arXiv:2602.19901v1 [math.AG] 23 Feb 2026

希尔伯特曲面、模形式与西格尔-韦奇常数

DUC-MANH NGUYEN

摘要。我们给出了 $\Omega\mathcal{M}_3(2,2)^{\text{odd}}$ 中 Prym 特征形式轨迹上的平移曲面中，端点不同的鞍连接所对应的 Siegel-Veech 常数。特别地，我们证明这些轨迹的上述常数实际上都相同。作为推论，我们证明了参数化具有 (1,2)-极化且容许实乘法的阿贝尔曲面的希尔伯特模曲面的欧拉示性数，与其乘积轨迹的欧拉示性数之间存在一个简单公式。对于主极化阿贝尔曲面，Bainbridge 曾观察到类似现象。

1. 引言

1.1. 结果陈述。设 D 为满足 $D > 9$、$D \equiv 0$、1、$4\ [8]$，且 D不是平方数的自然数。记 O_D 为判别式为 D的实二次序。回顾一下，$\Omega\mathcal{M}_3(2,2)^{\text{odd}}$是亏格三黎曼曲面上具有两个二重零点的奇自旋阿贝尔微分所在的分支（见 [13]）。$\Omega E_D(2,2)^{\text{odd}}$ 表示 $\Omega\mathcal{M}_3(2,2)^{\text{odd}}$ 中关于 O_D 实乘法的 Prym 特征形式空间（关于 Prym 特征形式的定义，参见 [19, 16]）。该轨道空间是 $\Omega\mathcal{M}_3(2,2)^{\text{odd}}$ 中的一个复维数为三的闭子轨形，并在 $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$-作用下保持不变。文献 [16] 证明，若 $D \equiv 0$、$4\ [8]$，则 $\Omega E_D(2,2)^{\text{odd}}$ 是连通的；而若$D \equiv 1\ [8]$，则它有两个连通分支（若 $D \equiv 5\ [8]$，则 $\Omega E_D(2,2)^{\text{odd}}$ 为空）。

对于$k = 1$、2、3，令$c_k(D)$表示与重数为k、连接$\Omega E_D(2,2)^{\text{odd}}$ 中阿贝尔微分的两个零点的鞍连接相关联的西格尔-韦奇常数（在$D \equiv 1\ [8]$的情形下，$\Omega ED(2,2)^{\text{odd}}$ 的两个连通分支的 Siegel-Veech 常数相同（参见 [24]））。本文的主要目的是证明下述

定理1.1. 对所有$D \in \mathbb{N}$，$D > 9$，$D \equiv 0$，1，$4\ [8]$，且D不是平方数，我们有

$$c_1(D) = \frac{25}{9}, \quad c_2(D) = 3, \quad c_3(D) = \frac{2}{9}.$$

轨道空间$\Omega \mathrm{E}_D(2,2)^{\text{odd}}$ 均包含于层 $Q(4,-1^4)$中二次微分的定向二重覆盖的轨道空间 $\tilde{Q}(4,-1^4)$ 内。由于轨道空间$\Omega \mathrm{E}_D(2,2)^{\text{odd}}$ 不包含于 $\tilde{Q}(4,-1^4)$的任何真不变子轨形中（见 [2]），由 Eskin-Mirzakhani [9]与Eskin-Mirzakhani-Mohammadi [10]的结果可知，当$\mathrm{D} \to +\infty$时，c_k(D)收敛于 $\tilde{Q}(4,-1^4)$的相应西格尔-韦奇常数，我们将其记为 $\tilde{}\mathrm{c}_k(4,-1^4)$。在附录A中，我们将用 Eskin-Masur-Zorich [8]的方法证明 $\tilde{}\mathrm{c}_1(4,-1^4) = 25/9,$, $\tilde{}\mathrm{c}_2(4,-1^4) = 3$, $\tilde{}\mathrm{c}_3(4,-1^4) = 2/9$。

希尔伯特模曲面是由允许某个二次序作用的实乘法的阿贝尔曲面所构成的模空间（更多详情见 § 3）。令 X_D 表示参数化

日期：2026年2月24日。

允许 O_D 作用的主极化阿贝尔曲面的希尔伯特曲面。本文关注的是具有 (1,2)型极化的阿贝尔曲面。相应的希尔伯特曲面记作 X'_D。注意，若 $X'_D = \varnothing$，则 $D \equiv 5\ [8]$ （见 [16, 22]）。

令P_D （分别为P'_D）表示X_D （分别为X'_D）的乘积轨迹，即由阿贝尔曲面$A \simeq E_1 \times E_2$, 构成的轨道空间，其中E_1,E_2 是椭圆曲线（更多细节见§3.2）。轨道空间P_D 和P'_D 是模曲线 $\mathbb{H}/\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$的有限覆盖。在 [3], 中，Bainbridge证明，对于所有非平方判别式$D > 4$，我们有

$$\chi(P_D) = -\frac{5}{2} \cdot \chi(X_D)$$

其中 χ(.)表示欧拉示性数。作为定理1.1证明的副产品，我们将证明

定理 1.2. 对于所有 $D \in \mathbb{N}, D \equiv 0, 1, 4\ [8],\ D > 9$ 且 D 不是平方数的情形，我们有

$$\chi(P'_D) = \begin{cases} -\chi(X'_D) & \text{if } D \equiv 1\ [8] \\ -\chi(X'_D)/2 & \text{if } 4 \mid D. \end{cases} \tag{1}$$

1.2. **证明思路**。 令 $\Omega E_D(2)$ 和 $\Omega E_D(4)$ 分别表示分层 $\Omega\mathcal{M}_2(2)$ 和 $\Omega\mathcal{M}_3(4)$ 中判别式为D 的 Prym 特征轨道空间。这些轨道空间各自都是有限个闭 $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$-轨道的并（见 [19]）。令$W_D(2)$ （分别地，$W_D(4)$）表示 $\Omega E_D(2)$（分别地，$\Omega E_D(4)$）的射影化，即$W_D(2) \simeq \Omega E_D(2)/\mathbb{C}^*$ （分别地，$W_D(4) \simeq \Omega E_D(4)/\mathbb{C}^*$）。注意$W_D(2)$（分别地，$W_D(4)$）同构于有限个 Teichmüller 曲线的并。

就我们的目的而言，我们将考虑非连通黎曼曲面上的阿贝尔微分。在 [24]（另见 [16]）中，我们引入了环面三元组上的 Prym 特征形式这一概念。对于二次序 O_D，由 Prym 特征形式组成的环面三元组空间记作 $\Omega E_D(0^3)$，其射影化 $\Omega E_D(0^3)/\mathbb{C}^*$ 记作 $W_D(0^3)$。可以证明，$W_D(0^3)$ 是模曲线 $\mathbb{H}/\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 的一个（非连通）有限覆盖。以下结果已在 [24] 中证明。

定理1.3。 设 $D \equiv 0, 1, 4\ [8], D > 9$ 为一个非平方判别式。

- 如果 $4 | D$，那么我们有

$$c_1(D) = \frac{15\chi(W_D(4))}{\chi(W_D(2)) + b_D\chi(W_{D/4}(2)) + 9\chi(W_D(0^3))}$$
$$c_2(D) = \frac{9\left(\chi(W_D(2)) + b_D\chi(W_{D/4}(2))\right)}{\chi(W_D(2)) + b_D\chi(W_{D/4}(2)) + 9\chi(W_D(0^3))}$$
$$c_3(D) = \frac{3\chi(W_D(0^3))}{\chi(W_D(2)) + b_D\chi(W_{D/4}(2)) + 9\chi(W_D(0^3))}$$

with

$$b_D = \begin{cases} 0 & \text{if } D/4 \equiv 2, 3\ [4] \\ 4 & \text{if } D/4 \equiv 0\ [4] \\ 3 & \text{if } D/4 \equiv 1\ [8] \\ 5 & \text{if } D/4 \equiv 5\ [8]. \end{cases}$$

- 如果 $D \equiv 1\,[8]$，那么

$$c_1(D) = \frac{15\chi(W_D(4))}{2\chi(W_D(2)) + 9\chi(W_D(0^3))}$$
$$c_2(D) = \frac{18\chi(W_D(2))}{2\chi(W_D(2)) + 9\chi(W_D(0^3))}$$
$$c_3(D) = \frac{3\chi(W_D(0^3))}{2\chi(W_D(2)) + 9\chi(W_D(0^3))}.$$

对于一个 y $D \in \mathbb{N}, D > 9$ 非平方数且 $D \equiv 0, 1, 4\,[8]$，根据 Möller [22], 的一个结果，我们有

$$\chi(W_D(4)) = \begin{cases} -\frac{5}{2} \cdot \chi(X'_D) & \text{if } D \equiv 0\,[4] \\ -5 \cdot \chi(X'_D) & \text{if } D \equiv 1\,[8]. \end{cases}$$

Bainbridge 在 [3] 证明了我们有

$$\chi(W_D(2)) = -\frac{9}{2} \cdot \chi(X_D).$$

在同一篇论文中，Bainbridge 还给出了一个显式公式，用于计算 $\chi(X_D)$，这是 Siegel 一项经典结果的推广。在 [22], 中，Möller 证明了一个显式公式，将 $\chi(X'_D)$ 与 $\chi(X_D)$ 联系起来（参见命题 3.4）。结合这些结果，我们将证明

$$\chi(W_D(2)) + b_D\chi(W_{D/4}(2)) = -\frac{9}{2}\chi(X'_D).$$

要证明定理1.1，还需证明我们有

$$\chi(W_D(0^3)) = \begin{cases} -\chi(X'_D) & \text{if } D \equiv 0\,[4] \\ -2\chi(X'_D) & \text{if } D \equiv 1\,[8] \end{cases}$$

这是通过将 $\chi(W_D(0^3))$ 与某些模形式的傅里叶展开系数联系起来实现的。

致谢。 作者感谢 Aurel Page 进行的非常有帮助的讨论。

2. 模形式关系的推论

回顾一下，对于任意正整数 m、n，

$$\sigma_m(n) := \sum_{d\,|\,n} d^m.$$

按惯例，$\sigma_m(0) = \frac{1}{2} \cdot \zeta_{\mathbb{Q}}(-m)$ 且 $\sigma_m(n) = 0$ 若 $n < 0$。本节的目标是证明以下结论

定理 2.1. 设 $D \in \mathbb{N}$ 是一个非平方判别式。

(i) 如果 $D \equiv 0\,[4]$，则我们有

$$\sum_{e^2 \equiv D\,[8]} \sigma_1\left(\frac{D-e^2}{8}\right) = \frac{1}{5} \cdot \sum_{e \text{ even}} \sigma_1\left(\frac{D-e^2}{4}\right) + \frac{4}{5} \cdot \sum_{e^2 \equiv D/4\,[4]} \sigma_1\left(\frac{D/4-e^2}{4}\right). \tag{2}$$

(ii) 如果 $D \equiv 1\,[8]$，则我们有

$$\sum_{e \text{ odd}} \sigma_1(\frac{D-e^2}{8}) = \frac{2}{5} \cdot \sum_{e \text{ odd}} \sigma_1(\frac{D-e^2}{4}). \tag{3}$$

*Re*标记 2.2. 在 $D/4 \equiv 2, 3\,[4]$, $e^2 \not\equiv D/4\,[4]$ 的情形下，任意整数 e 均成立。因此，(2) 变为

$$\sum_{e^2 \equiv D\,[8]} \sigma_1(\frac{D-e^2}{8}) = \frac{1}{5} \cdot \sum_{e \text{ even}} \sigma_1(\frac{D-e^2}{4}).$$

2.1. **一些模函数的基本定义和性质**。 我们先回顾一些经典的记号和约定。

(1) 对所有整数 a、b，若 $b \neq 0$, $\left(\frac{a}{b}\right)$是满足以下性质的克罗内克符号（见 [7]）

- Given a, the function $b \mapsto \left(\frac{a}{b}\right)$ is completely multiplicative.
- $\left(\frac{a}{-1}\right) = -1$ if $c < 0$ and $\left(\frac{a}{-1}\right) = 1$ if $c \geq 0$.
- $\left(\frac{a}{2}\right) = (-1)^{(a^2-1)/8}$ if a is odd.
- $\left(\frac{a}{p}\right)$ is the Legendre symbol if p is an odd prime, and $\gcd(a, p) = 1$.
- $\left(\frac{a}{b}\right) = 0$ if $\gcd(a, b) \neq 1$.

