arXiv:2602.19978v1 [math.AC] 23 Feb 2026

由 $n+1$ 个一般线性形式的幂生成的理想的贝蒂数

ERIC DANNETUN

Abstract. 我们研究由 $n+1$ 个一般线性形式的幂在 $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ 中生成的理想。通过推广 Diethorn 等人在近期论文中的思路，我们确定了当至少有一个生成元为平方时，此类理想的贝蒂数。由此可知，所有此类理想都是层的。因此，我们证明了在 R 中由 $n+1$ 个形式生成且至少有一个二次生成元的一般理想是层的。我们还确定了与这些几乎完全交相链接的阿廷 Gorenstein 代数的贝蒂数。通过描述这些代数的对偶生成元，我们得到一族形式，其中包括初等对称多项式，这些形式的湮灭理想具有强 Lefschetz 性质。最后，我们给出任意初等对称多项式的湮灭理想的显式生成元。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 3 3. R/I 和 R/G 的自由分解 9 4. 链接阿廷-戈伦斯坦代数的强 Lefschetz 性质 20 5. G 的生成元 23 致谢 26 参考文献 26

1. Introduction

设 $R = k[x_1, \ldots, x_n]$，其 k 的特征为零，并考虑理想 $I = (\ell_1^{d_1}, \ldots, \ell_{n+1}^{d_{n+1}})$，其中 ℓ_i 是一般线性形式。经过线性变量替换后，可假设 I 具有如下形式：$I = (x_1^{d_1}, \ldots, x_n^{d_n}, \ell^{d_{n+1}})$，其中 $\ell = x_1 + \cdots + x_n$。

由一般线性形式生成的理想（不一定是几乎完全交）有着丰富的研究历史。下面列举一些值得注意的贡献：[FH94], [EI95], [SS10], [HSS11], [NT19], 和 [BL23]。此外，近年来，许多作者从不同角度对几乎完全交的情形给予了广泛关注，例如参见[BSV25], [KLM+24]、 [DGH+25]和 [KLMO25]。

本文确定了由 $n+1$ 个一般线性形式的幂生成，且至少有一个生成元是平方的任意理想的贝蒂数。这推广了 Diethorn 等人 [DGH+25] 最近的工作，他们研究了理想 $(x_1^2, \ldots, x_n^2, \ell^2)$ 这一特殊情形；我们的研究方法深受该工作的启发。正如我们稍后将讨论的，有些情形的贝蒂数此前已经得到确定。对于其余情形，我们通过证明这些贝蒂数可以写成两个来自此类已知理想的贝蒂数之和，从而确定它们。

因此，我们证明，由 $n+1$ 个形式生成且至少有一个生成元为二次型的一般理想是层的。

令 $J = (x_1^{d_1}, \ldots, x_{n-1}^{d_{n-1}}, x_n^{d_n})$。与我们的理想 $I = J + (\ell^{d_n+1})$ 相关联的还有一个阿廷-戈伦斯坦代数 R/G，其中 $G = J : (\ell^{d_{n+1}})$。本文其余部分主要研究这个代数。与 R/I 类似，当 J 的一个生成元是平方时，我们确定 R/G 的贝蒂数。我们证明，对于任意的 $d_1, \ldots, d_{n+1}$，R/G 都满足强 Lefschetz 性质；此外，我们结合这一结果与 Macaulay 对偶生成元的描述，得到一族新的形式，它们是具有强 Lefschetz 性质的阿廷-戈伦斯坦代数的对偶生成元。最后，我们确定 $d_1 = \cdots = d_n = 2$ 时 G 的一组生成元，从而拓展了 [DGH+25] 的工作。

1.1. 背景与动机。 由线性形式的幂生成的理想自然地出现在对 Lefschetz 性质的研究中，并且通过 Macaulay 逆系统，它们与胖点理想相关联，进而涉及多项式插值问题。值得注意的是，根据 R. Stanley 的研究以及 J. Watanabe 独立完成的工作（见定理 2.4），$I = (x_1^{d_1}, \ldots, x_n^{d_n}, \ell^{d_{n+1}})$ 的希尔伯特级数在所有由次数为 $d_1, \ldots, d_{n+1}$ 的 $n+1$ 形式生成的理想中是最小的。此外，这恰恰构成了目前已知的关于由 $n+1$ 形式生成的理想之 Fr¨oberg 猜想（见[Fr¨o85]）的证明。

这项工作的自然延续，无论是针对一般理想，还是针对由 $n+1$ 个一般线性形式的幂生成的理想，都是

确定极小自由分解，即贝蒂数。对一般理想的贝蒂数的研究始于 [MMR03b]，其中除其他结果外，还确定了当 $n = 3$时，4 个生成元情形下的贝蒂数。随后， [MMRN05] 改进了这项工作， [MMR03a], [、09] PR[和15]Die¨中则给出了更多结果。粗略地说，这些结果表明，一般理想的极小分解（假设 Fr $n+1$ oberg 猜想成立）在每个自由模的最高两个次数之外，都与相应的 Koszul 复形相似。在某些特殊情形下，它除了最高次数外都与 Koszul 复形一致；此时，最后几个贝蒂数由希尔伯特级数决定。因此，只有在这些特殊情形下，贝蒂数才得到了完整的理解。对于形式，这一论证也适用于由一般线性形式的幂生成的理想。

鉴于此，并且由于它们是已知具有最小希尔伯特级数的、含有 $n+1$ 个生成元的理想的主要实例，因此通过研究一般线性形式的幂来探讨一般理想的贝蒂数也是很自然的。

2. Preliminaries

设 $R = \bigoplus_{i\geq 0} R_i$ 是一个诺特标准分次环，其中 $R_0 = k$ 为特征零域。我们通常将 R 视为含有 n 个变量的多项式环 $k[x_1, \ldots, x_n]$，或视为该环的一个分次商环。 R 的唯一分次极大理想记为 $\mathfrak{m} = \bigoplus_{i>0} R_i$。

我们首先回顾一些标准定义和记号，以及一些相关结果。许多标准定义和记号可见于 [Pee11]。

有限生成分次R-模 M的希尔伯特函数 $\mathrm{HF}_M\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$定义为

$$\mathrm{HF}_M(i) := \dim_k(M_i),$$

以及希尔伯特级数 $\mathrm{H}_M(T) \in \mathbb{Z}[[T]]$，即

$$\mathrm{H}_M(T) := \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{HF}_M(i)T^i.$$

若 M 的克鲁尔维数为 d，则我们可以写出 $\mathrm{H}_M(T) = \frac{h_m(T)}{(1-T)^d}$，并且 M 的重数（记作 $e(M)$）定义为 $h_M(1)$。

分次自由分解

$$F_\bullet\colon \quad F_n \xrightarrow{\phi_n} F_{n-1} \xrightarrow{\phi_{n-1}} \ldots \xrightarrow{\phi_3} F_2 \xrightarrow{\phi_2} F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0$$

M 称为极小分解，当且仅当 $\phi_i(F_{i+1}) \subseteq \mathfrak{m}F_i$。极小分解在分次同构意义下唯一。记作 $F_i = \bigoplus_j R(-j)^{\beta_{i,\,j}^R(M)}$，我们称 $\beta_{i,\,j}^R(M)$ 为 M（在 R 上）的贝蒂数。由此可得

$$\beta_{i,j}^R(M) = \dim_k \operatorname{Tor}_i^R(M,k)_j.$$

贝蒂数通常以表格形式呈现，该表称为贝蒂表，其中第 (i,j) 项为 $\beta_{i,i+j}(M)$。见下图。

$$\begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & \dots & i & \dots & n \\ 0: & \beta_{0,0} & \beta_{1,1} & \dots & \beta_{i,i} & \dots & \beta_{n,n} \\ 1: & \beta_{0,1} & \beta_{1,2} & \dots & \beta_{i,i+1} & \dots & \beta_{n,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ j: & \beta_{0,j} & \beta_{1,j+1} & \dots & \beta_{i,i+j} & \dots & \beta_{n,n+j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ s: & \beta_{0,s} & \beta_{1,s+1} & \dots & \beta_{i,i+s} & \dots & \beta_{n,n+s} \end{array}.$$

对于一个分次自由复形 $C_\bullet$（不一定是正合的），我们有$C_i = \bigoplus_j R(-j)^{\beta_{i,j}}$ 并且也称 $\beta_{i,j}$ 为 $C_\bullet$ 的贝蒂数。

对于元素序列 $I = (f_1, \dots, f_r)$，我们将该序列的 Koszul 复形 $K_\bullet(I)$ 定义为 $(K_\bullet(I))_i = \bigwedge^i(R^r)$，其微分$d_i\colon K_i(I) \to K_{i-1}(I)$ 定义为

$$d_i(e_{a_1} \wedge \cdots \wedge e_{a_i}) = \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j+1} f_{a_j}(e_{a_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{a_j}} \wedge \cdots \wedge e_{a_i})$$

对于任意 $a_1 < \cdots < a_i \leq r$，其中 e_j 表示 R^r 的第 j 个标准基元素。

对于任意分次 R-模 M 和自然数 D，我们令 $M_{(D)}$ 表示由次数为 D 及以下的元素生成的子模。对于满足 $d(C_r) \subseteq \mathfrak{m}C_{r-1}$ 的链复形 $(C_\bullet, d)$，我们将复形记为 $C_\bullet^{(D)}$，其中 $(C_\bullet^{(D)})_i = (C_i)^{(i+D)}$，其微分与 $C_\bullet$ 相同（限制后的微分）d。注意，条件 $d(C_r) \subseteq \mathfrak{m}C_{r-1}$ 足以保证 $C_\bullet^{(D)}$ 是一个定义良好的链复形。

注 2.1. 对于两个自由 R-模的链复形 $C_\bullet$ 和 $G_\bullet$，由陈述 $C_\bullet^{(D)} \cong G_\bullet^{(D)}$ 可知， $C_\bullet$ 和 $G_\bullet$的贝蒂表在0到 D行相等。

