arXiv:2602.20182v1 [math.CO] 20 Feb 2026

巧克力游戏中的递归模式

TomoroOkubo YuzuriKashiwagi Nobumitsu Niida

摘要

我们研究了巧克力游戏中 P-位置的递归结构$C_{m,\ m}$。这是一种在 $m\times m$ 巧克力板上进行的公平组合游戏。我们证明，P-位置集合呈现自相似模式，可以通过递归方式描述和枚举。我们进一步确立了这些模式与三维谢尔宾斯基八面体各截面之间的对应关系。最后，我们证明 P-位置可以通过二阶元胞自动机生成，这种自动机类似于一维规则 60 元胞自动机。我们的研究揭示了组合博弈、分形几何与离散动力系统之间的深刻联系。

1 引言

本文探讨了巧克力游戏中 P位置的结构性质$C_{m,\ n}$。这是一种在矩形巧克力板上进行的公平组合游戏。虽然类尼姆游戏通常通过代数方法来研究，但我们表明，$C_{m,\ m}$ 具有丰富的几何和计算描述。

具体而言，我们证明 $C_{m,m}$ 的 P-位置呈现出与谢尔宾斯基八面体截面等价的自相似图案。此外，我们表明该图案源自与 Wolfram 的规则 60 相关的二阶元胞自动机。通过将博弈论与分形几何及元胞自动机联系起来，我们既给出了制胜策略的递归枚举，也提供了一种新颖的可视化。

本文结构如下：第 2 节回顾巧克力游戏的基本内容。第 3、4、5 节给出我们关于 P-位置、自相似性与元胞自动机的主要结果，随后讨论未来方向。

2 巧克力游戏与 P-位置

定义 2.1. 设 m,n 为正整数。巧克力游戏 $C_{m,n}$ 是如下定义的双人公平组合游戏。

博弈在一块由单位正方形格组成的 $m\times n$ 矩形巧克力板上进行，其中恰有一格含有毒物。玩家轮流执行以下操作：

- 沿网格线将巧克力板掰成两块矩形，吃掉其中一块，并将另一块交给对手。

- 如果巧克力板无法再掰开，玩家就必须把它吃掉。

吃到有毒单元格的玩家会输。假设有毒单元格的位置对双方玩家都可见。

我们假设，只要存在合法移动，玩家总会避免吃到有毒单元格。博弈的终局定义为：一块 1×1 巧克力板传给某位玩家，而此时已无法再进行任何移动。

定义 2.2。 对于博弈 $C_{m,\ n}$，定义

$$B_{m,n}=\{(i,j)\in\mathbb{Z}^2 \mid 1\le i\le m,\ 1\le j\le n\},$$

并称 $B_{m,\ n}$ 为 $C_{m,\ n}$的棋盘 。$B_{m,\ n}$ 中的元素称为单元格。

如果某个单元格对应的有毒位置使第二位玩家拥有必胜策略，则称其为 *P*-位置。令 $P_{m,\ n}\subset B_{m,\ n}$ 表示所有 P-位置构成的集合。

我们将 $P_{m,n}$ 的图案 定义为集合

$$R_{m,n}=\big\{(i-x,j-y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ (i,j)\in P_{m,n}\big\},$$

它给出了 $P_{m,n}$ 的几何可视化（见图1）。

对于单元格 $(i,j)\in B_{m,n}$，我们将其单元格值 定义为

$$(i-1)\oplus(j-1)\oplus(m-i)\oplus(n-j),$$

其中 $\oplus$ 表示整数的按位异或（异或）。

在正方形情形 $m=n$ 中，定义

$$v_m(i,j)=\begin{cases}0, & \text{if } (i-1)\oplus(j-1)\oplus(m-i)\oplus(m-j)=0,\\ 1, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

