arXiv:2602.19943v1 [cs.RO] 23 Feb 2026

神经 Koopman 算子的缩放定律

Abulikemu Abuduweili*、Yuyang Pang*、Feihan Li 和 Changliu Liu

摘要—**数据驱动的神经 Koopman 算子理论已成为线性化和控制非线性机器人系统的强大工具。然而，这些数据驱动模型的性能从根本上取决于样本量与模型维度之间的权衡，而这种关系的缩放定律仍不明确。本文通过推导并实证验证连接样本量、潜在空间维度和下游控制质量的缩放定律，建立了一个严谨的框架来应对这一挑战。我们推导出 Koopman 近似误差的理论上界，并将其明确分解为采样误差和投影误差。我们表明，这些误差项相对于数据集大小和潜在维度以特定速率衰减，为缩放定律提供了严谨的依据。基于理论结果，我们为神经 Koopman 算子引入了两种轻量级正则化器：协方差损失，用于帮助稳定学习到的潜在特征；逆控制损失，用于确保模型与物理驱动相匹配。在六种机器人环境中开展的系统实验结果证实，模型拟合误差遵循推导出的缩放定律，且这些正则化器能够提高动态模型拟合保真度，并增强闭环控制性能。总之，我们的研究为学习用于控制的 Koopman 动力学时如何在数据采集与模型容量之间分配资源提供了一套简明方案。**

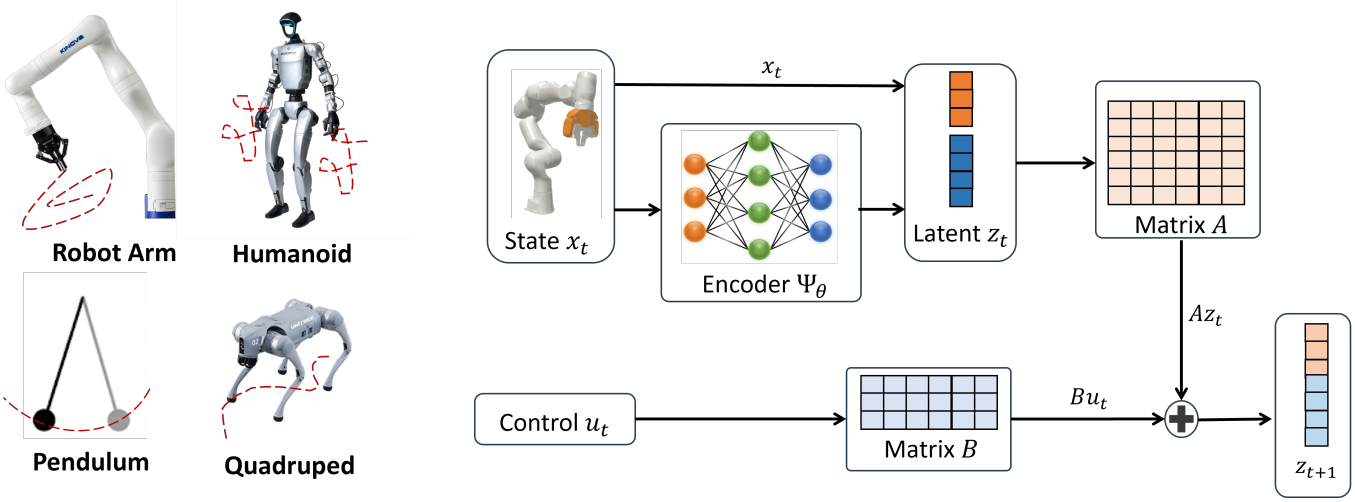
索引词—**非线性控制，动力学模型，Koopman 算子理论，缩放定律**

I. 引言

控制非线性动力系统仍是机器人学和控制理论中的一项核心挑战 [1]。为应对这一挑战，已经形成了两种主流范式。无模型控制（包括无模型强化学习（RL））在足式运动等复杂领域展现出卓越的任务级性能 [2]，，但其样本复杂度高，且控制器高度依赖具体任务，在新任务或动力学变化时需要重新训练[3], [4]。相比之下，基于模型的方法 [5] 将动力学建模与控制解耦，使通用动力学模型能够在各种下游任务中重复使用。在这一范式中，非线性模型预测控制（MPC）等直接方法处理完整的动力学，但每个时间步都需要求解计算开销巨大的非凸优化问题 [6], [7]。迭代线性二次调节等局部线性化方法效率更高，但仅在标称轨迹附近可靠；当系统偏离该轨迹时，其性能可能不可预测地下降 [8], [9]。应对这些偏差通常需要复杂的自适应机制来维持模型在不确定性下的保真度 [10], [11]。这种权衡促使我们关注全局线性化技术：这类技术在更高维的“提升”潜在空间中，将复杂的非线性动力学表示为全局有效的线性系统。通过一次性支付离线建模成本，这些方法使我们能够在实时执行中运用高效而强大的线性控制技术。

起源于20世纪30年代 [12]，，Koopman 算子理论分析的是潜在状态中可观测（嵌入）函数的演化，而非在原始非线性空间中跟踪状态。它确立了一个无限维线性算子支配这一潜在演化，从而使完整的非线性系统能够在提升函数空间中借助线性理论进行分析 [13]。该框架广泛应用于流体动力学 [14], 、电力系统以及分子动力学等领域。实际应用依赖于数据驱动方法，这些方法通过扩展动态模态分解（EDMD） [15]寻求Koopman 算子的有限维近似。EDMD需要用户指定的基函数字典（例如多项式、径向基函数）来定义可观测量潜在空间，然后通过最小二乘回归计算有限维线性算子（矩阵）。因此，EDMD的成功完全取决于字典选择，而其可扩展性受维数灾难限制，因为基函数的数量往往随系统的状态维数呈指数增长 [16]。为克服这一局限，近期研究使用深度神经网络，从数据中直接学习可观测函数。在这一常被称为**神经Koopman**的范式中，神经网络嵌入函数将原始状态映射到可观测量潜在空间。整个模型以端到端方式训练，以同时发现一组基函数（即嵌入）以及支配潜在动力学的线性算子 [17], [18]。Koopman理论与深度学习之间的这种协同推动了机器人学的重大进展，应用范围从运动规划 [19] 到实时低层控制 [20], [21]。与此并行的理论工作致力于使这些数据驱动近似更加严格。近期工作推导了将误差与字典丰富度联系起来的定量有限数据误差界 [22], ，建立了用以应对伪特征值的谱收敛速率 [23], ，并提出了强制李雅普诺夫稳定性的谱正则化器 [24]。然而，这些分析通常依赖于固定字典或渐近论证，使得神经 近似的有限样本行为在很大程度上仍未得到刻画。另一方面，将学习得到的 Koopman 模型与线性模型预测控制相结合，已在具有挑战性的四足机器人与人形系统上实现了高保真跟踪 [25], [26]。尽管取得了这些实证上的成功，Koopman 算子

作者来自美国宾夕法尼亚州匹兹堡市卡内基梅隆大学机器人研究所，邮编 15213。（abulikea, yuyangp, feihanl, cliu6）@andrew.cmu.edu。*作者贡献相同。



（a）非线性机器人系统（b）Koopman神经网络架构图 1：概述。（a）在物理状态空间中呈现复杂非线性动力学的机械系统（例如机械臂、四足机器人）。（b）我们提出的 Koopman架构使用编码器网络 Ψ_θ 将物理状态 x_t 映射到潜在空间 z_t，其由线性动力学控制：$z_{t+1} = \mathbf{A}z_t + \mathbf{B}u_t$。

理论与有限样本、有限容量模型的实际性能之间的形式化联系仍然缺乏。本文恰好弥合了这一差距。

然而，这些数据驱动方法的性能从根本上取决于训练样本量与模型嵌入维度之间的相互作用。这一观察与深度学习中对**神经网络缩放定律**的研究类似；在深度学习中，模型性能已被证明会随着数据、模型规模和计算量按幂律可预测地扩展[27], [28]。在机器人学领域，近期的大规模研究通过实证验证了模仿学习和离线强化学习中的这些缩放特性 [29]–[31]。然而，针对数据驱动 Koopman 算子的系统性理论研究仍然缺失。因此，实践者面临着一些关键问题：要提升表现不佳的模型，应该投入更多数据还是提高模型容量？每增加一种资源，误差会降低多少？预期收益是否值得付出相应成本？为回答这些问题并指导设计，本文推导并通过实证验证了神经 Koopman 算子的缩放定律。我们的主要贡献如下：**1）一个理论框架**，用于建立 Koopman 近似误差的缩放定律，并将其分解为数据相关项和模型相关项，同时给出明确的衰减率及其基本假设；**2）两种轻量级正则化项**，由我们的理论启发，可显著增强模型学习和闭环控制；以及**3）系统性实验**，涵盖六项机器人任务，验证理论缩放定律，并展示这些正则化项在模型预测控制（模型预测控制）中的有效性。脚本可在 https://github.com/intelligent-control-lab/Koopman-Scaling 获取。

II. 预备知识：Koopman 算子理论

我们简要概述Koopman算子框架。考虑一个离散时间非线性自治系统（例如图1a中的机器人平台），其由下式支配：$s^+ = f(s)$，对于$s \in \mathcal{S}$，其中 $s \in \mathcal{S}$ 为状态，s^+ 为转移后的状态。Koopman理论通过将状态嵌入到具有线性动力学的潜在空间中，经由向量值（可观测）**嵌入函数** $\mathbf{\Phi}^\star$：$\mathcal{S} \to \mathcal{O}$。无穷维Koopman 算子 $\mathcal{K}$ 将潜在状态**线性地** 沿时间向前传播：

$$(\mathcal{K}\Phi^\star)(s) = \Phi^\star(f(s)). \tag{1}$$

对于受控系统 $x^+ = f(x,\ u)$，其状态为 $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}$，控制输入为 $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n_u}$。我们通过将状态 x 升维至有限维子空间 $\mathbb{R}^n$，并借助嵌入 $\Phi(x)$，将状态依赖的演化线性近似，同时将u视为外生输入。我们定义一个提升后的状态—控制向量φ，将可观测量与输入拼接起来：

$$\varphi(x,u) := \begin{bmatrix}\Phi(x)\\ u\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+n_u}, \quad \text{with} \quad \Phi : \mathbb{R}^{n_x} \to \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

用矩阵 $\mathbf{K}$近似 Koopman 算子 $\mathcal{K}$，可得到提升后的线性动力学：

$$\begin{bmatrix}\Phi(x^+)\\ u^+\end{bmatrix} \approx \mathbf{K}\begin{bmatrix}\Phi(x)\\ u\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Phi(x)\\ u\end{bmatrix} \tag{3}$$

对于控制，我们关注状态依赖的潜变量 $\Phi(x)$ 的演化，并将控制序列 $\{u\}$ 视为独立的外部输入。这样可将矩阵方程的首行简化为广泛使用的线性动力学模型：

$$\Phi(x^+) = \mathbf{A}\Phi(x) + \mathbf{B}u \tag{4}$$

其中，$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 控制自主可观测量演化，$\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n_u}$ 则刻画驱动效应。

为避免退化的平凡解（例如 $\mathbf{A} = \mathbf{B} = 0$ 且$\Phi \equiv 0$），并保留状态的物理意义，我们将物理状态增补到嵌入中，如图 1(b) 所示：

$$z := \Phi_\theta(x) = \begin{bmatrix}x\\ \Psi_\theta(x)\end{bmatrix}, \qquad \Psi_\theta : \mathbb{R}^{n_x} \to \mathbb{R}^{\,n-n_x} \tag{5}$$

其中，完整嵌入 Φ_θ 将 x 与神经编码器 Ψ_θ学习到的残差非线性特征拼接起来。由于潜向量严格包含物理状态，x 可以通过固定的线性投影

完美恢复：$\mathbf{P}$：

$$x = \mathbf{P}z = \mathbf{P}\Phi_\theta(x),\ \mathbf{P} = \left[\mathbf{I}_{n_x}, \mathbf{0}_{n_x\times(n-n_x)}\right] \in \mathbb{R}^{n_x\times n} \quad (6)$$

这种构造使状态约束表述能够直接在潜在空间中表达，同时保留线性系统演化。嵌入函数 Φ_θ 和 Koopman 矩阵 A 和 B 均通过端到端方式学习。可训练参数为 $\mathcal{T} \doteq (\theta,\ \mathbf{A},\ \mathbf{B})$。

III. 缩放定律的理论分析

我们为神经 Koopman 缩放定律奠定理论基础。尽管先前研究已证明，随着样本量 $m \to \infty$和潜在维度 $n \to \infty$ [20]增加，数据驱动算法（如扩展动态模态分解（EDMD））渐近收敛到真实算子 $\mathcal{K}$ ，[32], [33],我们的分析建立在这些基础结果之上，但有所不同：在额外且定义明确的假设下，我们给出了**明确的收敛速率**。为清晰起见，我们分析自治系统；通过增广状态 $s = [x^\top, u^\top]^\top$，这一分析可自然扩展到受控系统。

A. 误差分解

1) Koopman 算子理论：考虑可分拓扑空间$\mathcal{S}$ 上具有不变测度 μ的离散时间动力系统 $s^+ = f(s)$。我们将分析提升到可观测量空间 $\mathcal{H} \subset L_2(\mathcal{S},\ \mu)$，即平方可积函数构成的可分希尔伯特空间。此构造有两个目的：首先， $\mathcal{H}$ 的可分性确保存在可数正交归一基，以进行有限维截断；其次， μ的不变性使我们能够运用比尔霍夫遍历定理 [34]，通过单条时间轨迹近似系综平均。 $\mathcal{H}$ 上的内积定义为：

$$\langle g_1, g_2\rangle_{\mathcal{H}} := \int_{\mathcal{S}} g_1(s)g_2^*(s)d\mu(s) \quad (7)$$

Koopman 算子 $\mathcal{K}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 作用于任意 $\psi \in \mathcal{H}$，其定义为：

$$(\mathcal{K}\psi)(s) = \psi \circ f(s) \quad (8)$$

2) EDMD（扩展动态模态分解）：EDMD 对 Koopman 算子 $\mathcal{K}$进行有限维矩阵近似。给定嵌入 $\mathbf{\Phi}(s) = [\phi_1(\{v10) .. .,\ \phi_n(s)]^\top \in \mathbb{R}^n$，我们定义潜在子空间$\mathcal{H}_n$ = span $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$。对于 m 个数据对 $\{(s_i,\ s_i^+)\}_{i=1}^m$，EDMD 寻求一个矩阵$\mathbf{K}_{n,\ m} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ，使经验平方误差最小：

$$\min_{\mathbf{K}\in\mathbb{R}^{n\times n}} \sum_{i=1}^{m} \left\|\mathbf{\Phi}(s_i^+) - \mathbf{K}\mathbf{\Phi}(s_i)\right\|_2^2 \quad (9)$$

其中， $\|\cdot\|_2$ 表示欧几里得范数。虽然该目标函数可以推广到 l_p 范数，但为了利用谱性质，我们将分析限制在 l_2 。假设经验格拉姆矩阵 $\mathbf{G}_{n,\ m}$ 可逆，则可得到以下闭式解：

$$\mathbf{K}_{n,m} = \mathbf{A}_{n,m}\mathbf{G}_{n,m}^{-1}, \quad (10)$$

$$\mathbf{G}_{n,m} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \mathbf{\Phi}(s_i)\mathbf{\Phi}(s_i)^\top, \mathbf{A}_{n,m} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \mathbf{\Phi}(s_i^+)\mathbf{\Phi}(s_i)^\top.$$

