真分式超几何项

$$T = \frac{2^{k+1}}{1-q^{n+\alpha k+\alpha}} - \frac{2^k}{1-q^{n+\alpha k}} + \frac{2^k}{(1-q^{n+\beta k})(1-q^k)},$$

其中 α，β 是正整数。需要说明的是，上述分解形式仅为便于阅读。将 T 改写为（11）的形式可得

$$T = p\, 2^k \frac{(q;q)_{n+\alpha k-1}(q;q)_{n+\beta k-1}(q;q)_{k-1}}{(q;q)_{n+\alpha k+\alpha}(q;q)_{n+\beta k}(q;q)_k} \quad \textit{for some } p\in\mathbb{Q}(q)[q^n, q^k].$$

根据 (12)，我们有 $B_{AZ} = \alpha^2+\beta^2+1$。然而，定理 *4.8* ***(ii)*** 给出的上界等于 β^2+1，这恰好是 T 的望远镜算子的最小阶数。

注 5.2。 结合 *[10,* 定理 ***4.6****]*，中所述的界 *[17,* q-定理*]*也可应用于非q真分式超几何项。另一方面，只要望远镜算子存在，定理 *4.8* 就适用于任意 q-超几何项。

致谢

我谨向 Shaoshi Chen 致以谢意，感谢他提出的建设性建议并给予支持。我还要感谢 Hao Du、Yiman Gao 以及匿名审稿人对本文初稿提出的宝贵意见。本研究部分ได้รับ国家自然科学基金项目（编号：12101105）和中国福建省自然科学基金项目（编号：2024J01271）的资助。

参考文献

[1] Sergei A. Abramov。Zeilberger 算法何时能够成功？*Adv. in Appl. Math.*，30(3):424–441，2003年。[2] Sergei A. Abramov 和 Ha Q. Le。创造性求和方法所生成的递推关系的阶。*Discrete Math.*，298(1-3):2–17，2005年。[3] Sergei A. Abramov 和 Marko Petkovˇsek。超几何项的有理标准形与最小分解。*J. Symbolic Comput.*，33(5):521–543，2002年。

[4] Alin Bostan、Shaoshi Chen、Fr´ed´eric Chyzak 和 Ziming Li。二元有理函数创造性望远镜法的复杂度。载于 ISSAC'10 会议论文集，第 203–210 页。ACM，纽约，2010年。[5] Shaoshi Chen。创造性望远镜法的一种约化方法。载于 ISSAC'19 会议论文集，第 11–14 页。ACM，纽约，2019年。[6] Shaoshi Chen、Hao Du、Yiman Gao、Hui Huang 和 Ziming Li。超几何与 q-超几何创造性望远镜法的统一约化。Ramanujan J.，68:14，2025年。[7] Shaoshi Chen、Lixin Du、Rong-Hua Wang 和 Chaochao Zhu。三个变量中有理函数的望远镜算子的存在性。J. Symbolic Comput.，104:494–522，2021年。[8] Shaoshi Chen、Lixin Du 和 Chaochao Zhu。三个变量中有理函数望远镜算子的存在性问题：混合情形。载于 ISSAC'19 会议论文集，第 82–89 页。ACM，纽约，2019 年。[9] Shaoshi Chen 、 Qing-Hu Hou、George Labahn 和 Rong-Hua Wang。望远镜算子的存在性问题：超越二元情形。载于 ISSAC'16 会议论文集，第 167–174 页。ACM，纽约，2016年。[10] William Y. C. Chen、Qing-Hu Hou 和 Yan-Ping Mu。Zeilberger 算法的 q-类比的适用性。J. Symbolic Comput.，39(2):155–170，2005年。[11] Lixin Du。P-递归数列的望远镜算子的存在性。J. Symbolic Comput.，130:论文编号 102423，21，2025年。[12] Mark Giesbrecht、Hui Huang、George Labahn 和 Eugene Zima。多元多项式的高效整数线性分解。载于 ISSAC'19 会议论文集，第 171–178 页。ACM，纽约，2019年。[13] Mark Giesbrecht、Hui Huang、George Labahn 和 Eugene Zima。多元多项式的高效 q-整数线性分解。J. Symbolic Comput.，107:122–144，2021年。[14] Hui Huang。超几何创造性望远镜法的新界。载于 IS-SAC'16 会议论文集，第 279–286 页。ACM，纽约，2016年。[15] Michael Karr。有限项求和。J. Assoc. Comput. Mach.，28(2):305–350，1981年。[16] Manuel Kauers。D-有限函数，数学中的算法与计算第 30 卷。Springer，Cham，2023年。[17] Mohamud Mohammed 和 Doron Zeilberger。Zeilberger 算法和 q-Zeilberger 算法输出的递推关系阶的精确上界。J. Symbolic Comput.，39(2):201–207，2005年。[18] Marko Petkov˘sek、Herbert S. Wilf 和 Doron Zeilberger。 $A = B$。A K Peters, Ltd.，Wellesley，MA，1996年。[19] Doron Zeilberger。证明终止超几何恒等式的快速算法。Discrete Math.，80(2):207–211，1990年。[20] Doron Zeilberger。特殊函数恒等式的全纯系统方法。J. Comput. Appl. Math.，32(3):321–368，1990年。[21] Doron Zeilberger。创造性望远镜法。J. Symbolic Comput.，11(3):195–204，1991年。