最后，对于子集 $A\subset\mathbb{R}^2$ 和实数 r，我们记作

$$rA=\{(rx,ry)\mid(x,y)\in A\}.$$

下面的定理是四堆Nim中判定P-位置的一个著名准则。例如，[3]中可以找到证明。这里我们在方形巧克力游戏的背景下陈述并证明这一结果$C_{m,\ m}$。

定理 2.3. 对于巧克力游戏 $C_{m,\ m}$，单元格 (i,j) 是 *P*-位置，当且仅当

$$(i-1)\oplus(j-1)\oplus(m-i)\oplus(m-j)=0.$$

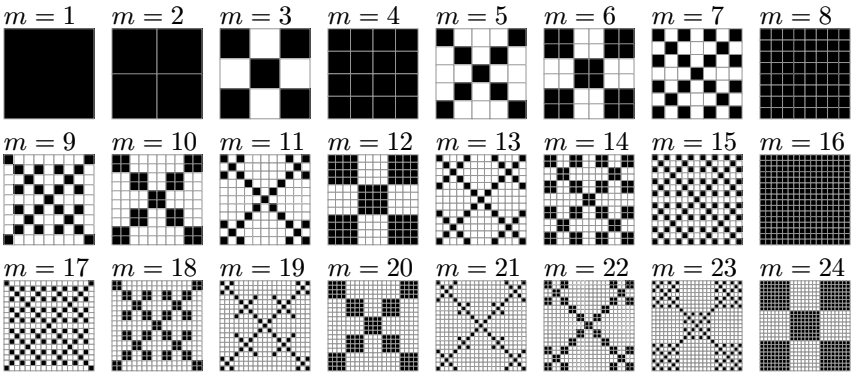


图1：缩放模式 $\frac{1}{m}R_{m,\ m}$ —

证明。 设 $(i,\ \ j)$ 是与中毒位置对应的单元格。一次掰开巧克力的操作可以看作从四个非零整数中选择一个

$$i-1,\quad j-1,\quad m-i,\quad m-j,$$

并将其减去一个正整数，使其仍然非负。

由对称性，只需考虑 $i-1$ 减小的情况。令

$$X=(i-1)\oplus(j-1)\oplus(m-i)\oplus(m-j).$$

假设一步操作将局面变为

$$Y=(i-\alpha)\oplus(j-1)\oplus(m-i)\oplus(m-j),\qquad 2\le\alpha\le i.$$

利用 $\oplus$ 的结合律和交换律，以及 $(i-1)\oplus(i-1)=0$，可得

$$Y=X\oplus(i-1)\oplus(i-\alpha).$$

我们断言以下两个结论成立：

(1) 如果 $X=0$，那么对于任意合法移动，$Y\neq 0$ 。

(2) 如果 $X\neq 0$，那么存在一种合法移动，使得 $Y=0$。

对于 (1)，注意到 $(i-1)\oplus(i-\alpha)\neq 0$，这意味着 $Y\neq 0$。

为证明 (2)，将 X 写成二进制形式，并令 2^p 为 X中出现的最高次幂的 2。如果 $i-1$ 的 2^p位是 1，那么

$$X\oplus(i-1)<(i-1),$$

因此我们可以选择 α ，使得

$$i-\alpha=X\oplus(i-1),$$

由此得到 $Y = 0$。如果 $j-1$、$m-i$ 或 $m-j$ 中的 2^p 位数字是 1，同样的论证也适用。

终局是一个 P-位置，并满足 $X = 0$。由于条件 (1) 和 (2) 刻画了该博弈的递归结构，因此当且仅当 $X = 0$ 时，一个局面是 P-位置。

□

3 P-位置的递归结构

命题 3.1。图案$R_{m,\ m}$ 关于水平轴和垂直轴对称，也关于对角线对称。更准确地说，对于任意单元格 (i, j)，这些单元格

$$(i, j),\ (i, m-j+1),\ (m-i+1, j),\ (j, i)$$

要么全都是 *P*-位置，要么全都不是 *P*-位置。

证明。这四个单元格的值都相同，且等于

$$(i-1) \oplus (j-1) \oplus (m-i) \oplus (m-j).$$

因此，根据定理 2.3，结论成立。 □

命题 3.2. 在巧克力游戏 $C_{m,m}$ 中，两条对角线上的所有单元格都是 *P*-位置。也就是说，对于任意整数 $1 \le k \le m$，单元格 (k, k) 和$(k, m+1-k)$ 都是 *P*-位置。

