arXiv:2602.20184v1 [math.AT] 20 Feb 2026

e-族上的亚当斯微分

李润吉和李雨轩

摘要。 新末日猜想 [Min95] 指出，对于任意非零 Sq^0-族，该族中只有有限多项能存活到 E_∞-页。在 Adams 1 与2-线上，对应于 Hopf 不变量问题和 Kervaire 不变量问题的该猜想，由 Adams [Ada60]与 Hill-Hopkins-Ravenel [HHR16], 分别解决。在 Adams3-线上，Burklund 与 Xu [BX25] 建立了 h_j^3 族上的一族非平凡微分，并特别发展了 Burklund-Xu谱序列，以研究其靶在 Adams E_2-页上的非平凡性。

本文中，我们利用 Burklund-Xu谱序列证明 Adams 6-线上一个乘积的非平凡性。结合 Bruner公式 [Bru84，BMMS86], ，我们证明了 e-族在 Adams 4-线上的新末日猜想。

目录

1. 引言 2. Burklund-Xu谱序列 3. 1
Cartan-Eilenberg谱序列 参考文献 4
6
10

1. 引言

计算球面的稳定同伦群是稳定同伦论中的核心问题。为此发展出的各种方法中，Adams谱序列是最强大的工具之一。

$$E_2^{s,t} = \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \Rightarrow \pi_{t-s}(\mathbb{S}_2)$$

这里 $\mathcal{A}$ 表示模2 Steenrod代数， s 表示同调次数， t 表示内次数，而 $\mathbb{S}_2$表示2完备球谱。

在 Adams E_2-页上，我们有代数Steenrod运算（参见 [BMMS86]第四至第六章），它们作用于 Steenrod代数的上同调。特别地，存在一个运算

$$\mathrm{Sq}^0 : \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \to \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,2t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$$

给定一个元素 $x \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$，我们通过迭代 Sq^0 得到一个无穷的 Sq^0-族，其成员为 $\{x, \mathrm{Sq}^0(x), \mathrm{Sq}^0(\mathrm{Sq}^0(x)) \dots\}$。如果一个 Sq^0-族中的所有成员都非零，我们就称该族是非平凡的。对亚当斯谱序列的计算导出了以下猜想:

猜想1.1 （新末日猜想， [Min95]）：对于 *Adams* 谱序列的 ^{0}-族 $\{a_i\}_{i\geq 0}$ 上的任意非平凡族，在 E_2-页上只有有限多个类能存活到 E_∞-页。

给定一个 Sq^0-族，其中只有有限多个项存活下来，我们可以进一步研究这些项如何消亡。目前的计算导出了以下猜想:

猜想1.2 （一致性末日猜想， [IWX22、BX25]）：对于 *Adams* Sq^0-族$\{a_i\}_{i\geq 0}$ 上的任意非平凡族，在 E_2-页上存在一个非平凡的 Sq^0-族 $\{b_i\}_{i\geq 0}$、一个整数 $k \geq 2$ 和一个 c 位于 *Adams* E_2-页上的类，使得 $d_k(a_i) = c \cdot b_i$ 对于除有限多个 i之外的所有项均成立。

在 Adams 1线 上，唯一的类是 $h_i \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{1,2^i}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ $i \geq 0$ （见 [Ada58]）。类 h_i存活当且仅当存在一个次数为 $2^i - 1$ 的霍普夫不变量一映射。对于这一族，Adams 解决了该猜想:

定理 1.3 (Adams, [Ada60])。 $d_2(h_j) = h_0 h_{j-1}^2$，当 $j \geq 4$。

其余的类 h_i、$0 \leq i \leq 3$ 都是永久循环，它们分别对应于 $\pi_*(\mathbb{S}_2)$ 中的元素 2、η、ν、σ。这些元素的霍普夫不变量为 1。相应的流形可取为S^0、S^1、S^3、S^7，并分别配备实、复、四元数和八元数框架。