与这些定义相关，我们有以下一个有用的引理。

引理 2.2 （ [PR09]中的引理 3.4）。设 ϕ: $M \to N$ 是一个模同态，它诱导出一个同构 $M_{(\tau)} \cong N_{(\tau)}$. 。若 $F_\bullet \to M$ 和$G_\bullet \to N$ 分别是 M 和 N的极小自由分解，那么将 ϕ提升为态射 $F_\bullet \to G_\bullet$ 的任意提升，限制后都是一个同构 $F_\bullet^{(\tau)} \cong G_\bullet^{(\tau)}$。

注 2.3. 我们想指出，论文 [PR09] 已发表了一份勘误 [PR12] ，修正了原始证明中的一些错误。这并不影响原论文中结果的有效性。

如果一个分次阿廷 k-代数 A 具有强 Lefschetz 性质（SLP），那么存在一个线性形式 $l \in A_1$ ，使得对所有整数 i， j，乘法映射

$$A_i \xrightarrow{\cdot \ell^j} A_{i+j}$$

具有极大秩，即为单射或满射。 A 若同一乘法映射对 $j = 1$具有极大秩，则称其具有弱 Lefschetz 性质（WLP）。乘法具有极大秩的元素称为弱 Lefschetz 元素或强 Lefschetz 元素。

Lefschetz 性质理论中的主要结果，也是这一研究领域的开端，是以下定理。该结果最初由 Stanley [Sta80],证明，后来由 Watanabe [Wat87], 独立证明，此后还有许多其他作者给出了证明。

定理 2.4。 设 $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ 满足 ***char*** $k = 0$。那么任意单项式完全交 $I = (x_1^{d_1}, \ldots, x_n^{d_n})$ 都满足强 ***Lefschetz*** 性质。

与 Lefschetz 性质类似，我们还有极大秩元素这一相关概念，或者按照 [PR09], 的引入，称为半正则序列。对于分次 Noetherian k-代数 A ，若元素 $f \in A_d$ 的乘法映射 $A_i \xrightarrow{\cdot f} A_{i+d}$ 对所有 i都具有极大秩，则称其为半正则的。若序列 $f_1, \ldots, f_r$ 满足对所有 $1 \le i \le r$， f_i在 $A/(f_1, \ldots, f_{i-1})$ 上都是半正则的，则称该序列为半正则序列。

因此，半正则序列的希尔伯特级数等于 Fr¨oberg 猜想所预测的级数。

猜想 2.5 （Fr¨oberg 猜想 [Fr¨o85]）。 对于一般理想$I = (f_1, \ldots, f_r) \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ 且deg $f_i = d_i$， 我们有

$$\mathrm{H}_{R/I}(T) = \left[\frac{\prod_{i=1}^{r} (1 - T^{d_i})}{(1 - T)^n} \right].$$

这里 [.]表示在第一个非正系数处截断幂级数。此外，该猜想等价于以下陈述：一般理想由半正则序列定义（见 [Par10]）。我们选择针对半正则序列而非一般理想陈述部分结果，是因为我们希望明确指出，这些陈述适用于由一般线性形式的幂生成的理想。要证明 $I = (x_1^{d_1}, \dots, x_n^{d_n}, \ell^{d_{n+1}})$ 是半正则序列，首先注意到任何正则序列都是半正则的，因此 $J = (x_1^{d_1}, \dots, x_n^{d_n})$ 是半正则序列；然后根据定理 2.4，乘以$\ell^{d_{n+1}}$ 在 R/J 上具有极大秩，由此得证。

以下定理描述了阿廷完全交的希尔伯特级数的形状。

定理 2.6 ([RRR91])。 设 $A = k[x_1, \dots, x_n]/(x_1^{d_1}, \dots, x_n^{d_n})$，其中$k$是一个域，且 $1 \le d_1 \le \cdots \le d_n$。设 $t = \sum_{i=1}^{n}(d_i - 1)$。

- 假设 $d_n \le \frac{t+1}{2}$。若 t 为偶数，则 希尔伯特函数$_A$ 在区间 $[0, t/2]$ 内严格递增，并在区间$[t/2, t+1]$内严格递减。若 t 为奇数，则 希尔伯特函数$_A$ 在区间 $[0, \frac{t-1}{2}]$内严格递增，在区间 $[\frac{t-1}{2}, \frac{t+1}{2}]$ 内保持不变，并在区间 $[\frac{t+1}{2}, t+1]$内严格递减。
- 假设 $d_n > \frac{t+1}{2}$。那么 希尔伯特函数$_A$ 会严格递增，直至到达一个平顶区间，该区间始于 $t' = \sum_{i=1}^{n-1}(d_i - 1)$，终于 $d_n - 1$；此后它将严格递减至 0。

当 $\sum_{i=1}^{n+1}(d_i - 1)$ 为奇数时， $n+1$个次数为 $\{d_i\}_{i=1}^{n+1}$ 的形式所构成的半正则序列的贝蒂数描述对我们的结果至关重要，并最早见于 [MMRN05]。不过，他们的结果是用一般理想来表述的，其描述与我们下面给出的表述相当不同。我们给出的描述在满足某个数值条件的前提下，对任意半正则序列均已于 [PR09] 中证明；最近， [Fr¨o25] 证明了在我们的情形下该条件成立。我们依照 [Fr¨o25] 给出证明概要。

定理 2.7。 设 $I = (f_1, \dots, f_{n+1})$ 是$R = k[x_1, \dots, x_n]$ 中的半正则序列，且 次数 $f_i = d_i$。若 $\sum_{i=1}^{n+1}(d_i - 1)$ 为奇数，则 R/I 的贝蒂表除最后一行外，均与 *Koszul* 复形 $K_\bullet(I)$的贝蒂表一致，且由此可确定 R/I的所有贝蒂数。

证明概要。 根据 [PR09] 和 [Die15] 的结果，只需证明第一个非正系数

$$\frac{\prod_{i=1}^{n+1}(1-t^{d_i})}{(1-t)^n}$$

为零，或等价地，存在一个次数 j 使得

$$R/(f_1,\dots,f_n)_j \xrightarrow{\cdot f_{n+1}} R/(f_1,\dots,f_n)_{j+d_{n+1}}$$

是双射。根据定义，乘以 f_{n+1} 具有极大秩；若 J 的峰数 s大于 d_{n+1}，显然存在这样的次数。因此，我们可以假设 $s < d_{n+1}$。我们断言，若 $d_{n+1}-s$ 为奇数，则会出现这样的双射。由于我们可以写成$d_{n+1}=2k+s-1$，其中 k为某个整数，因此若峰从 i开始，则从次数 $i-k$到 $i+$ （$s-1$）乘以 f_{n+1}的映射$+k$是双射。由定理 2.6 可知，这恰好在$\sum_{i=1}^{n+1}$ （d_i-1）为奇数时成立。□

若阿廷 k-代数 $A=R/I$ 满足 Soc(A) 在一个次数上生成，则称其为层代数，其中 Soc(A) $=\{f\in A \mid \mathfrak{m}f=0\}$。定理 2.7 的一个直接推论如下，稍后我们将用到它。

推论 2.8. 设 $I=(f_1,\dots,f_{n+1})$ 是一个$\deg f_i=d_i$的半正则序列。若 $\sum_{i=1}^{n+1}(d_i-1)$ 为奇数，则 R/I 是层的。

证明. 根据构造可知 $(K_\bullet(I))_n = R(-(\sum_{i=1}^{n+1} d_i))$，并且由于 R/I 的底层次数 s总是小于 $\sum_{i=1}^{n+1} d_i$，由定理 2.7 可得 $\beta_{n,j}^R(R/I)=0$ 当 $j\le n+s-1$时。□

当 $t=\sum_{i=1}^{n+1}(d_i-1)$ 为奇数时，定理 2.7 确定了 $I=(x_1^{d_1},\dots,x_n^{d_n},\ell^{d_{n+1}})$ 的贝蒂数，因此剩余情形是 $\sum_{i=1}^{n+1}(d_i-1)$ 为偶数的情况。我们的方法受 [DGH+25] 启发，旨在证明：当至少有一个 d_i 等于 2 时，贝蒂数可以化为定理 2.7 所涵盖情形中的贝蒂数之和；在该情形下，这些贝蒂数由希尔伯特级数唯一确定。

对于 R/G，其中 $G=(x_1^{d_1},\dots,x_n^{d_n}):(\ell^{d_{n+1}})$，我们将以类似的方式确定贝蒂数。为此，我们需要一个结果来确定当 $\sum_{i=1}^{n}(d_i-1)$ 为奇数时 R/G 的贝蒂数。命题 2.10 给出了这个结果，但我们首先需要 [MMR03b] 中的一个结果，该结果描述了 R/G 的希尔伯特级数。

引理 2.9 (引理 2.6，见 [MMR03b])。设 $I=(f_1,\dots,f_{n+1})$ 是一个极小生成的半正则序列，且次数 $f_i=d_i$；设 J 为完全交 $(f_1,\dots,f_n)$，并取 $G=J:(f_{n+1})$。则有以下结论。

- R/G 的底层次数为 $\sum_{i=1}^{n}(d_1-1)-d_{n+1}$。
- 对于整数 $j\leq \frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i-1)}{2}-d_{n+1}$，有 $\mathrm{HF}^{R/G}(j)=\mathrm{HF}^{R/J}(j)$。由对称性，这完全确定了 $\mathrm{H}^{R/G}(T)$。

由于我们只用到 R/G 关于完全交 J 是相对压缩的这一事实，因此以下命题也可以用相对压缩代数来表述。它对应于 [MMRN05] 中的定理 3.5。我们选择给出一个新的证明，因为利用引理 2.2，证明会相当简单。

命题 2.10. 设 $(f_1,\dots,f_{n+1})$ 是一个极小生成的半正则序列，其中次数 $f_i=d_i$，令 $s=\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)_2-d_n-n$，$J=(f_1\dots f_n)$ 和 $G=J:(f_{n+1})$。若 $\sum_{i=1}^{n+1}(d_i-1)$ 为奇数，则 R/G 的贝蒂表在前 s 行中等于 *Koszul* 复形 $K_\bullet(J)$ 的贝蒂表，并由此确定 R/G 的所有贝蒂数。