(2) 对所有整数 $N \geq 1$,

$$\Gamma_0(N) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}),\ c \equiv 0\,[N]\}.$$

(3) 对所有 $k \in \frac{1}{2} \cdot \mathbb{Z}$ 和 $N \in \mathbb{N}$, $N > 0$, $\mathbf{M}_k(\Gamma_0(N))$ 是权为 k 、水平为 N 的整权模形式空间。$\mathbf{M}_k(\Gamma_0(N))$ 的元素是函数 $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$，其中 $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$，满足以下条件

a) f 在 $\mathbb{H}$ 上全纯，

b) 若 $k \in \mathbb{Z}$，则对于所有 $z \in \mathbb{H}$ 以及所有 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$，我们有

$$f(\gamma \cdot z) := f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^k f(z) \quad \text{for } k \in \mathbb{Z},$$

and

$$f(\gamma \cdot z) = \left(\frac{c}{d}\right) \cdot \left(\frac{-4}{d}\right)^{-k} (cz+d)^k f(z) \quad \text{for } k \in \tfrac{1}{2} + \mathbb{Z}.$$

c) f 在 $\mathbb{H}/\Gamma_0(N)$的尖点处全纯。

(4) 对所有 $z \in \mathbb{H}$,

$$G_2(z) = \frac{-1}{24} + \sum_{n=1} \sigma_1(n) q^n$$

其中$q = e^{2\pi\imath z}$。函数G_2满足以下性质：对于所有 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$，我们有

$$G_2(\gamma \cdot z) = (cz+d)^2 G_2(z) - \frac{c(cz+d)}{4\pi\imath}.$$

(5) 对所有$z \in \mathbb{H}$,

$$\theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}.$$

对于所有 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(4)$，我们有

$$\theta(\gamma \cdot z) = \left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{-4}{d}\right)^{-1/2} (cz+d)^{1/2}\theta(z).$$

因此

$$\theta'(\gamma \cdot z) = \left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{-4}{d}\right)^{-1/2} \left(\frac{c}{2}(cz+d)^{3/2}\theta(z) + (cz+d)^{5/2}\theta'(z)\right).$$

2.2. **模形式的关系**。定义

$$f_1(z) := G_2(z)\theta(z) + \frac{1}{2\pi\imath}\theta'(z), \quad f_2(z) := G_2(2z)\theta(z) + \frac{1}{4\pi\imath}\theta'(z), \quad f_4(z) := G_2(4z)\theta(z) + \frac{1}{8\pi\imath}\theta'(z)$$

注2.3。函数f_4 已在 [6] 中引入。

Let

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_1(n)q^n, \quad f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_2(n)q^n, \quad f_4(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_4(n)q^n$$

分别为f_1, f_2, f_4 的傅里叶展开。根据f_1, f_2, f_4的定义，以下引理可立即得出。

引理 2.4. 设 D 为正整数。若 D 不是平方数，则有

$$a_1(D) = \sigma_1(D) + 2\sum_{1\le e<\sqrt{D}} \sigma_1(D-e^2) = \sum_{e\in\mathbb{Z}} \sigma_1(D-e^2),$$

$$a_2(D) = \sum_{e\equiv D\,[2]} \sigma_1\left(\frac{D-e^2}{2}\right),$$

$$a_4(D) = \sum_{e^2\equiv D\,[4]} \sigma_1\left(\frac{D-e^2}{4}\right).$$

特别地，若 $D_4(D) = 0$，则有 $D \equiv 2, 3\,[4]$。

若 $D = d^2, d \in \mathbb{N}$，则有

$$a_1(d^2) = \sum_{e\in\mathbb{Z}} \sigma_1(d^2 - e^2) + 2d^2,$$
$$a_2(d^2) = \sum_{e\equiv d\,[2]} \sigma_1(\frac{d^2-e^2}{2}) + d^2,$$
$$a_4(d^2) = \sum_{e\equiv d\,[2]} \sigma_1(\frac{d^2-e^2}{4}) + \frac{d^2}{2}.$$

命题 2.5。 函数f_1, f_2, f_4都属于关于$\Gamma_0(4)$的权为$5/2$整权模形式空间$\mathbf{M}_{5/2}(\Gamma_0(4))$。此外，我们有如下关系

$$f_1 - 5f_2 + 4f_4 = 0. \tag{4}$$

因此，我们有

$$a_1(n) - 5a_2(n) + 4a_4(n) = 0, \tag{5}$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$。

证明。 由G_2和 θ的性质可立即得出f_1, f_2, f_4属于$\mathbf{M}_{5/2}(\Gamma_0(4))$。由于 $\dim\mathbf{M}_{5/2}(\Gamma_0(4)) = 2$，所以$f_1, f_2,$与$f_4$之间必定存在线性关系。代入某个$n$的$a_1(n)$、$a_2(n)$、$a_4(n)$的值，即可显式计算出该关系的系数。□

下面的引理可由初等方法得出。

引理 2.6. 对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$n \geq 1$，我们有

$$a_1(n) = a_4(4n).$$

因此

$$g_1(z) := f_4(z) - f_1(4z) = \sum_{n\equiv 1\,[4], n>0} a_4(n)q^n \in \mathbf{M}_{5/2}(\Gamma_0(16)).$$

设 $\psi : (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^* \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \to \{\pm 1\}$ 是一个特征，满足 $\psi(5) = -1$。ψ 的导子为 8，且 ψ^2 是平凡的。定义

$$g_2(z) = g_{1\psi}(z) := \sum_{n\equiv 1\,[8], n>0} a_4(n)q^n - \sum_{n\equiv 5\,[8], n>0} a_4(n)q^n.$$

那么我们有 $g_2 \in \mathbf{M}_{5/2}(\Gamma_0(64))$（参见 [23,引理 4.3.10]）。定义

$$g := \frac{g_1 + g_2}{2} = \sum_{n\equiv 1\,[8], n>0} a_4(n)q^n \in \mathbf{M}_{5/2}(\Gamma_0(64)).$$

Let

$$f_8(z) := G_2(8z)\theta(z) + \frac{1}{16\pi\imath}\theta'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_8(n)q^n.$$

以下引理是初等的

引理 2.7. 我们有 $f_8 \in \mathbf{M}_{5/2}(\Gamma_0(8))$。设 D 为正整数。如果 D 不是平方数，那么

$$a_8(D) = \sum_{e^2 \equiv D\,[8]} \sigma_1(\frac{D-e^2}{8}).$$

特别地，只有当 $n \equiv 0,\ 1,\ 4\,[8]$ 时，我们才有 $a_8(n) \neq 0$。

如果 $D = d^2,$，那么我们有

$$a_8(d^2) = \sum_{e^2 \equiv d^2\,[8]} \sigma_1(\frac{d^2-e^2}{8}) + \frac{d^2}{4}$$

引理 2.8。对于所有 $n \in \mathbb{N}$，我们有 $a_2(n) = a_8(4n)$。由此可得

$$h(z) := f_8(z) - f_2(4z) = \sum_{n \equiv 1\,[8], n>0} a_8(n) q^n \in \mathbf{M}_{5/2}(\Gamma_0(16)).$$

命题 2.9。我们有

$$h = \frac{2}{5} g \in \mathbf{M}_{5/2}(\Gamma_0(64)). \tag{6}$$

由此可得

$$a_8(n) = \frac{2}{5} a_4(n) \tag{7}$$

对所有的 $n > 0,\ n \equiv 1\,[8]$。

证明。由 [23, 定理 4.2.7] 可知，曲线 $X_0(64) := \mathbb{H}/\Gamma_0(64)$ 没有椭圆点，且有 12 个尖点。我们有

$$[\overline{\Gamma}(1) : \overline{\Gamma}_0(64)] = [\Gamma(1) : \Gamma_0(64)] = 64(1 + \frac{1}{2}) = 96.$$

因此，$g(X_0(64)) = 3$（参见 [23, 定理 4.2.11]）。考虑 $f := (h - 2/5 \cdot g)^4$。根据定义，f 属于 $M_{10}(\Gamma_0(64))$。令 $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b(n) q^n$ 为 f 的傅里叶展开。容易验证，对所有 $n \equiv 1\ [8]$ 且 $n \leq 25$，$a_8(n) = 2/5 \cdot a_4(n)$。因此，对所有 $n \leq 100$，$b(n) = 0$。由于 $f \in M_{10}(\Gamma_0(64))$，若 $f \neq 0$，则 f 在 ∞ 处的消失阶数不可能达到 $5(2 \times 3 - 2) + 5 \times 12 = 80$（参见 [23,推论 2.3.4]）。因此我们可以得出，$f \equiv 0$ 且 $h = 2/5 \cdot g$。□

2.3. **定理 2.1 的证明**。

证明。设 $D \in \mathbb{N}$ 是一个非平方判别式。假设 $D \equiv 0\,[4]$。于是我们有

$$a_1(D/4) = \sum_{e \in \mathbb{Z}} \sigma_1(D/4 - e^2) = \sum_{e \in \mathbb{Z}} \sigma_1(\frac{D-4e^2}{4}) = \sum_{e\ \text{even}} \sigma_1(\frac{D-e^2}{4}) = a_4(D)$$

$$a_2(D/4) = \sum_{e \equiv D/4\,[2]} \sigma_1(\frac{D/4-e^2}{2}) = \sum_{e \equiv D/4\,[2]} \sigma(\frac{D-4e^2}{8}) = \sum_{e^2 \equiv D\,[8]} \sigma_1(\frac{D-e^2}{8}) = a_8(D).$$

因此，(2) 可由命题 2.5 得出。

如果 $D \equiv 1\,[8]$，我们便可由命题 2.9 得到（3）。 □

3. 实乘法与希尔伯特模曲面

3.1. 希尔伯特模曲面。 实二次序是一个与 $\mathbb{Z}[x]/(x^2+bx+c)$ 同构的环，其中 $b、c \in \mathbb{Z}$ 满足 $D := b^2-4c > 0$。数 D 称为该二次序的判别式。二次序由其判别式唯一确定（在同构意义下）。对于所有 $D \in \mathbb{N}、D \equiv 0、1$ [4]，我们将以 $\mathcal{O}_D$ 表示判别式为 D 的实二次序。

设A 是一个阿贝尔曲面。若存在忠实环态射 $\rho: \mathcal{O}_D \to \mathrm{End}(A)$，使得$A$ 具有 $\mathcal{O}_D$ 上的实乘法，则称 A 具有实乘法，其中

- 其像由相对于A的极化自伴的自同态组成。
- ρ 是整闭的，也就是说，如果$f \in \mathrm{End}(A)$，且对某个$n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$，有$nf \in \rho(\mathcal{O}_D)$，那么$f \in \rho(\mathcal{O}_D)$。

对于主极化阿贝尔曲面，且D 不是平方数时，上述数对（A，ρ）由希尔伯特模曲面参数化

$$X_D \simeq \mathbb{H}\times\mathbb{H}/\mathrm{SL}(\mathcal{O}_D\oplus\mathcal{O}_D^\vee),$$

其中 $\mathcal{O}_D^\vee = \frac{1}{\sqrt{D}}\mathcal{O}_D$是 $\mathcal{O}_D$ 的逆不同分理，而 $\mathrm{SL}(\mathcal{O}_D\oplus\mathcal{O}_D^\vee)$ 是 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Q}(\sqrt{D}))$ 中保持格 $\mathcal{O}_D\oplus\mathcal{O}_D^\vee$ 的子群（更多细节见 [3, §2] 或 [21, §2]）。事实上，我们有

$$\mathrm{SL}(\mathcal{O}_D\oplus\mathcal{O}_D^\vee) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix},\ a,d\in\mathcal{O}_D,\ b\in\left(\mathcal{O}_D^\vee\right)^{-1},\ c\in\mathcal{O}_D^\vee,\ ad-bc=1\}$$

其中 $\left(\mathcal{O}_D^\vee\right)^{-1} = \sqrt{D}\cdot\mathcal{O}_D$。还可以证明，$X_D \simeq \mathbb{H}\times(-\mathbb{H})/\mathrm{SL}(2,\mathcal{O}_D)$。