再次由 Adams [Ada58], 可知，Adams 2-线由 h_ih_j 在关系 $h_ih_{i+1}=0$下生成。大多数 Sq^0-族都有非平凡微分，这可由定理 1.3 和莱布尼茨法则推得。唯一剩下的族是 h_j^2。h_j^2 的存活等价于存在一个维数为 $2^{j+1}-2$、Kervaire 不变量为 1 的带框流形。关于 Adams 2-线的新末日猜想已由 Hill-Hopkins-Ravenel 解决:

定理 1.4 (Hill-Hopkins-Ravenel, [HHR16])。类 h_j^2 支撑非平凡的 *Adams* 微分，针对 $j\geq 7$。

然而，h_j^2 所支撑的显式微分仍然未知。

其余元素 h_i^2，$0\leq i\leq 6$ 都是永久循环。（[BMT70] 对于 $i=4$，[BJM84，Xu16] 对于$i=5$，[LWX24] 对于 $i=6$。）相应的流形恰好是对应于 h_i的流形的平方，其中 $i\leq 3$。当 $i=4$时，Jones 在 [Jon78], 中构造了显式流形；而对于更大的 i，目前尚无已知的流形对应于 h_i^2。

Adams 3-线由 $c_j\in \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{3,2^j\cdot 11}$、$(\mathbb{F}_2,\ \mathbb{F}_2)$ $j\geq 0$ 以及 h_i 的乘积生成，满足以下关系（见 [Wan67]）

$$h_ih_{i+1}=0,\ h_ih_{i+2}^2=0,\ h_i^2h_{i+2}=h_{i+1}^3.$$

在这一方向上，新末日猜想仍未解决。两个非平凡情形 c_j，h_j^3 已由 Bruner 和 Burklund-Xu 解决:

先回顾 Bruner公式：我们定义 $v(n)=8a+2^b$，若 $v_2(n+1)=4a+b$ 且 $0\leq b\leq 3$。那么，$\mathbb{RP}^n$ 的 n-胞腔的附着映射可通过 $\mathbb{RP}^{n-v(n)}$ 分解，但不能通过 $\mathbb{RP}^{n-v(n)-1}$ 分解。

若元素 c，d_1，d_2 分别处于滤过 s，$s+r_1$，$s+r_2$，则

$$d_*(c)=d_1\dot{+}d_2$$

这意味着:

$$\begin{aligned} d_{r_1}(c)&=d_1 && \text{if } r_1<r_2,\\ d_r(c)&=d_1+d_2 && \text{if } r=r_1=r_2,\\ d_{r_2}(c)&=d_2 && \text{if } r_1>r_2. \end{aligned}$$

定理 1.5 (Bruner公式，[Bru84，BMMS86])。设 $x\in E^{s,\ t-s}_{r}$。那么

$$d_*Sq^ix=Sq^{i+r-1}d_rx\dot{+}\begin{cases}0 & v>k+1 \text{ or } 2r-2<v<k\\ axd_rx & v=k+1\\ aSq^{i+v}x & v=k \text{ or } (v<k \text{ and } v\leq 10)\end{cases}$$

其中 $k=s-i$、$v=v\,(t-i)$，而 $a\in E^{*,\ *}_{\infty}$在 $\pi_{v-1}\mathbb{S}$ 中检测到 *Im* J 的一个生成元。

将Bruner公式特化到 $x=c_j$ 与 $i=0$，我们得到 $d_2(c_j)=h_0f_{j-1}\neq 0$，对于 $j\geq 2$。（参见 [Lin08，Che11] 关于类 h_0f_{j-1}的非平凡性。）其余的类 c_0，c_1 是永久循环。

定理 1.6（Isaksen-Wang-Xu [IWX23] 对于 $j=5$，Burklund-Xu [BX25] 对于 $j\geq 6$）。

$$d_4(h_j^3)=h_0^3g_{j-2}\ \textit{for all}\ j\geq 5$$

此处 $g_j\in \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{4,2^{j+2}\cdot 3}$，$(\mathbb{F}_2,\ \mathbb{F}_2)$ $j\geq 1$ 构成一个 Sq^0-族，位于 Adams 4 线上。其余元素h_i^3 是永久循环，对于 $i\leq 4$。（参见 [BMT70]）