证明。由引理 2.9 可知，对 $d\leq s$ 有 $\mathrm{HF}^{R/G}(d)=\mathrm{HF}^{R/J}(d)$，并且由于 $J\subseteq G$ 我们必有 $J_{(s)}=G_{(s)}$。注意，由于 J 是完全交，R/J 由 Koszul 复形 $K_\bullet(J)$ 分解。若令 $F_\bullet$ 为 R/G 的极小自由分解，则 G 由 $F_\bullet$ 分解，而 J 由 $K_\bullet(J)$ 分解，其中横线表示我们排除该分解中的最后一个自由模。由引理 2.2 可得 $F_\bullet^{(s)}\cong(K_\bullet(J))^{(s)}$ 以及该图表

$$\begin{array}{ccccc}
(\overline{F}_\bullet)^s & \longrightarrow & G_{(s)} & \longrightarrow & R \\
\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle id} & & \uparrow{\scriptstyle 1_R} \\
(\overline{K}_\bullet(J))^{(s)} & \longrightarrow & J_{(s)} & \longrightarrow & R
\end{array}$$

可交换。因此 $F_{(s-1)\bullet}\cong(K_\bullet(J))^{(s-1)}$。由此可知，$R/I$ 的贝蒂表在前 s 行与 $K_\bullet(J)$ 的贝蒂表相同。由于R/G 是 Gorenstein 代数，底层次数为 $2s$，根据对称性可知，这就确定了贝蒂表除中间一行以外的所有项；而中间一行的值则由 R/G的希尔伯特级数决定。□

备注 2.11. 值得指出的是，定理 *2.7* 和命题 *2.10* 都有较弱的版本，无须对次数作出假设也成立。这些版本分别表明，R/I 的贝蒂表除最后两行外，均与 *Koszul* 复形的贝蒂表相同；类似地，R/G 的贝蒂数除中间两行外，均与 $K_\bullet(J)$ 相同。第一条结论见 [MMR03a], [PR09]，其推广见 [Die15]。关于第二条结论，J-压缩代数的对应结果见 [MMRN05]的定理 *3.9*。我们给出的命题 *2.10* 的证明很容易改写，从而得到后一结论的另一种证明。

我们所采用的方法还离不开可提升模理论（见[Dao07]）。对于 $s \in R$ 一个 $R/(s)$-模 M，如果存在一个 R-模 L，使得 $R/(s) \otimes_R L \cong M$，并且对于所有 $i > 0$都有 $\operatorname{Tor}_i^R(L, R/(s)) = 0$，则称其可提升到$R$。如果一个模是某个可提升模的直和项，则称其为（到 R 的）弱可提升模。在我们的情形中，我们将考虑 s 在 R上是非零因子，此时对于 $i > 0$，条件 $\operatorname{Tor}_i^R(L, R/(s)) = 0$等价于 s 在L上是正则的。

对于非零因子 $s \in R$，自然满射 $R \to R/(s)$给出 Tor 中的长正合列（[Rot09] 11.71）

(1)

$$\begin{aligned} \ldots \longrightarrow \operatorname{Tor}_{i-1}^{R/(s)}(M,N) \longrightarrow \operatorname{Tor}_i^R(M,N) \longrightarrow \operatorname{Tor}_i^{R/(s)}(M,N) \\ \hookrightarrow \operatorname{Tor}_{i-2}^{R/(s)}(M,N) \longrightarrow \operatorname{Tor}_{i-1}^R(M,N) \xrightarrow{\delta_i} \operatorname{Tor}_{i-1}^{R/(s)}(M,N) \longrightarrow \ldots, \end{aligned}$$

对所有 $R/(s)$-模 M，N。

在我们的情形中关注可提升性的原因在于以下结果。

命题 2.12（命题 3.1，见 [Dao07]）。对于一个 $R/(s)$ 模M，连接映射 δ_i 对所有 $R/(s)$- 模 N 与 $i > 0$ 为零，当且仅当 M 弱可提升到 R。

3. Resolutions of R/I and R/G

在本文的其余部分，我们使用记号

$$R = k[x_1, \ldots, x_n], \quad \overline{R} = k[x_1, \ldots, x_{n-1}],$$
$$\ell = x_1 + \cdots + x_n \quad \text{and} \quad \bar{\ell} = x_1 + \cdots + x_{n-1},$$

其中 k 是特征为 0 的域。在本节中，我们考虑由 $n+1$ 个一般线性形式的幂生成的理想，其中至少有一个生成元是平方。为记号方便，我们假设 x_n 的幂是一个平方，从而有 $I=(x_1^{d_1},\dots,x_{n-1}^{d_{n-1}},x_n^2,\ell^{d_n})$，其中对 $1\le i\le n$ 而言 d_i 可以是任意正整数。即使未特别说明，我们也始终假设 I 由 $(x_1^{d_1},\dots,x_{n-1}^{d_{n-1}},x_n^2,\ell^{d_n})$ 极小生成。若非极小生成，则 I 将是一个完全交，因而其极小自由分解已为人所熟知。类似地，我们令 $G=(x_1^{d_1},\dots,x_{n-1}^{d_{n-1}},x_n^2):(\ell^{d_n})$，它是由完全交 $J=(x_1^{d_1},\dots,x_{n-1}^{d_{n-1}},x_n^2)$ 连接到 I 的阿廷-戈伦斯坦代数。我们的计划是证明：当 $\sum_{i=1}^n(d_i-1)$ 为奇数时，利用从 $R/(x_n^2)$ 到 R的可提升性，可以将 R/I 与 R/G 的贝蒂数归结为贝蒂数已知的情形。下文给出主要思想的概要。

设 M 是一个可提升到 R 的 $R/(x_n^2)$ 模（对我们而言，它将是 R/I 或 R/G）。那么，根据命题 2.12，我们将长正合列 (1) 分解为如下形式的短正合列

$$0\to \operatorname{Tor}_{i-1}^{R/(x_n^2)}(M,k)_{j-2}\to \operatorname{Tor}_i^R(M,k)_j\to \operatorname{Tor}_i^{R/(x_n^2)}(M,k)_j\to 0.$$

由于 $\beta_{i,j}^R(M)=\dim_k \operatorname{Tor}_i^R(M,k)_j$，类似地在 $R/(x_n^2)$ 上，我们得到

$$\beta_{i,j}^R(M)=\beta_{i,j}^{R/(x_n^2)}(M)+\beta_{i-1,j-2}^{R/(x_n^2)}(M).$$

最后，我们证明 $\beta_{i,j}^{R/(x_n^2)}(M)$ 对应于另一个理想在 R 上的贝蒂数；根据定理 2.7 和命题 2.10，我们可以理解这一点。

因此，为了证明我们的主要结果——定理 3.8，我们证明当 $t=\sum_{i=1}^n(d_i-1)$ 为奇数时，R/I 和 R/G 可提升到 R，其中 $I=(x_1^{d_1},\dots,x_{n-1}^{d_{n-1}},x_n^2,\ell^{d_n})$，以及 $G=(x_1^{d_1},\dots,x_{n-1}^{d_{n-1}},x_n^2):(\ell^{d_n})$。这主要在引理 3。4 中完成。

为此，我们将需要一些命题和引理来帮助我们。在下文中，我们用某个多项式 $f\in k[T]$ 的记号 $[T^a]f$ 来表示 f 中 T^a 的系数。

引理 3.1. 设 I 由 $(x_1^{d_1},\dots,x_{n-1}^{d_{n-1}},x_n^2,\ell^{d_n})$ 极小生成，并令 $t=\sum_{i=1}^n(d_i-1)$。若 t 为奇数，则有

$$e(R/(I+(x_n)))=\dim_k R/(I+(x_n))=\left[T^{\frac{t-1}{2}}\right]\frac{\prod_{i=1}^n(1-T^{d_i})}{(1-T)^n}.$$

证明. 由于 R/I 是阿廷的，第一個等式由重数的定义得到。不失一般性，我们可以假设 $d_n = \max_i d_i$。由于 I 是极小生成的，我们有 $d_n \leq \sum_{i=1}^{n-1}(d_i - 1) + 1$；若此处取等号，则 t 为偶数，因此可以假设 $d_n \leq \sum_{i=1}^{n-1}(d_i - 1)$。定理 2.6 告诉我们，完全交 $J = (x_1^{d_1}, \ldots, x_{n-1}^{d_{n-1}}, \ell^{d_n})$ 的希尔伯特函数恰有两个峰，分别出现在次数 $\frac{t-1}{2}$ 和 $\frac{t+1}{2}$。由 J 具有弱 Lefschetz 性质（实际上是强 Lefschetz 性质），且 x_n 为弱 Lefschetz 元，可得

$$\mathrm{HF}_{R/(I+(x_n))}(i) = \mathrm{HF}_{R/J}(i) - \mathrm{HF}_{R/J}(i-1),$$

对于 $i \leq \frac{t-1}{2}$ 以及 $\mathrm{HF}_{R/(I+(x_n))}(i) = 0$ 对于 $i > \frac{t-1}{2}$。因此

$$\dim_k(R/(I+(x_n))) = \sum_{i=0}^{\frac{t-1}{2}} \mathrm{HF}_{R/(I+(x_n))}(i) =$$

$$\mathrm{HF}_{R/J}\left(\frac{t-1}{2}\right) = \left[T^{\frac{t-1}{2}}\right] \frac{\prod_{i=1}^{n}(1-T^{d_i})}{(1-T)^n}.$$

□

引理 3.2. 考虑 $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N}$，其中 $t = \sum_{i=1}^{n}(d_i - 1)$ 为奇数。设 $X \subset \mathbb{P}^{n-1}(k)$ 为由元素 $(a_1, \ldots, a_{n-1}, 1)$表示的集合，其中

$$a_i \in \{(d_i - 1) - 2j \mid 0 \leq j \leq d_i - 1\}$$

并且满足

$$1 + \sum_{j=0}^{n-1} a_i \in \{(d_n - 1) - 2j \mid 0 \leq j \leq d_n - 1\}.$$

那么我们有

$$|X| = \left[T^{\frac{t-1}{2}}\right] \frac{\prod_{i=1}^{n}(1-T^{d_i})}{(1-T)^n}.$$