在无限数据极限（$m \to \infty$）下，我们通过期望定义总体格拉姆矩阵$\mathbf{G}_n$ 和相关矩阵$\mathbf{A}_n$ 在不变测度 μ上，从而得到理想的有限秩算子$\mathbf{K}_n$：

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{A}_n\mathbf{G}_n^{-1} \quad (11)$$

$$\mathbf{G}_n = \mathbb{E}_s[\mathbf{\Phi}(s)\mathbf{\Phi}(s)^\top],\ \mathbf{A}_n = \mathbb{E}_s[\mathbf{\Phi}(s^+)\mathbf{\Phi}(s)^\top].$$

这里，$\mathbf{K}_n$ 表示在已知完美分布知识的情况下，将 $\mathcal{K}$ 投影到 $\mathcal{H}_n$ 上的最优投影，可作为经验估计量 $\mathbf{K}_{n,\ m}$的无噪声自由极限。

3) Koopman近似误差：[33]揭示了一个关键见解：EDMD通过将Koopman 算子 $\mathcal{K}$ 正交投影到 $\mathcal{H}_n$上来进行近似。我们区分了经验投影 $\mathcal{K}_{n,\ m}$和理想投影 $\mathcal{K}_n$：前者在 m 个样本上最小化经验风险，后者则基于真实测度 μ 定义为总体极限 $\mathcal{K}_n = \lim_{m\to\infty} \mathcal{K}_{n,\ m}$。

我们将总体近似误差 $\epsilon(n,\ m)$定义为经验算子$\mathcal{K}_{n,\ m}$ 与无限维算子 $\mathcal{K}$ 之间的距离，该距离是在诱导算子范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$下度量的：

$$\begin{aligned}\epsilon(n,m) &:= \|\mathcal{K}_{n,m}\mathcal{P}_n - \mathcal{K}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \\ &= \sup_{\psi\in\mathcal{H},\|\psi\|_{\mathcal{H}}=1} \|(\mathcal{K}_{n,m}\mathcal{P}_n - \mathcal{K})\psi\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned} \quad (12)$$

其中， $\mathcal{P}_n : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_n$ 是正交子空间投影。以 $\mathcal{K}_n$ 为中间参照，利用三角不等式可得：

$$\epsilon(n,m) \le \underbrace{\|\mathcal{K}_{n,m}\mathcal{P}_n - \mathcal{K}_n\mathcal{P}_n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}}_{\epsilon_{\text{samp}}(n,m)} + \underbrace{\|\mathcal{K}_n\mathcal{P}_n - \mathcal{K}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}}_{\epsilon_{\text{proj}}(n)}. \quad (13)$$

这将误差分为两个来源。**1) 采样误差（ϵ_{samp}）：**有限样本估计所产生的方差误差，用于量化 $\mathcal{K}_{n,m}$ 与其总体极限 $\mathcal{K}_n$ 之间的偏差。**2) 投影误差（ϵ_{proj}）：**偏差误差，表示将无限维的 $\mathcal{K}$ 投影到有限 n 维子空间 $\mathcal{H}_n$ 所造成的不可约信息损失。尽管先前的工作已证明渐近收敛，我们的贡献是在与神经嵌入相关的假设下，推导出两者 ϵ_{samp} 和 ϵ_{proj} 的显式缩放速率。

B. 采样误差收敛

我们为分析建立必要的假设：

假设 1（独立同分布样本）。 数据样本 $\{(s_i, s_i^+)\}_{i=1}^m$ 独立同分布地取自分布 μ。

假设 2（有界潜在状态）。 嵌入一致有界。具体而言，存在一个常数 $B > 0$，使得对所有 $s \in \mathcal{S}$， $\|\mathbf{\Phi}(s)\|_2 \le B$。

假设 3（良态 Gram 矩阵）。 无限数据格拉姆矩阵 $\mathbf{G}_n$ 严格正定，且$\lambda_{\min}(\mathbf{G}_n) \ge \gamma > 0$。我们进一步假设，对于有限样本量 m，经验格拉姆矩阵 $\mathbf{G}_{n,m}$ 以至少 $1-\delta_m$ 的概率保持良态（具体而言， $\lambda_{\min}(\mathbf{G}_{n,m}) \ge \frac{\gamma}{2}$），其中 $\lim_{m\to\infty}\delta_m = 0$。

假设1可以放宽为遍历采样，此时时间平均收敛到系综平均 [33]。假设2很容易通过有界激活函数（例如，双曲正切函数）或权重归一化得到满足。假设3确保学习到的

嵌入在总体极限下线性无关。尽管严格为正， $\lambda_{\min}(\mathbf{G}_n)$ 通常会由于潜在的“谱拥挤”而随着 n的增长而减小。对于有限样本，矩阵集中不等式 [35] 保证，当 m足够大时，$\mathbf{G}_{n,m}$ 集中在$\mathbf{G}_n$附近，从而以高概率确保可逆性 $1-\delta_m$。

命题 1（采样误差）。 在假设 *1* 至 *3* 成立的条件下，以至少 $1-2\delta-\delta_m$ 的概率，采样误差满足以下界：

$$\epsilon_{samp}(n,m) \le \kappa_{bias}\cdot\frac{\ln(2n/\delta)}{m}+\kappa_{var}\cdot\sqrt{\frac{\ln(2n/\delta)}{m}} \tag{14}$$

$$\kappa_{bias}=\frac{4B^3}{3\sqrt{\gamma^3}}\left(\frac{2B^2}{\gamma}+1\right),\kappa_{var}=\frac{2\sqrt{2}B^3}{\sqrt{\gamma^3}}\left(\frac{2B^2}{\gamma}+1\right)$$

证明。 在数据驱动框架中，有限秩算子$\mathcal{K}_{n,m}$ 通过矩阵 $\mathbf{K}_{n,m}\in\mathbb{R}^{n\times n}$在计算上实现。为了严格分析近似误差，我们必须建立希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的诱导算子范数与欧几里得空间上易于处理的矩阵范数之间的联系。

采样误差算子 $(\mathcal{K}_{n,m}-\mathcal{K}_n)\,\mathcal{P}_n$作用于子空间 $\mathcal{H}_n$中的函数。由于每个函数 $\psi\in\mathcal{H}_n$都可由系数向量 $\mathbf{c}\in\mathbb{R}^n$ 唯一表示（通过$\psi=\mathbf{c}^\top\mathbf{\Phi}$），算子偏差直接对应于矩阵偏差 $\Delta\mathbf{K}=\mathbf{K}_{n,m}-\mathbf{K}_n$。然而，由于基 $\mathbf{\Phi}$ 不一定是正交归一的，希尔伯特空间相对于欧几里得空间的几何结构会发生扭曲。这种扭曲由总体格拉姆矩阵 $\mathbf{G}_n$刻画。

在假设 2 下， $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上的算子范数等价于加权矩阵范数。具体而言，它以矩阵差的谱范数为上界，并按基几何结构 [23] 的条件数进行缩放。该关系给出了采样误差的如下上界：

$$\begin{aligned}\epsilon_{\text{samp}}&=\|(\mathcal{K}_{n,\,m}-\mathcal{K}_n)\mathcal{P}_n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}=\|\mathbf{G}_n^{1/2}(\mathbf{K}_{n,\,m}-\mathbf{K}_n)\mathbf{G}_n^{-1/2}\|\\&\le\sqrt{\kappa_{\mathbf{G}_n}}\cdot\|\mathbf{K}_{n,m}-\mathbf{K}_n\|_\sigma\le\sqrt{\kappa}\cdot\|\mathbf{K}_{n,m}-\mathbf{K}_n\|_\sigma\end{aligned} \tag{15}$$

其中 $\|\cdot\|_\sigma$ 表示系数矩阵的谱范数。标量前置因子 $\sqrt{\kappa_{\mathbf{G}_n}}$ 量化了特征基所引起的几何畸变，其通过格拉姆矩阵$\mathbf{G}_n$的条件数定义。通过应用假设 2 和假设 3，我们为该条件数导出一个依赖于系统的常数上界 κ：

$$\kappa_{\mathbf{G}_n}:=\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{G}_n)}{\lambda_{\min}(\mathbf{G}_n)}\le\frac{\mathbb{E}_s\left[\|\Phi(s)\|_2^2\right]}{\gamma}\le\frac{B^2}{\gamma}:=\kappa. \tag{16}$$

注释 1。 我们强调，在式 (16) 中推导出的上界 κ 是一个与系统相关的常数，与样本量 m 和潜在维度 n无关，仅由有界特征基的总体几何结构决定。尽管严格正交归一（假设 4）代表了 $\mathbf{G}_n=\mathbf{I}$ （意味着 $\kappa=1$）这一理想情形，但它并非采样误差收敛的先决条件。这一认识促使我们在第 IV 节引入协方差正则化（$\mathcal{L}_{cov}$），通过推动学习到的基趋于正交归一，明确地最小化该常数。通过使格拉姆矩阵更接近单位矩阵，该正则化确保有效条件数趋近于 1，从而收紧误差界。

此外，当库普曼矩阵通过普通最小二乘法（10）估计时，我们有

$$\begin{aligned}\epsilon_{\text{samp}}(n,m)&\le\sqrt{\kappa}\|\mathbf{K}_{n,m}-\mathbf{K}_n\|_\sigma\\&=\sqrt{\kappa}\|\mathbf{A}_{n,m}\mathbf{G}_{n,m}^{-1}-\mathbf{A}_n\mathbf{G}_n^{-1}\|_\sigma\end{aligned} \tag{17}$$

我们利用三角不等式分解（17）中的采样误差：

$$\begin{aligned}\epsilon_{\text{samp}}(n,m)&\le\sqrt{\kappa}\|(\mathbf{A}_{n,m}-\mathbf{A}_n)\mathbf{G}_n^{-1}+\mathbf{A}_{n,m}(\mathbf{G}_{n,m}^{-1}-\mathbf{G}_n^{-1})\|_\sigma\\&\le\sqrt{\kappa}\|\mathbf{A}_{n,m}-\mathbf{A}_n\|_\sigma\|\mathbf{G}_n^{-1}\|_\sigma+\sqrt{\kappa}\|\mathbf{A}_{n,m}\|_\sigma\|\mathbf{G}_{n,m}^{-1}-\mathbf{G}_n^{-1}\|_\sigma\end{aligned} \tag{18}$$

为了界定式 (18) 中的每一项，我们利用矩阵范数的性质。首先，考虑$\mathbf{G}_{n,m}$与$\mathbf{G}_n$的逆之差。利用恒等式$\mathbf{G}_{n,\,m}^{-1}-\mathbf{G}_n^{-1}=\mathbf{G}_n^{-1}(\mathbf{G}_n-\mathbf{G}_{n,m})\mathbf{G}_{n,m}^{-1}$，可得：

$$\|\mathbf{G}_{n,m}^{-1}-\mathbf{G}_n^{-1}\|_\sigma\le\|\mathbf{G}_n^{-1}\|_\sigma\|\mathbf{G}_n-\mathbf{G}_{n,m}\|_\sigma\|\mathbf{G}_{n,m}^{-1}\|_\sigma \tag{19}$$

根据假设 2， $\mathbf{A}_{n,m}$ 的谱范数可界定为：

$$\|\mathbf{A}_{n,m}\|_\sigma\le\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m\|\mathbf{\Phi}(s_i)\|_2\|\mathbf{\Phi}(s_i^+)\|_2\le B^2 \tag{20}$$

总体界直接由假设 3 的严格正定性得到： $\|\mathbf{G}_n^{-1}\|_\sigma\le1/\gamma$。对于经验估计量，我们采用假设 3 的有限样本条件，该条件保证事件 $\mathcal{E}_{inv}=\{\lambda_{\min}(\mathbf{G}_{n,m})\ge\gamma/2\}$ 以至少 $1-\delta_m$ 的概率发生。在条件 $\mathcal{E}_{inv}$ 下，经验逆矩阵的谱范数有如下界：

$$\|\mathbf{G}_{n,m}^{-1}\|_\sigma=\frac{1}{\lambda_{\min}(\mathbf{G}_{n,m})}\le\frac{2}{\gamma},\quad\|\mathbf{G}_n^{-1}\|_\sigma\le\frac{1}{\gamma} \tag{21}$$

将式 (19)、(20) 和 (21) 代回式 (18)，以至少 $1-\delta_m$ 的概率：

$$\epsilon_{\text{samp}}(n,m)\le\frac{2B^2\sqrt{\kappa}}{\gamma^2}\|\mathbf{G}_{n,m}-\mathbf{G}_n\|_\sigma+\frac{\sqrt{\kappa}}{\gamma}\|\mathbf{A}_{n,m}-\mathbf{A}_n\|_\sigma \tag{22}$$

为了界定 $\|\mathbf{G}_{n,\,m}-\mathbf{G}_n\|_\sigma$和 $\|\mathbf{A}_{n,\,m}-\mathbf{A}_n\|_\sigma$，我们使用以下引理。

引理 1 (矩阵 Bernstein 不等式 [36])。 设 $\{Y_i\}_{i=1}^m$为相互独立的零均值随机矩阵，其维度为 $d_1\times d_2$。假设每个矩阵几乎必然满足 $\|Y_i\|_\sigma\le L$。定义方差参数 $v^2=\left\|\sum_{i=1}^m\mathbb{E}[Y_iY_i^\top]\right\|_\sigma$。那么，对所有 $\epsilon\ge0$，

$$\mathbb{P}\left(\left\|\sum_{i=1}^m Y_i\right\|_\sigma\ge\epsilon\right)\le(d_1+d_2)\exp\left(\frac{-\epsilon^2/2}{v^2+L\epsilon/3}\right). \tag{23}$$

设 $\mathbf{Y}_i$ 为如下定义的一列零均值随机矩阵：

$$\mathbf{Y}_i=\frac{1}{m}\left\{\mathbf{\Phi}(s_i)\mathbf{\Phi}(s_i^+)^\top-\mathbb{E}[\mathbf{\Phi}(s_i)\mathbf{\Phi}(s_i^+)^\top]\right\} \tag{24}$$

由此可得 $\mathbf{A}_{n,\,m}-\mathbf{A}_n=\sum_{i=1}^m\mathbf{Y}_i$。注意，$\mathbf{Y}_i$ 的独立性可直接由假设 1 得出。由于每个$\mathbf{Y}_i$ 仅由第 i 个数据对构造，因此该序列

$\{\mathbf{Y}_i\}_{i=1}^m$ 相互独立。根据假设 2，每个$\mathbf{Y}_i$ 的范数都有界：

$$\|\mathbf{Y}_i\|_\sigma \le \frac{1}{m}(\|\mathbf{\Phi}(s_i)\mathbf{\Phi}(s_i^+)^\top\|_\sigma + \|\mathbb{E}[\cdot]\|_\sigma) \le \frac{2B^2}{m} \quad (25)$$

