arXiv:2602.20183v1 [math.GM] 20 Feb 2026

具有概率基础的模糊数基于分位数的偏度：在投资组合优化中的应用

Jan Schneider[1] Kaja Bilińska[1,*] Paul Schneider[2]Tomasz Szandała[1]

[1]弗罗茨瓦夫科技大学，波兰弗罗茨瓦夫 50-370[2]意大利语区瑞士大学布菲街13号，瑞士卢加诺 6900

摘要

本文提出了一种新颖的无参数模糊数偏度系数，填补了现有方法在量化不精确性条件下不对称性方面的关键空白。据我们所知，模糊理论文献中的主流方法无一例外，均在基于矩的偏度表达式中以模糊隶属函数替代概率密度函数，却未对此给予充分考量。这种做法缺乏严谨的理论依据和明确的解释合理性。相比之下，我们的系数虽然同样植根于概率论，却为这一新偏度系数奠定了严谨的理论基础，使其既具有概率意义，又完全符合模糊集理论的语义。

我们将模糊数隶属函数的左、右分量分别解释为相关随机变量的累积分布函数和生存概率函数。这为其 α-截集建立了稳健的概率基础，阐明了这些截集可解释为广义分位数，即代表“至少有 α 概率”的值，从而体现了概率与可能性理论之间根基深厚的二元关系。

作为一种基于分位数的度量，所提出的系数在尺度和位置变换下具有不变性。尤为重要的是，实证结果显示，随着资产数量增加，投资组合优化的处理时间几乎按对数级下降，这证明了该系数具有更高的计算效率，从而能够扩展应用于现实场景。

*通讯作者：Kaja.Bilinska@pwr.edu.pl

它由两个互补的部分构成：“内在”度量用于量化底层概率分布的内在偏度，“外在”度量则用于捕捉模糊数整体轮廓的偏度。这种双重结构能够深入揭示模糊数的不对称性。我们在模糊均值-方差-偏度投资组合优化框架中，展示了该系数的实用性和计算优势，并将其性能与文献中被引频次最高的两个基于矩的原始模糊偏度系数进行了比较。

关键词：模糊数、偏度指数、分位数函数、无参数度量、Markowitz投资组合优化、金融工程、数理金融。

目录

1 引言 3

2 数学预备知识 5

2.1 符号与术语.5 2.2 算术运算.6 2.3 模糊数的性质.7 2.4 文献中模糊均值、方差和偏度系数的综述.7 2.5 用于比较的偏度系数 . . . . . 10 2.5.1 Vercher-Bermúdez系数（2013） . . . . . 10 2.5.2 Li-Guo-Yu系数（2015）.10

3 我们的提案 11

3.1 新偏度系数的定义.12 3.2 数值示例.15 3.2.1 从模糊数推断随机变量 . . . . 15 3.2.2 根据理论分布构造模糊数 .16 3.3 新偏度系数的性质 .19

4 均值-方差-偏度投资组合优化 21

4.1 均值-方差-偏度模型.21 4.2 所采用的计算方法.22 4.3 比较分析.24

5 结论 **26**

1 引言

不对称性是自然现象和人类决策中普遍存在的特征，尤其是在存在不确定性时。恰当地量化并应对这种不对称性，在各个领域都至关重要。这一概念具有基础性意义，其有效定义与应用在概率语境中差异显著，但在模糊语境中则并非如此。

本文关注在金融工程应用，特别是投资组合优化中，对模糊数的不对称性进行稳健且可解释的度量的迫切需求。在这些应用中，投资者对收益与损失的偏好使得清晰理解偏度尤为必要。

现代投资组合理论是一个重要的应用领域，需要借助不对称性概念来区分对收益和损失的偏好。哈里·马科维茨在 1952 [71], 为该理论奠定了开创性基础，旨在构建均值与标准差之比（即夏普比率）最大的有效投资组合。该框架仅依靠均值和方差来表示投资组合的风险与回报。然而，决策理论的近期进展揭示了高阶矩风险偏好在人类决策中的重要性 [73, 34,96], ，这类偏好通常表现为对高阶奇数阶矩取正值的偏好 [33]。因此，投资组合理论和金融经济学中也提出了对传统均值—方差理论的调整与扩展 [102, 59, 16]。

概率金融领域的这些进展 [3, 79, 57, 13, 91]凸显了金融界对高阶收益矩（如偏度和峰度）的稳健定义的浓厚兴趣，也彰显了传统概率论在这一语境中的重要作用。然而，基础概率分布往往未知、模糊或不精确，因此需要采用能够以不同方式处理此类认知不确定性的框架。尽管非可加概率 [39, 38],模糊性和奈特不确定性为金融经济学 [35] 提供了理论上的替代方案，但其具体设定往往取决于主观建模选择，而且面对输入扰动时可能缺乏稳健性。

这进一步凸显了在模糊语境中处理认知不确定性时，同样需要严谨且易于解释的度量方法。

为了稳健地建模和分析具有模糊性或不精确性特征的量，模糊集是高度成熟且适用的

工具，其隶属函数可以像 [70] 中那样，根据观测数据或数学模型系统地构建。

大量研究强调了模糊集理论在金融经济学和投资组合理论中的应用。相关文献大致可按其基础理论分类，主要包括可能性、可信性和直觉主义理论（见第 2.4 小节）。 [28] 的早期研究开创了学界在模糊框架下对投资组合选择的关注。后续研究探讨了模糊规划与随机规划的比较 [49],、可能性方差和协方差的方案 [114], 、模糊变量半方差的分析 [48], ，以及采用模糊线性回归的平均绝对偏差模型 [50]。这些研究凸显了模糊集理论处理金融不确定性的灵活性。

尽管相关研究成果丰富，现有关于模糊偏度的文献仍主要依赖于将经典概率论中的基于矩的偏度系数直接改编而来，尤其是类似于Fisher-Pearson系数的系数 [83]。这些方法往往会在没有充分解释依据的情况下，隐含地将模糊隶属函数 μ（x）与某个底层随机变量 X的概率密度函数（PDF） f_X（x）等同起来，而且通常并未明确界定该随机变量本身。概率密度函数必须积分为一，并表示概率密度；而在一般情境下，隶属函数的取值表示归属程度或可能性，并不具有直接的概率解释。因此，将隶属函数简单代入为概率密度函数设计的公式，会导致所得定义缺乏严谨的理论依据。这一哲学层面的鸿沟往往忽视了可能性与概率这两种理论在根本上的差异 [112, 30, 31, 46, 51]。这凸显了构建模糊偏度系数的必要性：它们不应只是公式上的类比，而应从模糊数的内在性质及其与概率概念之间的关系出发，经过严谨推导得出。

本文认为，需要采用更严谨的方法，尤其是利用模糊数固有的结构（其 α-截集），并明确建立与概率论的联系，而不是依赖类比替代。

因此，我们为模糊数提出了一种新颖的无参数基于分位数的偏度度量。新的偏度系数不仅对称且在尺度和平移变换下保持不变，而且与其他偏度系数相比，所需的计算资源显著更少。重要的是，我们的方法以明确的概率术语为模糊数的构造奠定基础

，将隶属函数的左分量和右分量分别解释为累积分布函数和生存概率函数。这一独特的基础为α-截集提供了稳健的解释，将其视为广义分位数，并以此构建我们新提出的基于分位数的偏度度量。

作为应用示例，我们通过数值方法提出一个模糊均值-方差-偏度投资组合选择模型，并针对三种不同的偏度定义（包括我们提出的定义）实现了阈值约束投资组合优化（TCPO）。TCPO 代码可在 GitHub 上获取：https://github.com/kjbilin/FuzzMetrics。

本文其余部分的结构如下。第 2 节回顾模糊数的数学预备知识，包括定义、术语和算术运算，并概述现有的均值、方差和偏度定义。第 3 节介绍我们为模糊数提出的新偏度系数。第 4 节回顾马科维茨现代投资组合理论的均值-方差-偏度推广，并展示与其他讨论过的系数相比，我们的新系数在资产权重分布和计算时间方面的表现。第 5 节总结全文，并展望未来可能的研究方向。

2 数学预备知识

本节简要回顾模糊数的基本定义和性质，以及模糊均值、方差和偏度的常见定义。

本文将采用以下模糊数定义（最初发表于 [113]）。

定义 1 *[99]* 模糊数 ξ 由其隶属函数 $\xi(\cdot)$ 确定，并可由该函数表示。该函数是实变量 x的函数，满足以下条件：

1. $\xi: \mathbb{R} \mapsto [0,1]$*2.* 对所有 $\alpha \in (0,1]$，函数 $\xi(\cdot)$的 α水平集（记作 $C_\alpha(\xi) := \{x \in \mathbb{R}: \xi(x) \geq \alpha\}$）均为闭区间。*3.* $\xi(\cdot)$的支撑集 定义为 $supp[\xi] := cl\{x \in \mathbb{R}: \xi(x) > 0\}$，且有界。

2.1 符号与术语

我们记 $supp[\xi] =: [l_\xi, r_\xi] =: C_0(\xi)$，以及 $C_1(\xi) =: [m_\xi^-, m_\xi]$. 我们将（可能退化的）区间 $[m_\xi, m_\xi]$ 称为模糊数的核

ξ. 若 1-水平集 $C_1(\xi)$ 为单点（即 $m_\xi = m_\xi$），则我们将该唯一核值记为 m_ξ。

我们将 $\xi(\cdot)$ 在 $[l_\xi, m_\xi]$ 上的限制记为

$$\xi|_{[l_\xi, m_\xi]} =: \xi_l, \tag{1}$$

类似地，将 $\xi(\cdot)$ 在 $[m_\xi, r_\xi]$ 上的限制记为

$$\xi|_{[m_\xi, r_\xi]} =: \xi_r, \tag{2}$$

并将 ξ_l 称为 ξ的左分量，将 ξ_r 称为模糊数 ξ的右分量。因此，模糊数 ξ 可表示为有序函数对 $(\xi_l(\cdot)\ \xi_r(\cdot))$。

对于 $\alpha \in [0,1]$，我们引入以下记号

$$C_\alpha(\xi) := [\xi_d(\alpha), \xi_u(\alpha)]\,. \tag{3}$$

对于 $\alpha = 0$，令 $C_0(\xi) = [\xi_d(0)\ \xi_u(0)] = [l_\xi, r_\xi]$, 由此定义了两个函数 $\xi_d(\alpha)$ $\xi_u(\alpha)$, 其定义域为 $[0,1]$.

由此得到模糊数 ξ 的水平集（亦称参数）表示（例如参见 [40]），即有序区间函数对 $\xi = [\xi_d, \xi_u]$.