证明。令 $m_i = T^{-(d_i-1)} + T^{-(d_i-3)} + \cdots + T^{d_i-1}$，使得指数对应于 a_i 的可能取值。于是，其系数给出和为对应指数的向量 a 数量的生成函数为

$$g = T\prod_{i=1}^{n-1} m_i.$$

令 $Y = T^2$ 后，我们可以将每个因子改写为

$$m_i = T^{-(d_i-1)}(1 + Y + \cdots + Y^{d_i-1}) = T^{-(d_i-1)}\frac{(1-Y^{d_i})}{(1-Y)},$$

因此

$$g = T^{-(\sum_{i=1}^{n-1}(d_i-1)-1)}\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(1-Y^{d_i})}{(1-Y)^{n-1}}.$$

然而，我们关注的是指数属于 $\{d_n - 1 - 2j \mid 0 \leq j \leq d_n - 1\}$ 的项的系数之和。将这些系数乘以 $(1 + Y + \cdots + Y^{d_n-1})$ 后，可以汇总到 T^{d_n-1} 的系数中。这给出

$$g(1 + Y + \cdots + Y^{d_n-1}) = T^{-(\sum_{i=1}^{n-1}(d_i-1)-1)}\frac{\prod_{i=1}^{n}(1-Y^{d_i})}{(1-Y)^{n}}.$$

最后，我们注意到，上述多项式中 T^{d_n-1} 的系数，与 $\frac{\prod_{i=1}^{n}(1-Y^{d_i})}{(1-Y)^n}$ 中 $T^{\sum_{i=1}^{n}(d_i-1)^{-1}} = T^{t-1}$ 的系数相同；等价地说，也就是其中 $Y^{\frac{t-1}{2}}$ 的系数

$$\frac{\prod_{i=1}^{n}(1-Y^{d_i})}{(1-Y)^{n}}.$$

由于每个被计数的 a 在 $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ 中都不相同（因为最后一个坐标固定），我们得出

$$|X| = \left[Y^{\frac{t-1}{2}}\right]\frac{\prod_{i=1}^{n}(1-Y^{d_i})}{(1-Y)^{n}}.$$

□

这样，正如本节开头所述，我们就可以进行主要构造了。在 [DGH+25] 中，作者考虑理想 $P = (x_1^2 - x_n^2, \ldots, x_{n-1}^2 - x_n^2, \ell^2 - x_n^2)$，其中 n 为奇数，并证明 x_n 在 R/P 上是正则的。结合 $P + (x_n^2) = (x_1^2, \ldots, x_n^2, \ell^2)$，这表明 $R/(P + (x_n^2))$ 可以提升到 R。P 的主要性质是，其零点集的基数等于 $R/(P + (x_n))$ 的重数。我们希望在这个更一般的框架中找到一个具有相同性质的理想 I'。结果表明，下面的构造就是“正确”的推广。

对于 $1 \leq i < n$，我们定义

$$f_i = \prod_{j=0}^{d_i-1}(x_i - ((d_i - 1) - 2j)x_n),$$

并且我们还设

$$f_n = \prod_{j=0}^{d_n-1} (\ell - ((d_i - 1) - 2j)x_n).$$

注 3.3。 若 d_i 为偶数，则有 $f_i = \prod_{j=1}^{d_i/2} (x_i^2 - (2j-1)^2 x_n^2)$；若 d_i 为奇数，则有 $f_i = x_i \prod^{(d_i-1)_{j=1}} {}^{/2} (x_i^2 - (2j)^2 x_n^2)$，对于$f_n$也类似。将所有 $d_i = 2$ 设定后，我们便得到上文提到的 [DGH+25] 中的构造。

我们定义理想

$J' = (f_1, \ldots, f_{n-1})$, $I' = (f_1, \ldots, f_n)$ and $G' = (f_1, \ldots, f_{n-1}) : (f_n)$.

由注 3.3 易知 $R/(x_n^2) \otimes_R R/I' \simeq R/(I' + (x_n^2)) = R/I$。注意，我们有短正合列

$$0 \to R/G'[-d_n] \xrightarrow{\cdot f_n} R/J' \to R/I' \to 0.$$

以下引理（其中第一个推广了[DGH+25]中的引理 4.5）为这一构造提供了依据。

引理 3.4. 设 $t = \sum_{i=1}^n (d_i - 1)$ 为奇数，则 x_n 是 $L = R/I'$ 及 R/G' 上的正则元。

证明。 我们自然有正合列

$$0 \to K \to R/I'\,[-1] \xrightarrow{\cdot x_n} R/I' \to R/(I' + (x_n)) \to 0$$

并且留待证明 $K = 0$。注意到 $I' + (x_n) = I + (x_n)$。

令 $X \subset \mathbb{P}^{n-1}(k)$ 表示 I' 的零点集。由于定义多项式的每个因子都是线性的，因此可知 X 恰好是引理 3.2 中定义的射影点集。

令 I_X 为 X 对应的消失理想。于是 $I' \subseteq I_X$，此外 $\dim R/I' = \dim R/I_X = 1$。因此我们可以写成 $\mathrm{H}^{R/I'}(T) = {}_{q(T)\,1-T}$，其中 $e(R/I') = q(1)$。由于 K 和 $R/(I + (x_n))$ 是阿廷的，我们有

$$e(R/I') = \mathrm{H}_{R/(I+(x_n))}(1) - \mathrm{H}_K(1) = e(R/(I + (x_n))) - e(K)$$

因此 $e(R/(I + (x_n))) \geq e(R/I')$（当且仅当 $K = 0$ 时取等号）。由 $I' \subseteq I_X$ 我们还得到 $e(R/I_X) \leq e(R/I')$。

现在，众所周知，由于 X 是一个有限射影点集，我们有$e(R/I_X) = |X|$。引理 3.2 表明

$$|X| = \left[T^{\frac{t-1}{2}}\right] \frac{\prod_{i=1}^{n}(1-T^{d_i})}{(1-T)^n},$$

并利用引理 3.1，我们得到 $e(R/(I+x_n)) = |X|$。因此， $K = 0$，由此可知 x_n 在 L上是正则的。

对于第二个结论，我们发现，理想$J' = (f_1, \ldots\ldots, f_{n-1})$的零点集是射影点集 X'，其中的向量可表示为 $(a_1, \ldots\ldots, a_{n-1}, 1)$，且 $a_i \in \{(d_i - 1) - 2j) \mid 0 \leq j \leq (d_i - 1)\}$，其基数为 $|X'| = \prod_{i=1}^{n-1} d_i$。阿廷完全交 $J' + (x_n) = (x_1^{d_1}, \ldots\ldots, x_{n-1}^{d_{n-1}}, x_n)$ 的希尔伯特级数为

$$\mathrm{H}_{R/(J+(x_n))}(T) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(1-T^{d_i})}{(1-T)^{n-1}}$$

因此重数也为 $\prod_{i=1}^{n-1} d_i$。考虑正合列

$$0 \to K' \to R/J' \ [-1] \xrightarrow{\cdot x_n} R/J' \to R/(J' + (x_n)) \to 0.$$

那么 $\dim\ R/J' = 1$，因此我们有 $e(R/J') = \mathrm{H}_{R/(J'+(x_n))}(1) - \mathrm{H}_{K'}(1) = e(R/(J' + (x_n))) - e(K')$。同样， $J' \subset I_{X'}$，所以 $e(R/(J')) \geq e(R/I_X) = |X'| = e(R/(J' + (x_n)))$，并且必有 $K' = 0$。

这说明 x_n在 R/J'上正则，因此在 $R/[J'$上也正则：$(f_n)] = R/G'$，因为它嵌入到 R/J'中。□

引理 3.5. 设 I由$(x_1^{d_1}, \ldots, x_{n-1}^{d_{n-1}}, x_n^2, \ell^{d_n})$极小生成，设 $G = (x_1^{d_1}, \ldots, x_{n-1}^{d_{n-1}}, x_n^2) : (\ell^{d_n})$且 $G = (x_1^{d_1}, \ldots, x_{n-1}^{d_{n-1}}) : (\ell^{d_n})$。当 $t = \sum_{i=1}^{n}(d_i - 1)$ 为奇数时，我们有

- $G = G' + (x_n^2)$,
- $\overline{R}/\overline{G} \cong R/(G' + (x_n))$ *as graded* $\overline{R}$*-modules.*

证明。 由于 x_n 在 $L = R/I'$上是正则的，根据引理 3.4，证明与 [DGH+25]中的引理 4.6类似：从短正合列开始

$$0 \to R/G'[-d_n] \xrightarrow{\cdot f_n} R/J' \to R/I' \to 0$$

再与 $R/(x_n^2)$ 作张量积，取同调后，我们得到正合列

$$\mathrm{Tor}_1^R(R/I', R/(x_n^2)) \to R/(G' + (x_n^2))[-d_n] \xrightarrow{\cdot f_n} R/J \to R/I \to 0.$$

现在在 $R/(x_n^2)$ 中我们有 $f_n = \ell^{d_n}$，此外由于 x_n 在 $L = R/I'$ 上是正则的，我们有 $\operatorname{Tor}_1^R(R/I', R/(x_n^2)) = 0$。因此我们得到短正合列

$$0 \to R/(G' + (x_n^2))[-d_n] \xrightarrow{\cdot \ell^{d_n}} R/J \to R/I \to 0$$

并得出 $G' + (x_n^2) = J : (\ell^{d_n}) = G$。

对于第二个命题，我们同样从

$$0 \to R/G'[-d_n] \xrightarrow{\cdot f_n} R/J' \to R/I' \to 0.$$

与 $R/(x_n)$作张量积得到

$$0 \to R/(G' + (x_n))[-d_n] \xrightarrow{\cdot f_n} R/(J + (x_n)) \to R/(I + (x_n)) \to 0$$

因为 $\operatorname{Tor}_1^R(R/I', R/(x_n)) = 0$，这是由于 x_n 在 R/I'上是正则的。利用 $R/(J+(x_n)) \cong R/J$ 以及 $R/(I+(x_n)) \cong R/I$，其中 $J = (x_1^{d_1}, \ldots, x_{n-1}^{d_{n-1}})$ 与 $I = \overline{J} + \overline{\ell}^{d_n}$，作为 R-模，我们得到

$$0 \to R/(G' + (x_n))[-d_n] \xrightarrow{\cdot \ell^{d_n}} \overline{R}/\overline{J} \to \overline{R}/\overline{I} \to 0$$