Adams 3 线上其余尚未解决的情形是 $\{h_j^2h_{j+k+1}+h_{j+1}h_{j+k}^2\}_{j\geq 0}$，对于 $k\geq 2$。

注 1.7。的存活 h_i 和 h_i^2 分别对应霍普夫不变量问题和 Kervaire 不变量问题。更一般地，Adams 过滤 n中的一个元素存活，对应于存在一个 $(O,\ \mathrm{fr})^n$-流形（带角流形的一种推广，其稳定法丛还需满足额外条件），且其某个特征数非平凡（参见 [Lau00、Mil09]）。从这一视角看，新末日猜想意味着，对于任意一个 Sq^0-特征数族，由该族中的某个元素检测到的 $(O,\ \mathrm{fr})^n$-流形只存在于有限多个维数中。

理论 **em 1.8** (主定理)。在 *Adams* E_2-页上，元素 h_0x_j 是非平凡的，其中 $j\geq 3$。

这里 $x_j \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{5,2^{j+1}\cdot 21}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ 是 Adams Sq^0-族，位于第 5-线上（参见 [Che11]）。主定理提供了关于 Adams 6-线的新数据，超出了目前已知的范围。对于其余情形 $j = 0, 1, 2$, $h_0 x_j$ 也都是非平凡的，这一点已通过 Lin的程序 [Lin]。

将 Bruner公式特化，可得到一族 d_2-微分：

$$d_2(e_j) = h_0 x_{j-1},\ j \geq 2$$

结合我们的结果，我们可以完整地揭示 e_i-族的命运：

推论1.9。 对于 $j \geq 2$，有以下非平凡微分：

$$d_2(e_j) = h_0 x_{j-1} \neq 0$$

这可 视为新末日猜想（猜想1.1）的情形之一，并且 e 一致的 D 末日猜想（猜想 1.2）关于 Adams 4线。

Re标记 1.10。 在 [Bru84], Bruner 确定了这个族中其余元素的命运 ：

$$d_2(e_0) = h_1^2 d_0 \neq 0,\ d_3(e_1) = h_1 t \neq 0$$

我们的证明策略遵循 [BX25], 第4章，在其中我们使用以下两个谱序列，并逐个验证没有微分会消去 $h_0 x_j$。该方法也被用于确定 τ^n 的前 5 条线上的挠元 E_2页 $\mathbb{C}$动机 Adams 谱序列，参见 [Ben24]。

构造 1.11 （见 [Rav86, BX25]）。 设 $\mathcal{P} = \mathbb{F}_2[\xi_1^2, \xi_2^2, \dots]$ 为 $\mathcal{A}$的子 Hopf 代数，且$\mathcal{Q} \cong \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{P}} \mathbb{F}_2$ 为商 Hopf 代数。Hopf 代数扩张 $\mathcal{P} \to \mathcal{A} \to \mathcal{Q}$ 导出 Cartan-Eilenberg 谱序列（ CESS ）：

$$E_2^{s,k,t} = \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathrm{Ext}_{\mathcal{Q}}^{k}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)) \Rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{s+k,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$$

$$d_r : E_r^{s,k,t} \to E_r^{s+r,k-r+1,t}$$

其中 s, k 是同调次数， t 是内次数。

此外， $\mathcal{Q} \cong \Lambda_{\mathbb{F}_2}[\xi_1, \xi_2, \dots]$ 是由本原元素 ξ_1, ξ_2, ... 生成的余交换外代数。因此，上同调可计算为：

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{Q}}^{*,*}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[q_0, q_1, \cdots],$$