2.2 算术运算

水平集表示便于定义模糊数上的算术运算。对于两个模糊数 ξ 和 η，以及算术运算 $\circ \in \{\oplus, \ominus, \odot, \oslash\}$， $\xi \circ \eta$的 α-截集定义如下:

$$\xi \circ \eta := [(\xi \circ \eta)_d, (\xi \circ \eta)_u] \tag{4}$$

其中

$$(\xi \circ \eta)_d := \min\{\xi_d \diamond \eta_d, \xi_d \diamond \eta_u, \xi_u \diamond \eta_d, \xi_u \diamond \eta_u\}), \tag{5}$$

and

$$(\xi \circ \eta)_u := \max\{\xi_d \diamond \eta_d, \xi_d \diamond \eta_u, \xi_u \diamond \eta_d, \xi_u \diamond \eta_u\}, \tag{6}$$

其中，$\diamond$表示相应的实数算术运算（+、 −、 ·、 / ; 进行除法时，须满足 $0 \notin supp[\eta]$ ）。

2.3 模糊数的性质

由定义 1 可直接推得以下基本性质（证明参见例如 [99]）。

性质1

定义*1*意味着 ξ上半连续、 ξ_l 右连续且 ξ_r.左连续

性质2

定义*1*意味着左分量 $\xi_l(x)$ 是单调递增函数，而右分量 ξ_r 是单调递减函数。

观察*1* 需要指出，本文的新定义有一个关键之处：根据性质*1*和性质*2*，左分量 $\xi_l(x)$满足概率累积分布函数（*CDF*）的函数要求，而反射后的右分量 $1-\xi_r(x)$满足概率生存函数（即 $1-$*CDF*）的函数要求。对模糊数各分量的这种直接概率解释，为我们的基于分位数的偏度度量奠定了严谨基础。具体而言，对于任意 x， $\xi_l(x)$表示随机变量 X_L 小于或等于x的概率，即*Pr(*$X_L \leq x$*)*。类似地， $1-\xi_r(x)$表示随机变量 X_R 小于或等于 x的概率，即*Pr(*$X_R \leq x$*)*。这意味着， α-截点 $\xi_d(\alpha)$和 $\xi_u(\alpha)$可以解释为这些相关分布的广义分位数： $\xi_d(\alpha)$是 α分位数，对应于 X_L，即*Pr(*$X_L \leq \xi_d(\alpha)) = \alpha$；而 $\xi_u(\alpha)$是$1-\alpha$分位数，对应于 X_R，即*Pr(*$X_R \leq \xi_u(\alpha)) = 1-\alpha$。这也意味着*Pr(*$X_R > \xi_u(\alpha)) = \alpha$。 α-截点的这一直接概率含义对于理解模糊数具有重要意义：它表示以结构化的概率方式“至少有 α的概率”出现的取值，从而在可能性程度（模糊隶属度）与概率分位数之间建立了具体联系。

2.4 文献中模糊均值、方差与偏度系数综述

尽管数学定义1已得到普遍认可，仅在连续性、可微性条件和支撑集方面存在细微差异，但模糊均值的定义却有显著差异，因此方差和偏度的定义也各不相同。

总体而言，这些定义源自不同的理论框架，用以诠释模糊数的语义值。最突出的框架包括可能性理论 [111, 26, 105, 70]，可信性理论 [67, 24, 115, 23], 和直觉模糊集 [4, 5]。

每种框架都提出了各自的均值定义。
例如，原始的可能性均值在 [40] 中定义如下:

$$\mathbb{E}_{\mathcal{P}}(\xi) := \frac{1}{2} \cdot \left(\int_0^1 \xi_d(\alpha)\, d\alpha + \int_0^1 \xi_u(\alpha)\, d\alpha \right) \tag{7}$$

对此定义存在许多修订，通常会引入由 α 进行的加权（见 [37]）。

可信性均值定义如下:

$$\mathbb{E}_{Cr}(\xi) := \int_{l_\xi}^{r_\xi} x\phi_{Cr}(x)dx. \tag{8}$$

其中， $\phi_{Cr}(x)$是可信性密度函数，定义为 ξ 的可信性分布的导数，其定义如下

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \left(\sup_{y \le x} \xi(y) + 1 - \sup_{y > x} \xi(y) \right).$$

参见 [116] ，其中给出了一些可信性分布和均值的示例。
有关直觉主义定义，请参见 [4] 和 [5]。

注 2.1 通过变量替换不难看出，对于可逆的左分量和右分量，两个积分(7)和(8)相同，即

$$\mathbb{E}_{Cr}(\xi) = \mathbb{E}_{\mathcal{P}}(\xi) \tag{9}$$

除了这些均值定义外，文献中还提出了各种各样的模糊数排序函数，用于衡量集中趋势（综述见 [15] ）。典型例子包括 [1, 56, 106, 107, 108, 18, 53, 6, 29, 76, 42, 45, 44, 92, 93, 109]。

与上述集中趋势定义相对应，也因此发展出了可信性、可能性和直觉主义方差及偏度系数的定义。这些定义通常直接类比概率论中的费希尔–皮尔逊中心矩定义 [83]。

因此，一旦选定均值 $\mathbb{E}(\xi)$ 的定义，模糊方差的一个显而易见且可行的定义便是：

$$\mathbb{V}(\xi) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi))^2 \tag{10}$$

其中，隶属函数 $\xi(x)$ 以直接明了的方式替代了概率定义中的概率密度。

类似地，模糊偏度可以仿照概率框架中的 Fisher-Pearson 系数定义如下：

$$\mathbb{S}(\xi) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi))^3 / \mathbb{V}(\xi)^{\frac{3}{2}} \tag{11}$$

上述定义中的期望值 $\mathbb{E}$ 可选择为可信性、可能性、直觉主义或其他类型。

关键在于，这种直接转换保留了重要的（[100]不变性：对于 $c > 0$ 和 $d \in \mathbb{R}$，$\mathbb{S}(c\xi + d) = \mathbb{S}(\xi)$，这意味着如此定义的偏度在尺度和平移变换下保持不变，前提是所选的均值和方差算子本身也具有适当的不变性。

然而，作者对定义（10）和（11）进行了调整或修改，以使其更符合直觉，和／或更适用于模糊集理论框架中的解释，但这也可能同时损害数学一致性。例如，在我们选取用于与新偏度系数进行比较的代表性案例中，Li等人 [64]采用 $\mathbb{S}(\xi) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi))^3$（不除以方差的任何次幂）；而 Vercher-Bermudez [98]采用 $\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi))^3 / \mathbb{V}(\xi)^{\frac{3}{2}}$,，但以在量纲上等价、但在渐近意义上不等价的度量下行风险取代 Fisher-Pearson 类型的标准差；该度量最早于 [11] 提出。

大量涉及偏度约束的模糊投资组合优化文献进一步体现了这一做法，其研究成果可按理论传统分为：可能性 [11, 68, 98, 47, 110, 85, 69, 63, 74]，可信性 [20, 36, 9, 103, 12, 82, 62, 72]，和直觉主义 [19, 25, 43, 104]。

尽管如此，上述所有模糊方法都基于概率矩偏度，即在概率公式中直接用模糊隶属函数替代概率密度函数。它们既没有考虑鲍利 [14]，凯利 [52]，皮尔逊众数偏度或中位数偏度等经典的替代性基于分位数的偏度系数，也没有考虑当代数理金融和金融工程中的任何现代无参数方法 [58, 77, 21, 32, 7, 89, 90, 78]。

2.5 用于比较的偏度系数

我们从文献中选取了两个著名的模糊偏度系数进行比较：分别由 Vercher-Bermudez [98] 于2013年以及Li、Guo和Yu [64] 于2015年提出。选择它们是因为，在引入新型偏度系数的出版物中，这两篇文献在Scopus上以“模糊偏度”为检索词的被引次数绝对最高，表明它们在该领域具有重大影响力和持久的代表性。

2.5.1 Vercher-Bermúdez系数（2013）

Vercher 和 Bermúdez [98] 将模糊数的均值、方差（实际上是下行风险，ω（ξ），其量纲与标准差等价）和偏度定义如下：

$$\mathbb{E}_{VB13}(\xi) = 1/2 \cdot \int_0^1 [\xi_d(\alpha) + \xi_u(\alpha)]\, d\alpha \quad (\text{as in } (7). \tag{12}$$

$$(\mathbb{V}_{VB13})^{\frac{1}{2}} = \omega(\xi) := \int_0^1 [\xi_u(\alpha) - \xi_d(\alpha)]\, d\alpha \tag{13}$$

计算偏度时，Vercher 和 Bermúdez 需要三阶可能性矩：

$$\begin{aligned} \mu_3(\xi) = 1/2 \cdot \int_0^1 [\xi_d(\alpha) - \mathbb{E}(\xi)]^3\, d\alpha \\ + 1/2 \cdot \int_0^1 [\xi_u(\alpha) - \mathbb{E}(\xi)]^3\, d\alpha \end{aligned} \tag{14}$$

偏度的最终公式为三阶可能性矩与下行风险三次方的比值：

$$\mathbb{S}_{VB13}(\xi) = \frac{\mu_3(\xi)}{[\omega(\xi)]^3} \tag{15}$$

2.5.2 Li-Guo-Yu系数（2015）

Li、Guo 和 Yu [64] 提出的均值、方差和偏度定义由以下公式给出：

$$\mathbb{E}_{LGY15}(\xi) = \int_0^1 \alpha \cdot [\xi_d(\alpha) + \xi_u(\alpha)]\, d\alpha \tag{16}$$

$$\mathbb{V}_{LGY15}(\xi) = \int_0^1 \alpha \cdot \Big[(\xi_d(\alpha) - \mathbb{E}(\xi))^2 + (\xi_u(\alpha) - \mathbb{E}(\xi))^2 \Big] \, d\alpha \tag{17}$$

$$\mathbb{S}_{LGY15}(\xi) = \int_0^1 \alpha \cdot \Big[(\xi_d(\alpha) - \mathbb{E}(\xi))^3 + (\xi_u(\alpha) - \mathbb{E}(\xi))^3 \Big] \, d\alpha \tag{18}$$

3 我们的方案

鉴于基于矩的模糊均值、方差和偏度定义众多，Bowley [14], 、Kelley [52], 以及随后由 Groeneveld 和 Meeden [41],提出的无参数（即不明确纳入均值和方差）基于分位数的偏度系数，尤其适合调整用于模糊数，作为一种可行的替代方案。

Groeneveld 和 Meeden 的偏度系数与 Willemvan Zwet 在 [100], 中提出的理论基础相关，推动了大量后续理论研究，也被应用于各种实际场景，例如 [61, 22]。