是正合的。因此 $R/(G' + (x_n)) \cong \overline{R}/(J : (\ell^{d_n})) = \overline{R}/G$。 □

命题 3.6. 设 $I = (x_1^{d_1}, \ldots, x_{n-1}^{d_{n-1}}, x_n^2, \ell^{d_n})$ 是极小生成的，且 $t = \sum_{i=1}^{n}(d_i - 1)$ 为奇数。则

$$0 \longrightarrow R/(I + (x_n))[-1] \xrightarrow{\cdot x_n} R/I \longrightarrow R/(I + x_n) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow R/(G + (x_n))[-1] \xrightarrow{\cdot x_n} R/G \longrightarrow R/(G + x_n) \longrightarrow 0$$

是正合的，或者等价地，$I : (x_n) = I + (x_n)$ 和 $G : (x_n) = G + (x_n)$。

证明。这直接源于 x_n 在 R/I' 和 R/G'上是正则的（引理 3.4），并结合 $I' + x_n^2 = I$（注 3.3）和 $G' + x_n^2 = G$（引理 3.5）。由于 $I + (x_n) \subset I : (x_n)$，对于 G 也同理，我们只需证明另一个包含关系。若 $g \in I : (x_n)$，则 $gx_n \in I = I' + (x_n^2)$，因此 $g \in I' + (x_n) = I + (x_n)$。对 G进行相同的论证即可得到该结论。□

主要结果所需的最后一个结果如下。

命题 3.7. 设 $I = (x_1^{d_1}, \ldots, x_{n-1}^{d_{n-1}}, x_n^2, \ell^{d_n})$ 为极小生成的，$G = (x_1^{d_1}, \ldots, x_{n-1}^{d_{n-1}}, x_n^2) : (\ell^{d_n})$，并假设 $t = \sum_{i=1}^{n}(d_i - 1)$ 是奇数。那么

$$\beta_{i,j}^{R/(x_n^2)}(R/I) = \beta_{i,j}^{\overline{R}}(\overline{R}/\overline{I}) \quad and$$
$$\beta_{i,j}^{R/(x_n^2)}(R/G) = \beta_{i,j}^{\overline{R}}(\overline{R}/\overline{G}).$$

证明。利用 $I : (x_n) = I + (x_n)$，以及类似地对于 G（命题 3.6），其证明与 [DGH+25]中的命题 4.8 类似:
考虑 $R/(x_n)$ 在$R/(x_n^2)$ 上的如下最小分次自由分解

$$\ldots \longrightarrow R/(x_n^2)[-2] \xrightarrow{\cdot x_n} R/(x_n^2)[-1] \xrightarrow{\cdot x_n} R/(x_n^2) \longrightarrow 0.$$

与 R/I 张量后得到

$$\ldots \longrightarrow R/I[-2] \xrightarrow{\cdot x_n} R/I[-1] \xrightarrow{\cdot x_n} R/I \longrightarrow 0,$$

由于命题 3.6 表明 $I : (x_n) = I + (x_n)$，因此该序列也是正合的（除第一个映射外）。于是，对于 $i > 0$，$\mathrm{Tor}^{R/(x_n^2)}{}_i(R/(x_n), R/I) = 0$；若令 $G^\bullet$ 表示 R/I 在$R/(x_n^2)$ 上的最小分次自由分解，则对于 $i > 0$

$$H^i(R/(x_n) \otimes_{R/(x_n^2)} G^\bullet) = \mathrm{Tor}_i^{R/(x_n^2)}(R/(x_n), R/I) = 0.$$

但 $R/(x_n) \otimes_{R/(x_n^2)} G^\bullet$ 因而也是一个（最小）分次自由分解

$$R/(x_n) \otimes_{R/(x_n^2)} R/I \cong R/(I + (x_n)) \cong \overline{R}/\overline{I}$$

在 $R/(x_n) \cong R$ 上，因此该结论成立。关于 R/G的证明完全相同，因为我们有 $R/(G + (x_n)) \cong R/G$（引理 3.5）。□

现在我们可以给出主要结果了。

定理 3.8。 设 I 由 $(x_1^{d_1}, \ldots, x_{n-1}^{d_{n-1}}, x_n^2, \ell^{d_n})$极小生成，设 $G = (x_1^{d_1}, \ldots, x_{n-1}^{d_{n-1}}, x_n^2) : (\ell^{d_n})$，并假设 $t = \sum_{i=1}^{n}(d_i - 1)$ 是奇数。那么

$$\beta_{i,j}^{R}(R/I) = \beta_{i,j}^{\overline{R}}(\overline{R}/\overline{I}) + \beta_{i-1,j-2}^{\overline{R}}(\overline{R}/\overline{I})$$
$$\beta_{i,j}^{R}(R/G) = \beta_{i,j}^{\overline{R}}(\overline{R}/\overline{G}) + \beta_{i-1,j-2}^{\overline{R}}(\overline{R}/\overline{G}),$$

其中 $\overline{I} = (x_1^{d_1}, \ldots, x_{n-1}^{d_{n-1}}, l^{d_n})$ 且 $G = (x_1^{d_1}, \ldots, x_{n-1}^{d_{n-1}}) : (l^{d_n})$。此外，根据定理 *2.7* 和命题 *2.10*，可确定 $R/\overline{I}$ 和 R/G 的贝蒂数。

证明。 注 3.3 给出 $R/(I'+(x_n^2)) = R/I$，而引理 3.5 给出 $R/(G'+(x_n^2)) = R/G$。结合引理 3.4（其指出 x_n在 R/I' 和 R/G'上均为正则），可知 R/G和 R/I均可提升至 R。因此，根据命题 2.12，我们得到短正合列

$$0 \to \operatorname{Tor}_{i-1}^{R/(x_n^2)}(R/I,k)[-2] \to \operatorname{Tor}_i^R(R/I,k) \to \operatorname{Tor}_i^{R/(x_n^2)}(R/I,k) \to 0$$

对所有 i 均成立， R/G 的情形类似。

限制到齐次次数 j，并利用命题 3.7，可得

$$\beta_{i,j}^R(R/I) = \beta_{i,j}^{R/(x_n^2)}(R/I) + \beta_{i-1,j-2}^{R/(x_n^2)}(R/I) = \beta_{i,j}^{\overline{R}}(\overline{R}/\overline{I}) + \beta_{i-1,j-2}^{\overline{R}}(\overline{R}/\overline{I}).$$

R/G 的情形类似。最后，由于 $\sum_{i=1}^n (d_i-1)$ 是奇数，R/I 和 R/G 的贝蒂数可直接由定理 2.7 和命题 2.10 得出。□

结合定理 2.7 和命题 2.10，即可确定任意形如 $I = (x_1^{d_1}、\ldots\ldots、x_{n-1}^{d_{n-1}}、x_n^2、\ell^{d_n})$，以及 $G = (x_1^{d_1}、\ldots\ldots、x_{n-1}^{d_{n-1}}、x_n^2) : (\ell^{d_n})$ 的理想的贝蒂数。定理 3.8 的一个简单但有趣的推论如下。

推论 3.9. 设 $I = (x_1^{d_1}、\ldots\ldots、x_{n-1}^{d_{n-1}}、x_n^2、\ell^{d_n})$。则代数 R/I 是层的。

证明。 若 $t = \sum_{i=1}^n (d_i - 1)$ 为偶数，则由推论 2.8 可得此结论。若t为奇数，则由定理 3.8 可知

$$\beta_{n,j}^R(R/I) = \beta_{n-1,j-2}^{\overline{R}}(\overline{R}/\overline{I}).$$

由于 $\overline{I} = (x_1^{d_1}, \ldots, x_{n-1}^{d_{n-1}}, \ell^{d_n})$ 是层，根据推论 2.8，可知 R/I 也是层。□

例 3.10. 根据定理 *2.7*，理想 $I = (x_1^4, x_2^4, x_3^4, x_4^4, \ell^4)$的贝蒂数由其希尔伯特函数确定，如下方左侧所示。由此，根据定理 *3.8*，我们可以得到$I = (x_1^4, x_2^4, x_3^4, x_4^4, x_5^2, \ell^4)$的贝蒂数，如右侧所示。

	0	1	2	3	4
total:	1	5	30	46	20
0 :	1	.	.	.	.
1 :	.	.	.	.	.
2 :	.	.	.	.	.
3 :	.	5	.	.	.
4 :	.	.	.	.	.
5 :	.	.	.	.	.
6 :	.	.	10	.	.
7 :	.	.	20	46	20

	0	1	2	3	4	5
total:	1	6	35	76	66	20
0 :	1	.	.	.	.	.
1 :	.	1	.	.	.	.
2 :	.	.	.	.	.	.
3 :	.	5	.	.	.	.
4 :	.	.	5	.	.	.
5 :	.	.	.	.	.	.
6 :	.	.	10	.	.	.
7 :	.	.	20	56	20	.
8 :	.	.	.	20	46	20

类似地，相应的冒号理想 G 和 G的贝蒂表分别如下：

	0	1	2	3	4
total:	1	24	46	24	1
0 :	1	.	.	.	.
1 :	.	.	.	.	.
2 :	.	.	.	.	.
3 :	.	4	.	.	.
4 :	.	20	46	20	.
5 :	.	.	.	4	.
6 :	.	.	.	.	.
7 :	.	.	.	.	.
8 :	.	.	.	.	1

	0	1	2	3	4	5
total:	1	25	70	70	25	1
0 :	1	.	.	.	.	.
1 :	.	1	.	.	.	.
2 :	.	.	.	.	.	.
3 :	.	4	.	.	.	.
4 :	.	20	50	20	.	.
5 :	.	.	20	50	20	.
6 :	.	.	.	.	4	.
7 :	.	.	.	.	.	.
8 :	.	.	.	.	1	.
9 :	.	.	.	.	.	1

引理 3.4 的一个引人入胜的推论是， I 的合冲比人们可能猜想的更有结构。对于完全交，已知（由于 Koszul 复形是极小自由分解）关系本身的分量位于该理想中。然而，对于大多数理想而言，合冲往往非常复杂。事实证明，我们所研究的理想满足一种类似于 Koszul 关系的性质。