其中 q_i 对应于 $[\xi_{i+1}]$，其次数为 $(k,\ t) = (1,\ 2^{i+1} - 1)$。

此外，$\mathrm{Ext}_{\mathcal{Q}}^{*,*}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[q_0, q_1, \cdots]$ 上的 $\mathcal{P}$-余模结构由下式给出

$$\psi(q_n) = \sum_{i=0}^{n} \xi_{n-i}^{2^{i+1}} \otimes q_i,$$

其中 $\xi_0 = 1$。

构造 1.12。 按照 [BX25],，我们在 $\mathbb{F}_2[q_0, q_1, \cdots]$ 上定义一个滤过， i赋予 q_i。此滤过导出 Burklund-Xu谱序列（BXSS）：

$$E_1^{s,k,t,i} = \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \otimes \mathbb{F}_2[q_0, q_1, \cdots] \Rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2[q_0, q_1, \cdots])$$

$$d_r : E_r^{s,k,t,i} \to E_r^{s+1,k,t,i-r}$$

其中 q_i 的次数为 $(0, 1, 2^{i+1} - 1, i)$， 而 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ 中的元素的次数为 $(s, k, t, i) = (s, 0, t, 0)$。回想一下， q_i 的 (k, t)-次数为 $(1, 2^{i+1} - 1)$。

综上所述，我们有如下图表

$$\begin{array}{ccc}
q_0 \cdot x_{n-1} \in & & \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^{*,*}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \otimes \mathbb{F}_2[q_0, q_1, \cdots] \\
\big\downarrow & & \Big\Downarrow \text{Burklund-Xu Spectral Sequence} \\
q_0 \cdot x_{n-1} \in & & \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^{*,*}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2[q_0, q_1, \cdots]) \\
\big\downarrow & & \Big\Downarrow \text{Cartan-Eilenberg Spectral Sequence} \\
h_0 x_n \in & & \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{*,*}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)
\end{array}$$

为证明主定理，我们将证明对于 $n \geq 1$，元素 $q_0 \cdot x_{n-1}$ 存活到 E_∞-页，即第 2 节中的 BXSS，并且它存活到 E_∞- 页，即第 3 节中的 CESS。

致谢。 作者感谢 Zhouli Xu 提出这一课题，并感谢 Sihao Ma 的有益讨论。

2. Burklund-Xu谱序列

下面的命题是 [BX25引理410]的推广：

命题2.1 (BXSS中的微分)。 设 $a \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$，使得 $\langle h_{n+i}, h_{n+i+1}, \cdots, h_{n+k-1}, a\rangle$以相容的方式包含0，对于 $i = 1, \ldots, k-1$，则 $d_i(q_{n+k} \cdot a)$ 在 $i \leq k-1$时消失，并且

$$d_k(q_{n+k} \cdot a) = q_n \cdot \langle h_n, h_{n+1}, \cdots, h_{n+k-1}, a\rangle$$

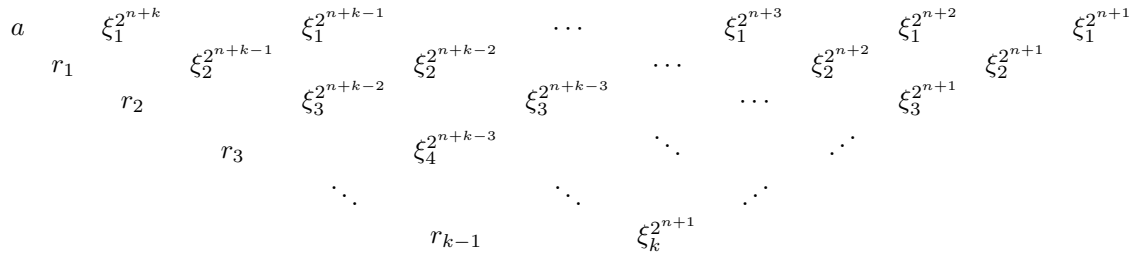
证明。 对 k归纳，我们可以假设对于 $i = 1, 2, \ldots, k-1$， $d_i(q_{n+k} \cdot a) = 0$。滥用记号，令 d既表示 cobar微分 $\bar{\mathcal{P}}^{\otimes s} \otimes \mathbb{F}_2[q_0, q_1, \cdots] \to \bar{\mathcal{P}}^{\otimes s+1} \otimes \mathbb{F}_2[q_0, q_1, \cdots]$，也表示 $\bar{\mathcal{P}}^{\otimes s} \to \bar{\mathcal{P}}^{\otimes s+1}$，其中 $\mathcal{P}$ 是增广理想，即映射 $\mathcal{P} \to \mathbb{F}_2$ 的核。于是我们有