Groeneveld-Meeden 偏度系数定义如下，适用于随机变量 X ：

$$\mathbb{S}_{GM_1}(X)(p) := \frac{Q_X(1-p) + Q_X(p) - 2\,Q_X(1/2)}{Q_X(1-p) - Q_X(p)}, \tag{19}$$

当 $p \in (0, 1/2)$ 时，其中 $Q_X(\cdot)$ 表示随机变量 X 的分位数函数 。

鲍利系数 [14] 是（19）的一个特例，在 $p = 0.25$处取值；凯利系数 [52] 则在 $p = 0.1$.处取值

在同一篇论文中， [41], Groeneveld 和 Meeden 通过对第一个系数（19）的分子和分母分别积分，提出了第二个偏度系数:

$$\mathbb{S}_{GM_2}(X) := \frac{\int_0^{0.5} (Q_X(1-p) + Q_X(p) - 2Q_X(0.5))\, dp}{\int_0^{0.5} (Q_X(1-p) - Q_X(p))\, dp} \tag{20}$$

根据观察1，第2.3节的性质1和性质2确保，模糊数 ξ 的左分量 ξ_l 以及反射后的右分量 $1 - \xi_r$，各自都满足某个随机变量 X的概率累积分布函数（CDF）的定义假设。

因此，给定模糊数 ξ的左分量和右分量： ξ_l 和 ξ_r，可分别将其与两个随机变量 X_L 和 X_R关联起来，它们分别取值于集合$[l_\xi, m_\xi]$ 和 $[m_\xi, r_\xi]$，定义如下：

$$\xi_l(x) = \Pr(X_L \leq x), \tag{21}$$

and

$$\xi_r(x) = 1 - \Pr(X_R \leq x). \tag{22}$$

注意，在假设两个分量ξ_l 和 ξ_r可逆的情况下，即 $\xi_l^{-1}(\alpha) = \xi_d(\alpha)$ 和 $\xi_r^{-1}(\alpha) = \xi_u(\alpha)$，我们可以直接确定：

$$\begin{aligned} \xi_d(\alpha) &= Q_{X_L}(\alpha), \\ \xi_u(\alpha) &= Q_{X_R}(1-\alpha). \end{aligned} \tag{23}$$

3.1 新偏度系数的定义

设 ξ为一个模糊数，其核为 $[m_\xi, m_\xi]$，且其 α-截集为 $[\xi_d(\alpha)\ \xi_u(\alpha)]$。根据式（21）和式（22），令$X_L$ 和 X_R 分别为与 ξ的左、右分量相关联的随机变量。根据式（23），它们的分位数函数分别为 $Q_{X_L}(\alpha) = \xi_d(\alpha)$ 和 $Q_{X_R}(\alpha) = \xi_u(1-\alpha)$。

类比于 Groeneveld 和 Meeden 的两个偏度系数，我们也定义两个系数：一个基于点，另一个通过积分在前者的基础上定义。

定义 2
我们提出的新点基模糊偏度系数 $\mathbb{S}_{JKPT_1}(\xi)\ (\alpha)\ (v)$ 定义为两个组成部分的凸组合，分别对应于我们所称的内偏度：

$$\mathbb{S}_{Inner,point}(\xi)(\alpha),$$

以及外部偏度：

$$\mathbb{S}_{Outer,point}(\xi)(\alpha)$$

模糊数 ξ 在点 α处的偏度，即

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{JKPT_1}(\xi)(\alpha)(v) := v \cdot \mathbb{S}_{Outer,point}(\xi)(\alpha) \\ + (1-v) \cdot \mathbb{S}_{Inner,point}(\xi)(\alpha),\ v \in [0,1] \end{aligned} \tag{24}$$

其中：

1. 基于点的内偏度 *(*$\mathbb{S}_{Inner,point}(\xi)(\alpha)$*):* 该分量刻画了底层概率分布 X_L 与 X_R的内在偏度。对于选定的 α水平 $\alpha \in (0,0.5)$，它被定义为 X_L 与 X_R的*Groeneveld-Meeden* 偏度系数之平均值，并借助 α-截集函数 ξ_d 与 ξ_u.，由式(21)和(22) 表示

$$\mathbb{S}_{inner,point}(\xi)(\alpha) := \frac{1}{2}\left(S_{GM_1}(\xi_d)(\alpha) + S_{GM_1}(\xi_u)(\alpha)\right) \tag{25}$$

其中

$$\mathbb{S}_{GM_1}(\xi_d)(\alpha) := \frac{\xi_d(1-\alpha) + \xi_d(\alpha) - 2\,\xi_d(1/2)}{\xi_d(1-\alpha) - \xi_d(\alpha)} \tag{26}$$

对于 X_L，以及对于 X_R:

$$\mathbb{S}_{GM_1}(\xi_u)(\alpha) := \frac{\xi_u(\alpha) + \xi_u(1-\alpha) - 2\,\xi_u(1/2)}{\xi_u(\alpha) - \xi_u(1-\alpha)}. \tag{27}$$

对于 α，一个典型的取值将类似于概率情形中的0.25（鲍利系数）或0.1（*Kelly* 系数）。

2. 基于点的外偏度（$\mathbb{S}_{Outer,\ point}$（$\xi$）（$\alpha$））：该组成部分利用特定的 α级别 $\alpha \in$（0，1）来刻画模糊数整体轮廓的感知偏度。其定义如下:

$$\mathbb{S}_{Outer,point}(\xi)(\alpha) := \frac{(\xi_d(\alpha) - \underline{m}_\xi) + (\xi_u(\alpha) - \overline{m}_\xi)}{(\xi_u(\alpha) - \xi_d(\alpha))}. \tag{28}$$

我们的系数显然由两部分构成，在某种程度上让人联想到概率论中的全方差定律（Eve 定律）：第一部分，$\mathbb{S}_{Inner,\ point}(\xi)(\alpha)$，表示根据相关概率分布推导出的模糊数左分量和右分量的内在偏度。该组成部分反映了模糊数“构成单元”固有的不对称性。

第二部分$\mathbb{S}_{Outer,\ point}(\xi)(\alpha)$反映了模糊数 ξ呈现出的或“外部”的偏度，体现了通过其 α-截集观察到的整体形状的不对称性。对于视觉评估而言，该组成部分尤其重要；当模糊数的隶属函数并不直接对应于简单的分布形式，或其组成部分分布是对称的（例如，生成三角模糊数的均匀分布（参见 [88, 60]，其中介绍了一种关于三角模糊数的有趣新型且与偏度相关的表示方法）），但整体模糊形状却是不对称的情况下，该组成部分同样尤为相关。

该系数的计算效率非常高，因为只需在少数几个特定点对 α-截集函数进行求值。

类比于式 (20)，我们引入第二个模糊偏度系数，$\mathbb{S}_{JKPT_2}(\xi)$，其内外组成部分均采用积分形式：

定义 3

我们提出的第二个基于积分的模糊偏度系数 - $\mathbb{S}_{JKPT_2}(\xi)$ 定义如下：

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_{\mathbf{JKPT_2}}(\xi)(v) := v \cdot \mathbb{S}_{Outer,integral}(\xi) \\ + (1-v) \cdot \mathbb{S}_{Inner,integral}(\xi), v \in [0,1]\end{aligned} \tag{29}$$

with

1. 积分内部偏度 ($\mathbb{S}_{Inner,integral}(\xi)$)*:* 该组成部分对底层概率分布 X_L 和 X_R 的内在偏度在从0 到 0.5的 α-水平上进行积分。它定义为 X_L和 X_R的积分型 *Groeneveld-Meeden* 偏度系数的平均值，并用 α-截函数表示：

$$\mathbb{S}_{Inner,integral}(\xi) := \frac{1}{2}\left(S_{GM_2}(\xi_d) + S_{GM_2}(\xi_u)\right) \tag{30}$$

其中

$$\mathbb{S}_{GM_2}(\xi_d) := \frac{\int_0^{0.5}\left(\xi_d(1-\alpha) + \xi_d(\alpha) - 2\xi_d(0.5)\right)d\alpha}{\int_0^{0.5}(\xi_d(1-\alpha) - \xi_d(\alpha))d\alpha} \tag{31}$$

对于 X_L，以及对于 X_R:

$$\mathbb{S}_{GM_2}(\xi_u) := \frac{\int_0^{0.5}\left(\xi_u(\alpha) + \xi_u(1-\alpha) - 2\xi_u(0.5)\right)d\alpha}{\int_0^{0.5}\left(\xi_u(\alpha) - \xi_u(1-\alpha)\right)d\alpha}. \tag{32}$$

2. 积分外部偏度 ($\mathbb{S}_{Outer,\ integral}$（$\xi$）)：这一组成部分通过对从0到0.5的 α-水平上的基于分位数的偏度度量进行积分，捕捉模糊数整体轮廓涌现出的偏度。其定义为积分之比：

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_{Outer,integral}(\xi) := \\ \frac{\int_0^{0.5}\left(\xi_d(\alpha) - \underline{m}_\xi\right) + \left(\xi_u(\alpha) - \overline{m}_\xi\right)d\alpha}{\int_0^{0.5}\left(\xi_u(\alpha) - \xi_d(\alpha)\right)d\alpha}\end{aligned} \tag{33}$$

在 $\mathbb{S}_{JKPT_1}$ 和 $\mathbb{S}_{JKPT_2}$ 之间进行选择，取决于计算效率与全面性之间所需的平衡。$\mathbb{S}_{JKPT_1}$ （采用基于点的内外组成部分）速度更快，而 $\mathbb{S}_{JKPT_2}$（采用积分内外组成部分）则能更全面地呈现组成部分分布的偏度。加权因子 $v \in [0,1]$ 可用于自定义；例如， $v = 0.5$ 对涌现的模糊形状和内在组成部分分布给予同等重视。对 α （针对 $\mathbb{S}_{Inner,\ point}(\xi)(\alpha)$）和 α （针对 $\mathbb{S}_{Outer,\ point}(\xi)(\alpha)$）的选择，也会影响该系数对中心不对称性与尾部不对称性的敏感度（例如， $\alpha = 0.25$ 或 $\alpha = 0.5$）。这些选择应根据具体的应用背景和所需的分析重点来确定。

记号： 对于 $v = 0.5$ ，我们可以在记号中省略 v ，即$\mathbb{S}_{JKPT_1}(\alpha)$是$\mathbb{S}_{JKPT_1}(\alpha)$(0.5)的简写，. $\mathbb{S}_{JKPT_2}$ 是$\mathbb{S}_{JKPT_2}$(0.5)的简写。