推论3.11。 设 $I = (x_1^{d_1}, \ldots, x_{n-1}^{d_{n-1}}, x_n^2, \ell^{d_n})$ 且设 $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in R^{n+1}$ 是 I 的一个关系，满足 $a_1x_1^{d_1} + \ldots a_{n-1}x_{n-1}^{d_{n-1}} + a_nx_n^2 + a_{n+1}\ell^{d_n} = 0$。那么，若 $\sum_{i=1}^{n}(d_i - 1)$ 为奇数，我们有

$$c_1a_1x_1^{d_1-2} + \cdots + c_{n-1}a_{n-1}x_{n-1}^{d_{n-1}-2} + a_n + c_na_{n+1}\ell^{d_n-2} \in I,$$

$where\ c_i = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{d_i-1}{2} \rfloor}(d_i - 1 - 2j)^2.$

特别是，在全二次情形中，当 n 为奇数时，理想 $I = (x_1^2, \ldots, x_n^2, \ell^2)$ 的任意关系 $(a_1, \ldots, a_{n+1})$ 都满足

$$a_1 + \cdots + a_{n+1} \in I.$$

证明。这一结果与 x_n 在 $L = R/I'$ 上正则这一事实密切相关。根据 L 的定义，我们令 $f_i = \prod_{j=0}^{d_i-1}(x_i - ((d_i-1)-2j)x_n)$，并类似地令 $f_n = \prod_{j=0}^{d_i-1}(\ell - ((d_i-1)-2j)x_n)$。由注 3.3 可知，对于某个 $r_i \in R_{d_i-4}$，有 $f_i = x_i^{d_i} - c_i x_i^{d_i-2}x_n^2 + r_i x_n^4$。对于任意关系

$$a_1 x_1^{d_1} + \cdots + a_n x_n^2 + a_{n+1}\ell^{d_n} = 0,$$

我们可以将其改写为

$$\begin{aligned} &a_1 f_1 + \cdots + + a_{n-1}f_{n-1} + a_{n+1}f_n \\ &+ x_n^2\left(a_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{(f_i - x_i^{d_i})}{x_n^2} - a_{n+1}\frac{(f_n - \ell^{d_i})}{x_n^2}\right) = 0. \end{aligned}$$

引理 3.4 告诉我们，x_n 在 $L = R/(f_1, \ldots, f_n)$ 上正则，因此

$$a_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{(f_i - x_i^{d_i})}{x_n^2} - a_{n+1}\frac{(f_n - \ell^{d_i})}{x_n^2} \in (f_1, \ldots, f_n).$$

由于 $\frac{(f_i - x_i^{d_i})}{x_n^2} = -c_i x_i^{d_i-2} + r_i x_n^2$，我们得到

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i c_i x_i^{d_i-2} + a_n + c_n a_{n+1}\ell^{d_n-2} \in (f_1, \ldots, f_n) + (x_n^2) = I.$$

□

最后，我们还利用推论 3.9 将其应用于一般理想。以下结果的一个特殊情形，即所有生成元都是二次型的情形，最近刚由 [DGH+26] 证明。

推论 *3.12. </style}*由 $n+1$ 个形式生成的 $k[x_1, \ldots, x_n]$ 一般理想，其中至少有一个生成元是二次型，是层的。

证明。固定次数 $\boldsymbol{d} = (d_1, \ldots, d_{n+1})$，其中 $d_n = 2$。于是，通过将齐次多项式与其在单项式基中的系数对应起来，$k[x_1, \ldots, x_n]$ 中每个由 $f_1, \ldots, f_{n+1}$ 生成且满足 $\deg f_i = d_i$ 的理想，都对应于仿射空间 $\mathbb{A}_k^N$ 中的一个点，其中 $N = \sum_{i=1}^{n+1}\binom{n+d_i-1}{d_i}$。众所周知，参见例如 [FL91]，中的定理 1，存在一个

扎里斯基开子集 $Y \subset \mathbb{A}_k^N$，使得其中每个理想都有相同的希尔伯特级数；此外，这是所有由次数为 $\boldsymbol{d}$ 的 $n+1$ 个形式生成的理想中可能的最小希尔伯特级数。注意，由定理 2.4 可知，$I = (x_1^{d_1}, \ldots\ldots, x_{n-1}^{d_{n-1}}, x_n^2, \ell^{d_{n+1}}) \in Y$。由 [How25], 中的定理6.0.8，存在一个非空开子集 $X \subset Y$，其中每个理想在 Y 中的理想之间都具有最小的分次贝蒂数。现在由推论 3.9 可知，对于 $j \leq n+s-1$，有 $\beta_{n,\ j}^R(R/I) = 0$，其中 s 表示 R/I 的底层次数（因此也是 Y 中任意理想的底层次数）。由此可得，对于任意 $J \in X$，都有 $\beta_{n,\ j}^R(R/J) = 0$，其中 $j \leq n+s-1$，因此 J 是层理想。由于 X 是 $\mathbb{A}_k^N$ 中非空的（扎里斯基）开子集，故得证。□

一个自然的问题是，这些方法究竟能在多大程度上进一步推广，以便在没有任何生成元是二次型时确定贝蒂数。也就是说，对于哪些整数 $d_1, \ldots, d_{n+1}$，R/I 是可提升的（从某个 $R/(x_i^{d_i})$ 提升到 R）？ 在我们所研究的情形中，贝蒂数归结为来自另一个理想的两个贝蒂数之和。在 Macaulay2 中完成的计算机计算似乎表明，一般而言不能期望存在如此简单的关系。下面我们给出一个旨在展示这一点的例子。

例3.13。 $I = (x_1^3, x_2^3, x_3^3, x_4^3, \ell^3)$ 的贝蒂数由 *Macaulay2* [GS], 计算如下。

	0	1	2	3	4
total:	1	5	17	20	7
0 :	1	.	.	.	.
1 :	.	.	.	.	.
2 :	.	5	.	.	.
3 :	.	.	.	.	.
4 :	.	.	16	10	1
5 :	.	.	1	10	6

可以验证，不存在循环分次 R-模 M 使得$\beta_{i,j}^R(R/I) = \beta_{i,j}^R(M) + \beta_{i-1,j-d}^R(M)$。

4. SLP for the linked Artinian Gorenstein algebra

本节的主要目标是证明 AG代数$G = (x_1^{d_1}, \ldots\ldots, x_n^{d_n})$：$(\ell^{d_{n+1}})$ 具有强 Lefschetz 性质。事实上，我们将证明一个更强的结论

定理 4.1. 设 A 是一个分次阿廷 k-代数，且具有强 *Lefschetz* 元素 $\ell \in A_1$。那么，对于所有 $j > 0$， $A/[0 : (\ell^j)]$ 都具有强 *Lefschetz* 性质，其中 ℓ 是一个强 *Lefschetz* 元素。

我们想强调的是，从某些方面来说，这个结果并非新结果。具体而言，[Wat87] 的定理 3.8 中给出了一个类似结果；然而，从其表述方式来看，并不能立即看出我们上面的结论成立。同样，在 [Wat87], 的结果的推论—— [IK99], 的定理 4.14 中，作者指出，对于一般的 F， $A/[0 : (F)]$ 具有强 Lefschetz 性质。这里也不清楚 Lefschetz 元素的某个幂是否“足够一般”。不过，如果更仔细地阅读 [Wat87] 中的证明，就会发现确实如此。我们认为，定理 4.1 的表述并不广为人知。例如，在 [DGH+25] 中，作者试图证明 $G = (x_1^2, \ldots\ldots, x_n^2) : (\ell^2)$ 具有强 Lefschetz 性质（即他们的命题 5.5）时，指出 [IK99] 的结果（他们引用的是 [MMR03b], ，但论证引用了 [IK99]）显然并不适用于这种情况，因此转而采用其他方法。基于这个原因，我们给出一个简单的证明，它与 [Wat87] 的原始思路十分接近。

定理 *4.1* 的证明。 令 m 为使其成为满射的最小整数

$$\cdot l^j : A_m \to A_{m+j}$$

。则 $(A/[0 : (l^j)])_i = A_i$ 对于 $i < m$ 成立，而 $(A/[0 : (l^j)])_i \cong A_{i+j} = l^j A_i$ 对于 $i \geq m$成立。因此，乘法映射

$$(A/[0 : (l^j)])_i \xrightarrow{\cdot l^k} (A/[0 : (l^j)])_{i+k}$$

在上述对应下，显然等于 ℓ^k ，或等于 l^j 与 l^k 在 A上的复合；二者都显然具有极大秩。□

推论 4.2。 令 $G = (x_1^{d_1}, \ldots, x_n^{d_n}) : (\ell^{d_{n+1}})$。则 R/G 具有强 *Lefschetz* 性质。

证明。 由于 $J = (x_1^{d_1}, \ldots, x_n^{d_n})$ 具有强 Lefschetz 性质，且$\ell = x_1 + \cdots + x_n$，由定理 4.1 可知，$(R/J)/[0 : (l^{d_{n+1}})] \cong R/[J : (l^{d_{n+1}})]$ 具有强 Lefschetz 性质。□

令 $S = k[X_1, \ldots, X_n]$。我们将 S视为 R的逆系统，即将其看作一个 R-模，其作用由 $x_i \circ f = \frac{\partial}{\partial x_i} f$给出。对于任意齐次理想 I，我们将与之关联的 R-模 $I^\perp$定义为

$$I^\perp = \{f \in S \mid g \circ f = 0, \ \forall \ g \in I\}$$

我们称其为 I的（Macaulay）逆系统。

类似地，对于任意分次 R-模 $B \subset S$，我们可以关联一个理想

$$\mathrm{Ann}(B) = \{f \in R \mid f \circ b = 0,\ \forall\ b \in B\},$$

我们称之为 B 的湮灭理想。这是 Matlis 对偶的一个特例（参见 [BH93] 中的第 3.6 节）。众所周知，这给出了 R 的分次阿廷理想与 S 的有限生成分次 R-子模之间的一个反序双射。此外， R/I 是 Artin-Gorenstein 当且仅当 $I^{\perp}$ 是一个循环 R-模，也就是说， I 恰好是满足 $a \circ F = 0$ 的元素 $a \in R$，其中某个齐次多项式为 $F \in S$。在这种情况下，我们称 F 为 I 的对偶生成元。一般而言，仅凭对偶生成元不容易判断该代数是否具有强 Lefschetz 性质，因此描述这类生成元本身就是一个有趣的问题。事实证明，我们一直在研究的理想 G 的对偶生成元很容易描述，因此根据这一描述，我们得到了一族新的多项式，其关联的 AG-代数具有强 Lefschetz 性质。