$$d(q_{n+k} \cdot a) = \sum_{i=0}^{n+k-1} a \otimes \xi_{n+k-i}^{2^{i+1}} \otimes q_i$$

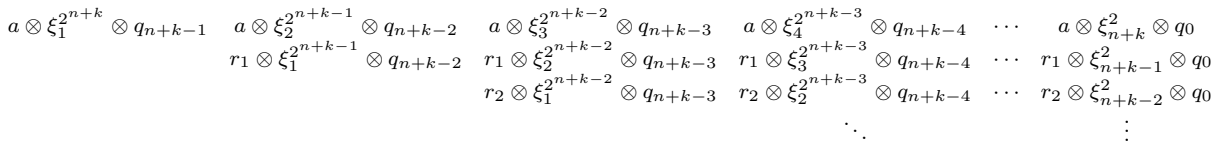
Toda括号消失的条件意味着我们可以找到类 $r_i \in \bar{\mathcal{P}}^{\otimes \mathrm{fil}(a)}$，使得

$$\begin{aligned}
d(r_1) &= a \otimes \xi_1^{2^{n+k}} \\
d(r_2) &= a \otimes \xi_2^{2^{n+k-1}} + r_1 \otimes \xi_1^{2^{n+k-1}} \\
d(r_3) &= a \otimes \xi_3^{2^{n+k-2}} + r_1 \otimes \xi_2^{2^{n+k-2}} + r_2 \otimes \xi_1^{2^{n+k-2}} \\
&\vdots \\
d(r_{k-1}) &= a \otimes \xi_{k-1}^{2^{n+2}} + r_1 \otimes \xi_{k-2}^{2^{n+2}} + \cdots + r_{k-2} \otimes \xi_1^{2^{n+2}}
\end{aligned}$$

换句话说，我们有如下 Massey积图：



考虑下面的三角形图：



这里，各行的和为 $a \otimes d(q_{n+k})$ $r_1 \otimes d(q_{n+k-1})$ $r_2 \otimes d(q_{n+k-2})$ $\cdots$，各列的和为 $d(r_1) \otimes q_{n+k-1}, d(r_2) \otimes q_{n+k-2}, \cdots$。因此我们可以看到：

$$\begin{aligned}
d(a \otimes q_{n+k}) + \sum_{i=1}^{k-1} d(r_i \otimes q_{n+k-i}) &= a \otimes d(q_{n+k}) + \sum_{i=1}^{k-1} r_i \otimes d(q_{n+k-i}) + \sum_{i=1}^{k-1} d(r_i) \otimes q_{n+k-i} \\
&= (a \otimes \xi_k^{2^{n+1}} + \sum_{i=1}^{k-1} r_i \otimes \xi_{k-i}^{2^{n+1}}) \otimes q_n
\end{aligned}$$

目标对应于 BXSS 中的元素 $q_n \cdot \langle h_n, h_{n+1}, \cdots, h_{n+k-1}, a\rangle$。因此，我们有：

$$d_k(q_{n+k} \cdot a) = q_n \cdot \langle h_n, h_{n+1}, \cdots, h_{n+k-1}, a\rangle$$

□

注意，由次数的原因，如果 $d_i(q_n \cdot a) = 0$ 对于 $i \leq n$，那么 $q_n \cdot a$ 是一个永久循环。

Cor推论 2.2. 在 *BXSS* 中，形如 $q_n h_n, q_n h_{n+1}^2$ 的类是 $n \geq 3$的永久循环 .