令 $z_i、i=1、2$ 为 $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ 中 $\mathbb{H}$ 的两个副本上的复坐标。令 $x_i = \mathrm{Re}(z_i)、y_i = \mathrm{Im}(z_i)$。那么这个 2-形式

$$\eta_i := \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{dx_i\wedge dy_i}{y_i^2}. \tag{8}$$

下降为 X_D 上的一个 2-形式。X_D 的欧拉示性数可通过以下方式计算

$$\chi(X_D) = \int_{X_D}\eta_1\wedge\eta_2.$$

若判别式 $D \in \mathbb{N}$ 不能写成 $D = f^2D'$，其中$f \in \mathbb{N}、f > 1$，且 D' 也是判别式（即 $D' \equiv 0, 1$[4]），则称其为基本判别式。对于所有基本判别式 $D > 1$，Siegel [25] 证明了

$$\chi(X_D) = 2\zeta_{K_D}(-1)$$

其中 ζ_{K_D} 是二次域$K_D := \mathbb{Q}(\sqrt{D})$的戴德金ζ函数。在 [3], Bainbridge 将 Siegel 的结果推广到了所有判别式。

定理 3。 **1** (Bainbridge)。设 $D_0 > 1$为基本判别式。对于所有 $f \in \mathbb{N}$，$f \geq 1$，我们有

$$\chi(X_{f^2D_0}) = 2\cdot f^3\cdot\zeta_{K_{D_0}}(-1)\cdot\sum_{r\mid f}\left(\frac{D_0}{r}\right)\frac{\mu(r)}{r^2} \tag{9}$$

其中 $\left(\frac{*}{*}\right)$是克罗内克符号，μ(.)是莫比乌斯函数。

结合式 (9) 和 Cohen 在 [6], 中的一个结果，可得

推论 3.2 (Bainbridge)。 设 $D > 1$ 是一个非平方判别式。记 $D = f^2 D_0$，其中 D_0 是一个基本判别式。于是有

$$\sum_{r|f} \chi(X_{r^2 D_0}) = \frac{1}{30} \cdot \sum_{e \equiv D\,[2]} \sigma_1\left(\frac{D-e^2}{4}\right) \tag{10}$$

3.2. **中的乘积轨迹** X_D。 以下 [3], 我们将 X_D 中表示阿贝尔曲面为椭圆曲线的（带极化）乘积的点所构成的轨道空间称为乘积轨迹，记作 X_D 的P_D。X_D 中的一般点表示光滑二次曲线的雅可比簇。P_D 中的点表示一条奇异曲线的雅可比簇，该曲线具有两个亏格一的不可约分支，并在一个分离节点处相交。众所周知，P_D 是模曲线 [12, 26]的并集。在 [3], 中，Bainbridge 证明了以下结果

定理 3.3（Bainbridge）。 如果判别式 D 不是平方数，则有

$$\chi(P_D) = -\frac{5}{2} \cdot \chi(X_D). \tag{11}$$

证明概要。 令 $\Omega\mathcal{M}_1$ 表示由对 (E, ω) 构成的空间，其中E 是一个椭圆曲线，而 ω 是 E上的全纯一形式。令 ΩQ_D 表示 $\Omega\mathcal{M}_1 \times \Omega\mathcal{M}_1$ 的子集，其中的元素 $((E1, \omega_1), (E2, \omega_2))$ 满足

- 阿贝尔曲面 $E_1 \times E2$ 允许由 $\mathcal{O}_D$ 给出的实乘法，
- 曲面 $E_1 \times E2$ 上的全纯1-形式 $\omega := \omega_1 + \omega_2$ 是 $\mathcal{O}_D$ 在 $\Omega^1(E_1 \times E2)$ 上作用的特征向量（这里稍微滥用一下记号，将 ω_i 到 $E_1 \times E2$ 的拉回仍记作 ω_i）。

令 Q_D 表示商空间 $\Omega Q_D/\mathbb{C}^*$。我们声称

$$\chi(Q_D) = -5\chi(X_D) \tag{12}$$

称满足下述条件的整数三元组 (e, l, m)

$$D = e^2 + 4\ell^2 m \quad \ell > 0, m > 0, \quad \text{and} \quad \gcd(e, \ell) = 1$$

是判别式 D 的环面乘积原型。在 [18], McMullen 证明了，ΩQ_D 的每个连通分支都与一个环面乘积原型 (e, l, m) 唯一对应，并且同构于 $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})/\Gamma_0(m)$。众所周知，

$$\chi(\mathbb{H}/\Gamma_0(m)) = -\frac{1}{6} \cdot m \cdot \prod_{\substack{p|m \\ p \text{ prime}}} \left(1 + \frac{1}{p}\right) =: \psi(m),$$

并且我们有

$$\sum_{\substack{n=\ell^2 m \\ \ell, m \in \mathbb{N}}} \psi(m) = -\frac{1}{6}\sigma_1(n).$$

记$D = f^2 D_0,$，其中D_0 是一个基本判别式。我们有

$$\sum_{r|f} \chi(Q_{r^2 D_0}) = \sum_{\substack{D=e^2+4\ell^2 m \\ \ell, m>0}} \psi(m) = -\frac{1}{6} \sum_{e \equiv D\,[2]} \sigma_1(\frac{D-e^2}{4}).$$

结合式 (10)，我们得到

$$\sum_{r|f}\chi(Q_{r^2D}) = -5\cdot\sum_{r|f}\chi(X_{r^2D})$$

由此得证。

令$F:\ Q_D \to P_D$ 为遗忘特征形式的映射 ω。对于每个$E_1\times E_2 \in P_D$，O_D 在 $\Omega^1(E_1\times E_2)$ 中有两个特征形式 ω、ω'，使得 $\Omega^1(E_1\times E_2) \simeq \mathbb{C}\cdot\omega\oplus\mathbb{C}\cdot\omega'$。因此$F$ 是一个二对一覆盖映射，由此可得所需结论。□

3.3. 具有 (1, 2)-极化的 Prym 特征形式和阿贝尔曲面。 考虑一个阿贝尔微分 $(C,\omega) \in \Omega E_D(2,2)^{\text{odd}}$。根据定义，$C$ 是亏格为 3 的光滑曲线，具有一个对合 τ，该对合有 4 个不动点。记 $\Omega^-(C,\tau)$ 为C上 τ^* 的作用在 $\Omega(C)$ 上对应于特征值 -1 的特征子空间。注意，$\dim_{\mathbb{C}}\Omega(C,\tau)^- = 2$。令

$$H_1(X,\mathbb{Z})^- := \{c\in H_1(C,\mathbb{Z}),\ \tau_* c = -c\}.$$

C 关于 τ 的Prym簇定义为（例如参见 [19]）

$$\mathrm{Prym}(C,\tau) := \Omega^-(C,\tau)^*/H_1(X,\mathbb{Z})^-.$$

曲面$\mathrm{Prym}(C,\tau)$是C的雅可比簇$J(C)$的一个子簇，并且$J(C)$的极化在$\mathrm{Prym}(C,\tau)$上诱导出一个$(1,2)$型极化（参见 [5, 22]）。

设$D \in \mathbb{N}$ 为一个判别式。设X'_D 为带有$(1,2)$极化且容许由 O_D给出的实乘法的阿贝尔曲面的模空间。则X'_D 是一个以与X_D类似的方式构造的复曲面。特别地，我们有

$$X'_D = (\mathbb{H}\times\mathbb{H})/\mathrm{SL}(\mathfrak{a}\oplus O_D^\vee),$$

其中$\mathfrak{a}$是范数为2的分式O_D-理想，而$\mathrm{SL}(\mathfrak{a}\oplus O_D^\vee)$是$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Q}(\sqrt{D}))$中保持格$\mathfrak{a}\oplus O_D^\vee$的子群（详见 [22, 命题1.1]）。注意，若$D \equiv 5\ [8]$，则$X'_D$ 为空（参见 [14, 22]）。我们也将X'_D 称为希尔伯特模曲面。

令 η_i、$i = 1$、2 为 $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ 的两个因子上由式（8）定义的 2-形式。那么，X'_D 的欧拉示性数为

$$\chi(X'_D) = \int_{X'_D}\eta_1\wedge\eta_2 \tag{13}$$

以下结果证明于 [22]

命题 3.4 (Möller)。假设 $D \equiv 0,\ 1,\ 4\ [8]$ 且 $D = f^2 D_0,$，其中 $D_0 > 1$ 是一个基本判别式。则有

$$\frac{\chi(X'_D)}{\chi(X_D)} = \begin{cases} 1 & \text{if } 2\nmid f,\\ 3/2 & \text{if } 2\mid f.\end{cases} \tag{14}$$

3.4. 椭圆曲线乘积上的特征形式。令 $\mathrm{P}'_D \subset \mathrm{X}'_D$ 表示由满足以下条件的阿贝尔曲面 A 构成的轨道空间：A 同构于两个椭圆曲线 $\mathrm{E}_1\times\mathrm{E}_2$ 的乘积；设 L_i为定义 E_i上的主极化的线丛，则 A 上的极化由 $\mathrm{p}_1^*\mathrm{L}_1\otimes\mathrm{p}_2^*\mathrm{L}_2^{\otimes 2}$ 给出，其中 $\mathrm{p}_i:\mathrm{A}\to\mathrm{E}_i$ 为自然投影。更具体地说，设 $\langle .,.\rangle_i$ 表示 $\mathrm{H}_1(\mathrm{E}_i,\mathbb{Z})$ 上的交形式。则 A 上的极化由 $\mathrm{H}_1(\mathrm{A},\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{H}_1(\mathrm{E1},\mathbb{Z})\times\mathrm{H}_1(\mathrm{E2},\mathbb{Z})$ 上的斜对称双线性形式 $\langle .,.\rangle := \langle .,.\rangle_1 + 2\langle .,.\rangle_2$ 给出。

若一条光滑曲线存在到某条椭圆曲线的二次态射，则称其为双椭圆曲线。X'_D 中的一般点对应于光滑、亏格三的双椭圆曲线的普莱姆簇。这类曲线上的双椭圆结构由一个固定四个点的对合给出。称此对合为*Prym* 对合。Prym 对合的概念可以推广到奇异曲线上。特别地，设C是一条亏格三的奇异曲线，由四个不可约分支组成：其中三个分支是椭圆曲线，剩下一个与 $\mathbb{P}^1$ 同构，并在一个节点处与每个椭圆分支相交。假设其中两个椭圆分支同构，则存在一个C 的对合，它交换这两个分支并固定另外两个分支。在这种情况下，C 是亏格三双椭圆曲线的一个退化，上述对合由退化到C的曲线上的 Prym 对合诱导。根据构造，C 的普莱姆簇同构于两个椭圆曲线的乘积。此外，假设退化到C 的曲线的普莱姆簇具有由 O_D给出的实乘法。那么C的普莱姆簇也具有这种实乘法。因此，这个阿贝尔曲面对应于P'_D中的一个点。

考虑一个阿贝尔曲面 $A \simeq E_1 \times E_2$，它对应于 P'_D 中的一个点。A 上的一个全纯1-形式 ω 等价于一对 $((E1,\omega_1),(E2,\omega_2))$，其中 ω_i 是E_i上的全纯1-形式。根据定义，(E_i,ω_i) 是位于 $\mathcal{M}_{1,1}$ 上的霍奇丛 $\Omega\mathcal{M}_{1,1}$ 的一个元素。众所周知，$\Omega\mathcal{M}_{1,1} \simeq \mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})/\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$。因此，群 $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$ 在 $\Omega\mathcal{M}_{1,1}\times\Omega\mathcal{M}_{1,1}$ 上对角作用。

根据假设，$\mathrm{End}(A)$ 包含一个同构于 O_D 的自伴真子环。令 $\Omega Q'_D$ 表示由配对 (A,ω) 构成的空间，其中 $A \in P'_D$，且 ω 是 O_D 在 $\Omega^1(A)$ 上作用的特征形式。不难看出，$\Omega Q'_D$ 由 $\Omega\mathcal{M}_{1,1}\times\Omega\mathcal{M}_{1,1}$ 中有限多个 $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$-轨道组成。令$Q'_D := \Omega Q'_D/\mathbb{C}^*$。那么$Q'_D$ 是模曲线 $\mathbb{H}/\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 的有限覆盖。