证明。对于这些单元格，相应的单元格值满足

$$(k-1) \oplus (k-1) \oplus (m-k) \oplus (m-k) = 0.$$

该断言再次由定理 2.3 得出。 □

定理 3.3. 对于任意正整数 m,

$$R_{2m,2m} = 2R_{m,m}.$$

特别地，$R_{m,m}$ 与 $R_{2m,2m}$ 是相似图形。

证明。只需证明

$$v_{2m}(2i, 2j) = v_{2m}(2i-1, 2j) = v_{2m}(2i, 2j-1) = v_{2m}(2i-1, 2j-1) = v_m(i, j)$$

对于所有的 $1 \le i,\ j \le m$。

使用二进制表示时，异或运算满足

$$\begin{aligned} 2a \oplus 2b &= 2(a \oplus b), \\ (2a+1) \oplus (2b+1) &= 2(a \oplus b). \end{aligned}$$

我们计算

$$\begin{aligned}&(2i-2)\oplus(2j-2)\oplus(2m-2i+1)\oplus(2m-2j+1)\\&=2(i-1)\oplus 2(j-1)\oplus\{2(m-i)+1\}\oplus\{2(m-j)+1\}\\&=2\big((i-1)\oplus(j-1)\oplus(m-i)\oplus(m-j)\big),\end{aligned}$$

这意味着 $v_{2m}(2i-1,2j-1)=v_m(i,j)$。

同理，

$$\begin{aligned}&(2i-1)\oplus(2j-1)\oplus(2m-2i)\oplus(2m-2j)\\&=\{2(i-1)+1\}\oplus\{2(j-1)+1\}\oplus 2(m-i)\oplus 2(m-j)\\&=2\big((i-1)\oplus(j-1)\oplus(m-i)\oplus(m-j)\big),\end{aligned}$$

因此 $v_{2m}(2i,2j)=v_m(i,j)$。

其余两种情况，即 $v_{2m}(2i-1,2j)$ 和 $v_{2m}(2i,2j-1)$，也用同样的方法处理。因此结论得证。 □

定理 3.4。设 m 为一个正整数，并将其二进制展开写为

$$m=a_0+a_12+a_22^2+\cdots+a_k2^k+2^{k+1}.$$

定义

$$s=a_0+a_12+a_22^2+\cdots+a_k2^k,\qquad t=2^{k+1}-s.$$

那么，图案 $R_{m,\,m}$ 由四个 $R_{s,\,s}$ 副本构成，分别放在四角，另有一个 $R_{t,\,t}$ 副本放在中心。

例如，如果 $m=11=1011_2$，那么 $s=011_2=3$ 和 $t=101_2=5$。在这种情况下，$R_{11,\,11}$ 由四个$R_{3,\,3}$ 副本构成，分别位于四角，另有一个$R_{5,\,5}$ 副本位于中心（见图 2）。

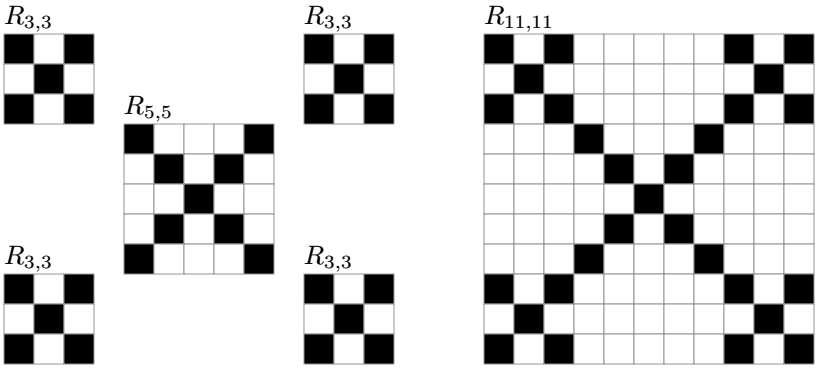


图 2：$R_{3,\,3}$，$R_{5,\,5}$，以及 $R_{11,\,11}$

证明。 根据对称性（命题 3.1），只需验证以下三种情况。

(1) 如果 $1 \le i \le s$ 且 $1 \le j \le s$，那么由于 $m = 2^{k+1} + s$，我们有

$$\begin{aligned} v_m(i,j) &= (i-1) \oplus (j-1) \oplus (2^{k+1}+s-i) \oplus (2^{k+1}+s-j) \\ &= (i-1) \oplus (j-1) \oplus (s-i) \oplus (s-j) \\ &= v_s(i,j). \end{aligned}$$