以下引理的一个较弱版本可见于[MRRG24]（引理2.7），但证明基本相同。

引理 4.3. 设 R/J 是一个对偶生成元为 G的阿廷-戈伦斯坦代数。对于任意形如以下形式的阿廷-戈伦斯坦代数

$$A = R/[J\colon (f)],$$

A 的对偶生成元由下式给出

$$F = f \circ G.$$

证明. 满足 $g \circ (f \circ G) = 0$ 的元素 $g \in R$ 等价于

$$(gf) \circ G = 0 \iff gf \in J \iff g \in J\colon (f) = A.$$

我们得出 Ann(F) $= J$: (f)。 □

结合定理 4.1，我们得到以下命题。

命题 4.4. 设 F 为齐次形式，使得 R/零化子(F)以 ℓ 为强 *Lefschetz* 元素具有强 *Lefschetz* 性质。则对所有 $d > 0$，由对偶生成元 $\ell^d \circ F$ 给出的阿廷-戈伦斯坦代数具有强 *Lefschetz* 性质。

证明. 令 $A = R/$零化子(F)，由定理 4.1 可得

$$A/[0\colon (\ell^d)] \cong R/[\mathrm{Ann}(F) : (l^d)]$$

具有强 Lefschetz 性质。引理 4.3 表明， $R/[$Ann$(F) : (\ell^d)]$ 的对偶生成元是 $\ell^d \circ F$，由此完成证明。□

我们通过将命题 4.4 应用于单项式完全交来结束本节，由此得到了一些新的齐次形式实例，它们是具有强 Lefschetz 性质的代数的对偶生成元。

推论 4.5. 对于任意单项式 M 和整数 d，由对偶生成元$(x_1 + \cdots + x_n)^d \circ M$ 定义的 *AG*代数具有强 *Lefschetz* 性质。具体而言，初等对称多项式$e_d(x_1, \ldots, x_n)$ 的湮灭理想具有强 *Lefschetz* 性质。

证明. 由于 $J =$(x_1^{d_1}, \ldots, x_n^{d_n})的对偶生成元是 $x_1^{d_1-1} \cdots x_n^{d_n-1}$，第一个结论直接由命题 4.4 得出。注意到$(x_1 + \cdots + x_n)^d \circ (x_1 \cdots x_n) = d!$ $e_{n-d}(x_1, \ldots, x_n)$，其中 e_i 是第 i 个初等对称多项式，证明完毕□

5. Generators of G

一个相关且有趣的问题是确定 $G =$($x_1^{d_1}$、.....、 $x_n^{d_n}$): (l^{d_n+1}) 的生成元。尽管根据定理 3.8，我们了解 $d_n = 2$ 时这些理想的贝蒂数，但我们还无法完整描述其生成元。对于 $(x_1^2$、.....、 $x_n^2)$: (l^d) 这一情形，根据推论 4.5，它是某个初等对称多项式的湮灭理想；不过，我们能够推广 [DGH+25] 的结果。 [BMMRN22], 中给出了一项相关结果，表明完全齐次对称多项式的湮灭理想具有强 Lefschetz 性质，他们还确定了这些理想的一组生成元。

利用对称群 S_n 在 $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ 上的标准作用，我们用 $(f)_{S_n}$ 表示 $(\{\sigma(f) \mid \sigma \in S_n\})$。

命题 5.1。 设 $G = (x_1^2, \ldots, x_n^2)\colon (\ell^d)$ 和 $J = (x_1^2, \ldots, x_n^2)$，其中 $d \leq n$。 G 的生成元，或等价地， $e_{n-d}(x_1, \ldots, x_n)$ 的湮灭理想的生成元，由下式给出

$$\begin{aligned} &J + ((x_1 - x_2) \cdots (x_{n-d} - x_{n-d+1}))_{S_n} && \text{if } n+d \text{ is odd,} \\ &J + ((x_1 - x_2) \cdots (x_{n-d-1} - x_{n-d})x_{n-d+1})_{S_n} && \text{if } n+d \text{ is even.} \end{aligned}$$

证明。首先我们断言， G 的极小生成元仅出现在次数 2 和 $l+1$，其中 $l=\lfloor \frac{n-d}{2} \rfloor$。若 $n+d$ 为偶数，则利用命题 2.10，我们只需检验是否不存在次数为 $l+n-1$ 或更低的 J 的 $n-1$ 阶 Koszul 关系。但任何此类关系的次数都等于 J 的若干个 $n-1$ 生成元次数之和，而其次数总为 $2(n-1)$；又由于 $l<n-1$，结论成立。若 $n+d$ 为奇数，则根据定理 3.8， G 由次数 2 的元素生成，且 $\binom{n-1-d}{2}+1=\lfloor \frac{n-d}{2} \rfloor+1=l+1$。

令 G' 表示所声称的生成元。注意，模 J 有

$$(x_1+\cdots+x_n)\prod_{i=1}^{\frac{n-d+1}{2}}(x_{2i-1}-x_{2i})=(x_{n-d+2}+\cdots+x_n)\prod_{i=1}^{\frac{n-d+1}{2}}(x_{2i-1}-x_{2i}).$$

因此

$$(x_1+\cdots+x_n)^d\prod_{i=1}^{\frac{n-d+1}{2}}(x_{2i-1}-x_{2i})=(x_{n-d+2}+\cdots+x_n)^d\prod_{i=1}^{\frac{n-d+1}{2}}(x_{2i-1}-x_{2i}),$$

并且由于最后一个因子含有 $d-1$ 个变量，由抽屉原理可知这在模 J 下为 0。类似的论证表明，当 $n+d$ 为偶数时也有此包含；再利用 G 的 S_n-对称性，我们得到 $G'\subseteq G$。

令 $\mathbf{in'}(G')=J+\{x_{i_1}\cdots x_{i_{l+1}} \mid i_1<\cdots<i_{l+1},\quad i_j\le d+2(j-1)\}$。我们首先证明 $\mathbf{in'}(G')\subseteq\mathbf{in}(G')$，其中 $\mathbf{in}(-)$ 表示关于任意满足 $x_1>x_2>\cdots>x_n$ 的单项式序的初始理想。

我们先考虑 $n+d$ 为奇数的情形。只需对每个 i_j 找到一个唯一且更大的指标 c_j 与之配对，因为 $(x_{i_j}-x_{c_j})$ 的乘积给出 G' 中的一个元素，而因子 $(x_{i_j}-x_{c_j})$ 会与因子 x_{i_j} 一起贡献到初始项中。这一点可由一个简单的归纳论证得出：首先，由于 $x_{i_{l+1}}\le d+2l=n-1$，我们总可以将该元素与 x_n 配对。归纳地，假设我们已经将元素 $x_{i_{j+1}}\cdots,x_{i_{l+1}}$ 配对，现在要证明仍存在一个大于 i_j 且可用的指标。由于 $i_j\le d+2(j-1)$，我们至少有 $n-(d+2(j-1))=(n-d-1)-2j+3=2(l-j)+3$ 个可用于与 i_j 配对的指标/变量（利用 $2l=n+d-1$，因为 $n+d$ 是奇数）。此前的 $l-j+1$ 个元素 $x_{i_{j+1}},\ldots,x_{i_{l+1}}$ 只占用了其中的 $2(i-j)+2$ 个，因此至少还剩一个可与 i_j 配对。

当 $n+d$ 为奇数时，我们则有 $i_{l+1}\le n$，并且只需选择 $x_{i_{l+1}}$ 作为 G' 中我们所考虑的形式的最后一个因子，就能得到这个因子。根据归纳法，我们可以假设已经将这些元素配对

$x_{i_{j+1}}\cdots$，x_l，以及 $x_{i_{l+1}}$。至少有 $n-(d+2(j-1))=2(l-j)+2$ 个可与 x_{i_j} 配对的元素，而对于之前的元素，我们只用了 $2(l-j)+1$ 个。因此，$\mathbf{in'}(G')\subseteq\mathbf{in}(G')$。

对于每个次数为 $l+1$ 的平方自由单项式，我们都可以双射地将其对应到一条从 $(0,0)$ 到 $(n,2(l+1)-n)$ 的格路径，其步长为 $(1,1)$ 和 $(1,-1)$：令单项式 m 中出现的变量的下标对应于 $(1,1)$ 步，其余步则设为 $(1,-1)$。令 w 为 $\{\pm1\}^n$ 中的向量，其坐标对应于上述格路径步长的第二个坐标，因此 $w_j=1$ 当且仅当 $x_j\mid m$。于是我们断言，判据

$$S_j=\sum_{i=1}^{j}w_i\geq 1-d$$

对所有 $j\leq n$ 均成立，等价于对 $\mathbf{in'}(G')$ 中平方自由单项式集合的限制。注意到 $\sum_{i=1}^{i_j}w_i=j-(i_j-j)\geq 2-d$ 当且仅当 $i_j\leq d+2(j-1)$，并且由于最小值必须恰好在正向步之前取得，这等价于说，对所有 $j\leq n$，$S_j\geq 1-d$。因此，我们的单项式集合与从不越过直线 $y=1-d$ 下方的格路径子集一一对应。根据反射原理（见 [Kra 15] 中的定理 10.3.1），越过这条直线下方的路径数，等于从 $(0,-2d)$ 出发、终止于 $(n,2(l+1)-n)$ 的所有路径数；这对应于恰好有 $l+1+d$ 个正向步，因此这样的路径恰有 $\binom{n}{l+1+d}$ 条。由此可得，$\mathbf{in'}(G')$ 的平方自由生成元数等于

$$\binom{n}{l+1}-\binom{n}{l+1+d}.$$

现在由包含关系 $\mathbf{in'}(G')\subseteq\mathbf{in}(G')$ 和 $G'\subseteq G$，我们得到以下不等式

$$\mathrm{HF}_{R/G}(i)\leq\mathrm{HF}_{R/G'}(i)=\mathrm{HF}_{R/\mathbf{in}(G')}(i)\leq\mathrm{HF}_{R/\mathbf{in'}(G')}(i).$$