我们有一个自然映射 $F: Q'_D \to P'_D$，它由在配对 $(A,[\omega]) \in Q'_D$ 中忘掉特征形式 ω 构成。由于对每个 $A \in P'_D$，我们有 $\Omega^1(A) = \mathbb{C}\cdot\omega \oplus \mathbb{C}\cdot\omega'$，其中 ω 与 ω' 是 O_D 的两个特征向量，因此 $F: Q'_D \to P'_D$ 是一个次数为二的覆盖。综上所述，我们有

命题 3.5. 对所有 $D > 9, D \equiv 0,1,4\ [8]$，若 D 不是平方数，则 Q'_D 是代数曲线的有限并，并且我们有

$$\chi(P'_D) = \frac{1}{2}\cdot\chi(Q'_D). \tag{15}$$

3.5. **曲线的欧拉示性数 Q'_D.** 我们现在的目标是计算 $\chi(Q'_D)$。判别式$D > 9$，$D \equiv 0,\ 1,4\ [8]$ 称为(1,2)-本原的，如果不存在$f \in \mathbb{N}$，$f > 1$ 使得 $D = f^2D'$，且 $D' \equiv 0,\ 1,4\ [8]$。我们将证明

命题 3.6. 设 $D_0 > 9$ 是一个 *(1,2)*-本原判别式。对于任意 $f \in \mathbb{N}$，$f \geq 1$，我们有 e

$$\sum_{r\mid f}\chi(Q'_{r^2D_0}) = -\frac{1}{6}\cdot\sum_{\substack{e^2<f^2D_0\\ e^2\equiv f^2D_0\ [8]}}\sigma_1\left(\frac{f^2D_0-e^2}{8}\right). \tag{16}$$

设 $\tilde{\pi}_{1,\ D}: \Omega Q'_D \to \Omega\mathcal{M}_{1,\ 1}$ 是映射 $((E1,\omega_1),(E2,\omega_2)) \mapsto (E1,\omega_1)$。记 $\pi_{1,\ D}$ 为由此诱导的映射，从 Q'_D 到 $\mathcal{M}_{1,\ 1} \simeq \mathbb{H}/\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$。

命题 3.7. 令 $\mathcal{P}_D$ 表示整数四元组 (a,b,d,e) 的集合，使得 t

$$D = e^2 + 8ad,\ a > 0,\ d > 0,\ 0 \leq b < a,\ \gcd(a,b,d,e) = 1.$$

于是我们有

$$\deg \pi_{1,D} = \#\mathcal{P}_D. \tag{17}$$

证明概要。设 $((E1, \omega_1), (E2, \omega_2))$ 是 $\Omega Q'_D$ 中的一个特征形式，其中 $(E_i, \omega_i) \in \Omega\mathcal{M}_{1,1}$。设 (α_i, β_i) 是 $H_1(E_i, \mathbb{Z}), i = 1, 2$ 的辛基。那么 $\mathcal{B} := (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ 是 $H_1(E_1 \times E2, \mathbb{Z})$ 的一个基。$E_1 \times E_2$ 上的极化与 $H_1(E_1 \times E2, \mathbb{Z})$ 上由矩阵 $\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & 2J \end{pmatrix}$ 给出的斜对称形式 $\langle ., . \rangle$ 相对应，其中 $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，基为 $\mathcal{B}$。

记 $\omega = \omega_1 + \omega_2 \in \Omega^1(E_1 \times E_2)$。存在唯一的元素 $T \in$ 自同态环$(E_1 \times E_2)$，它关于 $\langle ., . \rangle$ 自伴，生成 $\mathcal{O}_D$，并满足以下条件

- $T^*\omega = \lambda\omega$，其中 $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$,
- T 在基 $\mathcal{B}$ 下由如下形式的矩阵给出

$$T = \begin{pmatrix} eI_2 & 2B \\ B^* & 0_2 \end{pmatrix}$$

其中 $e \in \mathbb{Z}$，$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{Z})$，$B^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$，且 $\gcd(a, b, c, d, e) = 1$。

注意，条件 $\gcd(a, b, c, d, e) = 1$ 保证由T生成的子环在 $\mathrm{End}(E_1 \times E_2)$中是 proper 的。

由于 $T^2 = eT + 2\det B \cdot I_4$，，条件 T生成 $\mathcal{O}_D$意味着 $e^2 + 8\det B = D$。不难看出 $\det B > 0$。由于 λ是多项式 $x^2 - ex - 2\det B$的唯一正根，我们必有 $\lambda = (e + \sqrt{D})/2$。我们可以将 B 视为覆盖映射 $\varphi : E_2 \to E_1$的矩阵。条件 $T^*\omega = \lambda\omega$ 意味着

$$\varphi^*\omega_1 = \frac{\lambda}{2}\omega_2. \tag{18}$$

存在格 Λ_1, Λ_2，使得 $(E_i, \omega_i) \simeq (\mathbb{C}/\Lambda_i, dz)$。条件 18 意味着 $\frac{\lambda}{2} \cdot \Lambda_2$ 是 Λ_1 中指数为 $\det B$ 的子格。

现在固定一个格 $\Lambda_1 \subset \mathbb{C}$，它代表 $\mathcal{M}_{1,1}$ 中的一个元素。映射 $\pi_{1,D}$ 的次数是满足 $((\mathbb{C}/\Lambda_1, dz), (\mathbb{C}/\Lambda_2, dz)) \in \Omega Q'_D$ 的格 Λ_2 的数量。根据上述论证，这个集合与以下数对的集合双射：(e, Λ)，其中

(i) $e \in \mathbb{Z}$，$e^2 < D$，且 $e^2 \equiv D\,[8]$。(ii) Λ 是 Λ_1 的指数为 $(D - e^2)/8$ 的子格。(iii) 若 $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{Z})$ 是 Λ 的某个基在 Λ_1 的一个基下的矩阵，则必须有 $\gcd(a, b, c, d, e) = 1$。

为简单起见，假设 $\Lambda_1 = \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}^2$。那么，每个子格 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ 都有唯一的基 (u, v)，其中

- $u = (a, 0)$，其中 $a > 0$,
- $v = (b, d)$，其中 $0 \le b < a$，且 $d > 0$。

因此，满足上述条件 (i)、(ii)、(iii) 的 (e, Λ) 集合与集合

$$\mathcal{P}_D = \{(a, b, d, e) \in \mathbb{Z}^4,\ a > 0,\ d > 0,\ 0 \le b < a,\ D = e^2 + 8ad,\ \gcd(a, b, d, e) = 1\},$$

命题得证。 □

引理 3.8。 设 $D_0 > 9$ 是一个 *(1,2)*-本原判别式。对于任意 $f \in \mathbb{N}$， $f \geq 1$，令 $\mathcal{P}f^2D_0$ 表示满足下列条件的整数四元组集合$(a,\ b,\ d,\ e)$

$$f^2 D_0 = e^2 + 8ad,\ a > 0,\ d > 0,\ 0 \leq b < a.$$

于是我们有

$$\#\tilde{\mathcal{P}}_{f^2 D_0} = \sum_{r \mid f} \#\mathcal{P}_{r^2 D_0}. \tag{19}$$

证明。 考虑 $(a, b, d, e) \in \mathcal{P}_{f^2 D_0}$。令 $s := \gcd(a, b, d, e)$，并且

$$(a', b', d', e') := \left(\frac{a}{s}, \frac{b}{s}, \frac{d}{s}, \frac{e}{s}\right).$$

由于 $f^2 D_0 = e^2 + 8ad = s^2(e'^2 + 8a'd')$，可知 $s^2 \mid f^2 D_0$。我们断言 $s \mid f$。事实上，令 $s' := s/\gcd(s, f)$ 且 $f' = f/\gcd(s, f)$。于是我们有 $s'^2 \mid f'^2 D_0$，，这意味着 $s'^2 \mid D_0$。假设 $s' > 1$。若 s' 为奇数，则

$$\frac{D_0}{s'^2} \equiv D_0 \ [8]$$

这与 D_0 是 (1, 2)-本原这一假设矛盾。因此，s' 必须为偶数，这意味着 f' 为奇数。但由于

$$f'^2 \cdot \frac{D_0}{s'^2} = e'^2 + 8a'd'$$

由此可得

$$\frac{D_0}{s'^2} \equiv e'^2 + 8a'd' \equiv 0, 1, 4 \ [8],$$

并且这再次与假设D 是 (1, 2)-本原相矛盾。因此必有$s' = 1$，即$s \mid f$。注意，我们有 $(a', b', d', e') \in \mathcal{P}_{(f/s)^2 D_0}$。

反过来，对于每个 $(a', b', d', e') \in \mathcal{P}_{r^2 D_0}$，，存在某个 $r \mid f$，使得 $r > 0$。令 $s := f/r$。则 $(sa', sb', sd', se') \in \tilde{\mathcal{P}}_{f^2 D_0}$。因此，我们得到 $\mathcal{P}f^2 D_0$ 与并集 $\bigsqcup_{r \mid f} \mathcal{P}_{r^2 D_0}$，之间的双射，由此得出所需结论。□

命题 3.6 的证明。

证明。 记 $D = f^2 D_0$。对于每个满足 $-\sqrt{D} < e < \sqrt{D}$ 的 $\overline{e} \in \mathbb{Z}$，定义

$$\tilde{\mathcal{P}}_D(e) := \{(a, b, d) \in \mathbb{N}^3,\ (a, b, d, e) \in \tilde{\mathcal{P}}_D\}.$$

容易验证，$\#\tilde{\mathcal{P}}_D(e) = \sigma_1((D - e^2)/8)$。因此

$$\#\tilde{\mathcal{P}}_D = \sum_{\substack{-\sqrt{D} < e < \sqrt{D} \\ e^2 \equiv D \ [8]}} \sigma_1\left(\frac{D - e^2}{8}\right).$$

另一方面，由命题 3.7 可得

$$\chi(Q'_{r^2 D_0}) = \chi(\mathbb{H}/\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})) \cdot \deg \pi_{1, r^2 D_0} = \frac{-1}{6} \cdot \#\mathcal{P}_{r^2 D_0}$$

然后我们由引理 3.8 得出结论。 □

4. Bainbridge公式的推论

为了证明我们的主要结果，必须将$\chi(X_D)$与$\chi(X_{D/4})$联系起来。为此，我们现在证明

命题 4.1. 设 $D \in \mathbb{N}, D > 9, D \equiv 0\,[4]$，$D$ 不是平方数。假设 $D/4$ 是一个判别式，即 $D/4 \equiv 0, 1\,[4]$。则有

$$\frac{\chi(X_D)}{\chi(X_{D/4})} = \begin{cases} 6 & if\ D/4 \equiv 1\,[8] \\ 10 & if\ D/4 \equiv 5\,[8] \\ 8 & if\ D/4 \equiv 0\,[8]. \end{cases} \tag{20}$$

证明。 我们可以写成 $D = 4^s f^2 D_0,$，其中 s、$f \in \mathbb{N}$、$s \geq 1$，f为奇数，且 D_0 是一个基本判别式。回顾式 (9)，我们有

$$\chi(X_{D/4}) = 2 \cdot (2^{s-1}f)^3 \cdot \zeta_{K_{D_0}}(-1) \sum_{r|2^{s-1}f} \left(\frac{D_0}{r}\right) \cdot \frac{\mu(r)}{r^2}$$

and

$$\chi(X_D) = 2 \cdot (2^s f)^3 \cdot \zeta_{K_{D_0}}(-1) \left(\sum_{r|2^{s-1}f} \left(\frac{D_0}{r}\right) \cdot \frac{\mu(r)}{r^2} + \sum_{r|f} \left(\frac{D_0}{2^s r}\right) \cdot \frac{\mu(2^s r)}{4^s r^2} \right).$$