(2) 如果 $s+1 \le i \le 2^{k+1}$ 且 $s+1 \le j \le 2^{k+1}$，那么

$$\begin{aligned} v_m(i,j) &= (i-1) \oplus (j-1) \oplus (2s+t-i) \oplus (2s+t-j) \\ &= v_t(i-s, j-s). \end{aligned}$$

(3) 如果 $s+1 \le i \le 2^{k+1}$ 且 $1 \le j \le s$，那么

$$v_m(i,j) = (i-1) \oplus (j-1) \oplus (2^{k+1} - (i-s)) \oplus (2^{k+1}+s-j).$$

由于 $i - s \ge 1$ 且 $s - j \ge 0$，注意到各项 $2^{k+1} - (i-s)$ 和$2^{k+1} + s - j$分处某个 2 的幂的两侧。特别地，

$$2^{k+1} - (i-s) < 2^{k+1}, \quad 2^{k+1} + s - j \ge 2^{k+1}.$$

这意味着这四项的异或不可能为零，即

$$v_m(i,j) = (i-1) \oplus (2^{k+1} - i + s) \oplus (j-1) \oplus (2^{k+1}+s-j) \neq 0.$$

综合这些情况即可证明该定理。 □

命题 3.1 和命题 3.2，连同定理 3.3 和定理 3.4，表明集合 $P_{m,\ m}$ 可以递归地确定。

4 P-位置的枚举

在本节中，我们研究 P-位置的数量。令

$$g(m) = \#P_{m,m}$$

表示方形巧克力游戏 $C_{m,\ m}$中 P-位置的数量。对于正整数 x，令 $u(x)$ 表示满足 $2^{u(x)}$ 能整除 x 的最大非负整数。

引理 4.1. 对于任意正整数 m，以下关系成立：

$$\begin{aligned} g(2m) &= 4g(m), \\ g(2m+1) &= g(m) + g(m+1). \end{aligned}$$

证明. 等式 $g(2m) = 4g(m)$ 由定理 3.3 立即得出。我们证明 $g(2m+1) = g(m) + g(m+1)$。只需证明

$$v_{2m+1}(2i-1, 2j-1) = v_{m+1}(i, j), \quad v_{2m+1}(2i, 2j) = v_m(i, j),$$

and

$$v_{2m+1}(2i-1, 2j) = v_{2m+1}(2i, 2j-1) = 1.$$

首先,

$$\begin{aligned}&(2i-2) \oplus (2j-2) \oplus (2m+1-2i+1) \oplus (2m+1-2j+1)\\ &= 2\big((i-1) \oplus (j-1) \oplus (m+1-i) \oplus (m+1-j)\big),\end{aligned}$$

这意味着 $v_{2m+1}(2i-1, 2j-1) = v_{m+1}(i, j)$。

其次,

$$\begin{aligned}&(2i-1) \oplus (2j-1) \oplus (2m+1-2i) \oplus (2m+1-2j)\\ &= \{2(i-1)+1\} \oplus \{2(j-1)+1\} \oplus \{2(m-i)+1\} \oplus \{2(m-j)+1\}\\ &= 2\big((i-1) \oplus (j-1) \oplus (m-i) \oplus (m-j)\big),\end{aligned}$$

所以 $v_{2m+1}(2i, 2j) = v_m(i, j)$。

最后,

$$\begin{aligned}&(2i-2) \oplus (2j-1) \oplus (2m+1-2i+1) \oplus (2m+1-2j)\\ &= 2(i-1) \oplus \{2(j-1)+1\} \oplus 2(m+1-i) \oplus \{2(m-j)+1\}\\ &= 2\big((i-1) \oplus (j-1) \oplus (m+1-i) \oplus (m-j)\big).\end{aligned}$$

若 m 为偶数，则 $(i-1) \oplus (m+1-i)$ 的最低有效位为 0，而 $(j-1) \oplus (m-j)$ 的最低有效位为 1。若 m 为奇数，则情况相反。无论哪种情况，所得异或结果均非零，因此 $v_{2m+1}(2i-1, 2j) = 1$。同理，$v_{2m+1}(2i, 2j-1) = 1$。