方差参数 v^2 的上界为 v^2 = $\|\sum_{i=1}^m \mathbb{E}[\ _i\ _i^\top]\|_\sigma$ ≤ $\sum_{i=1}^m \|\mathbb{E}[\ _i\ _i^\top]\|_\sigma$ ≤**YYYYY**。应 $\sum_{i=1}^m \mathbb{E}[\|\ _i\|^2] \le \sum_{i=1}^m \left(\frac{2B^2}{m}\right)^2 = \frac{4B^4}{m}$ 用矩阵 Bernstein 不等式，并代入 $d_1 = d_2 = n$、$L = \frac{2B^2}{m}$ 和 $v^2 = \frac{4B^4}{m}$，可得：$\mathbb{P}(\|\mathbf{A}$ $\mathbb{P}\left(\|\sum_{i=1}^m\ _i\|_\sigma \ge \epsilon\right) \le 2n\ \left(\frac{-\epsilon^2/2}{4B^4/m + 2B^2\epsilon/3}\right)$ =exp $\mathbf{Y}$exp () $\left(\frac{-m\epsilon^2}{8B^4+4B^2\epsilon/3}\right)$。为了确保该概率不超过 δ，我们令右端（Right-Hand Side，RHS）等于 δ，并求解 ϵ。令 τ =ln(2n/δ)。条件变为：$\frac{m\epsilon^2}{8B^4+\frac{4}{3}B^2\epsilon} \ge \tau \implies m\epsilon^2 - \frac{4}{3}B^2\tau\epsilon - 8B^4\tau \ge 0$。这是关于 ϵ 的二次不等式。临界值是相应方程的正根：

$$\epsilon = \frac{\frac{4}{3}B^2\tau + \sqrt{\frac{16}{9}B^4\tau^2 + 32mB^4\tau}}{2m} \quad (26)$$

利用平方根的次可加性，$\sqrt{x+y} \le \sqrt{x} + \sqrt{y}$，$\epsilon \le \frac{2B^2\tau}{3m} + \frac{\sqrt{\frac{16}{9}B^4\tau^2}}{2m} + \frac{\sqrt{32mB^4\tau}}{2m} = \frac{2B^2\tau}{3m} + \frac{2B^2\tau}{3m} + \sqrt{\frac{8B^4\tau}{m}} = \frac{4B^2\tau}{3m} + \sqrt{\frac{8B^4\tau}{m}}$，我们简化上界。将 τ =ln(2n/δ) 代入推导出的解，得到以至少 $1-\delta$ 的概率成立的显式非渐近界：

$$\|\mathbf{A}_{n,m} - \mathbf{A}_n\|_\sigma \le \frac{4B^2\ln(2n/\delta)}{3m} + \sqrt{\frac{8B^4\ln(2n/\delta)}{m}} \quad (27)$$

同样的集中论证也适用于格拉姆矩阵近似误差 $\|\mathbf{G}_{n,\ m} - \mathbf{G}_n\|_\sigma$，因为根据假设 2，它满足相同的谱界和方差界。因此，以至少 $1-\delta$ 的概率：

$$\|\mathbf{G}_{n,m} - \mathbf{G}_n\|_\sigma \le \frac{4B^2\ln(2n/\delta)}{3m} + \sqrt{\frac{8B^4\ln(2n/\delta)}{m}} \quad (28)$$

为界定总采样误差 ϵ_{samp}，我们使用并集界。事件 (27) 和 (28) 的交集以至少 $1-2\delta$ 的概率成立。此外，经验 Gram 矩阵的逆在 (22) 中满足的稳定性条件以至少 $1-\delta_m$ 的概率成立。将这些界代入 (22) 并提取公因子后，我们得到以下结论：(14) 以至少$1-2\delta-\delta_m$ 的概率成立，其中 $\kappa_{\text{bias}} = \frac{4B^2\sqrt{\kappa}}{3}\left(\frac{2B^2}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma}\right)$，$\kappa_{\text{var}} 2\sqrt{2B^2}\sqrt{\kappa}\left(\frac{2B^2}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma}\right)$ κ 16 。利用 (-) 中的定义，我们证明命题 1。■ ■

对于大样本量（$m \to \infty$），误差由 $\mathcal{O}(m^{-1/2})$项主导。将正则化与基函数界视为固定，关于样本量 m 与维度 n 的渐近标度为：

$$\epsilon_{\text{samp}}(n,m) = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\ln(n)}{m}}\right) \quad (29)$$

这种缩放关系意味着，随着模型维度增大，维持近似保真度所需的样本复杂度也会随之增加。

具体而言，如果样本量按超线性速度增长至 $m \propto n\ln(n)$，那么采样误差将随着模型维度 n 的增大而趋于消失：

$$\epsilon_{\text{samp}}(n,m)\Big|_{m\propto n\ln(n)} = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n\ln n}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (30)$$

该结果证实，增大潜在维度 n 能够改进算子近似，前提是数据量m 以适当方式标度（$m \gtrsim n\ln\ n$）。

C. 投影误差的收敛

在本节中，我们建立投影误差$\epsilon_{\text{proj}}(n)$在潜在子空间 $\mathcal{H}_n$ 的维度 n增大时的收敛性。这需要一组不同于采样误差的假设。

假设 4（正交基）. 张成 $\mathcal{H}_n$ 的嵌入函数$\{\phi_i\}_{i=1}^n$ 关于 $\mathcal{H}$ 上的内积构成一个正交归一集。用矩阵记号，这意味着总体格拉姆矩阵恰好是单位矩阵，即$\langle\phi_i,\phi_j\rangle_{\mathcal{H}} = 0$ 对应于 $i \ne j$，而1对应于 $i = j$。

假设5（有界 Koopman 算子）。Koopman 算子 $\mathcal{K}$：$\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 是有界的，即 $\|\mathcal{K}\|_\sigma \le M < \infty$。

假设6（谱衰减）。Koopman 算子 $\mathcal{K}$的特征值按模长排序为 $|\lambda_1^\star| \ge |\lambda_2^\star| \ge \ldots$，并以至少多项式速率衰减：对于某个常数 $C > 0$, _ $|\lambda_i^\star| \le \frac{C}{i^\alpha}$ $\alpha > \frac{1}{2}$。

假设 7（子空间近似能力）。令$\mathcal{H}_n^* =$span$\{\phi_1^*,\ldots,\phi_n^*\}$ 为由 $\mathcal{K}$的 n个主导特征函数张成的子空间。我们假设神经网络 Φ_θ 的假设类具有足够的表达能力，因此存在一个参数设定 θ^*，使得学习子空间$\mathcal{H}_n$ 与 $\mathcal{H}_n^*$对齐。

假设 4 不具限制性，因为可以使用格拉姆–施密特正交化过程将 $\mathcal{H}$ 的任意可数稠密子集正交归一化。例如，当系统动力学为 Lipschitz 连续且状态空间有界时，假设5成立。对于许多耗散能量的稳定物理系统，假设6成立。假设 7 意味着我们的神经网络优化已学习到系统动力学中最主导的模态；鉴于神经网络具有通用近似能力，且优化目标如式（9）所示，这是合理的。

命题2 (投影误差). 在假设*4*至*7*下，投影误差满足：

$$\epsilon_{proj}(n) \le \frac{C}{\sqrt{2\alpha-1}} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1/2}} \quad (31)$$

证明。 投影误差 ϵ_{proj} 是将 $\mathcal{K}$ 截断至秩 n所产生的不可约近似偏差：

$$\epsilon_{\text{proj}} = \|\mathcal{K}_n\mathcal{P}_n - \mathcal{K}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \quad (32)$$

为了严格量化投影误差，我们从 $\mathcal{H}$上的诱导算子范数定义入手。误差$\epsilon_{\text{proj}}(n)$定义为近似

残差在单位球上的上确界：

$$\epsilon_{\text{proj}}(n) = \sup_{\psi\in\mathcal{H},\|\psi\|_{\mathcal{H}}=1} \|(\mathcal{K}_n\mathcal{P}_n - \mathcal{K})\psi\|_{\mathcal{H}} \tag{33}$$

根据假设 4，空间 $\mathcal{H}$ 存在一个正交归一特征基 $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$，其对应的特征值为 λ_i。任意单位范数函数 ψ 均可展开为 $\psi = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\phi_i$，其中系数满足 $\sum_{i=1}^{\infty}|c_i|^2 = 1$。

我们分析误差算子对 ψ的作用。根据假设7，我们注意到有限秩算子 $\mathcal{K}_n$能够准确捕获前 n 个特征值（即，对于 $i \le n$，有 $\mathcal{K}_n\phi_i = \lambda_i\phi_i$），且 $\mathcal{P}_n$ 是向 span $\{\phi_1,\dots,\phi_n\}$的正交投影。误差展开如下：$(\mathcal{K}_n\mathcal{P}_n - \mathcal{K})\psi = \mathcal{K}_n\mathcal{P}_n(\sum_{i=1}^{\infty} c_i\phi_i) - \mathcal{K}(\sum_{i=1}^{\infty} c_i\phi_i) = \mathcal{K}_n(\sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i) - \sum_{i=1}^{\infty} c_i\lambda_i\phi_i = \sum_{i=1}^{n} c_i\lambda_i\phi_i - \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\lambda_i\phi_i + \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i\lambda_i\phi_i\right) = -\sum_{i=n+1}^{\infty} c_i\lambda_i\phi_i$。该残差的平方范数由截断模态的能量决定。利用基 $\{\phi_i\}$的正交归一性，我们有：

$$\|(\mathcal{K}_n\mathcal{P}_n - \mathcal{K})\psi\|_{\mathcal{H}}^2 = \left\|\sum_{i=n+1}^{\infty} c_i\lambda_i\phi_i\right\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty}|c_i|^2|\lambda_i|^2 \tag{34}$$

算子范数是该量在满足$\sum|c_i|^2 = 1$条件下的上确界，这意味着对于所有 i，都有 $|c_i|^2 \le 1$。虽然精确的算子范数对应于尾部的谱半径（$\sup_{i>n}|\lambda_i|$），但我们希望用总谱能量来给出一个界，以刻画总信息损失。因此，我们可以对误差作如下界定：

$$\epsilon_{\text{proj}}(n)^2 = \sup_{\|\mathbf{c}\|=1}\sum_{i=n+1}^{\infty}|c_i|^2|\lambda_i|^2 \le \sum_{i=n+1}^{\infty}|\lambda_i|^2 \tag{35}$$

根据假设6，奇异值满足多项式衰减界 $\lambda_i^\star \le C/i^\alpha$ 和 $\alpha > 1/2$。为了给奇异值平方尾和提供上界，我们采用级数收敛的积分判别法 [37]。由于函数$f(x) = x^{-2\alpha}$ 在$x \in [n,\infty)$上为正且单调递减，故该和由相应的积分所界定，条件是 $\epsilon_{\text{proj}}\ n\ ^2 \le \sum_{i=n+1}^{\infty}\left(\frac{C}{i^\alpha}\right)^2 = C^2\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{i^{2\alpha}} \le$ ( )。$C^2\int_n^{\infty}\frac{1}{x^{2\alpha}}dx = C^2\left[\frac{x^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\right]_n^{\infty} = C^2\left(0 - \frac{n^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\right) = \frac{C^2}{2\alpha-1}n^{1-2\alpha}$ 对两边取平方根，得到式（31）中的最终收敛速率。■

■

该结果确立了投影误差关于潜在维度 n 的渐近标度律：

$$\epsilon_{\text{proj}}(n) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}\right) \tag{36}$$

在谱按调和级数衰减的特定情形下（$\alpha = 1$），我们可以得到标准的慢速率：

$$\epsilon_{\text{proj}}(n) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tag{37}$$

因此，只要系统动力学表现出足够的谱衰减，随着潜在维度增加，投影误差就能保证趋于零。

D. Koopman 算子的收敛

现在，我们综合采样分析与投影分析的结果，确立神经 Koopman 算子的基本缩放定律。

定理1 (误差界)。 考虑使用神经网络，将大小为 m 的有限数据集投影到 n 维潜在子空间，以逼近真实*Koopman*算子 $\mathcal{K}$ 的问题。在假设*1*至*7*成立的条件下，以至少 $1-2\delta-\delta_m$ 的概率，总近似误差有如下界，由采样误差和投影误差之和给出：

$$\epsilon(n,m) \le \underbrace{\frac{\kappa_{bias}\ln(2n/\delta)}{m} + \kappa_{var}\sqrt{\frac{\ln(2n/\delta)}{m}}}_{\epsilon_{samp}(n,m)} + \underbrace{\frac{C}{\sqrt{2\alpha-1}}n^{-(\alpha-1/2)}}_{\epsilon_{proj}(n)} \tag{38}$$

该定理的证明可由前面讨论的两个命题直接得出。基于这一非渐近界，我们推导出渐近缩放行为和收敛条件。

推论1 (缩放定律)。 在假设*1*至*7*成立，且样本量 $m \to \infty$ 和潜在维度 $n \to \infty$ 处于渐近区间时，误差遵循如下幂律：

$$\epsilon(n,m) = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\ln n}{m}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}\right) \tag{39}$$

定理1确立了 Koopman 算子近似误差的缩放定律和显式上界。通过放宽假设4、6和7，以下推论扩展了这一结果，并保证在更弱、更实用的条件下仍具有一致性。

推论2 (渐近收敛)。 考虑学习得到的 *Koopman* 算子 $K_{n,\ m}$ 在假设*1–3*（良态采样）和假设*5*（有界算子）下的情形。进一步假设，神经网络嵌入函数类 Φ_θ 满足万能逼近性质（即张成子空间的并集在 $\mathcal{H}$ 中稠密，且$n \to \infty$）。

那么，估计量在强算子拓扑下收敛到真实的 *Koopman* 算子$\mathcal{K}$：

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{\substack{m\to\infty\\ m=\Omega(n\ln n)}}\|K_{n,m}\mathcal{P}_n - \mathcal{K}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = 0. \tag{40}$$

证明。 证明遵循式（13）中确立的误差分解结构，但通过放宽结构假设，对投影项的分析有所不同。

采样误差收敛（关于 m 的极限）。采样误差的分析直接沿用命题 1 中的集中论证。在假设1至3下，经验估计量收敛到其总体对应量。具体而言，当样本量相对于维度呈超线性增长（$m = \Omega(n\ln n)$）时，采样误差会减小：

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ m=\Omega(n\ln n)}}\epsilon_{\text{samp}}(n,m) = 0. \tag{41}$$

投影误差的收敛（ n的限制）。对于投影误差，我们放宽了假设6和假设7施加的严格结构约束，并将其替换为

深度神经网络的标准万能逼近性质 [38], [39]。

万能逼近定理保证，标准前馈网络在紧域上的连续函数空间中是稠密的。在本文语境下，这意味着对于任意观测函数 $\psi \in \mathcal{H}$ 以及任意误差容限 $\epsilon > 0$，存在参数集 θ，使得学习嵌入子空间 $\mathcal{H}_n = \text{span}(\Phi_\theta)$满足：

$$\inf_{\phi_\theta \in \mathcal{H}_n} \|\psi - \phi_\theta\|_{\mathcal{H}} < \epsilon. \tag{42}$$

从数学上讲，该性质确保随着网络宽度的增加（即 $\cup_n \mathcal{H}_n = \mathcal{H}$），学习子空间序列 $\{\mathcal{H}_n\}$ 在希尔伯特空间$\mathcal{H}$ 中变得稠密。根据投影定理，若子空间序列是稠密的，则相应的正交投影算子 $\mathcal{P}_n$ 强收敛于恒等算子 $\mathcal{I}$。因此，对于任意有界 Koopman 算子 $\mathcal{K}$，投影偏差在极限下消失：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \epsilon_{\text{proj}}(n) &= \lim_{n\to\infty} \|(\mathcal{K}\mathcal{P}_n - \mathcal{K})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \\ &\le \|\mathcal{K}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \cdot \lim_{n\to\infty} \|\mathcal{P}_n - \mathcal{I}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = 0. \end{aligned} \tag{43}$$