(a) 若 $D/4 \equiv 1\,[8]$，则 $s = 1$ 且 $D_0 \equiv 1\,[8]$。注意，在此情形下有 $\left(\frac{D_0}{2}\right) = 1$。因此，

$$\begin{aligned} \chi(X_D) &= 8 \cdot 2 \cdot f^3 \cdot \zeta_{K_{D_0}}(-1) \cdot \sum_{r\,|\,f} \left(\left(\frac{D_0}{r}\right) \cdot \frac{\mu(r)}{r^2} + \left(\frac{D_0}{2r}\right) \cdot \frac{\mu(2r)}{4r^2} \right) \\ &= 8 \cdot 2 \cdot f^3 \cdot \zeta_{K_{D_0}}(-1) \cdot \sum_{r\,|\,f} \left(\left(\frac{D_0}{r}\right) \cdot \frac{\mu(r)}{r^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{D_0}{r}\right) \cdot \frac{\mu(r)}{r^2} \right) \\ &= 6 \cdot 2 \cdot f^3 \cdot \zeta_{K_{D_0}}(-1) \cdot \sum_{r\,|\,f} \left(\frac{D_0}{r}\right) \cdot \frac{\mu(r)}{r^2} \\ &= 6\chi(X_{D/4}). \end{aligned}$$

(b) 若$D/4 \equiv 5\,[8]$则 $s = 1$ 和 $D_0 \equiv 5\,[8]$。注意，在这种情况下，我们有 $\left(\frac{D_0}{2}\right) = -1$。因此，

$$\begin{aligned} \chi(X_D) &= 8 \cdot 2 \cdot f^3 \cdot \zeta_{K_{D_0}}(-1) \cdot \sum_{r\,|\,f} \left(\left(\frac{D_0}{r}\right) \cdot \frac{\mu(r)}{r^2} + \left(\frac{D_0}{2r}\right) \cdot \frac{\mu(2r)}{4r^2} \right) \\ &= 8 \cdot 2 \cdot f^3 \cdot \zeta_{K_{D_0}}(-1) \cdot \sum_{r\,|\,f} \left(\left(\frac{D_0}{r}\right) \cdot \frac{\mu(r)}{r^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{D_0}{r}\right) \cdot \frac{\mu(r)}{r^2} \right) \\ &= 10 \cdot 2 \cdot f^3 \cdot \zeta_{K_{D_0}}(-1) \cdot \sum_{r\,|\,f} \left(\frac{D_0}{r}\right) \cdot \frac{\mu(r)}{r^2} \\ &= 10\chi(X_{D/4}). \end{aligned}$$

(c) 假设 $D/4 \equiv 0\,[4]$。我们有两个子情形

(c.1) D_0 为奇数，也就是说 $D_0 \equiv 1\,[4]$。在这种情况下，$s \geq 2$。由于 $\mu(2^s r) = 0$，如果 $s \geq 2$，因此可得

$$\chi(X_D) = 8 \cdot 2 \cdot (2^{s-1} f)^3 \cdot \zeta_{K_{D_0}}(-1) \cdot \sum_{r \mid f} \left(\left(\frac{D_0}{r} \right) \cdot \frac{\mu(r)}{r^2} + \left(\frac{D_0}{2r} \right) \cdot \frac{\mu(2r)}{4r^2} \right) = 8\chi(X_{D/4}).$$

(c.2) D_0 为偶数，即 $D_0 \equiv 0\,[4]$。在这种情况下，对所有偶数 r，$\left(\frac{D_0}{r} \right) = 0$。因此我们有

$$\chi(X_D) = 8 \cdot 2 \cdot (2^{s-1} f)^3 \cdot \zeta_{K_{D_0}}(-1) \cdot \sum_{r \mid f} \left(\frac{D_0}{r} \right) \cdot \frac{\mu(r)}{r^2} = 8\chi(X_{D/4}).$$

□

回想一下，对于所有判别式 $D > 4$，$W_D(2)$ 都是由轨道空间 $\Omega E_D(2) \subset \Omega\mathcal{M}_2(2)$ 中的 Prym 特征形式生成的 Teichmüller 曲线。等价地，$W_D(2)$ 是 $\Omega E_D(2)$ 在 $\mathbb{P}\Omega\mathcal{M}_2(2)$ 中的投影。注意，当 $D \equiv 1\,[8]$ 时，$W_D(2)$ 有两个分支，否则只有一个分支（见 [18]）。

推论 4.2。对于所有 $D > 0$，$4 \mid D$，定义

$$b_D = \begin{cases} 0 & if\ D/4 \equiv 2, 3\,[4] \\ 4 & if\ D/4 \equiv 0\,[4] \\ 3 & if\ D/4 \equiv 1\,[8] \\ 5 & if\ D/4 \equiv 5\,[8] \end{cases}$$

于是我们有

$$\chi(W_D(2)) + b_D\chi(W_{D/4}(2)) = -\frac{9}{2} \cdot \chi(X'_D). \tag{21}$$

证明。文献 [3] 中已证明我们有

$$\chi(W_D(2)) = -\frac{9}{2} \cdot \chi(X_D)$$

记 $D = 4^s f^2 D_0,$，其中 $s \in \mathbb{N}$，f 为奇数，且 D_0 是一个基本判别式。若 $D/4 \equiv 2, 3\,[4]$，则 $D/4$ 不是判别式，这意味着 $s = 0$ 且 $4 \mid D_0$。注意，在这种情况下 $\chi(X_D) = \chi(X'_D)$（参见定理 3.4）。因此，

$$\chi(W_D(2)) = -\frac{9}{2} \cdot \chi(X_D) = -\frac{9}{2} \cdot \chi(X'_D).$$

在其他情形下，$D/4$ 是一个判别式，这意味着 $s \geq 1$，且 $\chi(X'_D) = \frac{3}{2} \cdot \chi(X_D)$。根据命题 4.1，我们有

$$\begin{aligned} \chi(W_D(2)) + b_D\chi(W_{D/4}(2)) &= -\frac{9}{2} \cdot (\chi(X_D) + b_D\chi(X_{D/4})) \\ &= -\frac{9}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \chi(X_D) \\ &= -\frac{9}{2} \cdot \chi(X'_D). \end{aligned}$$

□

5. 定理 1.2 的证明

根据命题 3.5，(1) 等价于

$$\chi(Q'_D) = \begin{cases} -2\chi(X'_D) & \text{if } D \equiv 1\,[8] \\ -\chi(X'_D) & \text{if } D \equiv 0\,[4]. \end{cases} \tag{22}$$

接下来，我们将给出式（22）的证明。

5.1. 情形 $D \equiv 1\,[8]$。

证明。 在这种情况下，我们可以写成 $D = f^2 D_0,$，其中 $D_0 \equiv 1\,[8]$ 是一个基本判别式。注意，D_0 也是 (1, 2)-本原。因此，由命题 3.6 可得

$$-6\sum_{r\mid f}\chi(Q'_{r^2D_0}) = \sum_{e^2<D,\, e\,\text{odd}} \sigma_1\left(\frac{D-e^2}{8}\right).$$

由定理 2.1，我们有

$$\sum_{e^2<D,\, e\,\text{odd}} \sigma_1\left(\frac{D-e^2}{8}\right) = \frac{2}{5}\cdot \sum_{e^2<D,\, e\,\text{odd}} \sigma_1\left(\frac{D-e^2}{4}\right).$$

由推论 3.2，我们有

$$30\sum_{r\mid f}\chi(X_{r^2D_0}) = \sum_{e^2<D,\, e\,\text{odd}} \sigma_1\left(\frac{D-e^2}{4}\right)$$

这意味着

$$\sum_{r\mid f}\chi(Q'_{r^2D_0}) = -2\sum_{r\mid f}\chi(X_{r^2D_0}).$$

对f使用归纳法，可得所需结论。 □

5.2. 情形 $D \equiv 0\,[4]$。

证明。 记 $D = 4^s f^2 D_0,$，其中$s \in \mathbb{N}$，f是奇数，且$D_0 > 1$ 是一个基本判别式。

5.2.1. 情形 $s = 0$。 在此情形下$D = f^2 D_0,$，其中 $4 \mid D_0,$，但$D_0/4$ 不是判别式（即$D_0/4 \equiv 2, 3\,[4]$）。因此我们也有$D/4 \equiv 2, 3\,[4]$。由定理 2.1 可得

$$\sum_{e^2\equiv D\,[8]} \sigma_1(\frac{D-e^2}{8}) = \frac{1}{5}\cdot \sum_{e^2\equiv D\,[4]} \sigma_1(\frac{D-e^2}{4})$$

由于在这种情况下，D_0 也是 (1, 2)-本原的，由命题 3.6 可得

$$-6\cdot\sum_{r\mid f}\chi(Q'_{r^2D_0}) = \sum_{e^2\equiv D\,[8]} \sigma_1\left(\frac{D-e^2}{8}\right)$$

结合式（10），得到

$$\sum_{r\mid f}\chi(Q'_{r^2D_0}) = -\sum_{r\mid f}\chi(X_{r^2D_0}).$$

对 f 应用归纳法，可得

$$\chi(Q'_D) = -\chi(X_D) = -\chi(X'_D)$$

.

5.2.2. 情形 $s = 1$。在此情形下，$D/4 = f^2 D_0$ 是一个判别式。因此，定理 2.1 给出

$$\sum_{e^2 \equiv D\,[8]} \sigma_1(\frac{D-e^2}{8}) = \frac{1}{5} \cdot \sum_{e\,\text{even}} \sigma_1(\frac{D-e^2}{4}) + \frac{4}{5} \cdot \sum_{e^2 \equiv D/4\,[4]} \sigma_1(\frac{D/4-e^2}{4}).$$

由推论 3.2 可得

$$\sum_{e\,\text{even}} \sigma_1(\frac{D-e^2}{4}) = 30 \cdot \left(\sum_{r|f} \chi(X_{r^2 D_0}) + \sum_{r|f} \chi(X_{4r^2 D_0}) \right)$$

and

$$\sum_{e^2 \equiv D/4\,[4]} \sigma_1(\frac{D/4-e^2}{4}) = 30 \cdot \sum_{r|f} \chi(X_{r^2 D_0}).$$

Thus

$$\sum_{e^2 \equiv D\,[8]} \sigma_1(\frac{D-e^2}{8}) = 6 \cdot \left(5 \cdot \sum_{r|f} \chi(X_{r^2 D_0}) + \sum_{r|f} \chi(X_{4r^2 D_0}) \right).$$

- 若$D_0 \equiv 1\,[8]$，则D_0 是 $(1, 2)$-本原的。因此，由命题 3.6 可得

$$-\left(\sum_{r|f} \chi(Q'_{r^2 D_0}) + \sum_{r|f} \chi(Q'_{4r^2 D_0}) \right) = 5 \cdot \sum_{r|f} \chi(X_{r^2 D_0}) + \sum_{r|f} \chi(X_{4r^2 D_0}).$$

由情形 $D \equiv 1\,[8]$，我们知道

$$\sum_{r|f} \chi(Q'_{r^2 D_0}) = -2 \sum_{r|f} \chi(X_{r^2 D_0}).$$

因此

$$-\sum_{r|f} \chi(Q'_{4r^2 D_0}) = 3 \cdot \sum_{r|f} \chi(X_{r^2 D_0}) + \sum_{r|f} \chi(X_{4r^2 D_0})$$

根据命题 4.1，对于所有奇数r，我们有 $\chi(X_{4r^2 D_0}) = 6\chi(X_{r^2 D_0})$。因此我们有

$$-\sum_{r|f} \chi(Q'_{4r^2 D_0}) = \frac{3}{2} \cdot \sum_{r|f} \chi(X_{4r^2 D_0}) = \sum_{r|f} \chi(X'_{4r^2 D_0}).$$

对f应用归纳法，可得 $\chi(Q'_D) = -\chi(X'_D)$。

- 若$D_0 \equiv 0\,[4]$，则$D0$ 是 $(1, 2)$-本原的。我们还有

$$-\left(\sum_{r|f} \chi(Q'_{r^2 D_0}) + \sum_{r|f} \chi(Q'_{4r^2 D_0}) \right) = 5 \cdot \sum_{r|f} \chi(X_{r^2 D_0}) + \sum_{r|f} \chi(X_{4r^2 D_0}).$$

我们已证明，对所有r为奇数的情况（情形$s = 0$），均有 $\chi(Q'_{r^2D_0}) = -\chi(X_{r^2D_0})$。因此我们得到

$$-\sum_{r|f}\chi(Q'_{4r^2D_0}) = 4\cdot\sum_{r|f}\chi(X_{r^2D_0}) + \sum_{r|f}\chi(X_{4r^2D_0}).$$