3.2 数值示例

(22)、(21)和(23)中概述的解释允许从两个不同的起点来确定给定模糊量的偏度：要么直接从模糊数的左分量和右分量出发，要么反过来，由相关随机变量构造模糊数。因此，下面我们给出两个说明性段落3.2.1和3.2.2，共包含三个示例：

第一个示例3.1展示了我们的偏度系数—— S_{JKPT_1}(0.1)、 S_{JKPT_1}(0.25)和 S_{JKPT_2} ——在分段线性模糊数上的应用。这类模糊数可以来自经验数据（例如来自直方图），或作为更复杂隶属函数的近似。

第二个和第三个示例（3.2 和 3.3）采用相反的思路，从两个预先定义的随机变量 X_L 和 X_R开始。根据它们的分位数函数，我们构造模糊数的左分量和右分量（ξ_l 和 ξ_r），然后应用定义2和定义3。

为进行比较分析，我们还使用$\mathbb{S}_{VB13}$ [98] 和 $\mathbb{S}_{LGY15}$ [64] 系数计算所有示例的偏度值。

3.2.1 由模糊数推断随机变量

示例3.1 在本示例中，选择了分段线性隶属函数，这是由经验数据 *[27]* 导出的模糊数的一种常见表示，或作为连续模糊数的线性近似 *[55],[87]* 。

模糊数 ξ 由其左分量 ξ_l 和右分量ξ_r定义。为便于复现，我们列出每个分量的转折点 $[x, \alpha]$:

- 左分量 ξ_l: $[0.1, 0]$, $[0.3, 0.1]$, $[0.4, 0.2]$, $[0.6, 0.25]$, $[0.8, 0.4]$, $[1.4, 0.5]$, $[1.6, 0.7]$, $[2.5, 0.85]$, $[2.8, 0.9]$, $[3.0, 1]$
- 右分量 ξ_r: $[7.6, 0]$, $[7.2, 0.1]$, $[7.1, 0.2]$, $[6.3, 0.25]$, $[6.0, 0.4]$, $[5.1, 0.5]$, $[4.8, 0.6]$, $[3.7, 0.75]$, $[3.4, 0.9]$, $[3.0, 1]$.

该模糊数计算得到的偏度系数为:

系数	值
$\mathbb{S}_{JKPT_1}(0.1)$	0.165
$\mathbb{S}_{JKPT_1}(0.25)$	0.002
$\mathbb{S}_{JKPT_2}$	0.099
$\mathbb{S}_{VB13}$	0.237
$\mathbb{S}_{LGY15}$	2.024

图*1*直观展示了这个模糊数及其背后的概率解释。最左侧的面板显示隶属函数 $\xi(x)$。中间的面板显示了 X_L （由 ξ_l导出）和 X_R （由 $1-\xi_r$导出）对应的累积分布函数。右侧的面板显示 X_L和 X_R对应的概率密度函数，并标出了关键分位数（$Q_X(\alpha)$ $Q_X(0.5)$ $Q_X(1-\alpha)$ 对于$\alpha = 0.25$），以突出其概率质量的分布情况。

3.2.2 根据理论分布构造模糊数

为说明所提出指标的构造方法及其性质，我们给出两个不同的示例。

第一个示例旨在直观展示构造过程：使用较小且易于处理的数值，将两个相互独立的随机变量转换为一个模糊数。

第二个示例是一项压力测试，旨在展示偏度指标在极端不对称性和更大幅度条件下的表现——这是金融工程中一种现实的情形（例如大型投资组合的投资回报率），但在模糊理论文献中往往被忽视；相关文献通常依赖较小的“玩具”数值（例如支撑集如 $[1, 10]$）。这个第二个示例还凸显了现有指标（如 $\mathbb{S}_{LGY15}$和 $\mathbb{S}_{VB13}$ ）在尺度不变性和有界性方面的关键缺陷。

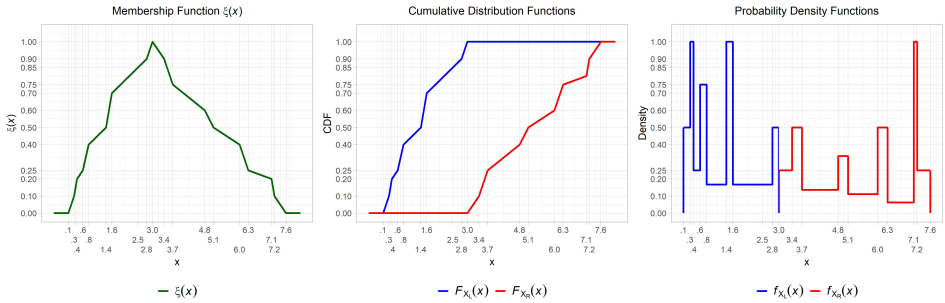


图1：示例3.1：左图：分段模糊数 ξ。中图：模糊数 ξ的左分量 ξ_l，解释为随机变量 X_L的累积分布函数。模糊数 ξ的右分量 ξ_r，解释为随机变量 X_R的生存函数 $1-$累积分布函数 $=\Pr\{X_R > x\}$。这些解释与（21）和（22）中确立的对应关系一致。右图：分别与 X_L 和 X_R相关的概率密度函数（概率密度函数），由隶属函数分量导出：$f_{X_L}(x) = {}^{d\xi_l}{}_{(x)\ dx}$ 和 $f_{X_R}(x) = {}^{d}{}_{(1-\xi_r(x))\ dx}$。正文示例3.1中给出了所讨论的 ξ 偏度系数的数值。

示例3.2 通过两个概率分布构造模糊数的可视化 在第一个情形中，我们构造一个代表中等程度正偏度的模糊数 ξ。我们使用两个贝塔分布 X_L和 X_R，它们分别定义在相邻的支撑集 $[100, 102]$ 和 $[102, 110]$ 上。二者具有相同的形状参数（$\alpha = 0.5$，$\beta = 2$），形成一致的生成逻辑，但支撑集宽度的差异会引发不对称性。

构造：

- $X_L \sim Beta(0.5, 2)$ 位于 $[100, 102]$.
- $X_R \sim Beta(0.5, 2)$ 在 $[102, 110]$.

图2（由我们的计算框架生成）展示了三阶段概念过程：

1. 顶部面板：X_L 和 X_R的概率密度函数（概率密度函数）。*2.* 中间面板：累积分布函数（累积分布函数），它们直接映射到 ξ的 α-截集。*3.* 底部面板：所得的模糊隶属度函数 $\xi(x)$。

数值分析： 以下列出了该模糊数计算所得的系数。

系数	值
$\mathbb{S}_{JKPT_1}$(0.1)(0.5)	0.461
$\mathbb{S}_{JKPT_1}$(0.25)(0.5)	0.235
$\mathbb{S}_{JKPT_2}$(0.5)	0.347
$\mathbb{S}_{VB13}$	0.298
$\mathbb{S}_{LGY15}$	1.96

在这种“小数”情形下，所有指标都正确地识别出正偏度。 $\mathbb{S}_{JKPT}$和 $\mathbb{S}_{VB13}$ 的数值大小相近，处于通常可解释的范围内。$\mathbb{S}_{LGY15}$ 的数值已经明显偏高，但还不至于离谱。

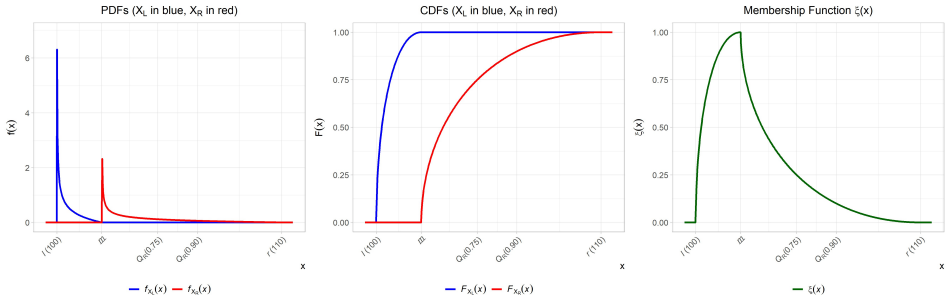


图2：示例3.2的可视化。（上）生成Beta分布的概率密度函数。（中）构成左、右斜率的累积分布函数。（下）所得的隶属函数 $\xi(x)$。x轴上的标注突出显示了核心边界，以及用于计算基于点的偏度的特定分位点。

例 3.3 极端偏度与尺度不变性 现实中的投资情境通常涉及较大的基数值，同时存在获得可观但不太可能的上行收益的潜力。考虑一笔预算或资产价值，其基数为100,000 个单位。我们建立一个模型，设定下行空间较窄（方差仅限于1 个单位），而上行的“柔软度”或潜在收益则大幅延伸（基数的 10% ，即10,000 个单位）。

我们将(X_L, X_R) 定义为：

- $X_L \sim Beta(0.5, 2)$ 在 $[100,000,\ 100,001]$.
- $X_R \sim Beta(0.1, 2)$ </style>在 $[100,001,\ 110,000]$ 上。

（注意： $shape1 = 0.1$ 会形成一条极长且纤细的尾部）。

这会产生一个模糊数，其向右延伸的幅度相较于其核非常大。这是对偏度系数的一项关键检验：该指标能否可靠地衡量形状（不对称性），还是会因支撑集的大小而失真？

数值分析：

系数	值
$\mathbb{S}_{JKPT_1}(0.10, 0.5)$	0.888
$\mathbb{S}_{JKPT_1}(0.25, 0.5)$	0.824
$\mathbb{S}_{JKPT_2}(0.5)$	0.870
$\mathbb{S}_{VB13}$	34.6
$\mathbb{S}_{LGY15}$	$150,067,745.0$

结果讨论：

1. 提议的指标（$\mathbb{S}_{JKPT}$）：我们的基于分位数的度量得到的值为≈ 0.82和0.87。这些值接近理论最大值1.0，正确地反映了极端的右偏几何形状。至关重要的是，它们仍然有界且可解释。

2. LGY15：$\mathbb{S}_{LGY15}$ 结果（$\approx 1.5 \times 10^8$）对于解释而言毫无意义。这种爆炸式增长之所以出现，是因为该定义涉及距均值的三次方距离（$\mathbb{E}[(x-\mu)^3]$），却缺少标准概率论中按标准差的立方（σ^3）进行的归一化除法。它不具有尺度不变性；随着支撑集数值增大（从*100*到*100,000*），该指标按三次方增长，从而无法用于比较不同量级的资产。