我们有 $\mathbf{HF}^{R/G}(l+1)=\mathbf{HF}^{R/J}(l+1+d)=\binom{n}{l+1+d}$，并且 $\mathbf{HF}^{R/\mathbf{in'}(G)}=\mathbf{HF}^{R/J}(l+1)-\binom{n}{l+1}+\binom{n}{l+1+d}=\binom{n}{l+1+d}$，因此该不等式在次数 $l+1$ 上取等号。由于 $G'\subseteq G$，且它们由相同次数的元素生成，并且在这些次数上具有相同的希尔伯特函数，我们得出 $G'=G$。□

我们指出，本证明中用到的同类型格路径也出现在 [CQnLN19]，中，那里讨论的是外代数中的理想；与我们的情形类似，这些理想也是平方自由的。

Acknowledgements

我要感谢我的导师 Samuel Lundqvist 的指导、许多富有帮助的讨论，以及他在论文表述方面给予的大力帮助。我还要感谢 Lu´ıs Duarte 对本文早期稿件提出的宝贵意见。最后，使用 Macaulay2 [GS] 进行的计算对于理解本文研究的对象至关重要。作者受到瑞典研究理事会 VR2022-04009 的资助。

References

[BH93] Winfried Bruns 和 J¨urgen Herzog。*Cohen-Macaulay* 环，载于第 39 卷剑桥高等数学研究丛书。剑桥大学出版社，剑桥，1993 年。[BL23] Mats Boij 和 Samuel Lundqvist。关于由一般线性形式的等次幂生成的几乎完全交的弱 Lefschetz 性质分类。代数与数论，17(1)：111–126，2023 年。doi:10.2140/ant.2023.17.111。[BMMRN22] Mats Boij、Juan Migliore、Rosa M. Mir´o-Roig 和 Uwe Nagel。对称形式湮灭子的 Waring 秩、仙人掌秩与强 Lefschetz 性质。代数与数论，16(1)：155–178，2022 年。doi:10.2140/ant.2022.16.155。[BSV25] Matthew D. Booth、Pankaj Singh 和 Adela Vraciu。关于由一般线性形式的幂生成的理想的弱 Lefschetz 性质，2025 年。网址：https://arxiv.org/abs/2410.22542，arXiv：2410.22542。[CQnLN19] Veronica Crispin Qui˜nonez、Samuel Lundqvist 和 Gleb Nenashev。关于外代数中由两个一般二次形式生成的理想。《纯粹与应用代数杂志》，223(12)：5067–5082，2019 年。doi:10. 1016/j.jpaa.2019.03.010。[Dao07] Hailong Dao。关于可提升模与弱可提升模。《代数杂志》，318(2)：723–736，2007 年。doi:10.1016/j.jalgebra.2007.09.019。[DGH+25] Rachel Diethorn、Sema G¨unt¨urk¨un、Alexis Hardesty、Pinar Mete、Liana S¸ega、Aleksandra Sobieska 和 Oana Veliche。二次几乎完全交理想及其链接 Gorenstein 理想的研究，2025 年。即将在《交换代数中的女性：2023—2024 年 WICA 研讨会论文集》中出版，2026 年。网址：https: // arxiv.org/abs/2504.03977，arXiv:2504.03977。[DGH+26] Rachel Diethorn、Sema G¨unt¨urk¨un、Alexis Hardesty、Pinar Mete、Liana S¸ega、Aleksandra Sobieska 和 Oana Veliche。由 $n+1$ 变量中的一般二次型定义的环的同调性质，2026 年。网址：https://arxiv.org/abs/2602.09939，arXiv：2602.09939。

[Die15] Claus Diem。有界正则性。《代数杂志》，423：1143–1160，2015 年。doi:10.1016/j.jalgebra.2014.09.029。[EI95] Jacques Emsalem 和 Anthony Iarrobino。符号幂的逆系统。I。《代数杂志》，174(3)：1080–1090，1995 年。doi:10.1006/ jabr.1995.1168。[FH94] Ralf Fr¨oberg 和 Joachim Hollman。由一般形式生成的理想的希尔伯特级数。《符号计算杂志》，17(2)：149–157，1994 年。doi: 10.1006/jsco.1994.1008。[FL91] Ralf Fr¨oberg 和 Clas L¨of wall。关于交换与非交换分次代数的希尔伯特级数。《纯粹与应用代数杂志》，76(1)：33–38，1991 年。doi:10.1016/0022-4049(91)90095-J。[Fr¨o85] Ralf Fr¨oberg。关于分次代数希尔伯特级数的一个不等式。《斯堪的纳维亚数学杂志》，56(2)：117–144，1985 年。doi:10.7146/math.scand. a-12092。[Fr¨o25] Ralf Fr¨oberg。由 $n+1$变量中的一般形式生成的理想的一些新贝蒂数，2025 年。网址：https://arxiv.org/abs/ 2503.16155，arXiv:2503.16155。[GS] Daniel R. Grayson 和 Michael E. Stillman。Macaulay2：用于代数几何研究的软件系统。可访问：http://www2. macaulay2.com。[How25] Jason R Howell。《一般理想的贝蒂数》。博士论文，纽约州立大学奥尔巴尼分校，2025 年。网址：https://scholarsarchive.library.albany.edu/etd/296。[HSS11] Brian Harbourne、Hal Schenck 和 Alexandra Seceleanu。逆系统、Gelfand-Tsetlin 模式与弱 Lefschetz 性质。《伦敦数学学会杂志》（第 2 辑），84(3)：712–730，2011 年。doi:10.1112/jlms/ jdr033。[IK99] Anthony Iarrobino 和 Vassil Kanev。《幂和、Gorenstein 代数与行列式簇》，《数学讲义》第 1721 卷。施普林格出版社，柏林，1999 年。附录 C 由 Iarrobino 和 Steven L. Kleiman 撰写。doi:10.1007/BFb0093426。[KLM+24] Filip J onsson Kling、Samuel Lundqvist、Fatemeh Mohammadi、Matthias Orth 和 Eduardo S´aenz de Cabez´on。无平方因子代数中一般线性形式的幂的 Gr¨obner 基、自由分解与 Lefschetz 性质，2024 年。网址：https://arxiv.org/abs/ 2411.10209，arXiv:2411.10209。[KLMO25] Filip Jonsson Kling、Samuel Lundqvist、Fatemeh Mohammadi 和 Matthias Orth。单项式完全交中一般线性形式的幂的 Gr¨obner 基，2025 年。即将在《美国数学会汇刊》发表。网址：https://arxiv.org/abs/2506. 24028，arXiv:2506.24028。[Kra15] Christian Krattenthaler。格路计数。载于《组合计数手册》，《离散数学及其应用》（博卡拉顿），第 589–678 页。CRC 出版社，佛罗里达州博卡拉顿，2015 年。[MMR03a] Juan C. Migliore 和 Rosa M. Mir´o-Roig。一般形式的理想与弱 Lefschetz 性质的普遍性。《纯粹与应用代数杂志》，182(1)：79–107，2003 年。doi:10.1016/S0022-4049(02)00314-6。

[MMR03b] Juan C. Migliore 和 Rosa M. Mir´o-Roig。关于 $n+1$ 一般形式的最小自由分解。《美国数学会汇刊》，355(1):1–36，2003。doi:10.1090/S0002-9947-02-03092-1。[MMRN05] Juan C. Migliore、Rosa M. Mir´o-Roig 和 Uwe Nagel。相对压缩层代数的最小分解。《代数杂志》，284(1):333–370，2005。doi:10.1016/j.jalgebra.2004.08.009。[MRRG24] Claudia Miller、Hamidreza Rahmati 和 Rebecca R. G.。一般超曲面上 Frobenius 幂的稳定行为。《美国数学会汇刊》B 辑，11:1350–1393，2024。doi:10.1090/btran/199。[NT19] Uwe Nagel 和 Bill Trok。插值与弱 Lefschetz 性质。《美国数学会汇刊》，372(12):8849–8870，2019。doi:10.1090/tran/7889。[Par10] Keith Pardue。多项式的一般序列。《代数杂志》，324(4):579–590，2010。doi:10.1016/j.jalgebra.2010.04.018。[Pee11] Irena Peeva。分次合冲，第14卷《代数与应用》。施普林格出版社伦敦有限公司，伦敦，2011。doi:10.1007/978-0-85729-177-6。[PR09] Keith Pardue 和 Benjamin Richert。半正则序列的合冲。《伊利诺伊数学杂志》，53(1):349–364，2009。网址：http://projecteuclid.org/euclid.ijm/1264170855。[PR12] Keith Pardue 和 Benjamin Richert。关于半正则序列合冲的勘误。《伊利诺伊数学杂志》，56(4):1001–1003，2012。网址：http://projecteuclid.org/euclid.ijm/1399395820。[Rot09] Joseph J. Rotman。《同调代数导论》。Universitext。施普林格出版社，纽约，第二版，2009。doi:10.1007/b98977。[RRR91] Les Reid、Leslie G. Roberts 和 Moshe Roitman。关于完全交及其希尔伯特函数。《加拿大数学通报》，34(4):525–535，1991。doi:10.4153/CMB-1991-083-9。[SS10] Hal Schenck 和 Alexandra Seceleanu。弱 Lefschetz 性质与线性形式的幂，见 $\mathbb{K}[x,y,z]$。《美国数学会会刊》，138(7):2335–2339，2010。doi:10.1090/S0002-9939-10-10288-3。[Sta80] Richard P. Stanley。Weyl 群、硬 Lefschetz 定理与 Sperner 性质。《SIAM代数与离散方法杂志》，1(2):168–184，1980。doi:10.1137/0601021。[Wat87] Junzo Watanabe。阿廷环的 Dilworth 数与具有秩函数的有限偏序集。载于《交换代数与组合学》（京都，1985），《纯数学高级研究》第11卷，第303–312页。北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1987。doi:10.2969/aspm/01110303。

Eric Dannetun, Department of Mathematics, Stockholm University, 106 91 Stockholm, Sweden

电子邮件地址: eric.dannetun@math.su.se