因此 $g(2m+1) = g(m) + g(m+1)$，证明完毕。 □

定理 4.2. 对于任意正整数 n,

$$\sum_{m=1}^{2^{n-1}} g(2m-1) = 6^{n-1}.$$

证明. 我们对 n 使用归纳法来证明该结论。

对于 $n = 1$，我们有 $g(1) = 1 = 6^0$，因此该命题成立。

假设该命题对所有不超过 $n = k$ 的整数都成立。对于满足 $1 \le x < 2^{k+1}$ 的整数 x, 满足 $u(x) = y$ 的整数个数为 2^{k-y}。利用

引理 4.1，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{2^k-1} g(m) &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{2^{i-1}} g\big(2^{k-i}(2j-1)\big)\\ &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{2^{i-1}} 4^{k-i} g(2j-1)\\ &= \sum_{i=1}^{k} 4^{k-i}6^{i-1}\\ &= 4^{k-1}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{3}{2}\right)^{i-1}\\ &= 2^{2k-1}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k}-1\right)\\ &= 2^{k-1}(3^k-2^k).\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{2^k} g(2m-1) &= g(1)+\sum_{m=1}^{2^k-1} g(2m+1)\\ &= g(1)+\sum_{m=1}^{2^k-1}\big(g(m)+g(m+1)\big)\\ &= 2\sum_{m=1}^{2^k-1} g(m)+g(2^k)\\ &= 2^k(3^k-2^k)+2^{2k}\\ &= 6^k.\end{aligned}$$

至此，归纳法完成。 □

定理 4.3。 对于任意正整数 n,

$$\sum_{m=1}^{2^n} g(m) = \frac{4^n+6^n}{2}.$$

证明。 根据定理 4.2,

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{2^n} g(m) &= \sum_{m=1}^{2^n-1} g(m)+g(2^n)\\ &= 2^{n-1}(3^n-2^n)+2^{2n}\\ &= \frac{4^n+6^n}{2}.\end{aligned}$$

□

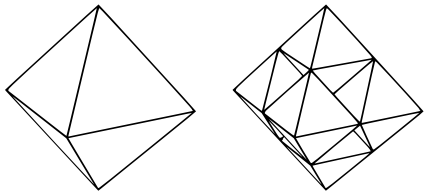


图3：正八面体上的运算 T

5 自相似结构与元胞自动机

综合迄今所得的结果，我们观察到，巧克力游戏中出现的图案类似于某一三维自相似结构的平面截面，该结构在下文所定义的极限中收敛于一个分形。

定义5.1 （ n阶谢尔宾斯基八面体）. 我们如下定义正八面体上的几何运算 T：

（1）设 O 为八面体的中心。（2）对于八面体的每个面，考虑由该面各棱的三个中点与点 O构成的四面体。（3）从原八面体中移除所有六个这样的四面体。

对正八面体应用运算 T，可得到六个较小的八面体，每个的棱长均为原来的一半（见图3）。

St从具有顶的正八面体出发 面体

$$(\pm 1, 0, 0),\ (0, \pm 1, 0),\ (0, 0, \pm 1),$$

我们迭代地执行操作 T。对于每个 $n \geq 0$，我们将由 6^n 个棱长为 $\frac{\sqrt{2}}{2^n}$ 的正八面体组成的图形记为 S_n，并将其称为第 n 阶谢尔宾斯基八面体S_n。