3. VB13：$\mathbb{S}_{VB13}$ 指标试图使用下行风险的三次方 $\omega(\xi)^3$进行归一化。然而，随着支撑集的跨度增大，在某些配置下，分子（基于三阶矩）比分母增长得更快。数值34.6 无法提供直观的语境——这个模糊数的偏斜程度是正态分布的两倍，还是三十倍？

本例表明，对于数值可能很大且支撑集可变的金融工程应用，只有像 $\mathbb{S}_{JKPT}$ 这样的尺度不变有界度量才能提供可靠、可比较的决策支持。

3.3 新偏度系数的性质

所提出的偏度系数 S_{JKPT_1} 和 S_{JKPT_2}（下文中我们用S_{JKPT} 统称二者）具有若干理想的数学性

质，确保其稳健性、可解释性以及对模糊数的适用性：

1. 范围： $S_{JKPT}(\xi)$ 位于区间 $[-1,1]$ 内。这是内层（$\mathbb{S}_{Inner、\ point}$ 或 $\mathbb{S}_{Inner、\ integral}$）和外层（$\mathbb{S}_{Outer、\ point}$ 或$\mathbb{S}_{Outer、\ integral}$）成分各自的理论范围均为 $[-1,1]$，以及加权因子 $v \in [0,1]$ 的直接结果。2. 对称性：如果 ξ 是完全对称的模糊数（即，对于所有 α，$m_\xi - \xi_d(\alpha) = \xi_u(\alpha) - m_\xi$），那么 $\mathbb{S}_{Inner、\ point}$（或 $\mathbb{S}_{Inner、\ integral}$）和 $\mathbb{S}_{Outer、\ point}$（或 $\mathbb{S}_{Outer、\ integral}$）均为零，从而 $S_{JKPT}(\xi) = 0$。3. 尺度不变性： $S_{JKPT}(\xi)$ 在正尺度变换下保持不变。对于满足 $k > 0$、 $S_{JKPT}(\xi') = S_{JKPT}(\xi)$ 的 $\xi' = k\xi$，同样如此。这也意味着偏度度量与测量单位无关。4. 位置不变性（平移不变性）： $S_{JKPT}(\xi)$ 在加法变换下保持不变。对于满足 $c \in \mathbb{R}$、 $S_{JKPT}(\xi') = S_{JKPT}(\xi)$ 的 $\xi' = \xi + c$，同样如此。这确保沿 x轴移动模糊数不会改变其偏度。5. 单调性（偏度方向）：

- $S_{JKPT}(\xi) > 0$ 表示右偏（正偏度）。
- $S_{JKPT}(\xi) < 0$ 表示左偏（负偏度）。
- 对称性意味着 $S_{JKPT}(\xi) = 0$。6. 分解与可解释性：该系数表示为两个组成部分的加权和，具有自然的可解释性：

- $\mathbb{S}_{Inner,\ point}(\xi)(\alpha)$（分别为$\mathbb{S}_{Inner,\ integral}(\xi)$）刻画了底层概率生成过程（$X_L$ 和 X_R）的内在偏度。这为理解该模糊数为何呈现特定形状提供了更深入的、组成部分层面的理解。对于其组成部分所隐含的分布为对称分布的模糊数，我们的系数为 0。

- $\mathbb{S}_{Outer,\ point}(\xi)(\alpha)$（分别为 $\mathbb{S}_{Outer,\ integral}(\xi)$）刻画了通过其 α-截面轮廓所观察到的模糊数整体形状的感知偏度。当内偏度可能为零但模糊数在视觉上呈现偏斜时，该组成部分对于评估视觉不对称性尤为重要。
- 加权因子 w 可以强调偏度的感知（外部）或生成（内部）方面，从而为应用和分析提供灵活性。

7. 计算效率：对于基于点的版本（$\mathbb{S}_{Inner,point}$ 和$\mathbb{S}_{Outer,point}$），该系数在计算上非常高效，涉及

仅需对 α-截集函数进行少量求值。这使其适用于实时应用或大规模仿真。即使是积分形式（$\mathbb{S}_{Outer,integral}$ 和$\mathbb{S}_{Inner,integral}$），也只涉及对$\alpha$的积分，而这对模糊数而言通常性态良好，且便于数值计算。

4 均值-方差-偏度投资组合优化

在不确定性下进行投资组合优化的理论概率框架，通常通过考虑投资组合收益分布的各阶矩来最大化投资者的效用。在此背景下，理性投资者通常偏好较高的期望收益（期望值，即一阶矩）、较低的风险（方差，即二阶矩）以及正偏（即三阶矩，表示偏好向上偏离）。

本节比较三种均值-方差-偏度模型的表现，其中不确定性由模糊数刻画；还比较了 [64] 和 [98]提出的两种代表性方法，这两种方法采用概率矩的模糊转译；以及我们提出的无参数方法。分析重点在于不同方法的投资组合构成，并考察相应的计算时间。

4.1 均值-方差-偏度模型

考虑一个包含 n 项资产的市场。
每项资产 i 的收益率均由模糊数 ξ_i建模，而$w_i \in \mathbb{R}$ 是决策变量，表示决策者分配给资产 i.的总资本比例。

假设 ξ_1、ξ_2、.....、ξ_n 均为模糊数，因此，投资组合的总收益也可表示为一个模糊数 $\bigoplus_{i\in 1...n} w_i\xi_i$. -（记号：$\bigoplus_{i\in 1...n}$ 是 $\sum_{i\in 1...n}$ 的模糊等价形式。）

与概率模型类似，均值 $\mathbb{E}[\bigoplus_{i\in 1...n} w_i\xi_i]$ 表示整个投资组合的期望收益，而总风险由 $\mathbb{V}[\bigoplus_{i\in 1...n} w_i\xi_i]$ 表征，总偏度则由 $\mathbb{S}[\bigoplus_{i\in 1...n} w_i\xi_i]$. 表征

我们比较的三种方法仅在对 $\mathbb{E}$，$\mathbb{V}$ 和 $\mathbb{S}$. 所作的假设定义上有所不同

基于这一前提，我们写出以下一般模型：

$$\begin{aligned}
&\max \mathbb{S}[w_1\xi_1 \oplus w_2\xi_2 \oplus \ldots \oplus w_n\xi_n] \\
&\text{subject to} \\
&\mathbb{E}[w_1\xi_1 \oplus w_2\xi_2 \oplus \ldots \oplus w_n\xi_n] \geq \rho \\
&\mathbb{V}[w_1\xi_1 \oplus w_2\xi_2 \oplus \ldots \oplus w_n\xi_n] \leq \beta \\
&w_1 + w_2 + \ldots + w_n = 1 \\
&0 \leq w_i \leq 1,\ i = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{34}$$

注释4.1

(34)的目标函数和约束条件本质上构成了一个模糊背包问题（参见：*[66], [65], [94], [10], [17], [95]*，其中选取了一些关于模糊背包问题的文献）。

注释4.2

在当前模型(34)中，我们的目标是在风险和期望收益约束下最大化偏度；值得注意的是，也可以定义其他目标：均值-方差-偏度模型的一种变体侧重于最小化方差（$\mathbb{V}$），同时确保偏度（$\mathbb{S}$）高于某一阈值（γ），且期望收益$\mathbb{E}$高于指定值 ρ. 。模型的另一种调整方式则侧重于最大化收益 $\mathbb{E}$，同时将投资组合的总风险（方差）维持在参数 β 以下，并使其偏度高于 γ。见图 *4*。

4.2 所采用的计算方法

近期的模糊投资组合优化趋势采用了各种复杂的算法，包括神经网络 [97]，、遗传算法 [84, 8, 54],以及其他先进的优化技术。尽管选择最优的优化方法并非易事，但本研究的主要目标是突出我们新颖的无参数偏度定义的性质和计算优势。因此，为确保清晰性并避免复杂优化器带来的混杂因素，我们采用了一种称为阈值约束投资组合优化（TCPO）的直接网格搜索算法。在投资组合选择方面，本研究采用了使用TCPO的方法，并设置了三种变体：最大化偏度（TCPO-S）、最大化均值（TCPO-M）和最小化方差（TCPO-V）。

网格搜索法系统地探索定义的参数空间，以确定最优配置 [75]。

我们的算法以 Python 实现，在分段网格结构中优化数值目标函数，其灵感来自大津等方法 [81]。该方法的一大优点是简单易懂，便于向非专业人士解释。尽管它并非常用于投资组合优化（更常见于超参数调优领域 [80]），但其结果可与更复杂的方法相媲美，例如序列最小二乘规划（SLSQP） [86], 或结合模糊模拟的遗传算法 [64]。此外，该方法能够在有效避免局部极小值的同时获得极高精度的结果，从而有望找到全局更优的解 [101]。这种方法还可以发挥编程语言的优势，并通过贝叶斯序贯优化等技术进一步改进 [2], ，不过这些内容超出了本文演示的范围。

图3展示了三资产TCPO-S的示意图。根据所考虑的资产数量以及对相应权重所需的采样，生成权重网格（左图）。这些权重按相应组别组合，资产由模糊数确定。随后推导投资组合和积的期望值、方差和偏度。根据所选投资组合变体，将三个参数中的两个设为阈值（例如，最低收益 ρ 和最大风险β）。然后对剩余参数进行优化——要么最大化（均值、偏度），要么最小化（风险）。

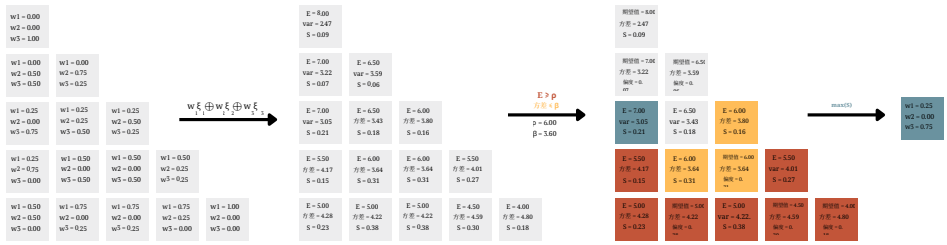


图 3：阈值约束投资组合优化示意图：一个由模糊数 ξ_1、 ξ_2 和 ξ_3 建模、包含三种资产的投资组合。第一步，计算网格中每个权重三元组的期望值、方差和偏度（此处未显示所有可能的权重三元组）。第二步，根据决策者的偏好固定三个参数中的两个。对于缩减子集，选取偏度最大的权重三元组。