在此情形下，根据命题 4.1，我们有 $\chi(X_{4r^2D_0}) = 8\chi(X_{r^2D_0})$。由此可得

$$-\sum_{r|f}\chi(Q'_{4r^2D_0}) = \frac{3}{2}\cdot\sum_{r|f}\chi(X_{4r^2D_0}) = \sum_{r|f}\chi(X'_{4r^2D_0})$$

因此 $\chi(Q'_D) = \chi(X'_D)$。

- 若$D_0 \equiv 5\,[8]$，则$D0$ 不是 (1, 2)-本原的，但 $4D0$ 是。因此，由命题 3.6 可得

$$-\sum_{r|f}\chi(Q'_{4r^2D_0}) = 5\cdot\sum_{r|f}\chi(X_{r^2D_0}) + \sum_{r|f}\chi(X_{4r^2D_0}).$$

根据命题 4.1，对于所有奇数r，都有 $\chi(X_{4r^2D_0}) = 10\chi(X_{r^2D_0})$。因此我们有

$$-\sum_{r|f}\chi(Q'_{4r^2D_0}) = \frac{3}{2}\cdot\sum_{r|f}\chi(X_{4r^2D_0}) = \sum_{r|f}\chi(X'_{4r^2D_0})$$

这意味着 $\chi(Q'_D) = -\chi(X'_D)$。

5.2.3. 情形 $s \geq 2$。 由命题 3.6 可知

$$-\sum_{i=0}^{s}\sum_{r|f}\chi(Q'_{4^ir^2D_0}) = 5\sum_{i=0}^{s-1}\sum_{r|f}\chi(X_{4^ir^2D_0}) + \sum_{r|f}\chi(X_{4^sr^2D_0})$$

若 $D_0 \equiv 0, 1, 4\ [8]$, 且

$$-\sum_{i=1}^{s}\sum_{r|f}\chi(Q'_{4^ir^2D_0}) = 5\sum_{i=0}^{s-1}\sum_{r|f}\chi(X_{4^ir^2D_0}) + \sum_{r|f}\chi(X_{4^sr^2D_0})$$

若 $D_0 \equiv 5\,[8]$。两种情况下，由 s 归纳法可得

$$-\sum_{r|f}\chi(Q'_{4^sr^2D_0}) = 4\sum_{r|f}\chi(X_{4^{s-1}r^2D_0}) + \sum_{r|f}\chi(X_{4^sr^2D_0}) = \frac{3}{2}\cdot\sum_{r|f}\chi(X_{4^sr^2D_0}) = \sum_{r|f}\chi(X'_{4^sr^2D_0})$$

这意味着 $\chi(Q'_D) = -\chi(X'_D)$。定理 1.2 得证。 □

6. Proof of Theorem 1.1

证明。 环面的三元组是一个元组 $(X, x_0, x_1, x2, \omega)$ 的数据，其中

- X 是三个椭圆曲线 $X0$,$X1$,$X2$ 的不交并。
- x_j是X_j上的一个标记点。
- ω是X上的全纯阿贝尔微分，将 ω在X_j上的限制记作ω_j。

环面的三元组 $(\mathrm{X}, \mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1, \mathrm{x2}, \omega)$ 称为 Prym形式，如果存在一个对合 $\tau : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$，它固定 x_0, 、置换 x_1 和 x_2, , 并满足 $\tau^*\omega = -\omega$。定义 $\mathrm{H}_1(\mathrm{X}, \mathbb{Z})^- := \{\mathrm{c} \in \mathrm{H}_1(\mathrm{X}, \mathbb{Z}),\ \tau_*\mathrm{c} = -\mathrm{c}\}$。设 $(\alpha\mathrm{j}, \beta_j)$ 是 $\mathrm{H}_1(\mathrm{X}\,\mathrm{j}, \mathbb{Z})$ 的辛基，其中 $\mathrm{j} = 0$、1、2。我们假设 $\tau_*\alpha_1 = \alpha_2, \tau_*\beta_1 = \beta_2$。那么 $(\alpha_0, \beta_0, \alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2)$ 是 $\mathrm{H}_1(\mathrm{X}, \mathbb{Z})^-$ 的基。交叉形式在 $\mathrm{H}_1(\mathrm{X}, \mathbb{Z})$ 上限制到 $\mathrm{H}_1(\mathrm{X}, \mathbb{Z})^-$ 时，由矩阵 $\begin{pmatrix}\mathrm{J} & 00 \\ 2\mathrm{J}\end{pmatrix}$ 给出，其中 $\mathrm{J} = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right)$。

令 $\Omega(X)^- := \ker(\tau^* + \mathrm{id}) \subset \Omega(X)$。$(X,\tau)$ 的 Prym 簇定义为

$$\mathrm{Prym}(X,\tau) := (\Omega(X)^-)^*/H_1(X,\mathbb{Z})^-.$$

由该构造可知，$\mathrm{Prym}(X,\tau)$ 是一个极化类型为 $(1,2)$ 的阿贝尔曲面。注意，$\mathrm{Prym}(X,\tau)$ 实际上同构于 $X_0 \times X_1$。

由于 $\omega \in \Omega(X)^-$，我们可以把 ω 视为 $\Omega^1(\mathrm{Prym}(X,\tau))$ 的一个元素。按定义，$\Omega E_D(0^3)$ 是三元环面 $(X, x_0, x_1, x2, \omega)$ 的模空间，这些三元环面是 Prym形式，且使得 $\mathrm{Prym}(X,\tau)$ 容许由 O_D 给出的实乘法，而 ω 是其特征形式。曲线 $W_D(0^3)$ 是 $\Omega E_D(0^3)$ 的射影化，即$W_D(0^3) = \Omega E_D(0^3)/\mathbb{C}^*$。该对应

$$(X, x_0, x_1, x_2, \omega) \mapsto (\mathrm{Prym}(X,\tau), \omega)$$

为我们提供了一个从 $\Omega E_D(0^3)$ 到 $\Omega Q'_D$ 的映射，而该映射实际上是一个同构。由此可得$W_D(0^3) \simeq Q'_D$。因此

$$\chi(W_D(0^3)) = \begin{cases} -2\chi(X'_D) & \text{if } D \equiv 1\,[8] \\ -\chi(X'_D) & \text{if } 4 \mid D. \end{cases}$$

根据定理 1.2 和命题 3.5。由推论 4.2，我们有

$$\chi(W_D(2)) + b_D\chi(W_{D/4}(2)) = -\frac{9}{2}\cdot\chi(X'_D)$$

若 $4 \mid D$。在 $D \equiv 1\,[8]$ 的情形下，根据 [3, 定理 1.1] 和命题 3.4，我们也有

$$\chi(W_D(2)) = -\frac{9}{2}\chi(X_D) = -\frac{9}{2}\chi(X'_D).$$

最后，根据 [22,定理 0.2], ，我们有

$$\chi(W_D(4)) = \begin{cases} \frac{-5}{2}\cdot\chi(X'_D) & \text{if } 4 \mid D \\ -5\cdot\chi(X'_D) & \text{if } D \equiv 1\,[8] \end{cases}$$

将 $\chi(W_D(4))$、$\chi(W_D(2) + b_D\chi(W_{D/4}(2))$、$\chi(W_D(0^3))$ 的这些表达式代入定理 1.3 中的公式，我们得到

$$c_1(D) = \frac{25}{9}, \quad c_2(D) = 3, \quad c_3(D) = \frac{2}{9}$$

对于所有 D。 □

Appendix A. Siegel-Veech constants of the locus $\tilde{Q}(4,-1^4)$

在本节中，我们给出以下内容的证明

定理 A.1. 令 $\tilde{Q}(4,-1^4)$ 表示$\Omega\mathcal{M}_3(2,2)^{\mathrm{odd}}$中的*Prym*轨迹，也就是由成对对象构成的空间$(X,\omega) \in \Omega\mathcal{M}_3(2,2)^{\mathrm{odd}}$；其中，$X$具有一个对合 τ，有四个不动点，且满足 $\tau^*\omega = -\omega$。对于 $k = 1,2,3$，令 $\tilde{c}_k(4,-1^4)$ 表示与X上连接两个零点、且重数为 k 的 ω 相关的鞍连接的西格尔-韦奇常数。那么我们有

$$\tilde{c}_1(4,-1^4) = \frac{25}{9}, \quad \tilde{c}_2(4,-1^4) = 3, \quad \tilde{c}_3(4,-1^4) = \frac{2}{9}.$$

首先简要介绍按照 Eskin-Masur-Zorich [8]计算 $\tilde{c}_k(4,-1^4)$ 的策略。设 $\Omega\mathcal{X}$ 是某个平移曲面层中的仿射不变子轨形。考虑一个曲面 $(X,\omega)\in\Omega\mathcal{X}$。相对于 $\Omega\mathcal{X}$，(X,ω) 上的一个刚性族鞍连接，是指一组极大的鞍连接，它们在 $\Omega\mathcal{X}$中 (X,ω) 的邻域内所有曲面上都具有相同的周期。我们只关注连接$\tilde{Q}(4,-1^4)$中 1-形式的两个零点的鞍连接。在这种情况下，一个刚性族包含一条、两条或三条鞍连接。

固定 $k\in\{1,2,3\}$。令 $\Omega\mathcal{M}$ 表示如下阿贝尔微分空间：它们是通过将曲面中连接 1-形式的两个零点的 k 条鞍连接组成的刚性族压缩而得到的，该曲面属于$\tilde{Q}(4,-1^4)$。对于所有 $\delta\in\mathbb{R}_{>0}$，令 $D'(\delta)$ 表示穿孔圆盘 $\{z\in\mathbb{C},\ 0<|z|<\delta\}$。对于所有 $(Y,\eta)\in\Omega\mathcal{M}$，存在一个嵌入 $\Psi: U\times D'(\delta)/\mathbb{Z}_2\to\tilde{Q}(4,-1^4)$，其中某个 $\delta>0$，U 是 $\Omega\mathcal{M}$ 中 (Y,η) 的一个邻域，且 $\mathbb{Z}/2$ 的作用由 $(Y,\eta,z)\mapsto(Y,\eta,-z)$ 生成。

令$Q(4,-1^4)$表示~~令~~，然后~~用于~~ $d\mathrm{vol}$ 在$U\times D'(\delta)$上的拉回分解为$d\mathrm{vol}'\otimes dv$，其中

- $d\mathrm{vol}'$ 是 $\Omega\mathcal{M}$ 上某个体积形式在U 上的限制；通过周期映射，该体积形式在局部坐标图中与勒贝格测度成比例，
- dv 是通过形如$z\to z^\alpha$的映射对 $\mathbb{C}$ 上的勒贝格测度进行拉回所得。

令 $\tilde{Q}_1(4,-1^4)$（分别为 $\tilde{Q}_{\le1}(4,-1^4)$）表示 $\tilde{Q}(4,-1^4)$ 中单位面积的（分别为面积至多为 1 的）平移曲面集合。我们以相同方式定义 $\Omega_1\mathcal{M}$ 和 $\Omega_{\le1}\mathcal{M}$，它们是 $\Omega\mathcal{M}$ 的子集。体积形式$d\mathrm{vol}$ 和$d\mathrm{vol}'$ 分别在 $\tilde{Q}_1(4,-1^4)$ 和 $\Omega_1\mathcal{M}$上诱导出体积形式$d\mathrm{vol}_1$ 和$d\mathrm{vol}'_1$。注意，$d\mathrm{vol}_1$ 和$d\mathrm{vol}'_1$ 按如下方式归一化

$$\mathrm{vol}_1(\tilde{Q}_1(4,-1^4))=\dim_{\mathbb{R}}\tilde{Q}(4,-1^4))\cdot\mathrm{vol}(\tilde{Q}_{\le1}(4,-1^4))=10\cdot\mathrm{vol}(\tilde{Q}_{\le1}(4,-1^4))$$

and

$$\mathrm{vol}'_1(\Omega_1\mathcal{M})=\dim_{\mathbb{R}}\Omega\mathcal{M}\cdot\mathrm{vol}'(\Omega_{\le1}\mathcal{M})=8\cdot\mathrm{vol}'(\Omega_{\le1}\mathcal{M}).$$