证明。 要应用 2.1，我们需要证明这些 Toda 括号以相容的方式消失。实际上，我们将证明一个更强的结论：由于次数的原因，这些 Toda 括号消失且没有不定性。

对于 $q_n h_n$，我们需要验证 $\langle h_{n-k}, h_{n-k+1}, \cdots, h_n \rangle$ 是 $\{0\}$。这个 Toda 括号位于次数$(s, t) = (2, 2^{n-k} + 2^{n-k+1} + \cdots + 2^n)$。对应的 Ext 群为零，这可从 Adams2-线 [Ada58]中看出。

对于 $q_n h_{n+1}^2$，我们需要验证 $\langle h_{n-k}, h_{n-k+1}, \cdots, h_{n-1}, h_{n+1}^2 \rangle$ 是 $\{0\}$。这个 Toda 括号位于次数 $(3, 2^{n-k} + 2^{n-k+1} + \cdots + 2^{n-1} + 2^{n+2})$。 3-线的 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ 由以下元素生成（参见 [Wan67]）

$$h_i h_j h_k \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{3, 2^i + 2^j + 2^k}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \text{ and } c_i \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{3, 2^{i+3} + 2^{i+1} + 2^i}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$$

在这些关系下

$$h_i h_{i+1} = 0, \ h_i h_{i+2}^2 = 0, \ h_i^2 h_{i+2} = h_{i+1}^3$$

因此，包含我们的Toda括号的Ext群为0。 □

现在让我们回到BXSS中的显式类 $q_0 x_{n-1}$。类 $q_0 x_{n-1}$ 的次数为 $(5, 1, 2^{n+1} + 1, 0)$，因此为了证明它不被任何微分杀死，我们需要列出所有次数为$(4, 1, 2^{n+1} \cdot 21 + 1, *)$的类。

引理 2.3. 对于 $n \geq 3$，在次数$(4, 1, 2^{n+1} \cdot 21 + 1, *)$上，*BXSS*的 E_1页由以下类组成：

(1) $q_0 e_n$ *(2)* $q_0 h_{n-1}^2 h_{n+2} h_{n+4}$
(3) $q_{n-1} h_0 h_{n-1} h_{n+2} h_{n+4}$ *(*
4) $q_{n+2} h_0 h_{n-1}^2 h_{n+4}$ *(5)*
$q_{n+4} h_0 h_{n-1}^2 h_{n+2}$ *(6)*
$q_n h_0 h_{n+1}^2 h_{n+4}$ *(7)*
$q_{n+2} h_0 h_n h_{n+3}^2$

对于 $n \geq 4$，上面的类彼此不同且非平凡。当 $n = 3$ 时，(4) 和(5) 是平凡的。

证明。 次数为 $(4, 1, 2^{n+1} \cdot 21 + 1, *)$ 的类必定具有形式 $q_i \cdot a$，其中

$$a \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^{4, 2^{n+1} \cdot 21 - 2^{i+1} + 2}$$

情形 1： a 是不可分解元。根据 Adams 4线从 [Lin08] 的结构，并仔细检查次数， $q_i \cdot a$ 唯一的可能是 $q_0 e_n$，这就是上面列出的情形 (1)。

情况 2： a 是可分解元。那么，元素 a 必定具有 $c_a h_b$ 或 $h_a h_b h_c h_d$的形式。

在第一个子情形中，计算 t-次数可得：

$$2^{a+4} + 2^{a+2} + 2^{a+1} + 2^{b+1} + 2^{i+1} = 2^{n+5} + 2^{n+3} + 2^{n+1} + 2$$

经过仔细分析可知，这是不可能的。

在第二个子情形中，计算 t-次数可得：

$$2^{a+1} + 2^{b+1} + 2^{c+1} + 2^{d+1} + 2^{i+1} = 2^{n+5} + 2^{n+3} + 2^{n+1} + 2$$