■ ■

注记 2（假设强度）。 万能逼近性质这一条件显著弱于先前的假设。假设6规定了信息衰减的特定速率，而假设7假定优化器能够成功定位最优 不变子空间。相比之下，万能逼近性质仅断言，随着潜在维度 $n \to \infty$，神经网络具有以任意精度逼近任意平方可积函数的能力 。它提供的是存在性保证，而非速率保证。

备注 3（与先前工作的比较）。 与 Korda 和 Mezi´c [33]，等对 EDMD 的奠基性分析不同，这些分析主要确立渐近 一致性：保证估计器在数据量无限大（$m \to \infty$）且模型容量无限大（$n \to \infty$）时收敛到真实算子；定理1推导出了明确的非渐近 误差界。通过刻画采样误差和投影误差随有限资源变化的精确衰减率，我们为神经Koopman模型中观察到的“缩放定律”提供了严谨的理论依据。此外，我们的分析还得出了渐近证明中未涉及的具体设计见解：首先，我们确定了抑制高维嵌入方差所需的样本复杂度（$m = \Omega(n \ln n)$）；其次，我们的误差界明确体现了基条件常数（γ）的作用，从而为第 IV 节中引入的协方差正则化（$\mathcal{L}_{cov}$）提供了理论依据，以稳定学习过程。

E. 关于这些假设的进一步讨论

1）假设6：谱衰减： 假设6指出，按绝对值排序后，Koopman 特征值 $|\lambda_j^\star|$的衰减速率受多项式 $|\lambda_i^\star| \le C/i^\alpha$ 所界定。该条件不仅是为了便于界定投影误差，更是动力流正则性的结构性结果。经典控制理论表明，对于在紧吸引子上演化且具有可微动力学的系统，谱系数会代数衰减（对于解析动力学则呈指数衰减） [40], [41]。因此，该算子实际上是低秩的：系统能量集中于有限个主导模态中，而谱尾则迅速消失。

从扰动理论的角度来看，这种谱衰减也至关重要。在机器人学中，测量噪声可能产生高频模态，导致谱污染，使得较小的特征值被视为噪声伪影，而非真实的系统动力学。假设6确保真实的谱尾低于噪声底，因此可以安全地忽略。因此，即使存在含噪测量，有限维投影（例如 EDMD）也能收敛到真实算子，而不会损失重要的动力学信息。

2）假设7：子空间近似能力： 我们假设，学习嵌入 Φ_θ 张成一个子空间 $\mathcal{H}_n$，该子空间近似 Koopman 算子 $\mathcal{K}$的主导 n维不变子空间。该假设弥合了优化景观与谱理论之间的差距。

最优有限维近似。标准训练目标是在嵌入空间中最小化预测误差：

$$\mathcal{L}(\theta, \mathbf{K}) = \mathbb{E}_{s\sim\mu}\left[\|\Phi_\theta(s^+) - \mathbf{K}\Phi_\theta(s)\|_2^2\right]. \tag{44}$$

对于固定子空间 $\mathcal{H}_n$，最优矩阵$\mathbf{K}$ 就是将 $\mathcal{K}$ 投影到 $\mathcal{H}_n$ 上的 Galerkin投影。然而，同时优化嵌入参数 θ 时，该问题便转化为对最优观测子空间的变分搜索。

最终的近似误差从根本上取决于所选子空间 $\mathcal{H}_n$ 与 Koopman 算子 $\mathcal{K}$的谱结构的吻合程度。最优的秩-n 近似记为 $\mathcal{K}_n$，它通过对 $\mathcal{K}$ 进行谱截断，投影到其主导的 n 维不变子空间上得到：$\mathcal{H}_n^\star = \text{span}\{\phi_1^\star, \dots, \phi_n^\star\}$。其中，$\{\phi_i^\star\}$ 是与绝对值最大的 n 特征值相关联的 Koopman特征函数，$|\lambda_1^\star| \ge \cdots \ge |\lambda_n^\star|$。在所有 n维子空间中，当学习嵌入子空间 $\mathcal{H}_n = \text{span}(\Phi_\theta)$ 与真实的主导特征空间 $\mathcal{H}_n^\star$ [17], [33]重合时，算子范数近似误差最小。因此，当且仅当学习嵌入满足以下条件时，损失函数 $\mathcal{L}(\theta, \mathbf{K})$ 达到全局最小值：$\text{span}(\Phi_\theta) \approx \mathcal{H}_n^\star$.

通过深度学习实现实用化。 在实践中达到这一理论最优，需要依赖深度神经网络参数化 Φ_θ的两个基本性质。首先，万能逼近定理 [38] 保证标准前馈架构在连续函数空间中稠密。这确保编码器 Φ_θ 的假设类足够丰富，能够包含最优子空间 $\mathcal{H}_n^\star$。具体而言，只要宽度足够，就存在一个参数配置 $\theta^\star$，能够以任意精度逼近真实的主导特征函数 $\{\phi_i^\star\}_{i=1}^n$。

然而，解的存在并不保证能够找到该解。同时学习编码器参数 θ 和算子$\mathbf{K}$ 会引入双线性耦合，使优化景观变得非凸。虽然这

意味着理论上无法保证收敛到全局最优解，但梯度优化固有的谱偏差（或频率原理）会为搜索提供有利的引导 [42]。实证和理论研究表明，神经网络会优先学习目标函数中低频、平滑的成分，然后再拟合高频细节 [42]。这种内在偏差与我们的物理目标天然契合：与持续动力学相关的主导 Koopman 特征函数通常具有较高的空间正则性，而瞬态或噪声诱导的模态则对应高频谱成分[41]。因此，基于梯度的训练会隐式地优先考虑稳健且具有物理意义的动力学，而非瞬态或随机伪影。这一特性对于机器人系统辨识尤其有利，因为数据往往有限且受到测量噪声的干扰。

3）优化误差与缩放下限：尽管通用逼近性质保证存在参数 $\theta^\star$ ，能够恢复主导不变子空间$\mathcal{H}_n^\star$ （参见假设7），但这并不保证实际的非凸优化过程（例如随机梯度下降）能够找到此类参数。在实践中，优化可能仅收敛到局部最优表示。因此，我们放宽假设7中对精确子空间恢复的严格要求，并明确量化与最优状态的偏差。

令 $\mathcal{P}_n$ 表示到学习子空间 $\mathcal{H}_n$ =span(Φ_θ) 的正交投影，令 $\mathcal{P}_n^\star$ 表示到真实主导特征空间 $\mathcal{H}_n^\star$ 的投影。我们定义优化残差 $\epsilon_{\text{opt}}(\theta)$，用于衡量学习表示与最优谱子空间之间的子空间错位程度。

$$\epsilon_{\text{opt}}(\theta) \triangleq \|\mathcal{P}_n - \mathcal{P}_n^\star\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}. \tag{45}$$

推论 3 （可实现缩放定律）。 在假设*1*至*6*下，总近似误差满足：

$$\epsilon(n,m) \le \underbrace{\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\ln n}{m}}\right)}_{\textit{sampling error}} + \underbrace{\mathcal{O}\left(n^{-(\alpha-1/2)}\right)}_{\textit{projection error}} + \underbrace{\epsilon_{opt}(\theta)}_{\textit{optimization error}} \tag{46}$$

术语$\epsilon_{\text{opt}}(\theta)$概括了网络理论能力与实际性能之间的算法差距。与采样误差和投影误差不同，后两者会渐近消失，而ϵ_{opt} 则会在经验缩放曲线中表现为不可约误差下限（见图2）。随着 $m,\ n \to \infty$，除非学习子空间与 $\mathcal{H}_n^\star$高度对齐，否则总误差将饱和于这一残差水平。

IV. 实用神经 Koopman 算子

本节详细介绍我们的深度 Koopman 算子学习框架，包括模型架构、训练目标、面向各类动力系统的数据采集流程，以及针对预测与控制两者任务的评估协议。

A. Koopman 模型架构

我们的模型由一个编码器网络组成，该网络将系统状态提升到高维潜在空间，其中的动力学由线性转移模型支配。尽管基本的单步转移映射通常记为$z^+ = \mathbf{A}z + \mathbf{B}u$ ，如 (4) 所示，我们在此采用时间索引记号 z_t，以便显式表述损失计算所需的多步轨迹展开。

a) 编码器网络：给定系统状态 $x_t \in \mathbb{R}^{n_x}$，我们使用神经网络 Ψ_θ： $\mathbb{R}^{n_x} \to \mathbb{R}^{n_{\text{enc}}}$ 来提取更高维的特征。随后定义完整嵌入函数 Φ_θ ： $\mathbb{R}^{n_x} \to \mathbb{R}^n$，通过将原始状态与这些特征拼接来构造潜在状态$z_t$ ：

$$z_t = \Phi_\theta(x_t) := [x_t, \Psi_\theta(x_t)] \in \mathbb{R}^n, \tag{47}$$

其中， $n = n_x + n_{\text{enc}}$ 表示潜在空间的总维度。

b) 潜在动力学：潜在空间中的动力学由一个带控制的离散时间线性系统 u_t建模：

$$z_{t+1} = \mathbf{A}z_t + \mathbf{B}u_t, \tag{48}$$

其中，矩阵$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$ 是可训练的无偏置线性层。为促进稳定动力学，权重矩阵$\mathbf{A}$通过奇异值分解（SVD）初始化为近似正交，并且编码器的最后一层以正交权重初始化。该表述将控制影响建模为潜在空间中的线性项。虽然一般的Koopman理论允许对控制输入进行升维以捕获非仿射依赖关系（例如，将 u_t 升维为 u_t^2 或$x_t u_t$），但我们保留显式变量 u_t 而不进行升维。这一设计选择依赖于如下假设：底层动力学是控制仿射的（即 $x_{t+1} = f(x_t) + g(x_t)u_t$），这自然源于本文所研究机器人系统的拉格朗日力学。此外，这种线性输入结构确保下游模型预测控制问题仍为凸二次规划。

B. 训练目标

该模型采用复合损失函数进行端到端训练，旨在平衡预测准确度、潜在空间结构和控制一致性：

$$\mathcal{L}_{\text{total}} = \mathcal{L}_{\text{pred}} + w_{\text{cov}}\mathcal{L}_{\text{cov}} + w_{\text{ctrl}}\mathcal{L}_{\text{ctrl}}, \tag{49}$$

其中， w_{cov} 和 w_{ctrl} 分别是协方差损失和逆动力学损失的可调标量权重。

a) 多步预测损失。：为保证时间一致性，我们从编码后的潜在状态 z_t 出发，沿预测时域向前展开学习到的 Koopman 动力学，时域长度为T 步。以 $z_t = \Phi_\theta(x_t)$为起点，使用学习到的线性 Koopman模型递归生成 $\tau = t+1,\ \ldots,\ t+T$对应的预测潜在状态 $\hat{}z_\tau$：

$$\hat{z}_{\tau+1} = A\hat{z}_\tau + Bu_\tau, \text{ for } \tau \ge t+1. \quad \hat{z}_t = z_t. \tag{50}$$

每个预测的潜在状态通过投影算子$\mathbf{P}$映射回状态空间，得到预测的物理状态：$\hat{}x_\tau = \mathbf{P}\hat{}z_\tau$。多步预测损失以均方误差（均方误差）惩罚预测状态 $\hat{}x_\tau$

与相应的真实状态 x_τ:

$$\mathcal{L}_{\text{pred}} = \frac{1}{W} \sum_{\tau=t+1}^{t+T} \beta^{\tau-t} \|\hat{x}_\tau - x_\tau\|_2^2, \tag{51}$$

其中 $\beta \in (0,1]$ 是时间折扣因子，用于强调近期预测的准确度； $W = \sum_{j=1}^{T} \beta^j$ 是归一化常数。

b) 协方差损失：为满足假设 4 中的条件性要求，学习得到的潜在基必须保持良好的条件性和近似线性独立。因此，我们对潜在特征的协方差（经验格拉姆）矩阵进行显式正则化。与理论符号保持一致，令 $\Phi_\theta(s) \in \mathbb{R}^n$ 为样本s的嵌入特征。对于包含 b个样本 $\{s_i\}_{i=1}^b$的训练批次，我们将经验协方差矩阵$\mathbf{G}_{\text{batch}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 计算为格拉姆矩阵的中心化有限样本近似:

$$\mathbf{G}_{\text{batch}} = \frac{1}{b-1} \sum_{i=1}^{b} \big(\Phi_\theta(s_i) - \bar{\Phi}_\theta\big)\big(\Phi_\theta(s_i) - \bar{\Phi}_\theta\big)^\top \tag{52}$$

其中 $\bar{\Phi}_\theta = \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{b} \Phi_\theta(s_i)$ 是平均嵌入向量。回顾命题 1 中的采样误差界，它与总体格拉姆矩阵（假设 3）的最小特征值 γ 成反比。随着潜在维度 n增加，学习得到的基函数可能会变得相关，从而导致最小特征值 $\lambda_{\min}(\mathbf{G}_{\text{batch}})$ 以及γ 趋近于零，进而造成条件不良。为缓解这一影响，我们引入协方差正则化项，对$\mathbf{G}_{\text{batch}}$的非对角元素进行惩罚:

$$\mathcal{L}_{\text{cov}} = \frac{1}{n(n-1)} \|\mathbf{G}_{\text{batch}} - \operatorname{diag}(\mathbf{G}_{\text{batch}})\|_F^2 . \tag{53}$$

通过将非对角项压向零，我们鼓励学习到的基保持正交，从而确保即使模型容量增加， $\lambda_{\min}(\mathbf{G}_{\text{batch}})$及相关的 γ 仍保持较大。归一化因子 $n(n-1)$ 等于非对角元素的数量，因此该损失表示非对角元素平方幅值的平均值。这种缩放使梯度幅值近似不受潜在维度影响。

c) 逆控制损失：尽管 Koopman理论保证线性受控表示的存在，但对驱动矩阵$\mathbf{B}$ 进行数据驱动辨识本质上仍是病态问题。最小化前向预测损失$\mathcal{L}_{\text{pred}}$ 只能约束复合转移（$\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$）以匹配观测到的轨迹，却不能确保控制到潜在空间的映射是单射。因此，可能出现退化解，使$\mathbf{B}$秩亏或条件性较差，导致不同的控制输入产生几乎无法区分的潜在状态转移。这种驱动歧义会使下游模型预测控制问题条件性差，且可能没有唯一解。这个问题与假设 4 中的条件性要求相似：其中采样误差界取决于格拉姆矩阵的最小特征值。类似地，要可靠地恢复驱动作用，要求$\mathbf{B}$ 列满秩，且 $\lambda_{\min}(\mathbf{B}^\top\mathbf{B}) > 0$。若不满足这一性质，控制作用便会坍缩到一个低能量子空间中，从而破坏可辨识性。