对于整数 m，我们将 S_n 的第 个水平截面 定义为

$$H_{n,m} := S_n \cap \left\{ z = 1 - \frac{m}{2^n} \right\}.$$

定理 5.2. 对于 $0 < m \leq 2^n$，图案 $R_{m,\ m}$ 与截面$H_{n,\ m}$相似。

图 4 展示了谢尔宾斯基八面体的第 11 个截面 $H_{4,\ 11}$ S_4，它与 $R_{11,\ 11}$ 相似。

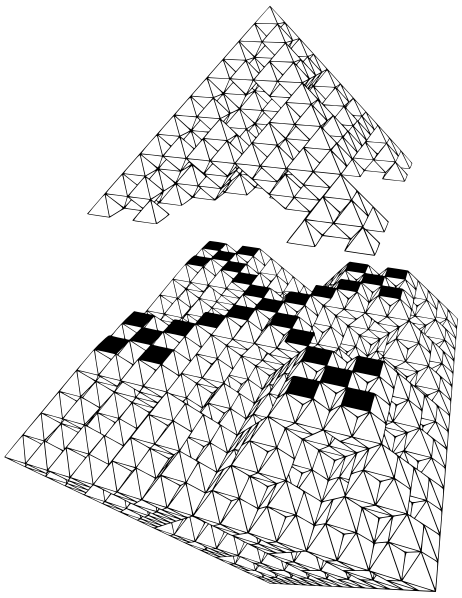


图 4：第 4 阶谢尔宾斯基八面体的水平截面

证明。令 s 为从 m 的二进制展开中去掉最高位后得到的整数，并设 $t = m - 2s$。根据 S_n 的构造，截面$H_{n,\ m}$ 由四个 $H_{n,\ s}$ 组成，分别位于四角，另有一个 $H_{n,\ t}$ 位于中心。

对于 $0 \le k \le n$，截面 $H_{n,\ 2^k}$ 全等于

$$\frac{1}{2^{n-1}} R_{2^k, 2^k}.$$

因此，该结论可由定理 3.4 得出。 □

利用这一性质，我们给出定理 4.3 的另一种证明。

定理 *4.3* 的另一种证明。由于

$$g(2^n) + 2\sum_{m=1}^{2^n-1} g(m) = 6^n \quad \text{and} \quad g(2^n) = 2^{2n} = 4^n,$$

我们得到

$$\sum_{m=1}^{2^n} g(m) = \frac{6^n - 4^n}{2} + 4^n = \frac{6^n + 4^n}{2}.$$

□

接下来，我们考虑 S_n 在半整数层级处的截面。对于满足 $m < 2^n$ 的正整数 m，令 $H_{n,m+\frac{1}{2}}$ 表示 $S_{\bar{n}}$ 与平面的交集

$$z = 1 - \frac{m + \frac{1}{2}}{2^n}.$$

根据引理 4.1 中使用的论证可知，$H_{n,m+\frac{1}{2}}$ 与$\frac{1}{2}H_{n,2m+1}$全等（见图 5）。

–

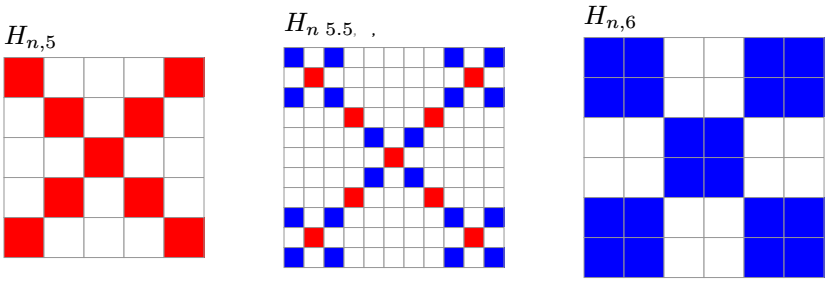


图 5： $H_{n,5}$,$H_{n,5.5}$，以及 $H_{n,6}$

此外，令 S_∞ 表示当 $n \to \infty$ 时 S_n 的极限。这个极限称为谢尔宾斯基八面体，是一种分形对象。对于实数 $0 \le r \le 1$，定义H_r 为 S_∞ 与平面 $z = 1 - r$ 的交集。根据运算 T的定义，我们有

$$H_{n,m} = H_{m/2^n}.$$

特别地，由于 $m < 2^m$，以下定理成立。

定理 5.3。 对于任意正整数 m，图案 $R_{m,m}$ 与 S_∞的截面 $H_{m/2^m}$ 相似。

集合 $P_{m,m}$ 也可以由二阶元胞自动机生成，它可被视为一维元胞自动机中规则 60 的二维类比。

定理 5.4. 对于整数 i、j，将整数序列 $\{a_{i,j}(n)\}_{n\ge 0}$递归定义为

$$\begin{aligned} a_{i,j}(n+2) = {} & a_{i,j}(n+1) + a_{i-1,j}(n+1) + a_{i,j-1}(n+1) + a_{i-1,j-1}(n+1) \\ & + a_{i-1,j-1}(n), \end{aligned}$$