4.3 比较分析

投资组合 1				
资产 x-坐标	x_1	x_2	x_3	
权重	**w1**	**w2**	**w3**	**时间（秒）**
$LGY15$	0.18	0.36	0.46	395
$VB13$	0.04	0.81	0.15	270
$JKPT_1$(0。10)	0.07	0.79	0.14	97
$JKPT_1$(0.25)	0.04	0.89	0.07	95
$JKPT_2$	0.04	0.89	0.07	727

投资组合 2				
资产 x-坐标	x_1	x_2	x_3	
权重	**w1**	**w2**	**w3**	**时间（秒）**
$LGY15$	0.13	0.41	0.46	397
$VB13$	0.00	0.83	0.17	263
$JKPT_1$(0.10)	0.08	0.76	0.16	96
$JKPT_1$(0.25)	0.04	0.76	0.20	95
$JKPT_2$	0.04	0.85	0.11	747

表1：采用网格搜索算法（100x100 网格）得到的资产配置比较，包括计算时间。三个资产由线性分段函数建模，其 α 坐标为 (0，0.25，1，0.75，0)。此处考虑的 X 坐标集如下：投资组合 1： x_1 =(2, 2.5, 4, 4.25, 10)、 x_2 = (102, 102.5, 104, 104.25, 110) 和 x_3 =(200, 225, 400, 425, 1000)；投资组合 2： x_1 =(2, 2.5, 5, 5.25, 10)、 x_2 =(102, 102.5, 105, 105.25, 110) 和 x_3 = (200, 225, 500, 525, 1000)。请注意， $\mathbb{S}_{VB13}$ 和$\mathbb{S}_{JKPT_1}$($v = 0.5$， $\alpha = 0.25$)的结果相近，而 $\mathbb{S}_{LGY15}$ 对平移（加 100）并缩放（乘以 100）后的资产赋予了高得多的权重 w_i ，这是因为该偏度系数在位置和尺度变换下并不具有不变性。

在表1中，我们比较了两种不同情景（投资组合 1和投资组合 2）下的投资组合配置与计算效率，采用100×100网格的网格搜索算法。每个投资组合包含三项资产，由线性分段模糊数建模。对于所有资产，定义隶属函数的 α 水平均为一致-

设置为 (0，0.25，1，0.75，0)，而其具体的 x 坐标详见表格。为进行比较，我们采用三种不同的偏度系数及其对应的均值和方差来评估资产配置：$\mathbb{S}_{LGY15}$ [64]、$\mathbb{S}_{VB13}$ [98]，以及我们提出的 $\mathbb{S}_{JKPT_1}(\alpha)(v)$（具体针对 $\alpha = 0.10$ 和 $\alpha = 0.25$，其中 $v = 0.5$），还有 $\mathbb{S}_{JKPT_2}$（其中 $v = 0.5$）。我们的程序采用无参数的经典可能性均值 $\mathbb{E}_{\mathcal{P}}$ (7) 计算期望收益（$\mathbb{E}$），并采用模糊性 $\omega(\xi)$(13) 计算方差（$\mathbb{V}$）算子，这与 [98] 所采用的方法一致。

最低收益和最大风险阈值分别设为 $\rho = 6.00$ 和 $\beta = 3.60$ 。

结果凸显了不同偏度定义在资产配置和计算效率方面的关键差异。

值得注意的是，$\mathbb{S}_{LGY15}$ 系数表现出一种显著倾向，即向绝对值较大的资产不成比例地配置更高的权重（w_i），例如两个投资组合中的资产3。这种行为的产生是因为 $\mathbb{S}_{LGY15}$ 系数与我们基于分位数的系数不同，它对数值的绝对值大小具有内在敏感性，并且在位置和尺度变换下不具不变性。这一特性可能导致数值范围较大的模糊数出现具有误导性的偏高偏度值，从而可能使优化器即使在方差受到约束时，仍将大量权重配置给高量级且往往高方差的资产。这表明 $\mathbb{S}_{LGY15}$ 可能产生与投资者在方差受控投资组合中的真实风险偏好不相符的配置。

相比之下，$\mathbb{S}_{VB13}$ 系数和我们提出的 $\mathbb{S}_{JKPT}$ 系数（所有变体）都能产生更为合理且稳健的权重分布。对于给定的资产和约束，这些系数始终强烈偏好资产2，而资产2仅仅是资产1的平移版本。这表明，这些系数能够正确地将资产2的潜在风险—收益—偏度特征解读为优于资产1（由于平移），而不会受到资产3较大量级的不成比例影响；资产3在给定偏度特征下往往呈现出过高的方差水平。尽管在这些具体示例中，这会导致集中型投资组合而非高度分散的投资组合，但这种集中是在既定风险和收益阈值约束下最大化偏度的直接且合理的结果，符合稳健偏度度量的预期行为。

此外，如图4所示，我们的系数在计算性能上始终更胜一筹。$\mathbb{S}_{JKPT_1}(\alpha)(v)$相比 $\mathbb{S}_{LGY15}$ 和 $\mathbb{S}_{VB13}$可显著节省时间，且随着资产数量增加，时间增长趋势近乎对数级。这使我们的基于点的系数特别适合实时应用和大规模投资组合优化问题，尤其是在计算效率至关重要的情况下。

此外，如图4所示，我们的系数在计算性能上始终更胜一筹。$\mathbb{S}_{JKPT_2}(v)$($\mathbb{S}_{JKPT_1}$)相比α和v可显著节省时间，且随着资产数量增加，时间增长趋势近乎对数级。这使我们的基于点的系数特别适合实时应用和大规模投资组合优化问题，尤其是在计算效率至关重要的情况下。

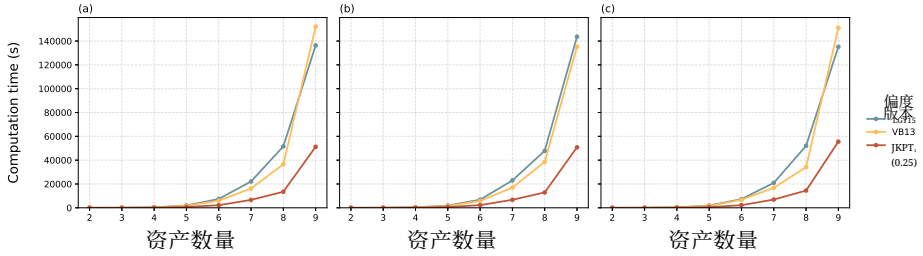


图4：投资组合优化计算时间（秒）与问题规模的关系，其中子图 (a)、(b) 和 (c) 分别对应模型 (34) 的三个不同版本，见注释4.2：(a) 最小化方差，(b) 最大化偏度，或 (c) 最大化期望值。不同颜色表示不同的偏度定义：$\mathbb{S}_{LGY15}$ ([64]) 为蓝色，$\mathbb{S}_{VB13}$ ([98]) 为黄色，我们的 $\mathbb{S}_{JKPT_1(0.5)(0.25)}$ 为红色。

5 结论

本文为模糊数提出了一种新颖的无参数、基于分位数的偏度度量，填补了现有文献中的一个重要方法论空白。我们将模糊数的左、右隶属函数分量分别解释为累积分布函数和生存函数，从而为模糊数奠定了严谨的概率基础。这一独特方法使得能够将 α-截集直接且稳健地解释为广义分位数，从而突破了当前普遍采用、但往往缺乏理论依据的做法，即在基于矩的偏度公式中直接以概率密度函数替代模糊隶属函数。

所提出的 $\mathbb{S}_{JKPT_1}$和 $\mathbb{S}_{JKPT_2}$系数通过整合两个互补的组成部分而独具特色：“内在”偏度分量（$\mathbb{S}_{Inner,\ point}$ 或$\mathbb{S}_{Inner,\ integral}$），用于量化基础概率生成过程（$X_L$ 和 X_R）固有的不对称性；以及“外在”偏度分量（$\mathbb{S}_{Outer,\ point}$ 或 $\mathbb{S}_{Outer,\ integral}$），用于捕捉模糊数整体轮廓呈现出的偏度。这种双重

视角结合灵活的加权因子 $v \in [0,1]$，为理解模糊量的不对称性提供了前所未有的深度与细腻洞察。

我们证明了新系数具有若干理想的数学性质，这些性质对于稳健应用至关重要。其中包括 $[-1,1]$ 的有界范围、对尺度和位置变换均具有不变性、对称性（对于完全对称的模糊数，结果为零），以及单调性（能够正确识别偏度的方向）。此外，基于分位数的特性使其本质上能够抵御离群值，而离群值是基于矩的系数常见的挑战。

我们在模糊均值-方差-偏度投资组合优化框架中展示了该系数的实用价值和显著的计算效率。通过采用阈值约束投资组合优化（TCPO）进行数值实验，我们的方法始终能够给出合理的投资组合配置，且不会受到误导性尺度效应的影响。尤为重要的是，基于点的 $\mathbb{S}_{JKPT_1}$ 变体与两个具有代表性的基于矩的模糊偏度系数（$\mathbb{S}_{LGY15}$ [64] 和 $\mathbb{S}_{VB13}$ [98]）相比，展现出更快的计算速度；随着资产数量增加，这一优势尤为明显（图 4）。这种计算优势使我们的系数非常适用于实时应用和大规模问题。分析还揭示了 $\mathbb{S}_{LGY15}$ 系数的关键缺陷：由于它不具备位置和尺度不变性，可能导致不合理的资产配置，过度偏向数值较大且可能风险较高的资产。

本研究为处于不确定性环境中的决策者提供了一种稳健、易于解释且计算效率高的工具，尤其适用于必须深入理解高阶风险偏好的金融领域。本研究展示了一种理论严谨且具有概率基础的模糊偏度方法如何在金融工程中带来更优的实际效果。

未来研究可首先聚焦于探索在不同应用场景下 $\mathbb{S}_{JKPT_1}(\alpha)(v)$的加权因子 v 与分位数水平 α 的最优选择，这可能涉及敏感性分析或机器学习方法。其次，研究将这些新系数应用于投资组合优化之外的其他模糊决策领域，例如供应链中的风险评估或医学诊断，可进一步展示其通用性。第三，对特定类别模糊数（源自不同概率分布，和/或与各种情景相关的直方图）的 $\mathbb{S}_{JKPT_1}$ 与 $\mathbb{S}_{JKPT_2}$ 行为进行解析比较，可提供更深入的理论洞见。最后，

将这些偏度系数整合到更复杂的投资组合优化算法中，可进一步增强其实际影响。

作者贡献

Jan Schneider: 提出新型模糊数构造和新型偏度系数的概念，开发方法，并主要负责撰写（准备初稿、审阅和编辑）。

Kaja Bilińska: 开发并实施阈值约束投资组合优化（TCPO）方法，开发软件（使用 Python 编码）、整理数据并进行可视化（生成图表），测试模型并全面管理项目。

Paul Schneider: 为金融和经济学背景部分作出贡献，进行形式化分析，并对引言部分作出重要贡献（撰写和编辑）。

Tomasz Szandała: 在项目概念构思初期作出贡献，参与软件开发并负责管理参考文献。

致谢

作者谨此感谢 HubX 团队开发的大语言模型（LLM）Gemini 在本研究多个方面提供的协助。这些支持包括完善理论阐述、提升数学推导的清晰度、改进稿件的整体结构和语言质量，以及为算法实现和代码验证提供技术协助。作者对本文内容及其准确性承担全部责任。

参考文献

[1] J.M. Adamo. 模糊决策树. 《模糊集与系统》, 4(3):207– 219, 1980.