为了强制实现驱动可辨识性，我们引入逆动力学损失。这作为正则化约束要求控制输入 u_τ 能够从潜在转移残差（$z_{\tau+1} - \mathbf{A}z_\tau$）中恢复。因此， u_τ的可恢复性要求$\mathbf{B}$ 为良态。我们通过最小二乘伪逆估计控制输入

$$\hat{u}_\tau = (\mathbf{B}^\top\mathbf{B})^\dagger \mathbf{B}^\top \big(z_{\tau+1} - \mathbf{A}z_\tau\big), \tag{54}$$

并且逆损失对重构误差进行惩罚:

$$\mathcal{L}_{\text{ctrl}} = \frac{1}{W} \sum_{\tau=t}^{t+T-1} \beta^{\tau-t} \|\hat{u}_\tau - u_\tau\|_2^2. \tag{55}$$

因此，所学潜在子空间不仅能够预测未来状态，还能忠实地刻画作动对系统演化的因果效应。这种结构一致性对于确保所得模型预测控制器适定、数值稳定，并且对控制输入的响应具有唯一性至关重要。

C. 基于 *Koopman* 的模型预测控制

为评估所学算子的控制性能，我们将其嵌入线性模型预测控制（MPC）框架中。所学Koopman模型用作内部动力学模型。在每个时间步 t，我们求解有限时域二次规划（QP），以计算最优控制输入序列。

与对完整提升状态施加惩罚的潜在空间模型预测控制形式不同，我们直接在原始（可测）状态空间中定义代价，以优先保证物理状态跟踪精度。令x_τ 表示长度为 H的时域内时刻 τ 的预测物理状态。该优化问题表述为

$$\begin{aligned} \min_{\{u_\tau\}_{\tau=t}^{t+H-1}} & \sum_{\tau=t}^{t+H-1} (x_{\tau+1} - x_{\tau+1}^{\text{ref}})^\top Q (x_{\tau+1} - x_{\tau+1}^{\text{ref}}) + u_\tau^\top R u_\tau \\ \text{s.t.} \quad & z_{\tau+1} = A z_\tau + B u_\tau, \quad \tau = t, \dots, t+H-1, \\ & u_{\min} \le u_\tau \le u_{\max},\ z_t = \Phi(x_t),\ x_\tau = \mathbf{P} z_\tau. \end{aligned} \tag{56}$$

学习到的线性动力学在潜在空间中演化，而目标函数中使用的物理状态则通过投影映射 $x_\tau = \mathbf{P}z_\tau$ 得到。这种公式确保控制器优化的是在真实状态空间中的性能，而不是调节潜在变量。在每个时间步，系统仅应用优化序列中的第一个控制输入 $u_t^\star$ ，并在下一步以滚动时域方式重复该过程。

按照 [25], , 我们设定 $Q = I$ （与基于均方误差的训练目标一致，且不采用时间折扣），并设定 $R = 0$。这一选择强调物理状态跟踪精度，但不显式惩罚控制力度。我们将训练损失与模型预测控制代价的联合设计留待未来研究。

V. 实验设计

我们通过检验两个假设，对理论收敛性质（第三节）进行实证验证。**1）缩放定律的稳健性：**预测误差随数据集大小（m）和潜在维度（n）变化的理论幂律缩放在实证中成立，即使对于谱假设仅近似成立的复杂机器人系统也是如此。**2）正则化的影响：**通过所提出的辅助损失（$\mathcal{L}_{\text{cov}}$ 和 $\mathcal{L}_{\text{ctrl}}$）强制保证理论一致性，可提高学习效率

并将开环预测增益转化为闭环控制中更强的稳定性和跟踪能力。我们通过分析不同数据体制和模型规模下的预测误差缩放，并开展闭环控制评估以及对协方差损失和逆损失的消融实验，对此进行验证。

A. 数据收集策略

为评估我们的方法在不同动力系统中的鲁棒性，我们采用三种数据收集策略：

策略 I（均匀状态空间采样）： 对于稳定的合成系统，我们对初始状态和控制输入进行均匀采样，以广泛且无偏地覆盖全局动力学。**策略 II（随机化仿真驱动）：** 对于仿真机械臂，我们通过随机化控制（例如，关节速度指令）生成轨迹，从而在没有预定义策略的情况下进行多样化的运动学探索。**策略 III（受约束的专家引导探索）：** 对于物理硬件和不稳定的运动场景，随机驱动可能带来安全风险，因此我们采用受约束优化，或将专家示范[1] 与在线策略数据相结合，以安全地覆盖所需的状态分布。

B. 实验设置

我们在七种复杂程度各异的动力系统上验证我们的方法，表 VI 总结了主实验中所用各环境的状态和控制维度。

表 I：环境维度汇总。注：Unitree G1 和 Go2 在裁剪后的状态-动作空间上进行训练。

环境	状态维度	动作维度
阻尼摆	2	1
双摆	4	2
Franka Panda	14	7
Kinova Gen3	14	7
Unitree Go2	35	12
Unitree G1	53	23

仿真实验：对于阻尼摆和双摆，我们通过均匀状态空间采样（策略 I）并施加随机控制输入来生成轨迹。对于仿真的 7自由度 Franka Panda 机械臂，其包含会引入真实驱动偏差的内部底层跟踪动力学，我们从标称初始位形出发，采用随机关节速度指令（策略 II）。为评估高维欠驱动运动，我们使用宇树 Go2 四足机器人和 G1 人形机器人。数据通过专家引导探索（策略 III）生成，该方法结合了预训练强化学习专家策略与通过基于 Koopman 的模型预测控制跟踪生成的在线策略恢复数据。

真实世界实验：我们将所提出的方法部署在一台实体 Kinova Gen3 7 自由度机械臂上。由于真实世界数据采集需要严格的安全保证，我们采用策略 III。我们设计了一个两阶段运动学轨迹优化流程，用于计算随机

[1]专家策略仅用于安全地生成数据；由此得到的 Koopman模型支持形式化稳定性分析，以及计算效率高且能够推广到超越专家原始目标的模型预测控制。

构型之间的可行路径，随后通过优化进一步确保碰撞规避并满足关节限位。更多评估细节请参见补充材料第1节。

C. 评估指标

我们通过在留出测试集上的开环预测准确度 以及闭环控制来评估性能。我们在所有任务中测量开环预测误差（$\mathcal{L}_{\text{pred}}$），以评估规模扩展性和泛化能力，并独立于反馈评估学习到的动力学。跟踪实验聚焦于最具挑战性的高维平台：Franka 机械臂以及 Unitree G1 和 Go2 机器人。对于 Franka，我们报告其在图 8 参考轨迹 [43]上的末端执行器跟踪误差 。对于 G1 和 Go2，我们使用平均存活步数 [25] 来衡量在违反安全限值之前成功运动跟踪的平均连续时间步数（G1 的关节误差为 > 0.10 弧度，Go2 为 > 0.16 弧度）。该指标直接反映了在不稳定、接触丰富的场景中的闭环鲁棒性；在这些场景中，微小误差会不断累积并导致灾难性故障。

D. 模型架构与训练配置

架构详情： 尽管我们的框架不受网络参数化方式限制，但我们将编码器 Ψ_θ 实现为一个多层感知器，包含两个各有 256 个单元的隐藏层、 ReLU 激活和残差连接，以稳定训练。

训练超参数：为研究缩放定律，我们改变数据集规模 $m \in \{1000, 4000, 16000, 64000, 140000\}$，并通过乘数 $n_{\text{mult}} \in \{1, 2, 4, 8, 16\}$缩放潜在瓶颈。遵循（47），编码器输出 $n_{\text{mult}} \times n_x$ 非线性特征。将这些特征与 n_x 维物理状态 x拼接后，得到总潜在维度$n = (n_{\text{mult}} + 1)n_x$。 每种配置均使用五个随机种子进行评估。

VI. 实证分析

A. Koopman 模型的缩放定律

我们的理论分析（定理1和推论 3）将总近似误差分解为可加的采样误差（ϵ_{samp}）和投影误差（ϵ_{proj}），以及一个优化残差。虽然推论 3表明潜在维度 n将投影偏差与采样方差耦合在一起，但我们通过受控实验对二者进行实证解耦。我们首先分别考察数据集大小和维度的缩放行为，将二者的综合影响留待第 VI-A.3 节讨论。为量化这些独立影响，我们将观测到的预测误差 ϵ 拟合为幂律：

$$\epsilon(D) = A \cdot D^{-\alpha} + C, \tag{57}$$

其中， D 是缩放资源（数据集 m 或维度 n）， A是衰减幅度，而 C 表示非衰减误差。与推论 3中的误差界相呼应，在 n固定时缩放样本（$D = m$）， $Am^{-\alpha}$ 刻画了衰减的采样误差ϵ_{samp}（m）。常数 C 汇总了 m不变的投影（ϵ_{proj}（n））和优化（ϵ_{opt}）误差，代表不可约实证误差下限。同样，在 m固定时缩放维度（$D = n$）， C 则涵盖采样误差和优化误差。

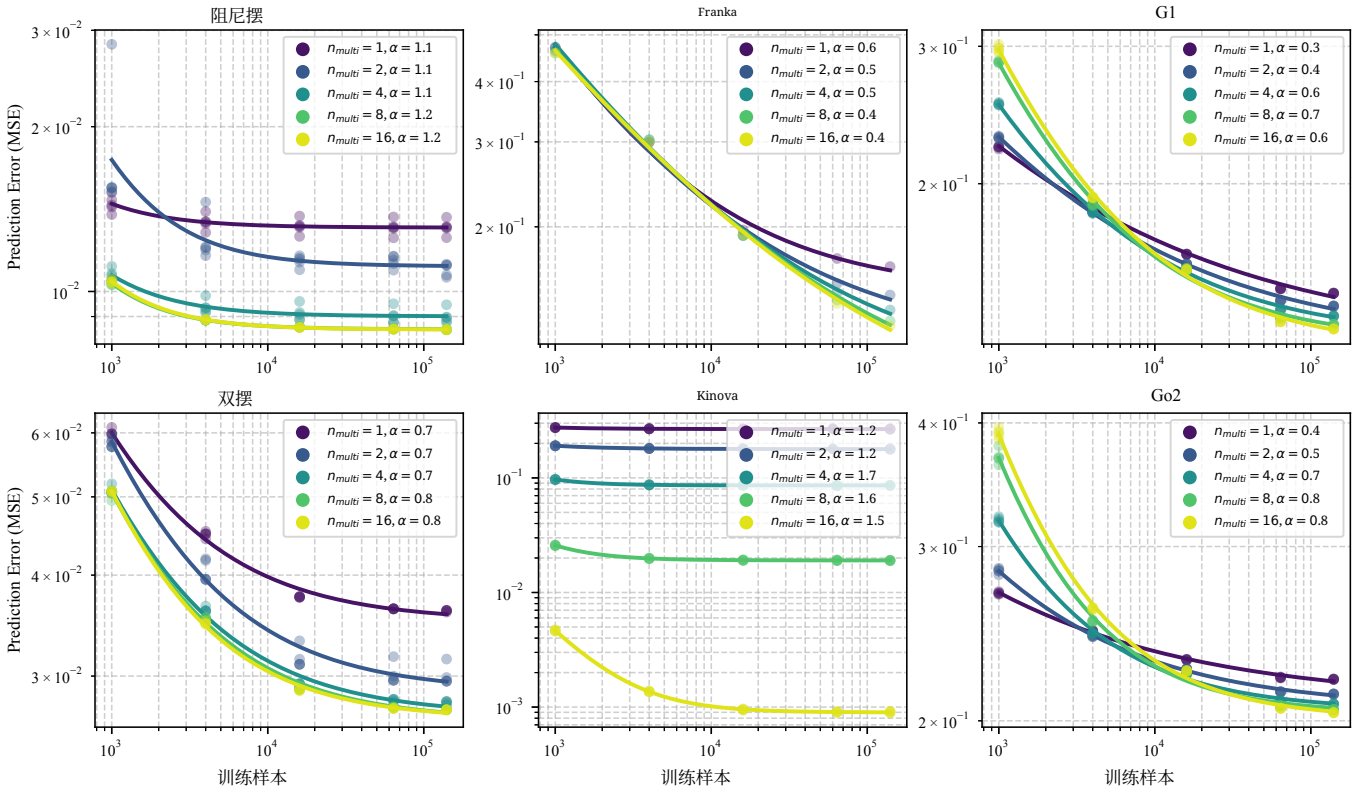


图 2：预测误差随训练样本量（m）的变化。各子图展示了不同潜在维度倍数（$n$multi）下的误差曲线。点表示随机种子，实线表示拟合的幂律趋势。图例报告了缩放指数 α （误差衰减率）。在不同环境中，增大数据集大小都会通过幂律关系持续降低误差，从而在经验上验证了理论上的采样误差收敛。

1）按训练样本量缩放：本实验通过实证验证了命题 1 推导的采样误差界。从理论上讲，该误差按偏差和方差分量之和缩放，并由子空间维度 n通过覆盖数因子 $\ln(2n/\delta)$ 调节，其形式如式（ 14 ）所示。为量化这一行为，我们将实证预测误差拟合为幂律模型 $\epsilon(m) = Am^{-\alpha_m} + C$，其中衰减率 α_m 表示样本效率，而 C 表示投影和优化导致的不可约误差下限。图 2 证实了这种幂律关系，而拟合出的指数（表 II）则揭示了由数据密度、接触动力学和流形复杂度驱动的三种缩放机制。

1) 方差主导机制（Franka、G1、Go2）：对于具有复杂接触动力学的高维系统，采样误差衰减缓慢（$\alpha_m \in [0.49, 0.65]$），符合理论上的 0.5 方差速率。运动任务涉及突变的混合转换（粘滑摩擦），会产生高频扰动，因此需要指数级增加数据量才能加以解析。

2) 快速收敛机制（摆系统、Kinova）：内在动力学较平滑的系统表现出“快速收敛”（$\alpha_m > 0.75$）。摆系统在解析意义上是平滑的，并且有效地呈低秩特征。有趣的是，Kinova 数据集（$\alpha_m \approx 1.44$）依赖轨迹优化，这将数据限制在由平滑且局部最优路径构成的低维流形上，不同于随机探索所实现的广泛覆盖。

3）维度交叉点（n与 m）：容量（n）与样本复杂度（m）之间出现了明确的权衡在 G1 和 Go2 曲线中（图 2，右），在低数据区间（$m \approx 10^3$），扩展潜在空间会导致过拟合，因为方差分量（$\propto \sqrt{\ln(n)/m}$）占主导。相反，在数据充足时（$m \approx 10^5$），投影误差的降低（ϵ_{proj}）带来的收益超过方差的影响，因此较大的模型优于较小的模型（图 3）。

表 II：预测误差衰减的拟合幂律指数（α）。样本效率 α_m 按潜在维度和随机种子取平均。谱衰减 α_n 在高数据量体制（$m \geq 10^4$）下按随机种子取平均，并排除较小样本，以便将渐近投影误差与有限样本过拟合区分开来。

环境	α_m （样本量）	α_n （潜在维度）
阻尼摆	1.15	4.3
双摆	0.75	2.89
Franka	0.49	1.16
Kinova	1.44	2.58
Go2	0.65	0.47
G1	0.52	0.34