由 [8] 的结果可知，我们有

$$\tilde{c}_k(4,-1^4)=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{\mathrm{vol}'_1(\Omega_1\mathcal{M})}{\mathrm{vol}_1(\tilde{Q}_1(4,-1^4))}\tag{23}$$

注意，引入因子1 2是因为 $\tilde{Q}(4,-1^4)$中1-形式的两个零点无法区分。由于极点的原像在 $\tilde{Q}(4,-1^4)$中未被编号，我们有（参见 [11, 附录A]）

$$\mathrm{vol}_1(\tilde{Q}_1(4,-1^4))=\frac{\mathrm{vol}_1(Q_1(4,-1)^4)}{4!}=\frac{2\pi^4}{4!}=\frac{\pi^4}{12}.$$

A.1. **情形** $k=1$. 在此情形下，$\Omega\mathcal{M}$ 是层 $Q(3,-1^3)$中二次微分的典范双覆盖空间。由 [15, §8B] 可知 $\alpha=5$，且在此情形下$d\mathrm{vol}'$ 等于 $\tilde{Q}(3,-1^3)$上的Masur-Smillie-Veech 体积。考虑到 $Q(3,-1^3)$中零点与极点的编号，我们有

$$\mathrm{vol}'_1(\tilde{Q}_1(3,-1^3))=\frac{5\pi^4}{9\cdot3!}=\frac{5\pi^4}{54}.$$

因此我们有

$$\tilde{c}_1(4,-1^4)=\frac{1}{2}\cdot5\cdot\frac{5\pi^4/54}{\pi^4/12}=\frac{25}{9}.$$

A.2. **情形** $k = 2$。在此情形下，$\alpha = 3$ 而 $\Omega\mathcal{M}$ 是由三元组 (Y, η, w) 构成的空间，其中 (Y, η) 是 $\Omega\mathcal{M}_2(2)$ 中的一个平移曲面，且 w 是 Y 上的一个魏尔斯特拉斯点，不是 η 的零点（更多详情见 [15,§8C]）。我们将此空间记为 $\Omega\mathcal{M}_2(2)^*$。根据定义，$\Omega\mathcal{M}_2(2)^*$ 是 $\Omega\mathcal{M}_2(2)$ 上的一个 5 次覆盖，其覆盖映射为 $(Y, \eta, w) \mapsto (Y, \eta)$。用 $d\mathrm{vol}^{(2)}$ 表示 Masur-Smillie-Veech 体积在 $\Omega\mathcal{M}_2(2)^*$ 上的拉回。我们断言

断言 A.2. 我们有

$$d\mathrm{vol}' = 4d\mathrm{vol}^{(2)}. \tag{24}$$

证明。考虑三元组 $(Y, \eta, w) \in \Omega\mathcal{M}_2(2)^*$，它由曲面 $(X, \omega) \in \tilde{Q}(4, -1^4)$ 经压缩一对被 Prym 对合 τ 互换的鞍连接 $\{s_1, s_2\}$ 得到。回忆一下，$\tilde{Q}(4, -1^4)$ 局部建模于 $H^1(X, Z; \mathbb{C})^-$，其中 Z 是 ω 的零点集。体积形式 $d\mathrm{vol}$ 经过归一化，使得格的余体积

$$\{f \in H^1(X, Z; \mathbb{C})^-,\ f(c) \in \mathbb{Z} + \iota\mathbb{Z},\ \text{for all } c \in H_1(X, Z; \mathbb{Z})^-\}.$$

等于 1（见 [1, §4.1]）。令 $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ 为 $H_1(X, \mathbb{Z})^-$ 的辛基，并令 γ 为 $H_1(X, Z; \mathbb{Z})$ γ 中由 s_1 或 s_2 表示的元素。我们可以将 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ 和 γ 视为 $H^1(X, Z; \mathbb{C})^-$ 上的 $\mathbb{C}$-线性形式。用 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma$ 表示它们的复共轭。于是根据定义，我们有

$$d\mathrm{vol} = \left(\frac{\iota}{2}\right)^5 \alpha_1 \wedge \overline{\alpha}_1 \wedge \cdots \wedge \beta_2 \wedge \overline{\beta}_2 \wedge \gamma \wedge \overline{\gamma}. \tag{25}$$

在 $H^1(X, Z; \mathbb{C})^-$。

根据构造，τ 在 X 上的对合在 Y 上诱导出对合 ι，事实上它就是超椭圆 involution。存在一个等距映射，将 X 中 $s_1 \cup s_2$ 的一个邻域的补集映到 Y 中 $\{w, w_0\}$ 的一个邻域的补集，其中 w_0 是 η 的唯一零点。该映射诱导出一个态射 $\varphi : H_1(X, \mathbb{Z})^- \to H_1(Y, \mathbb{Z})^- = H_1(Y, \mathbb{Z})$（这里，$H_1(Y, \mathbb{Z})^-$ 是集合 $\{c \in H_1(Y, \mathbb{Z}),\ \iota_* c = -c\}$）。可以选取 $H_1(X, \mathbb{Z})^-$ 的一组辛基 $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$，使得 $(\varphi(\alpha_1)/2, \varphi(\beta_1), \varphi(\alpha_2), \varphi(\beta_2))$ 是 $H_1(Y, \mathbb{Z})$ 的一组辛基（见 [15, §8C]）。记 $\alpha_i' = \varphi(\alpha_i), \beta_i' = \varphi(\beta_i)$。那么根据构造，由 dvol 在 $H^1(Y, \mathbb{C})$ 上诱导的体积形式 dvol′ 为

$$d\mathrm{vol}' = \left(\frac{\iota}{2}\right)^4 \alpha_1' \wedge \overline{\alpha}_1' \wedge \cdots \wedge \beta_2' \wedge \overline{\beta}_2'.$$

另一方面，$H^1(Y, \mathbb{C})$上的Masur-Smillie-Veech 体积由下式给出

$$d\mathrm{vol}^{(2)} = \left(\frac{\iota}{2}\right)^4 \frac{\alpha_1'}{2} \wedge \frac{\overline{\alpha}_1'}{2} \wedge \cdots \wedge \beta_2' \wedge \overline{\beta}_2'.$$

因此我们有

$$d\mathrm{vol}' = 4d\mathrm{vol}^{(2)}.$$

□

Now

$$\mathrm{vol}'(\Omega_1\mathcal{M}_2(2)^*) = 4\mathrm{vol}_1^{(2)}(\Omega_1\mathcal{M}_2(2)^*) = 4 \cdot 5 \cdot \mathrm{vol}_1^{(2)}(\Omega_1\mathcal{M}_2(2)) = 20 \cdot \frac{\mathrm{vol}_1(Q_1(1, -1^5))}{5!} = \frac{\pi^4}{6}.$$

因此

$$\tilde{c}_2(4, -1^4) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\pi^4/6}{\pi^4/12} = 3.$$

A.3. 情形 $k = 3$。在此情形下 $\alpha = 1$，且 $\Omega\mathcal{M}$是三元环面 $\{(Y_j, \eta_j, y_j)$ 的 $\mathrm{Prym}(0^3)$ 空间，其中 $j = 0, 1, 2\}$，且 $(Y1, \eta_1)$ 与 $(Y2, \eta_2)$ 同构。令 Y 表示 Y_0, Y_1, Y_2 的不交并。 η_0, η_1, η_2 的数据给出 Y 上的一个全纯1-形式 η。因此，我们可以用 (Y, η, y_0, y_i, y_2) 代替$\{(Y_j, \eta_j, y_j), j = 0, 1, 2\}$。

现在假设 $(Y, \eta, y_0, y_1, y_2) \in \mathrm{Prym}(0^3)$ 是由 $(X, \omega) \in \tilde{Q}(4, -1^4)$ 收缩由三个鞍连接 s_0, s_1, s_2组成的刚性族得到的。注意，在这种情况下，s_0, s_1, s_2 彼此同调。根据构造，X 的 Prym 对合 τ 在 Y 上诱导出一个对合 τ_Y，它置换 $Y_1, Y_2,$，并在 $H_1(Y0, \mathbb{Z})$ 上作用为 $-\mathrm{id}$。根据构造，1-形式 η 满足 $\tau_Y^*\eta = -\eta$。因此，空间 $\mathrm{Prym}(0^3)$ 局部建模于 $H^1(Y, \mathbb{C})^- := \ker(\tau_Y^* + \mathrm{id}) \subset H^1(Y, \mathbb{C})$。定义

$$H_1(Y, \mathbb{Z})^- = \{c \in H_1(Y, \mathbb{Z}),\ \tau_{Y*}c = -c\}.$$

设 (α_j, β_j) 是 $H_1(Y_j, \mathbb{Z})$ 的辛基，其中 $\tau_{Y*}\alpha_1 = -\alpha_2, \tau_{Y*}\beta_1 = -\beta_2$。令 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \beta = \beta_1 + \beta_2$。则 $(\alpha_0, \beta_0, \alpha, \beta)$ 是 $H_1(Y, \mathbb{Z})^-$ 的辛基。将 $\alpha_0, \beta_0, \alpha, \beta$ 视为 $H^1(Y, \mathbb{C})^-$ 上的 $\mathbb{C}$- 线性形式。则 $\mathrm{Prym}(0^3)$ 上的体积形式 $d\mathrm{vol}'$ 满足

$$d\mathrm{vol}' = \left(\frac{\iota}{2}\right)^4 \alpha_0 \wedge \overline{\alpha}_0 \wedge \cdots \wedge \beta \wedge \overline{\beta}.$$

我们的目标是计算 $\mathrm{Prym}_1(0^3) := \Omega_1\mathcal{M}^{(3)}$ 关于 $d\mathrm{vol}'_1$ 的体积。为此，我们首先指出，$\mathrm{Prym}(0^3)$ 与 $\Omega\mathcal{M}_1(0) \times \Omega\mathcal{M}_1(0)$ 同构，同构由映射

$$\Phi : (Y, \eta, y_0, y_1, y_2) \mapsto ((Y_0, \eta_0, y_0), (Y_1, \eta_1, y_1)).$$

由于 $\Omega\mathcal{M}_1(0) \times \Omega\mathcal{M}_1(0)$ 局部由 $H^1(Y0, \mathbb{C}) \times H^1(Y1, \mathbb{C})$ 建模，对于所有 $f \in H^1(Y, \mathbb{C})^-$，我们有

$$\Phi(f) = (f_{|H_1(Y_0, \mathbb{C})}, f_{|H_1(Y_1, \mathbb{C})}) \in H^1(Y_0, \mathbb{C}) \times H^1(Y_1, \mathbb{C})$$

令 $d\mathrm{vol}^*$ 表示 $H^1(Y0, \mathbb{C}) \times H^1(Y1, \mathbb{C})$ 上由下式定义的体积形式

$$d\mathrm{vol}^* = \left(\frac{\iota}{2}\right)^4 \alpha_0 \wedge \overline{\alpha}_0 \wedge \beta_0 \wedge \overline{\beta}_0 \wedge \alpha_1 \wedge \overline{\alpha}_1 \wedge \beta_1 \wedge \overline{\beta}_1.$$

通过映射 Φ，我们可以将 $d\mathrm{vol}^*$ 视为 $H^1(Y, \mathbb{C})^-$ 上的体积形式。由于对于所有 $\xi \in H^1(Y, \mathbb{C})^-$，我们有 $\xi(\alpha) = 2\xi(\alpha_1), \xi(\beta) = 2\xi(\beta_1)$，因此

$$d\mathrm{vol}' = 2^4 \cdot d\mathrm{vol}^*.$$

注意我们有

$$\mathrm{Area}(Y, \eta) = \mathrm{Area}(Y_0, \eta_0) + 2\mathrm{Area}(Y_1, \eta_0).$$

所需结论由下述引理得出。

引理 A.3. 设 E 为一个 $\mathbb{C}$-向量空间，并具有分解 $E = V \times W$，其中 $\dim_{\mathbb{C}} V = r, \dim_{\mathbb{C}} W = s$。假设 V（相应地，W）配备有体积形式μ 与厄米特形式 h（相应地，体积形式 ν 与厄米特形式 g）。令 $V^+ := \{v \in V, h(v,v) > 0\}$，且 $W^+ = \{w \in W, g(w,w) > 0\}$。令 A 与 B 分别为 V^+ 与 W^+ 中的某些开锥。对所有 $t \in \mathbb{R}_{>0}$，定义

$$A_t = \{v \in A,\ h(v, v) = t\} \quad and \quad A_{<t} = \{v \in A,\ 0 < h(v, v) < t\}.$$