[2] Takuya Akiba、Shotaro Sano、Toshihiko Yanase、Takeru Ohta 和 Masanori Koyama。Optuna：新一代超参数优化框架。载于第*25*届 *ACM SIGKDD* 知识发现与数据挖掘国际会议论文集

国际会议，第2623–2631页，2019年。[3]Torben Andersen、Tim Bollerslev、Francis Diebold 和 Paul Labys。已实现波动率的建模与预测。《计量经济学》，71(2):579–625，2003年。[4] Krassimir T Atanassov。直觉模糊集。《模糊集与系统》，20(1):87–96，1986年。[5] Krassimir T Atanassov。关于直觉模糊集的进一步研究。《模糊集与系统》，33(1):37–45，1989年。[6]Sjoerd M Baas 和 Huibert Kwakernaak。利用模糊集对多属性备选方案进行评价与排序。《Automatica》，13(1):47–58，1977年。[7] G. Bakshi、N. Kapadia 和 D. Madan。股票收益特征、偏度规律与个股期权的差异化定价。《金融研究评论》，16(1):101–143，2003年。[8] Ameet Kumar Banerjee、HK Pradhan、Ahmet Sensoy、Frank Fabozzi 和 Biplab Mahapatra。结合模糊TODIM、遗传算法和多准则约束的稳健投资组合优化。《运筹学研究年刊》，337(1):1–22，2024年。[9]Sasan Barak、Masoud Abessi 和 Mohammad Modarres。模糊换手率机会约束投资组合模型。《欧洲运筹学杂志》，228(1):141–147，2013年。[10] Esra Bas。利用代理约束规范化规则对模糊多维0-1背包模型进行代理松弛，并提出一种多属性项目组合选择方法。《人工智能工程应用》，25(5):958–970，2012年。[11] José D Bermúdez、Ana Corberán-Vallet 和 Enriqueta Vercher。多变量指数平滑：一种基于仿真的贝叶斯预测方法。《数学与计算机仿真》，79(5):1761–1769，2009年。[12]Rupak Bhattacharyya、Mohuya B Kar、Samarjit Kar 和 Dwijesh Dutta Majumder。基于可信性理论方法的均值-熵-偏度模糊投资组合选择。《计算机科学讲义》

ence（包括子系列人工智能讲义与生物信息学讲义），第603–608页，2009。[13] Oleg Bondarenko。方差交易与方差风险市场价格。《计量经济学杂志》，180：81–97，2014。[14] Arthur Lyon Bowley。统计学原理。King's Science丛书第8号。King，1926。[15] Matteo Brunelli与Jozsef Mezei。模糊数的排序方法有何不同？一项数值研究。《近似推理国际期刊》，54（5）：627–639，2013。[16] Harvey Campbell与Siddique Akhtar。资产定价检验中的条件偏度。《金融学杂志》，55：1263–1295，2000。[17] Ping-Teng Chang与Jung-Hua Lee。面向项目选择的模糊数据包络分析与背包公式化集成模型。《计算机与运筹研究》，39（1）：112–125，2012。[18] Wei Chang。具有三角隶属函数的模糊效用排序。《政策分析与系统国际会议论文集》，第263–272页，1981。[19] G. Chen、Z. Luo、X. Liao、X. Yu与L. Yang。基于直觉模糊优化的均值—方差—偏度模糊投资组合选择模型。载于《工程学进展》，第15卷，第2062–2066页，2011。[20] Guohua Chen与Xiaolian Liao。可信性均值—方差—偏度投资组合选择模型。载于*2010*年第二届数据库技术与应用国际研讨会，第1–4页。IEEE，2010。[21] D. Crainich、L. Eeckhoudt与A. Trannoy。即便（混合）风险偏好者也是谨慎的。《美国经济评论》，103（4）：1529–1535，2013。[22] Zhifeng Dai、Huiting Zhou、Jie Kang与Fenghua Wen。油价收益率的偏度与股票溢价可预测性。《能源经济学》，94：105069，2021。[23] Amrit Das、Anirban Dutta、Uttam Kumar Bera等。一种五边形二型模糊变量去模糊化模型及其在人道主义供应链中的应用。《决策分析期刊》，8：100303，2023。

[24] Madhushree Das、Arindam Roy、Samir Maity与Samarjit Kar。一种用于求解二型模糊变量下可持续四维旅行商问题的量子启发蚁群优化。先进工程信息学，55：101816，2023。[25] X. Deng与X. Pan。基于直觉模糊优化的多目标投资组合研究与比较。计算机与工业工程，124：411–421，2018。[26] Thierry Denœux。使用认知随机模糊集对模糊与不确定证据进行推理：一般框架与实用模型。《模糊集与系统》，453：1–36，2023。[27] B Bharathi Devi与VVS Sarma。由直方图估计模糊隶属度。*Information Sciences*，35（1）：43–59，1985。[28] Junior Dijkman与Nicolaas Van Haeringen。模糊数。数学分析与应用杂志，92（2）：301–341，1983。[29] Daniel Dubois与Harry Prade。在可能性理论框架下的模糊数排序。*Information Sciences*，30（3）：183–224，1983。[30] Didier Dubois。可能性理论与统计推理。《计算统计与数据分析》，51：47–69，2006。[31] Didier Dubois与Henri Prade。可能性理论、概率论与多值逻辑：一项澄清，第32卷。施普林格，2001。[32] S. Ebert。高阶风险偏好的矩刻画。理论与决策，74（2）：267–284，2013。[33] Sebastian Ebert。高阶风险偏好的矩刻画。理论与决策，74：267–284，2013。[34] Louis Eeckhoudt与Schlesinger Harris。将风险置于其应有的位置。《美国经济评论》，96：280–289，2006。[35] Larry Epstein与Martin Schneider。模糊性、信息质量与资产定价。金融学杂志，63：197–228，2008。[36] Louis Aimé Fono、Jules Sadefo-Kamdem与Christian Tassak。用于模糊投资组合选择的矩与半矩。保险：数学与经济学，51（3）：517–530，2012。

[37] Robert Fullér 和 Péter Majlender。模糊数的加权可能性均值与方差。《模糊集与系统》，136(3):363– 374，2003年。[38] Itzhak Gilboa。《不确定性决策理论》。剑桥图书。剑桥大学出版社，2009年。[39] Itzhak Gilboa 和 David Schmeidler。先验不唯一时的最大最小期望效用。《数学经济学杂志》，18:141–153，1989年。[40] Roy H Goetschel Jr. 模糊飞镖表示法。《模糊集与系统》，89(1):77–105，1997年。[41] Richard A Groeneveld 和 Glen Meeden。偏度与峰度的测量。《英国皇家统计学会杂志D辑：统计学家》，33(4):391–399，1984年。[42] Qiupeng Gu 和 Zuxing Xuan。一种基于可能性理论的模糊数排序新方法。《计算与应用数学杂志》，309:674–682，2017年。[43] P. Gupta、M.K. Mehlawat、S.Yadav 和 A. Kumar。一种利用熵和高阶矩进行直觉模糊投资组合优化的多项式目标规划方法。《应用软计算杂志》，85，2019年。[44]Gholamreza Hesamian 和 Mohamad Ghasem Akbari。一种用于闭区间和模糊数排序的偏好指数。《国际不确定性、模糊性与知识型系统杂志》，25(05):741–757，2017年。[45] Gholamreza Hesamian 和 Farid Bahrami。面向可信性理论的模糊数排序偏好指数。《伊朗模糊系统杂志》，14(6):103–117，2017年。[46] Dominik Hose 和 Michael F. Hanss。可能性演算：概率演算的一种保守对应方法。《机械系统与信号处理》，133，2019年。[47] Sheikh Ahmed Hossain 和 Rupak Bhattacharyya。基于可能性峰度的投资组合选择。载于《不确定性的多个方面及其应用：ICFUA，加尔各答，印度，2013年12月》，第303–313页。施普林格，2015年。

[48] Xiaoxia Huang。模糊投资组合选择的均值-半方差模型。《计算与应用数学杂志》，217(1):1–8，2008年。[49] Masahiro Inuiguchi 和 Jaroslav Ramık。可能性线性规划：模糊数学规划简述及其与投资组合选择问题中随机规划的比较。《模糊集与系统》，111(1):3–28，2000年。[50] Masahiro Inuiguchi、Masatoshi Sakawa 和 Satoshi Ushiro。基于均值绝对偏差的模糊线性回归分析：通过水平集从数据中自动推导。在《第六届国际模糊系统会议论文集》第2卷中，第829–834页。IEEE，1997年。[51] Adam Kasperski 和 Paweł Zieliński。可能性优化问题的软鲁棒解。《模糊集与系统》，422:130–148，2021年。[52] Truman L Kelley。一种新的离散程度度量。《美国统计协会季刊》，17(134):743–749，1921年。[53] Etienne Kerre。模糊集理论在心电诊断中的应用。《决策分析中的近似推理》，第277–282页，1982年。[54] Ahmad Zaman Khan、Pankaj Gupta 和 Mukesh Kumar Mehlawat。一种运用技术分析进行投资组合选择的模糊规则系统。《IEEE模糊系统汇刊》，32(9):4861–4875，2024年。[55] George J Klir 和 Bo Yuan。《模糊集与模糊逻辑：理论与应用》。Prentice Hall PTR，1995年。[56] George J Klir 和 Bo Yuan。《模糊集与模糊逻辑：理论与应用》，第32卷。Prentice Hall P T R，新泽西州上萨德尔河07458，1996年。[57] Roman Kozhan、Anthony Neuberger 和 Paul Schneider。股票指数市场中的偏斜风险溢价。《金融研究评论》，26:2174–2203，2013年。[58] A. Kraus 和 R.H. Litzenberger。最优杠杆的状态偏好模型。《金融学杂志》，28(4):911–922，1973年。