2) 随模型规模扩展：我们考察投影误差随潜在维度 n 增大而衰减的情况。根据命题2，该误差受 Koopman 谱的尾部能量限制，并通过系统结构正则性呈多项式衰减：$\epsilon_{\text{proj}} \lesssim \mathcal{O}(n^{-\alpha_n})$。与采样误差的衰减（$\alpha_m \in [0.5, 1.0]$）不同，投影误差的衰减速率 α_n 因环境而显著变化，可作为底层动力学谱复杂度的表征。将经验数据拟合到 $\epsilon(n) = An^{-\alpha_n} + C$后，图 3 和表 II 显示，简单环境与接触丰富的环境之间存在鲜明差异。*1) 快速谱衰减（平滑动力学）*：平滑、低

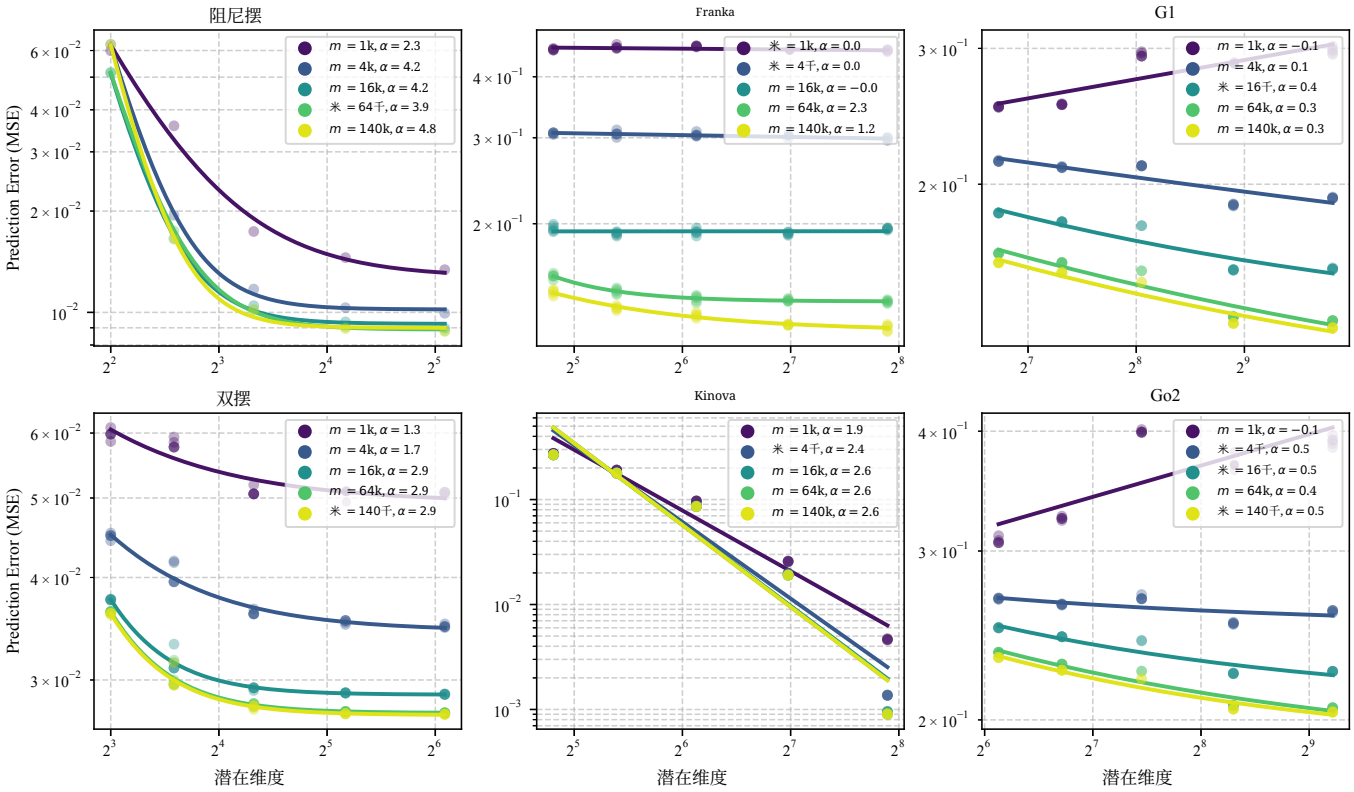


图 3：预测误差随潜在维度的变化 n。子图展示了不同训练样本量下的误差曲线（m）。增大潜在维度通常会降低误差，这从经验上验证了随着 Koopman 子空间容量扩展，投影误差会收敛。

非线性系统从更大的潜在空间中获益最多。摆系统呈现出陡峭的衰减（$\alpha_n > 2.5$），证实其 Koopman 算子实际上是低秩的；能量集中于主导模态，使紧凑的神经嵌入能够捕捉高保真动力学。

2）谱衰减缓慢（接触丰富动力学）：相反，复杂系统（G1、Go2）呈现较缓慢的衰减（$\alpha_n \in [0.34, 0.47]$），这与假设6一致。运动中的混合转换（冲击、摩擦）会产生大量高频 Koopman 模态，形成“重尾”。因此，投影误差衰减缓慢，因为每增加一个维度 n，所捕获的剩余谱能量都很有限。

3）过参数化区间：对于复杂系统（G1、Go2），低数据量区间会出现负缩放（图 3，右侧）。在样本量较小时（$m \approx 1000$），增大编码器维度会增加预测误差。有限的数据无法约束扩展后的潜在空间，导致谱污染，而非提高保真度。在实际应用中，接触丰富系统采用更大的 Koopman嵌入，需要相应增加数据集规模，具体来说，数据规模应按 $m = \Omega(n \ln n)$ 扩展，才能满足推论2中的理论样本复杂度。

3) 统一缩放：平衡数据与模型容量：如前所述，在缺乏训练数据的情况下增加模型容量会导致过参数化，此时采样误差占主导，性能也会下降。为探究最优的m 与 n 耦合关系，我们按照推论2和（30）中推导出的理论速率 $m = \Omega(n \ln n)$，使 m 与模型复杂度成比例地缩放。图4展示了 G1 和 Go2 在 $m =$ 系数 $\cdot n \ln n$ 条件下的预测误差，其中系数是数据充分性系数。结果揭示了有关样本复杂度和资源分配的三个见解。

1）缩放一致性：随着 n 增加，所有系数的预测误差均呈现一致的幂律衰减。这证实缩放 $m \propto n \ln n$ 能稳定学习，避免在固定-m 范围内出现过拟合（谱污染）。

2）数据充足性：将 coeff 从 1 增加到 40 会使误差曲线整体下移，指数逐渐趋近全数据基线。对于 G1，coeff $= 40$ 得到 $\alpha \approx 1.58$，与全数据指数（$\alpha \approx 1.50$）极为接近，表明采样误差已得到充分抑制，从而显露出内在的投影误差。

3）实用设计：我们针对高维接触丰富系统提出一种经验启发式：要充分发挥秩为 n 的 Koopman嵌入，需要 $m \gtrsim 40\, n \ln n$。

B. 所提出的辅助损失的有效性

为验证第 IV-B 节中的正则化，我们评估了协方差（$\mathcal{L}_{\text{cov}}$）与逆控制（$\mathcal{L}_{\text{ctrl}}$）损失对闭环性能的影响。一个关键发现是预测准确度与控制效用的解耦：这些辅助损失几乎不影响开环预测误差（差异为 <5%），但显著改善了闭环控制。[2]我们将学习到的 Koopman 模型部署于模型预测控制

[2]正则化模型的开环预测误差在统计上与基线相近，这表明这些损失促使模型具备有益于控制的 结构性质，而非提升原始拟合能力。

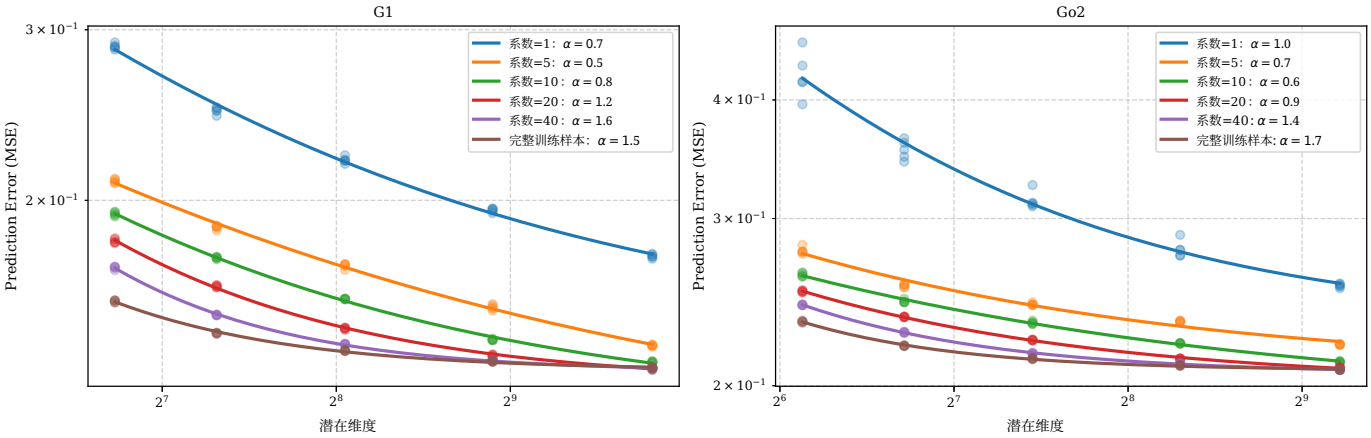


图 4：耦合缩放定律 n下，预测误差随潜在维度变化（ m = 系数 · $n\ln n$）。随着数据充分性系数增大，误差曲线逐渐收敛至渐近全样本基线。

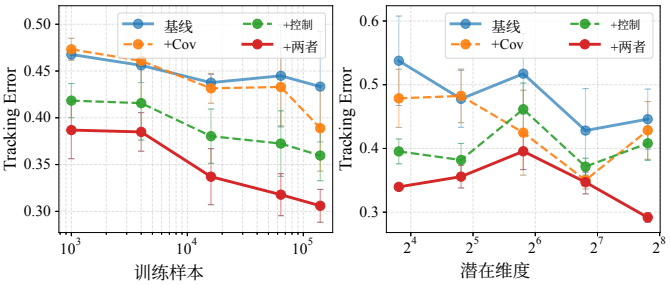


图 5：Franka 机械臂的跟踪误差与训练样本（左）及潜在维度（右）的关系。辅助损失（+两者）带来了稳定的性能提升。

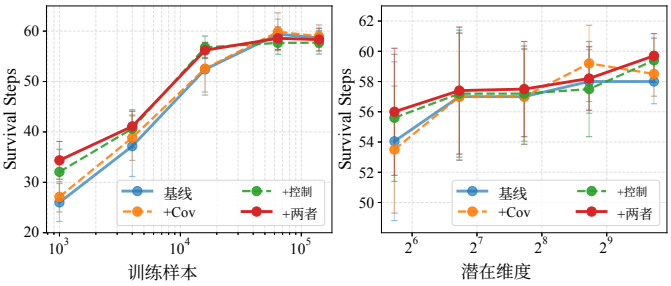


图 6：G1 性能随样本量（左）和潜在容量（右）增加而提升。组合辅助目标（+两者）实现了最高的存活率。

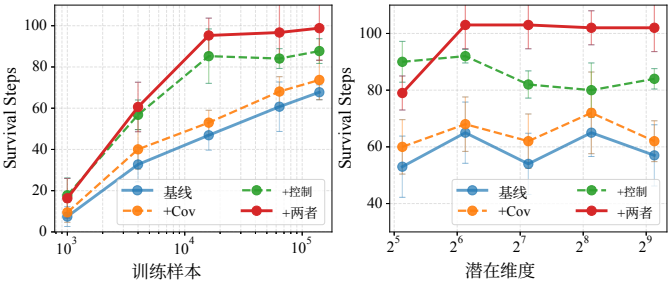


图 7：Go2 控制性能（存活步数）。辅助损失有助于改善标度，尤其是在基线模型表现不佳的高容量区间（右图）。

框架（(56)）中，应用于 Franka 机械臂（8 字形轨迹跟踪）以及 Unitree G1/Go2 机器人（运动）。图 5 表明，+控制与 + 协变量各自均降低了基线跟踪误差，但其组合（+ 两者）带来了最大增益。对于 G1 与 Go2， +两者在各潜在维度上均持续提升平均存活步数，而基线在更高容量下表现不佳（图 6 与图 7，右）。

尽管动力学预测误差呈现清晰的幂律衰减（图 2 和图 3），控制性能标度却更为复杂（图 5 至图 7）。虽然更大的数据集通过降低采样误差，能够稳定提升所有方法的控制性能，但增大潜在维度 n会给基线模型带来权衡：更高的维度可降低投影偏差，却会增加模型预测控制和逆运动学优化的难度。我们的辅助损失缓解了这种性能饱和。它们通过结构性地施加可逆性（+控制）和正交性（+协变量）约束，对潜在空间进行正则化，使扩展表征能力不会损害控制性能。例如，Go2 基线模型的性能很早便达到平台期，但 +两者可避免性能崩溃，从而能够采用更高维的表征，而这些表征在其他情况下会因数值问题而难以处理（图 7，右图）。

表 III 总结了这些相对增益。结合两种损失后，Franka 的跟踪误差显著降低了 25.1%，G1 和 Go2 的存活步数则分别增加了 9.6% 和 74.8%。Go2 的这一巨大提升凸显了结构化潜在空间对于复杂欠驱动四足动力学的必要性。

表 III：通过协方差（$\mathcal{L}$协方差）和逆控制（$\mathcal{L}$控制）辅助损失，相对于基线的控制性能提升。

指标	环境	+ 协方差损失	+ 控制损失	+ 两者
跟踪误差 (↓)	Franka	6.18%	14.30%	25.09%
生存率 (↑)	G1	2.09%	7.29%	9.60%
	Go2	13.6%	59.62%	74.76%

C. 消融研究

1) 神经 Koopman 算子的有效性： 为了验证神经 Koopman 方法所依据的架构选择（具体而言，使用深度学习构建嵌入函数，并在潜在

表 IV：比较经典 EDMD（多项式）、非结构化神经动力学（NNDM）与我们的神经 Koopman 架构的开环预测误差。

环境	EDMD（多项式）	NNDM（多层感知器）	Koopman（基础神经网络）	Koopman（+辅助）
Franka	0.441	0.268	0.122	**0.121**
G1	0.271	**0.116**	0.130	0.132
Go2	0.428	**0.163**	0.204	0.209

表 V：比较跟踪误差（Franka）和存活步数（G1、Go2）的闭环控制性能。神经Koopman将深度学习的表达能力与线性模型预测控制相结合。

指标	Env	EDMD（多项式）	NNDM（多层感知器）	Koopman（基础神经网络）	Koopman（+辅助）
跟踪误差（↓）	Franka	0.442	0.514	0.437	**0.256**
生存率（↑）	G1	34.0	27.4	58.0	**59.7**
	Go2	19.5	4.7	62.0	**103.0**