类似地，

$$B_t = \{w \in B,\ g(w, w) = t\} \quad and \quad B_{<t} = \{w \in B,\ 0 < g(w, w) < t\}.$$

设 $C := A \times B \subset E$。给定两个正实数 a，b，定义

$$C(a,b)_{<1} := \{(v,w) \in C,\ 0 < ah(v,v) + bg(w,w) < 1\}$$

设 $\lambda := \mu \otimes \nu$。假设$\mu(A_{<1})$ 和 $\nu(B_{<1})$ 均有限。那么我们有

$$\lambda(C(a,b)_{<1}) = \frac{r!s!}{(r+s)!} \cdot \frac{\mu(A_{<1})\nu(B_{<1})}{a^r b^s}. \tag{26}$$

证明。 我们可以通过映射 $F(t,v) \mapsto tv$ ， 对所有 $(t,v) \in \mathbb{R}_{>0} \times A_1$，将$A$ 重新参数化为 $\mathbb{R}_{>0} \times A_1$ 。F 对$d\mu$ 的拉回可写为 $dt \wedge d\sigma_t$， 其中 σ_t 是A_1 上的体积形式， 它依赖于t。我们断言

$$d\sigma_t = t^{2r-1} d\sigma_1. \tag{27}$$

事实上， 考虑A_1 的一个开子集 Ω， 在此处可以定义一组实局部坐标 $(\omega_1, \ldots, \omega_{2r-1})$。将体积形式$d\omega_1 \wedge \cdots \wedge d\omega_{2r-1}$ 记为$d\omega$。在V 上选取一组实坐标 $(v_1, \ldots, v_{2r})$， 使得$d\mu = dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_{2r}$。根据定义，

$$d\sigma_t = J_F(t,v) d\omega$$

其中J_F 是F 相对于坐标系（t、 ω_1、 $\ldots$、 ω_{2r-1}）和（$v_1, \ldots$、 v_{2r}）的雅可比簇。

给定$t \in \mathbb{R}_{>0}$， 考虑映射 $\psi_t : V \to V$， $v \mapsto tv$。我们有 $\psi \circ F = F \circ L_t$， 其中$L_t(x,v) = (tx,v)$。根据链式法则， 我们得到

$$d\psi_t(v) \circ dF(1,v) = dF(t,v) \circ dL_t(1,v).$$

由于$dL_t(1,v) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & I_{2r-1} \end{pmatrix}$ 且$d\psi(v) = tI_{2r}$， 我们得到

$$t^{2r} J_F(1,v) = t J_F(t,v)$$

于是（27）得证。由（27）可得

$$\mu(A_{<1}) = \int_0^1 \left(\int_{A_1} d\sigma_t \right) dt = \int_{A_1} \sigma_1 \cdot \int_0^1 t^{2r-1} dt = \frac{\sigma_1(A_1)}{2r}. \tag{28}$$

现在我们证明在 $a = b = 1$ 的情况下的 (26)。根据定义， 对所有 $v \in A_{<1}$， 我们有 $(v,w) \in C(1,1)_{<1}$ 当且仅当 $w \in B^{<1-h(v,v)}$。因此

$$\begin{aligned}
\mu(C(1,1)_{<1}) &= \int_{A_{<1}} \nu(B_{<1-h(v,v)}) d\mu(v) = \nu(B_{<1}) \cdot \int_{A_{<1}} (1-h(v,v))^s d\mu(v) \\
&= \nu(B_{<1}) \sigma_1(A_1) \cdot \int_0^1 (1-t^2)^s t^{2r-1} dt \\
&= \nu(B_{<1}) \cdot \frac{\sigma_1(A_1)}{2} \int_0^1 (1-x)^s x^{r-1} dx \quad \text{(change of variable } x = t^2\text{)} \\
&= \nu(B_{<1}) \cdot \frac{\sigma_1(A_1)}{2} \cdot \frac{s!(r-1)!}{(r+s)!} \\
&= \nu(B_{<1}) \cdot \frac{\sigma_1(A_1)}{2r} \cdot \frac{s!r!}{(r+s)!} \\
&= \nu(B_{<1}) \cdot \mu(A_{<1}) \cdot \frac{s!r!}{(r+s)!} \quad \text{(by (28)).}
\end{aligned}$$

对于一般情形，我们将 h 替换为 $h' := ah$ ，并将 g 替换为 $g' := bg$。由于我们有

$$\mu(\{v \in A,\ 0 < h'(v,v) < 1\}) = \mu(\{v \in A,\ 0 < h(v,v) < \frac{1}{a}\}) = \frac{\mu(A_{<1})}{a^r}$$

and

$$\nu(\{w \in B,\ 0 < g'(w,w) < 1\}) = \nu(\{w \in B,\ 0 < g(w,w) < \frac{1}{b}\}) = \frac{\nu(B_{<1})}{b^s}$$

等式 (26) 由将$a = b = 1$ 应用于h' 和g'所得的特例推出。 □

注记 A.4。 在$a = b = 1$的情形下，引理 A.3 是对 [8, §6.2] 中一个结果的改写。

将引理 A.3 应用于$E = H^1(Y, \mathbb{C})^-$、$V = H^1(Y0, \mathbb{C})$、$W = H^1(Y1, \mathbb{C})$ 的情形，其中h 和g 对应面积函数，$a = 1$ 和$b = 2$，可得

$$d\mathrm{vol}^*(\mathrm{Prym}_{\leq 1}(0^3)) = \frac{2!2!}{2^2 \cdot 4!} \cdot \mu(\Omega_{\leq 1}\mathcal{M}_1(0))^2 = \frac{\mu(\Omega_{\leq 1}\mathcal{M}_1(0))^2}{24}, \tag{29}$$

其中 $\mathrm{Prym}_{\leq 1}(0^3)$ 和 $\Omega_{\leq 1}\mathcal{M}_1(2)$ 分别是 $\mathrm{Prym}(0^3)$ 和 $\Omega_{\leq 1}\mathcal{M}_1(2)$ 中面积不超过 1 的曲面集合，而 μ 是 $\Omega\mathcal{M}_1(0)$ 上的 Masur-Smillie-Veech 体积。

令 vol_1^* 和 μ_1 分别表示由 vol^* 和 μ 在 $\mathrm{Prym}_1(0^3)$ 和 $\Omega_1\mathcal{M}_1(0)$ 上诱导的测度。根据定义，有

$$\mathrm{vol}_1^*(\mathrm{Prym}_1(0^3)) = 8\mathrm{vol}^*(\mathrm{Prym}_{\leq 1}(0^3)) \quad \text{and} \quad \mu_1(\Omega_1\mathcal{M}_1(2)) = 4\mu(\Omega_{\leq 1}\mathcal{M}_1(0)).$$

因此我们得到

$$\mathrm{vol}_1^*(\mathrm{Prym}_1(0^3)) = \frac{\mu_1(\Omega_1\mathcal{M}_1(0))^2}{48}.$$

现在，由于 $\mu_1(\Omega_1\mathcal{M}_1(0)) = \pi^2/3$（见 [8, 表 1]），且 $d\mathrm{vol}' = 16d\mathrm{vol}^*$，我们有

$$\tilde{c}_3(4, -1^4) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{16\pi^4/(9 \cdot 48)}{\pi^4/12} = \frac{2}{9}.$$

参考文献

[1] J.S. Athreya、A. Eskin 和 A. Zorich： $\mathbb{CP}^1$上二次微分模空间的直角台球与体积，附录由 Jon Chaika 撰写，*Ann. Sci. de l'E.N.S.* (4) 49 (2016), no. 6, 1311–1386. [2] D. Aulicino 和 D.-M. Nguyen： $\mathcal{H}(2, 2)$ 与 $\mathcal{H}(3, 1)$ 中的秩二仿射子流形，*Geometry & Topology 20* (2016), 2837–2904.[3] M. Bainbridge：亏格二 Teichmuller 曲线的欧拉示性数，*Geometry & Topology* **11** (2007), 1887- 2073.[4] M. Bainbridge：带障碍物的 L 形台球桌中的台球，*Geom. Funct. Anal.* **20** (2010), no. 2, 299-356. [5] W. Barth：具有 (1, 2) 极化的阿贝尔曲面，代数几何，仙台，*1985*，**Adv. Stud. Pure Math.**，第 10 卷，North-Holland，阿姆斯特丹，1987，第 41-84 页。[6] H. Cohen：涉及二次特征的 L 函数在负整数处取值的和，*Math. Annal.* **217** (1975), no. 3, 271–285.[7] H. Cohen 和 J. Oesterlé：模形式空间的维数，波恩 1976，**627**，69 78**Springer Lecture Notes** - .[8] A. Eskin、H. Masur 和 A. Zorich：主边界、计数问题与 Siegel–Veech 常数，*Publ.Math.Inst.Hautes ÉtudesSci.* **97** (2003), 61-179.[9] A. Eskin 和 M. Mirzakhani：$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 在模空间上的作用的不变测度与平稳测度，*Publ. Math. I.H.É.S.* **127** (2018), no.1, 95–324.[10] A. Eskin、M. Mirzakhani 和 A. Mohammadi：$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 在模空间上的作用的孤立性、等分布与轨道闭包，*Annals of Math.* **182** (2015), no.2, 673–721.

[11] E. Goujard：二次微分模空间分层的体积：求得明确数值，Ann. Inst. Fourier, 66 (2016), no.6, 2203–2251. [12] F. Hirzebruch：希尔伯特模曲面，Enseignement Math. (2) 19 (1973), 183–281. [13] M. Kontsevich 和 A. Zorich：具有指定奇点的阿贝尔微分模空间的连通分支，Invent. Math. 153 (2003), no. 3, 631–678. [14] E. Lanneau 和 D.-M. Nguyen：亏格三和亏格四中由 Weierstrass Prym 特征形式生成的 Teichmüller 曲线，Journal of Topol. 7 (2014), no. 2, 475–522. [15] E. Lanneau 和 D.-M. Nguyen：Prym 特征形式轨迹中的 $GL^+(2,\mathbb{R})$ 轨道闭包，Geometry & Topology 20 (2016), 1359–1426.[16] E. Lanneau 和 D.-M. Nguyen：亏格三中 Prym 特征形式的连通分支，Math. Ann. 371 (2018), no.1-2, 753–793.[17] C. McMullen：希尔伯特模曲面上的台球与 Teichmüller 曲线，J. Amer. Math. Soc 16, (2003), no. 4, 857–885.[18] C. McMullen：亏格二中的 Teichmüller 曲线：判别式与自旋，Math. Ann. 333 (2005), 87–130. [19] C. McMullen：Prym 簇与 Teichmüller 曲线，Duke Math. J. 133 (2006), no.3, 569–590. [20] C. McMullen：亏格二中 $SL_2(\mathbb{R})$ 在模空间上的动力系统，Annals of Math. (2) 165 (2007), no. 2, 397-456. [21] C. McMullen：希尔伯特模曲面上的叶状结构，Amer. J. Math. 129 (2007), no. 1, 183-215.[22] M. Möller：希尔伯特模曲面中的 Prym 覆叠、theta 函数与 Kobayashi 曲线，Amer. J. Math. 136 (2014), no. 4, 995–1021. [23] T. Miyake：模形式，Springer 数学专著，日文译本由 Yoshitaka Maeda 翻译，Springer-Verlag Berlin Heidenberg 1989. [24] D.-M. Nguyen：Prym 特征形式轨迹 $\Omega\mathcal{M}_3(2,2)^{\text{odd}}$的交理论与 Siegel-Veech 常数，预印本，arXiv:2510.23333.[25] C. Siegel：若干无限群的基本域体积，Trans. Amer. Math. Soc. 39 (1936), no. 2, 209-218.[26] G. van der Geer：希尔伯特模曲面，数学及其边界领域成果 (3), 第 6 卷 (1988)，Springer-Verlag，柏林。

大 图尔大学、奥尔良大学、法国国家科学研究中心、IDP、混合研究单位 7013、格朗蒙公园，37200 图尔，法国
电子邮箱地址：D.-M. Nguyen：duc-manh.nguyen@univ-tours.fr