[59] Alan Kraus 和 Robert Litzenberger. 偏度偏好与风险资产估值. 金融学杂志, 31:1085–1100, 1976.[60]Dorota Kuchta, Jerzy Grobelny, Rafał Michalski, 和 Jan Schnei- der. 项目估算不确定性的向量和三角表示：性别对可用性的影响. 计算机科学讲义（包括人工智能讲义和生物信息学讲义子系列）, 12747 LNCS:473 – 485, 2021.[61] Hugues Langlois. 衡量偏度溢价. 金融经济学杂志, 135(2):399–424, 2020.[62] Chen Li, Yulei Wu, Zhonghua Lu, Jue Wang, 和 Yonghong Hu. 面向大规模证券数据、收益为模糊随机变量的多期多目标投资组合选择模型. 《*IEEE*模糊系统汇刊》, 29(1):59–74, 2020.[63] Hong-Quan Li 和 Zhi-Hong Yi. 不确定性下基于连贯投资者预期的投资组合选择. 应用专家系统, 133:49–58, 2019.[64] Xiang Li, Sini Guo, 和 Lean Yu. 模糊数的偏度及其在投资组合选择中的应用. 《*IEEE*模糊系统汇刊》, 23(6):2135–2143, 2015.[65] Feng-Tse Lin. 使用遗传算法求解具有不精确权重系数的背包问题. 《欧洲运筹学杂志》, 185(1):133–145, 2008.[66] Feng-Tse Lin 和 Jing-Shing Yao. 在背包问题中使用模糊数. 《欧洲运筹学杂志》, 135(1):158–176, 2001.[67] Baoding Liu 和 Yian-Kui Liu. 模糊变量的期望值与模糊期望值模型. 《*IEEE*模糊系统汇刊》, 10(4):445 – 450, 2002.[68] Yong-Jun Liu, Wei-Guo Zhang, 和 Wei-Jun Xu. 基于多准则的模糊多期投资组合选择优化模型. *Automatica*, 48(12):3042–3053, 2012.[69] Yong-Jun Liu, Wei-Guo Zhang, 和 Xue-Jin Zhao. 具有折现交易成本的模糊多期投资组合选择模型. 软计算, 22(1):177–193, 2018.

[70] Zongmin Ma 和 Li Yan. 基于模糊集的数据建模与查询：系统性综述. 《模糊集与系统》, 445:147–183, 2022.[71] Harry M. Markowitz. 投资组合选择. 金融学杂志, 7(1):77 – 91, 1952年.[72] M.K. Mehlawat, P. Gupta, 和 A.Z. Khan. 可信性环境下使用相干模糊数进行多目标投资组合优化. 国际智能系统杂志, 36(4):1560–1594, 2021.[73] Carmen Menezes, Charles Geiss, 和 John Tressler. 增加下行风险. 美国经济评论, 70(5):921–932, 1980.[74]Xiaolian Meng 和 Jiajun Huang. 基于模糊高阶矩的投资组合选择模型研究. 载于*2020*年中国控制与决策会议（*CCDC*）, 第4667–4672页。IEEE, 2020.[75]Jay I Myung, Daniel R Cavagnaro, 和 Mark A Pitt. 自适应设计优化教程 . 数学心理学杂志 , 57(3-4):53–67, 2013.[76] Kazuo Nakamura. 作为决策基础的模糊效用集上的偏好关系. 《模糊集与系统》, 20(2):147–162, 1986.[77]A. Neuberger. 实现偏度. 《金融研究评论》, 25(11):3424–3455, 2012.[78] A. Neuberger 和 R. Payne. 股票市场在长期期限上的偏度. 《金融研究评论》, 34(3):1572–1616, 2021.[79] Anthony Neuberger. 实现偏度. 《金融研究评论》, 25:3423–3455, 2012.[80] Peter Nystrup, Erik Lindström, 和 Henrik Madsen. 投资组合选择的超参数优化. 金融数据科学杂志, 2(3):40–54, 2020.[81] Nobuyuki Otsu 等. 基于灰度直方图的阈值选择方法. *Automatica*, 11(285-296):23–27, 1975.[82] Jagdish Kumar Pahade 和 Manoj Jha. 梯形模糊变量的可信性方差与偏度及均值–方差–偏度

投资组合选择模型。应用数学成果，11:100159，2021。[83] 卡尔·皮尔逊。对进化数学理论的贡献。ii. 均质材料中的偏斜变异。伦敦皇家学会哲学汇刊。*A*，186:343–414，1895。[84] Mehrdad Rasoulzadeh、Seyyed Ahmad Edalatpanah、Mohammad Fallah和Seyyed Esmaeil Najafi。直觉模糊集下最优股票投资组合选择的混合模型。《伊朗模糊系统杂志》，21(2):161–179，2024。[85] Rubén Saborido、Ana B Ruiz、José D Bermúdez、Enriqueta Vercher和Mariano Luque。用于模糊投资组合选择的进化多目标优化算法。应用软计算，39:48–63，2016。[86] Klaus Schittkowski。用通用序列二次规划法求解约束非线性最小二乘问题。载于数学优化趋势：第*4*届法德优化会议，第295–309页。施普林格，1988。[87] Jan Schneider和Dorota Kuchta。以阶梯型模糊区间为特征的项目的模糊资本预算。多值逻辑与软计算期刊，30，2018。[88] Jan Schneider、Dorota Kuchta和Rafał Michalski。不确定性的向量可视化：对传统模糊方法的补充及其在项目管理中的应用。应用软计算，137，2023。[89] P. Schneider和F. Trojani。散度与不确定性价格。金融计量经济学期刊，17(3):341–396，2019。[90] P. Schneider、C. Wagner和J. Zechner。低风险异象？《金融学杂志》，75(5):2673–2718，2020。[91] Paul Schneider和Fabio Trojani。散度与不确定性价格。金融计量经济学期刊，17:341–396，2018。[92] Nasser Shahsavari-Pour、Azim Heydari、Mojtaba Kazemi和Mehdi Karami。一种基于不同区域模糊数的模糊数排序新方法。《国际运筹研究数学杂志》，11(4):544–566，2017。

[93] Nasser Shahsavari-Pour、Reza Tavakkoli-Moghaddam、Hamed Moham- madi Andargoli、Mohammad Hossein Abolhasani-Ashkezari和Mojtaba Kazemi。一种基于斜边集的模糊数排序新方法。《国际运筹研究数学杂志》，10(3):370–398，2017。[94] Sadi-Nezhad Soheil、Sadi-Nezhad Soheil和Kaveh Khalili-DamghaniKaveh Khalili。0-1模糊规划在最优项目选择中的应用。世界科学、工程与技术学会，64:335–339，2010。[95] Madjid Tavana、Kaveh Khalili-Damghani和Amir-Reza Abtahi。采用进化算法的项目组合选择模糊多维多重选择背包模型。《运筹学年鉴》，206(1):449–483，2013。[96] Stefan Trautmann和Gijs Kuilen。高阶风险态度：实验性证据综述。《欧洲经济评论》，103:108–124，2018。[97]Suresh Kumar Veluchamy、Karthikeyan Lakshmanan、S Nalini、KR Naghul Pranav和Ravikumar Sethuraman。利用模糊神经网络与带莱维飞行的鹈鹕优化算法最小化投资组合风险。《网络与空间经济学》，25(1):249–283，2025。[98]Enriqueta Vercher和Jose D Bermudez。用于有效投资组合选择的可能性均值-下行风险-偏度模型。《*IEEE*模糊系统汇刊》，21(3):585–595，2012。[99] Reinhard Viertl。模糊数据的统计方法。约翰·威立父子出版公司，2011。[100] W. R. von Zwet。凸变换：偏度与峰度的新方法，第3–11页。施普林格纽约，纽约州纽约，2012。[101] David J Wales和Jonathan PK Doye。通过盆地跳跃进行全局优化及含至多110个原子的伦纳德-琼斯团簇的最低能量结构。《物理化学杂志*A*》，101(28):5111–5116，1997。[102] George Whitmore。偏度偏好理论。《商业管理杂志》，6:13–20，1975。

[103] Weijun Xu、Guifang Liu、Hongyi Li 和 Weiqiang Luo。关于具有偏度风险和人员配置的项目组合模型的研究。*InternationalJournal of Fuzzy Systems*，19(6):2033–2047，2017。[104] Sanjay Yadav、Arun Kumar、Mukesh Kumar Mehlawat、Pankaj Gupta 和 Vincent Charles。在直觉模糊框架下的多目标可持续金融投资组合选择方法。*Information Sciences*，646:119379，2023。[105] Ronald Yager 和洛特菲·扎德。智能系统中模糊逻辑应用简介，第165卷。Springer Science & Business Media，2012。[106] Ronald R Yager。单位区间上模糊子集的排序。第*17*届*IEEE*国际决策与控制会议论文集，第1435–1437页，1979。[107] Ronald R Yager。关于如何在模糊子集之间进行选择。*Kybernetes*，9(2):151–154，1980。[108] Ronald R Yager。单位区间上模糊子集的排序程序。*Information Sciences*，24(2):143–161，1981。[109] BORIS Yatsalo 和 LUIS Martinez。一种基于模糊可接受性分析的模糊数排序新方法。知识工程与决策中的不确定性建模——第*12*届*FLINS*国际会议（*FLINS 2016*）论文集，第75–80页，2016。[110] Wei Yue、Yuping Wang 和 Cai Dai。一种用于考虑交易成本和流动性的多目标模糊投资组合选择模型的进化算法。*Mathematical Problems in Engineering*，2015(1):569415，2015。[111] Lotfi. Zadeh。模糊集作为可能性理论的基础。《模糊集与系统》，1(1):3–28，1978。[112] Lotfi A. Zadeh。模糊集作为可能性理论的基础。《模糊集与系统》，100:9–34，1999。[113] Lotfi Asker Zadeh。模糊集。*Information and control*，8(3):338–353，1965。

[114] Wei-Guo Zhang 和 Zan-Kan Nie。关于模糊数的可能性方差。载于粗糙集、模糊集、数据挖掘与粒计算：第*9*届国际会议（*RSFDGrC 2003*），中国重庆，*2003*年*5*月*26*日至*29*日，论文集第*9*卷，第398–402页。施普林格，2003。[115] Yuanyuan Zhang、Xiang Li 和 Sini Guo。马科维茨均值–方差框架下的投资组合选择问题：文献综述。《模糊优化与决策》，17:125–158，2018。[116] Jian Zhou、Fan Yang 和 Ke Wang。LR模糊数的模糊算术及其在模糊规划中的应用。《智能与模糊系统杂志》，30(1):71–87，2015。