空间中施加线性结构），我们将该方法与两种具有代表性的基线进行比较。1. 使用多项式基的 EDMD（EDMD-Poly）：一种使用固定多项式基函数的经典方法[44]。这代表了“有结构但非神经”的基线。2. 非结构化神经动力学（NNDM）：一种标准的多层感知器（MLP），用于预测 $x_{t+1} = f_\theta(x_t, u_t)$[9]。为确保表征能力的公平比较，NNDM 的参数数量与我们提出的神经 Koopman 架构相同。这代表了“神经但无结构”的基线，需要求解一个非凸非线性模型预测控制问题（此处通过包含 1000 个样本的随机射击实现）。在我们的结果中，NN Koopman 表示仅使用标准多步预测损失（$\mathcal{L}_{\text{pred}}$）训练的深度 Koopman 架构。NN Koopman +Aux 表示使用完整目标训练的所提出方法，该目标包含辅助协方差和逆控制正则项（$\mathcal{L}_{\text{cov}} + \mathcal{L}_{\text{inv}}$），以主动构造适用于控制的潜在空间。

表 IV 展示了开环预测误差。所有方法的标准差均被省略，因为其数值可忽略不计（≤ 0.001）。正如预期，基于神经网络的方法（NNDM 和我们的 Koopman NN）显著优于固定基的 EDMD，这证实了深度学习对于捕捉高维机器人的复杂动力学至关重要。值得注意的是，无结构的 NNDM 在 G1 和 Go2 平台上的预测误差最低，这可能得益于其不受约束的表达能力。然而，预测性能更优并不意味着控制性能也更优。如表 V 所示，无结构的 NNDM 未能将其出色的预测准确度转化为稳健的闭环闭环性能，尤其是在 Go2 这类高维、接触丰富的腿式机器人上。这一失败凸显了实时求解非凸控制问题的困难。相比之下，我们的神经 Koopman 方法通过在潜在空间中强制施加全局线性，使得能够采用凸线性模型预测控制。这保证了全局最优控制解，因此即使预测误差略高，也能获得更强的生存能力。

2）协方差正则化与预测误差之间的关系：回顾一下，命题 1 中的采样误差界与格拉姆矩阵的条件数 $\kappa(G) = \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} \leq \frac{B^2}{\gamma}$ 成正比。一个良态

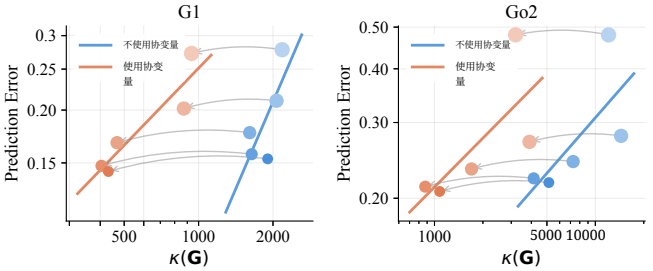


图 8：格拉姆矩阵条件数 $\kappa(\mathbf{G})$ 与预测误差的关系。标记大小和不透明度表示样本量 m（标记越小、颜色越深，表示 m 越大）。曲线显示拟合趋势，其中橙色表示使用协方差正则化，蓝色表示不使用协方差正则化。灰色箭头连接样本量相同的点。所提出的协方差损失显著降低了 $\kappa(\mathbf{G})$（向左移动），且始终与较低误差相关。

潜在空间以谱均衡为特征，其中最小特征值 $\lambda_{\min}$ 与零保持一定距离，这是最小化采样误差的理论前提。

为通过实证验证格拉姆矩阵条件数与模型性能之间的理论联系，我们分析了不同训练方案下经验格拉姆矩阵 $\mathbf{G}$ 的谱性质。图 8 展示了 G1 和 Go2 环境中，不同样本量（m）及最大模型容量（$n_{\text{multi}} = 16$）条件下，条件数 $\kappa(\mathbf{G})$ 与预测误差之间的关系。结果揭示了两种关键机制。首先，与基线（蓝色曲线）相比，所提出的协方差损失 $\mathcal{L}_{\text{cov}}$（橙色曲线）显著降低了条件数。通过显式惩罚格拉姆矩阵中的非对角项（如公式 53 所定义），该正则化项促使学得的可观测量近似正交。其次，在每种方法内部，我们都观察到一致的趋势：增大样本量（以更小、颜色更深的标记表示）会进一步降低条件数和预测误差。重要的是，沿着连接样本量相同实验的灰色箭头可以看到，性能得到严格提升：对于任何固定的数据量，经过正则化的模型都能达到显著更低的条件数和更小的预测误差。这些观察结果证实了谱稳定性与泛化之间存在直接关联：条件数越低，预测误差也越低。虽然增大样本量仍是总体上降低误差的主要因素，但通过 $\mathcal{L}_{\text{cov}}$ 在结构上强制实现正交性，可作为一种强有力的预条件手段。它使模型在给定的任意样本量下都能获得更好的条件性（更低的条件数），从而有效地将性能曲线移至更有利的区域。

3) 逆控制损失与预测误差之间的关系：协方差正则化 $\mathcal{L}_{\text{cov}}$ 通过格拉姆矩阵针对状态编码的稳定性，而逆控制损失 $\mathcal{L}_{\text{inv}}$ 则作用于控制矩阵 $\mathbf{B}$。具体而言，显式计算逆控制损失时依赖伪逆 $(\mathbf{B}^\top\mathbf{B})^\dagger\mathbf{B}^\top$，因此条件数 $\kappa(\mathbf{B}^\top\mathbf{B})$ 是一项值得关注的关键指标。

我们分析了在不同训练体制（$n_{\text{multi}} = 16$，样本量各异）下，G1 和 Go2 环境中 $\kappa(\mathbf{B}^\top\mathbf{B})$ 的演变。图 9 展示的行为与上一节对格拉姆矩阵的分析存在根本差异。与格拉姆矩阵不同，我们观察到条件

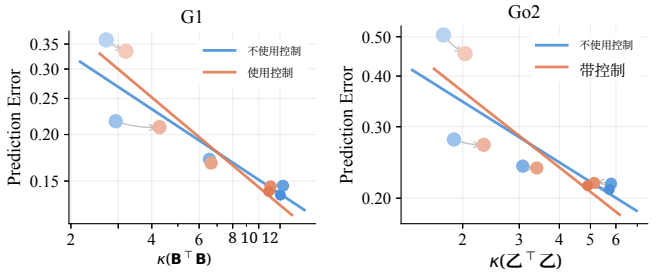


图9：控制矩阵条件数 $\kappa(\mathbf{B}^\top\mathbf{B})$ 与预测误差的关系。标记大小/不透明度表示样本量 m (较小/较深表示 m较大)，灰色箭头连接样本量相同的点。曲线显示有（橙色）和无（蓝色）逆控制正则化时拟合的趋势。与格拉姆矩阵不同， $\kappa(\mathbf{B}^\top\mathbf{B})$ 与误差呈负相关；更优的模型自然会演化出更高的条件数。

数 $\kappa(\mathbf{B}^\top\mathbf{B})$ 会随着模型收敛到更低的预测误差而增大。这一趋势与 G1 和 Go2 等欠驱动系统的动力学在物理上是一致的。在训练初期或低数据量区间，矩阵 $\mathbf{B}$ 通常被初始化为接近各向同性（ κ 较低）。随着模型利用更多样本量捕捉到真实动力学，它必须体现机器人物理驱动高度各向异性的本质——某些潜在方向具有较强的控制能力（特征值较大），而另一些方向则是欠驱动的（特征值较小）。此外，尽管逆控制损失（绿色曲线）对整体分布的影响不如协方差损失显著，但其影响高度依赖于数据量。当样本量较小时（$m \approx 10^3$），显式正则化 $\mathcal{L}_{\text{inv}}$ 提供了关键的结构先验。我们观察到，与基线模型（蓝色）相比，正则化模型（橙色）的预测误差更低，条件数更高。随着样本量增加（$m \to 10^5$），两条曲线趋于一致。在这一数据体制下，充足的交互数据使基线模型能够通过预测损失自然地恢复 $\mathbf{B}$ 的正确各向异性结构。

此外，为了通过受控的真实基准对所提出的缩放定律进行实证验证，我们在补充材料第2节中展示了一个案例研究，分析系统非线性和缩放行为。

VII. 结论

在本研究中，我们探究了神经 Koopman 算子的基本缩放定律。通过对估计误差进行理论分解，我们表明采样误差随训练样本量（m）衰减，而投影误差随潜在嵌入维度（n）衰减。因此，最优缩放需要在扩大数据集大小的同时扩展潜在维度。在该分析的指导下，我们引入了协方差与逆动力学正则化损失，以在学习子空间内从结构上强制正交性与可逆性。我们的实证评估涵盖从简单摆到高维腿式机器人（G1 与 Go2），验证了这些缩放关系，并表明我们的正则化器即使在数据有限的接触丰富场景中也能保持稳健的闭环控制。

未来工作将聚焦三个方向：1. 放宽假设：将我们的误差界扩展到标准独立同分布与谱衰减假设之外，以严格刻画现实世界运动中固有的非平稳轨迹与混合接触动力学。2. 动力学基础模型：利用我们的容量缩放洞见，在大规模多具身数据集上进行训练，旨在开发一种能够在不同机器人形态之间迁移普适物理不变量的通用模型。3. 仿真到现实部署：在实体 G1 与 Go2 硬件上验证我们的架构，并集成在线自适应机制，以缓解现实世界感知噪声并进一步降低不可约误差下限。

致谢

作者感谢 Hongyi Chen 就 Koopman 算子理论进行深入讨论，并感谢 Zhongqi Wei 收集 Kinova 数据集。本研究得到美国国家科学基金会（NSF）2144489号资助项目的支持。

[1] H. K. Khalil 和 J. W. Grizzle，《非线性系统》。Prentice Hall，Upper Saddle River，NJ，2002，卷 3。[2] T. He、Z. Luo、W. Xiao、C. Zhang、K. Kitani、C. Liu 和 G. Shi，“学习人类到人形机器人的实时全身遥操作”，载于*2024 IEEE/RSJ*智能机器人与系统国际会议（*IROS*）。IEEE，2024，第 8944–8951 页。[3] T. Haarnoja、A. Zhou、P. Abbeel 和 S. Levine，“软演员-评论家：采用随机演员的离策略最大熵深度强化学习”，载于国际机器学习会议。PMLR，2018，第 1861–1870 页。[4] Z. Fu、Q. Zhao、Q. Wu、G. Wetzstein 和 C. Finn，“Humanplus：人形机器人跟随与从人类进行模仿学习”，载于机器人学习会议。PMLR，2025，第 2828–2844 页。[5] A. S. Polydoros 和 L. Nalpantidis，“基于模型的强化学习综述：机器人学中的应用”，智能与机器人系统期刊，第 86 卷，第 2 期，第 153–173 页，2017。[6] D. Q. Mayne、J. B. Rawlings、C. V. Rao 和 P. O. Scokaert，“约束模型预测控制：稳定性与最优性”，*Automatica*，第 36 卷，第 6 期，第 789–814 页，2000。[7] S. Katayama、M. Murooka 和 Y. Tazaki，“腿式机器人与人形机器人的模型预测控制：模型与算法”，先进机器人学，第 37 卷，第 5 期，第 298–315 页，2023。[8] H. Kazemi、V. J. Majd 和 M. M. Moghaddam，“欠驱动四足机器人腾跃运动的建模与鲁棒反步控制”，*Robotica*，第 31 卷，第 3 期，第 423–439 页，2013。[9] A. Nagabandi、G. Kahn、R. S. Fearing 和 S. Levine，“用于基于模型的深度强化学习并采用无模型微调的神经网络动力学”，载于*2018 IEEE*机器人与自动化国际会议（*ICRA*）。IEEE，2018，第 7559–7566 页。[10] A. Abuduweili、S. Li 和 C. Liu，“面向人机协作的人类意图与轨迹自适应预测”，载于*AAAI*人工智能与人机交互秋季研讨会，2019。[11] A. Abuduweili 和 C. Liu，“面向多任务预测网络的鲁棒非线性自适应算法”，国际自适应控制与信号处理期刊，第 35 卷，第 3 期，第 314–341 页，2021。[12] B. O. Koopman，“哈密顿系统与希尔伯特空间中的变换”，美国国家科学院院刊，第 17 卷，第 5 期，第 315–318 页，1931。[13] I. Mezi´c，“动力系统的谱性质、模型降阶与分解”，非线性动力学，第 41 卷，第 309–325 页，2005。[14] C. W. Rowley、I. Mezi´c、S. Bagheri、P. Schlatter 和 D. S. Henningson，“非线性流的谱分析”，流体力学期刊，第 641 卷，第 115–127 页，2009。[15] M. O. Williams、I. G. Kevrekidis 和 C. W. Rowley，“Koopman 算子的基于数据的近似：扩展动态模态分解”，非线性科学期刊，第 25 卷，第 6 期，第 1307–1346 页，2015。