带有初始条件

$$a_{i,j}(0) = 0 \quad \textit{for all } i, j,$$

and

$$a_{i,j}(1) = \begin{cases} 1 & \textit{if } i = j = 1, \\ 0 & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

Then

$$P_{m,m} = \left\{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \,\middle|\, a_{i,j}(m) \equiv 1 \pmod 2\right\}.$$

证明。我们对 m 进行归纳法证明

$$v_m(i,j) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a_{i,j}(m) \equiv 1 \pmod 2.$$

对于 $m = 1$，有 $v_1(1,1) = 0$，因此该断言成立。

假设该命题对所有不超过 $m = n$ 的整数都成立。对于正整数 a, b，以下关系成立：

$$a \oplus b = \begin{cases} (a-1) \oplus b + 1 & \text{if } u(a) < u(b), \\ a \oplus (b-1) + 1 & \text{if } u(a) > u(b), \\ (a-1) \oplus (b-1) & \text{if } u(a) = u(b). \end{cases}$$

特别地，条件 $u(a) = u(b)$ 等价于

$$a \oplus (b-1) = (a-1) \oplus b.$$

假设

$$v_{n+1}(i+1, j+1) = i \oplus j \oplus (n-i) \oplus (n-j) = 0.$$

将 $i, n-i$ 重新排列为 a, b，使得 $u(a) \le u(b)$，并类似地将 $j, n-j$ 重新排列为 c, d，其中 $u(c) \le u(d)$。于是 $a + b = c + d = n$ 且 $a \oplus b = c \oplus d$。

(1) 如果 $u(a) < u(b)$ 且 $u(c) < u(d)$，那么

$$(a-1) \oplus b \oplus (c-1) \oplus d = 0.$$

在这种情况下，以下等价关系成立：

$$a \oplus (b-1) = c \oplus (d-1) \quad \Longleftrightarrow \quad (a-1) \oplus (b-1) = (c-1) \oplus (d-1).$$

此外，假设 $(a-1) \oplus b = c \oplus (d-1)$，则可得 $(c-1) \oplus d = c \oplus (d-1)$，这与 $u(c) < u(d)$ 矛盾。因此，

$$(a-1) \oplus b \oplus c \oplus (d-1) \neq 0.$$

类似地，我们有

$$a \oplus (b-1) \oplus (c-1) \oplus d \neq 0.$$

(2) 如果 $u(a) = u(b)$ 或 $u(c) = u(d)$，那么必然

$$u(a) = u(b) = u(c) = u(d),$$

因为 a 与 b 的二进制加法中的进位位置，与 c 和 d 的二进制加法中的进位位置相同。因此，

$$(a-1) \oplus (b-1) \oplus (c-1) \oplus (d-1) = 0,$$

并且以下四个表达式全部为零:

$$(a-1)\oplus b\oplus(c-1)\oplus d,\quad (a-1)\oplus b\oplus c\oplus(d-1),$$

$$a\oplus(b-1)\oplus(c-1)\oplus d,\quad a\oplus(b-1)\oplus c\oplus(d-1).$$

根据情形 (1)、(2) 和归纳假设，我们得出

$$v_{n+1}(i+1,j+1)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad a_{i+1,j+1}(n+1)\equiv 1 \pmod 2,$$

由此完成证明。 □

6 我们对 P-位置的呈现与带弃权的尼姆游戏之间的关系

本文从不同的视角探讨了巧克力问题，并在本节介绍一些有趣的事实，以说明这一视角的实用性。这些事实由宫寺亮平博士提供，我们已获其许可将其纳入本文。

组合博弈论中一个有趣但颇具挑战性的问题，是确定当标准博弈规则修改为允许一次性弃权时会发生什么。这一步最多只能在一局博弈中使用一次，且不能在终局时使用。任一玩家使用弃权后，该选项便不再可用。对于经典尼姆，引入弃权会改变博弈的数学结构，使其复杂性大幅增加；而描述先手必胜局面集合的公式至今仍是一个重要的未解决问题，传统方法一直未能解决它。

在 [1]和 [2], 中，Chan、Low、Locke 和 Wong 描述了每堆石子数至多为四时，带弃权的尼姆游戏中先前玩家所处位置的集合。本研究展示了，要得出带弃权的经典尼姆中先前玩家获胜位置的公式有多么困难。

传统三堆尼姆的图具有优美的数学结构。见图 6。然而，传统的带弃权三堆尼姆的图似乎没有任何确定的结构。见图 7。

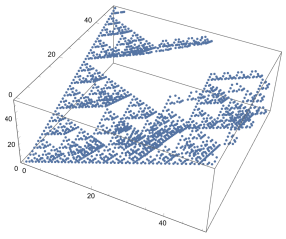


图 6：尼姆博弈的图

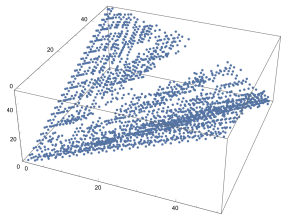


图 7：带弃权的尼姆游戏的图

接下来，我们从前几节介绍的视角，考察带弃权的四堆Nim中前一位玩家的获胜位置。在图

8、9、10和11中，蓝色矩形表示尼姆博弈中前一位玩家的获胜位置，红色矩形表示带弃权的尼姆博弈中前一位玩家的获胜位置。红色矩形具有某种明确的数学结构。因此，前几节介绍的视角揭示了两堆以上的传统尼姆博弈加上弃权这一历史发展中存在的某种明确数学结构。这说明我们的视角对于巧克力问题是有用的。

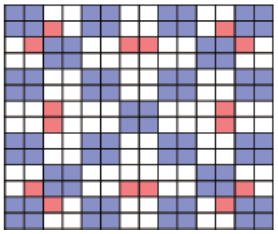


图8： $m = 14$

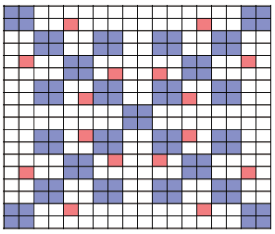


图9： $m = 18$

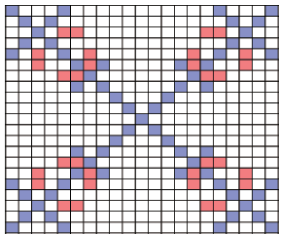


图10： $m = 21$

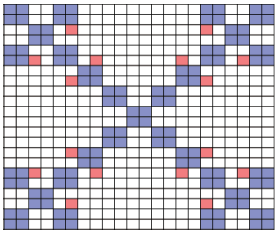


图11： $m = 22$

未来工作

作为未来研究的方向，我们感兴趣的是，是否还存在其他组合博弈，其 P 局面的集合构成分形对象或其平面截面；以及改变切割此类自相似结构的方向，能否得到有意义的结果。巧克力游戏中递归且自相似图案的出现表明，元胞自动机为描述和生成此类构型提供了一个自然的框架。基于这一视角，我们希望探究其他哪些类别的组合博弈可以通过元胞自动机生成其 P 局面。特别值得探讨的是，是否存在某些元胞自动机规则，能够在情形 $m < n$ 下生成巧克力游戏的 P 局面集合 $C_{m,\,n}$ 。阐明此类规则或许能进一步揭示公平博弈、自相似结构与离散动力系统之间的关系。

致谢

本研究是在 Yugo Narisawa 的合作下完成的。作者还特别感谢启明学院初高中的教师 RyoheiMiyadera，他在准备本文的过程中给予了宝贵帮助。

参考文献

[1] W. H. Chan、R. M. Low、S. C. Locke 和 O.L. Wong，《在堆大小不超过四的情况下进行的“带弃权的尼姆游戏”中 P-位置的图谱》，离散应用数学 **244**(2018), 44-55。[2] R. M. Low 和 W. H. Chan，《“带弃权的尼姆游戏”中 N-位置和 P-位置图谱》，Integers 15 (2015), #G2。[3] F. Sato，《Ishitori Game no Sugaku: Game to Daisu no Fushigi na Kankei》（《尼姆游戏的数学：博弈与代数之间的奇妙关系》），数学书房，2014（日文）。