[16] C. A. Johnson、S. Balakrishnan 和 E. Yeung，“用于逼近 Koopman 算子子空间不变性的字典函数异构混合：深度 Koopman 算子为何有效”，《非线性科学期刊》，第 35 卷，第 4 期，第 68 页，2025。[17] B. Lusch、J. N. Kutz 和 S. L. Brunton，“用于非线性动力学通用线性嵌入的深度学习”，《自然通讯》，第 9 卷，第 1 期，第 4950 页，2018。[18] E. Yeung、S. Kundu 和 N. Hodas，“学习非线性动力系统 Koopman 算子的深度神经网络表示”，载于《2019年美国控制会议（ACC）》。IEEE，2019，第 4832–4839 页。[19] J. Kim、Y. Han、H. Ravichandar 和 S. Ha，“利用基于强化学习的控制器学习用于安全腿式运动的 Koopman 动力学”，arXiv 预印本 arXiv:2409.14736，2024。[20] M. Korda 和 I. Mezi´c，“非线性动力系统的线性预测器：Koopman 算子与模型预测控制的结合”，《Automatica》，第 93 卷，第 149–160 页，2018。[21] H. Chen、A. Abuduweili、A. Agrawal、Y. Han、H. Ravichandar、C. Liu 和 J. Ichnowski，“Korol：利用 Koopman 算子滚动展开学习可视化对象特征以进行操作”，载于《机器人学习会议》。PMLR，2025，第 4509–4524 页。[22] F. N¨uske、S. Peitz、F. Philipp、M. Schaller 和 K. Worthmann，“基于 Koopman 的预测与控制的有限数据误差界”，《非线性科学期刊》，第 33 卷，第 1 期，第 14 页，2023。[23] M. J. Colbrook 和 A. Townsend，“对动力系统 Koopman 算子谱性质进行严谨的数据驱动计算”，《纯粹与应用数学通讯》，第 77 卷，第 1 期，第 221–283 页，2024。[24] G. Mamakoukas、M. L. Castano、X. Tan 和 T. D. Murphey，“用于机器人系统实时控制的基于导数的 Koopman 算子”，《IEEE机器人学汇刊》，第 37 卷，2192，2021 年 6 月，第 2173– 页。[25] F. Li、A. Abuduweili、Y. Sun、R. Chen、W. Zhao 和 C. Liu，“用于腿式机器人线性控制的 Koopman 动力学持续学习与升维”，载于《第七届年度动力学与控制学习会议》。PMLR，2025，第 136–148 页。[26] C.-M. Yang 和 P. A. Bhounsule，“基于 Koopman 算子的四足机器人小跑线性模型预测控制”，载于《2025年IEEE机器人与自动化国际会议（ICRA）》。IEEE，2025，第 12 359–12 364 页。[27] J. Kaplan、S. McCandlish、T. Henighan、T. B. Brown、B. Chess、R. Child、S. Gray、A. Radford、J. Wu 和 D. Amodei，“神经语言模型的缩放定律”，arXiv 预印本 arXiv:2001.08361，2020。[28] J. Hoffmann、S. Borgeaud、A. Mensch、E. Buchatskaya、T. Cai、E. Rutherford、D. de Las Casas、L. A. Hendricks、J. Welbl、A. Clark 等，“训练计算最优的大语言模型”，载于《第36届神经信息处理系统国际会议论文集》，2022，第 30 016–30 030 页。[29] B. Zitkovich、T. Yu、S. Xu、P. Xu、T. Xiao、F. Xia、J. Wu、P. Wohlhart、S. Welker、A. Wahid 等，“Rt-2：视觉-语言-动作模型将网络知识迁移至机器人控制”，载于《机器人学习会议》。PMLR，2023，第 2165–2183 页。[30] A. Kumar、R. Agarwal、X. Geng、G. Tucker 和 S. Levine，“在多样化多任务数据上进行离线 Q 学习：两者都能扩展并实现泛化”，载于《第十一届国际表示学习会议》，2023。[31] F. Lin、Y. Hu、P. Sheng、C. Wen、J. You 和 Y. Gao，“机器人操作模仿学习中的数据缩放定律”，载于《第十三届国际表示学习会议》，2025。[32] M. O. Williams、I. G. Kevrekidis 和 C. W. Rowley，“Koopman 算子的基于数据的近似：扩展动态模态分解”，《非线性科学期刊》，第 1307–1346 页，2015 年 12 月。[33] M. Korda 和 I. Mezi´c，“扩展动态模态分解收敛至 Koopman 算子的研究”，《非线性科学期刊》，第 28 卷，第 687–710 页，2018。[34] A. Lasota 和 M. C. Mackey，《混沌、分形与噪声：动力学的随机性方面》。Springer Science & Business Media，2013，第 97 卷。[35] J. A. Tropp 等，“矩阵集中不等式导论”，《机器学习基础与趋势》，第 8 卷，第 1–2 期，第 1–230 页，2015。[36] J. A. Tropp，“易于使用的随机矩阵和的尾界”，《计算数学基础》，第 12 卷，第 389–434 页，2012。[37] K. Knopp，《无穷序列与级数》。Courier Corporation，2012。[38] K. Hornik、M. Stinchcombe 和 H. White，“多层前馈网络是通用逼近器”，《神经网络》，第 2 卷，第 5 期，第 359–366 页，1989。[39] G.Cybenko，“通过 sigmoid 函数的叠加进行逼近”，控制、信号与系统数学，第 2 卷，314，1989 年第 4 期，第 303 页–。[40] L. N. Trefethen，逼近理论与逼近实践，扩展版。SIAM，2019 年。[41] A. Mauroy 和 I. Mezi´c，“利用 Koopman 算子的特征函数进行全局稳定性分析”，*IEEE* 自动控制汇刊，第 61 卷，第 11 期，第 3356–3369 页，2016 年。[42] N. Rahaman、A. Baratin、D. Arpit、F. Draxler、M. Lin、F. Hamprecht、Y. Bengio 和 A. Courville，“论神经网络的谱偏差”，载于国际机器学习会议。PMLR，2019 年，第 5301–5310 页。[43] H. Shi 和 M. Q.-H. Meng，“用于非线性系统的深度 Koopman 控制算子”，*IEEE* 机器人与自动化快报，第 7 卷，第 3 期，第 7700–7707 页，2022 年。[44] Y. Han、M. Xie、Y. Zhao 和 H. Ravichandar，“论 Koopman 算子理论在学习灵巧操作技能中的效用”，载于机器人学习会议。PMLR，2023 年，第 106–126 页。

附录

A. 实验设置

我们在七种复杂程度各异的动力系统上验证了我们的方法，其范围从简单的非线性到高维机器人运动。表 VI 总结了主要实验中每个环境的维度。

表 VI：环境及原始维度汇总。请注意，Unitree G1 和 Go2 模型是在经过裁剪的状态-动作空间上训练的。

环境	状态维度	动作维度
多项式	3	0
阻尼摆	2	1
双摆	4	2
Franka Panda	14	7
Kinova Gen3	14	7
Unitree Go2	35	12
Unitree G1	53	23

a) 多项式系统：为在受控的真实基准设置下对所提出的缩放定律进行实证验证，我们考虑一个具有可调非线性耦合的三维离散时间多项式系统：

$$\begin{aligned} x_{1,t+1} &= 0.85\, x_{1,t}, \\ x_{2,t+1} &= 0.90\, x_{2,t}, \\ x_{3,t+1} &= 0.90\, x_{3,t} + \sum_{p=1}^{n_{\text{poly}}-2} b_p x_{1,t}^{p}, \end{aligned} \tag{58}$$

其中，n_{poly} 控制多项式交互项的最高次数，而 b_p 是一个缩放系数（例如，b_p =0.9）。增大n_{poly} 会在保持稳定性的同时，直接提高系统的有效非线性复杂度。遵循策略 I（IV.C 节），轨迹由从超立方体 $[-1,1]^3$中均匀采样的初始状态生成。

b) 阻尼摆与双摆：为评估在具有物理意义的非线性系统上的性能，我们考虑两个经典的非线性控制基准：阻尼摆和双摆。对于阻尼摆，状态$x \in \mathbb{R}^2$ 由角度和角速度组成；对于双摆，$x \in \mathbb{R}^4$ 包含两个关节各自的角度和速度。在这两种情况下，控制 $u \in \mathbb{R}$ 表示施加于主关节的力矩。这些连续时间动力学通过数值积分（使用 scipy.integrate.odeint）进行仿真，时间离散化 $\Delta t = 0.02\,\text{s}$（阻尼摆）和 $\Delta t = 0.01\text{s}$（双摆）。训练轨迹通过策略 I 生成：在预定义的状态边界内均匀采样初始状态，并在每个时间步施加随机控制输入。

c) Franka Panda（仿真）：我们在 PyBullet 中对一台仿真的 7 自由度 Franka Emika Panda 机械臂进行评估。系统状态 $x \in \mathbb{R}^{14}$ 由 7 个关节位置和 7 个关节速度组成。控制输入 $u \in \mathbb{R}^7$ 对应于指令关节速度。需要注意的是，由于内部底层跟踪动力学的作用，指令关节速度并不直接等于测得的关节速度，从而产生了逼真的执行偏差。由于仿真器不施加安全约束，数据按照策略 II（随机驱动）生成。机器人初始化在名义初始位形附近，并施加小幅随机关节扰动；随后通过施加随机采样的关节速度指令来采集轨迹。

d) Kinova Gen3（真实世界）：为了评估方法在物理硬件上的性能，我们将其部署在 Kinova Gen3 上，这是一款轻量级的 7 自由度协作机械臂。状态 $x \in \mathbb{R}^{14}$ 包括关节位置和关节速度，而控制输入 $u \in \mathbb{R}^7$ 由指令关节速度构成。与仿真环境不同，真实世界的数据采集需要严格的安全保证。因此，我们采用策略 III（约束探索）。我们使用 Drake 机器人工具箱，制定了一个两阶段的运动学轨迹优化流程。首先，在随机采样的构型之间计算一条可行轨迹。其次，对轨迹进行细化，以满足碰撞规避和关节限位约束。这个结构化的数据采集流程既能确保充分覆盖状态空间，又能防止不安全运动和硬件损坏。

e) 宇树 *Go2* 和 *G1*（仿真）：我们还在高维欠驱动运动系统上进一步评估了方法的可扩展性，包括在 Isaac Sim 中仿真的宇树 Go2 四足机器人和 Unitree G1 人形机器人。这些平台具有复杂的混合动力学和欠驱动特性，为基于学习的 Koopman 模型提供了具有挑战性的测试平台。对于这两个系统，状态 x 包括基座姿态（四元数）、基座线速度和角速度，以及关节位置和关节速度。控制输入 u 由期望关节位置构成，并通过内置的 PD 控制器执行。数据通过专家引导探索策略（策略 III）生成。我们首先使用预训练的强化学习专家策略收集基线数据集。随后，我们进行迭代式数据聚合：基于 Koopman 的模型预测控制器跟踪专家生成的轨迹，并将由此得到的同策略展开纳入训练集。通过结合专家示范与在线策略恢复数据，学习得到的模型能够接触到闭环部署过程中遇到的状态分布和稳定行为。

B. 案例研究：系统非线性与缩放定律

为在可控的真实基准设置下对所提出的缩放定律进行实证验证，我们考虑一个具有可调非线性耦合的三维离散时间多项式系统：

$$\begin{aligned} x_{1,t+1} &= 0.85\, x_{1,t}, \\ x_{2,t+1} &= 0.90\, x_{2,t}, \\ x_{3,t+1} &= 0.90\, x_{3,t} + \sum_{p=1}^{n_{\text{poly}}-2} b_p x_{1,t}^{p}, \end{aligned} \tag{59}$$

其中，n_{poly} 控制多项式交互项的最高次数，b_p 是一个缩放系数（例如 b_p =0.9）。增大 n_{poly} 会直接提高系统的有效非线性复杂度，同时保持系统稳定。遵循策略I（第IV.C节），轨迹由从超立方体 $[-1,1]^3$中均匀采样的初始状态生成。

我们将式 (59) 中的多项式系统用作受控测试案例，以了解物理非线性如何影响神经

Koopman 算子的缩放定律。我们测试五种不同程度的非线性，并设置多项式次数 $n_{\text{poly}} \in \{3, 5, 10, 20, 50\}$。对于每种程度，我们将预测误差拟合为幂律 $\epsilon(D) = AD^{-\alpha} + C$。为确保拟合准确，我们按以下方式隔离变量。对于样本缩放（α_m），我们改变样本量 m，同时将模型容量固定为最大值（$n_{\text{multi}} = 16$）。对于潜在维度缩放（α_n），我们改变潜在维度 n，同时将数据集大小固定为最大值（$m = 140\text{k}$）。

表 VII：非线性对缩放的影响。$n$poly 越大，指数衰减项越慢（α 越低），误差下限越高（C）。R^2 表示拟合可靠性。

n_{poly}	**样本量** (α_m, C_m, R^2)	**潜在维度** (α_n, C_n, R^2)
3	(2.64, 1.75×10^{-8},1.00)	(0.28, 1.18×10^{-21}, 0.25)
5	(2.57, 8.79×10^{-8},1.00)	(0.20, 2.72×10^{-21}, 0.51)
10	(2.52, 4.74×10^{-7},1.00)	(0.14, 4.51×10^{-20}, 0.74)
20	(1.91, 2.98×10^{-6},1.00)	(0.08, 4.54×10^{-20}, 0.57)
50	(1.64, 2.63×10^{-5},0.99)	(0.02, 4.17×10^{-19}, 0.53)

表 VII总结了结果。这些趋势清晰地说明了复杂性与缩放定律之间的关系。随着非线性n_{poly} 从3增加到50，缩放指数 α_m下降（$2.64 \to 1.64$）。这意味着高度非线性系统是“数据饥渴”的，也就是说，它们需要指数级更多的样本才能实现相同的误差降低。与此同时，误差下限 C_m 上升了数个数量级。这证实，对于复杂系统，误差会迅速变为偏差受限：即使拥有无限数据，有限模型也难以捕捉高次多项式的全部动力学。误差下限C_m 包含投影误差。潜在维度缩放遵循类似的模式，但指数要小得多。随着非线性增加，α_n 衰减。这是因为高次多项式具有“重尾”谱（如假设6中所讨论的）；系统的能量分布在无限多个模态上。因此，增加更多潜在维度的收益会递减，因为每个新维度只能捕捉剩余动力学的极小一部分。

随后，我们评估所提出的协方差损失（$\mathcal{L}_{\text{cov}}$）在多项式系统中是否有效。我们比较了最大规模设置（$m = 140\text{k}$ $n_{\text{multi}} = 16$）下的性能。如表 VIII 所示，协方差损失始终能够降低误差。在非线性最强的情况下，改进幅度最大。相关对于假设 4，这表明 $\mathcal{L}_{\text{cov}}$ 迫使网络学习独立特征向量，使其能够在有限的潜在空间内获取更多有用信息；当动力学较为复杂时，这是一项关键优势。

表 VIII：协方差正则化损失（$\mathcal{L}$cov）对预测误差的影响。在最大模型容量（$n$multi = 16）和数据集大小（$m = 140\text{k}$）下，评估不同多项式次数（n poly）的影响。

次数 (n_{poly})	基线	+ 协方差损失	误差降低
3	9.51×10^{-6}	8.89×10^{-6}	6.5%
5	2.12×10^{-5}	2.04×10^{-5}	4%
10	6.22×10^{-4}	5.47×10^{-4}	12.1%
20	1.34×10^{-2}	1.17×10^{-2}	12.7%
50	1.98×10^{-1}	1.62×10^{-1}	18.1%

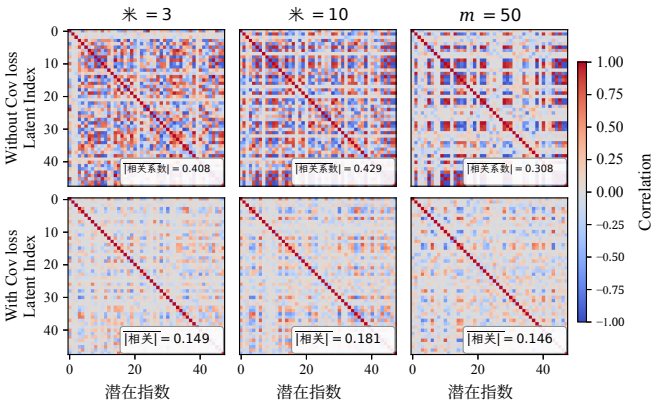


图 10：协方差正则化对潜在特征相关性的影响。热图展示了不同多项式次数 poly 下学习到的嵌入 ϕ x n $\in$ ( ) 的相关矩阵。$\{3, 10, 50\}$ 上排（基线）：未进行正则化时，特征之间呈现较强的交叉相关（非对角区域块较密集）。下排（使用 $\mathcal{L}$cov）：经过正则化后，矩阵明显变得稀疏，表明特征去相关效果显著。每种情况下的平均非对角相关性 $|corr|$ 均有报告。

为了可视化表 VIII 中所报告的性能提升背后的机制，我们分析了学习嵌入函数的结构独立性。我们计算了高容量区间（$n = 48, m = 140\text{k}$）中潜在特征向量 $\{\phi_i\}_{i=1}^{n}$ 之间的相关矩阵。图 10 比较了非线性逐渐增强的系统（$n_{\text{poly}} \in \{3, 10, 50\}$）的相关结构。如顶行所示，在没有协方差正则化的情况下，基线模型表现出显著的谱冗余。热图显示了具有高相关系数（$|corr| > 0.30$）的密集非对角块。这表明许多潜在维度实际上在编码相同的主导模态。如底行所示，施加协方差损失会显著改变特征结构。热图变得稀疏且以对角线为主，平均非对角相关性降至 0.19 以下。这证实了 $\mathcal{L}_{\text{cov}}$ 成功地在函数空间中强制实现正交性。这最大化了 Koopman 算子的有效秩，并确保每个维度都为预测贡献独特信息。这种经验性去相关直接支持了假设 4 的有效性，从而稳定了缩放定律，并使得性能能够随着模型容量的增加而持续提升。