因此，集合（计入重数） $\{a, b, c, d, i\}$ 应为：

- $\{0, n-1, n-1, n+2, n+4\}$
- $\{0, n, n+1, n+1, n+4\}$
- $\{0, n, n+2, n+3, n+3\}$

由此得到最后 6 个类。（另外 6 个类均为 0，这是由关系 $h_i h_{i+1} = 0$导致的。） □

现在我们可以证明：

定理 2.4. 对于 $n \geq 3$，元素 $q_0 \cdot x_{n-1} \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \otimes \mathbb{F}_2[q_0, q_1, \cdots]$ 在 *BXSS* 的第 E_∞ 页存活。

证明。 我们将计算上述引理中各项的微分，并证明它们都不会消去 $q_0 x_{n-1}$。首先注意到，利用 2.2，情形 (1)、(2)、(3)、(6)、(7) 都可以写成两个永久循环的乘积，因此它们是永久循环。

对于 $n \geq 4$，我们需要处理 (4) 和 (5)：利用 2.1，情形 (4) 存在非平凡的 d_1：

$$d_1(q_{n+2} h_0 h_{n-1}^2 h_{n+4}) = q_{n+1} h_0 h_{n-1}^2 h_{n+1} h_{n+4} = q_{n+1} h_0 h_n^3 h_{n+4} \neq 0$$

而情形 (5) 存在非平凡的 d_2：

$$d_2(q_{n+4} h_0 h_{n-1}^2 h_{n+2}) = q_{n+2} \langle h_{n+2}, h_{n+3}, h_0 h_{n-1}^2 h_{n+2} \rangle = q_{n+2} h_0 h_{n-1}^2 h_{n+3}^2 \neq 0$$

□

3. Cartan-Eilenberg 谱序列

CESS 的 E_1 页中的元素 q_0x_{n-1} 的次数为 $(s,\ k,\ t) = (5,\ 1,\ 2^{n+1}\cdot 21+1)$。我们将验证，能够消去 q_0x_{n-1} 的微分的潜在源都是 0。

引理3.1. 对于 $n \geq 3$，$\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^{2,\,2^{n+1}\cdot 21+1}(\mathbb{F}_2,\ \mathrm{Ext}_{\mathrm{Q}}^{3}(\mathbb{F}_2,\ \mathbb{F}_2)) \cong 0$。

证明。 我们考虑 BXSS 的 E_1-页中次数为 $(2,\ 3,\ 2^{n+1}\cdot 21+1,\ *)$ 的元素：这样的元素必须具有形式 $q_aq_bq_ch_ih_j$。计算 t-次数，我们得到：

$$2^{a+1}+2^{b+1}+2^{c+1}+2^{i+1}+2^{j+1} = 2^{n+5}+2^{n+3}+2^{n+1}+2^2$$

因此，（计重数的）集合 $\{a,b,c,i,j\}$ 必为下列之一：

- $\{0,0,n,n+2,n+4\}$
- $\{1,n-1,n-1,n+2,n+4\}$
- $\{1,n,n+1,n+1,n+4\}$
- $\{1,n,n+2,n+3,n+3\}$

因此，按次数列出的元素为：

(1) $q_0^2q_nh_{n+2}h_{n+4}$ (2) $q_0^2q_{n+2}h_nh_{n+4}$ (8) $q_1q_{n-1}^2h_{n+2}h_{n+4}$ (9) $q_1q_{n-1}q_{n+2}h_{n-1}h_{n+4}$(15) $q_1q_nq_{n+1}h_{n+1}h_{n+4}$ (16) $q_1q_{n+1}^2h_nh_{n+4}$ (21) $q_1q_nq_{n+2}h_{n+3}^2$ (22) $q_1q_{n+2}q_{n+3}h_nh_{n+3}$(3) $q_0^2q_{n+4}h_nh_{n+2}$ (4) $q_0q_nq_{n+4}h_0h_{n+2}$ (5) $q_0q_nq_{n+2}h_0h_{n+4}$ (6) $q_0q_{n+2}q_{n+4}h_0h_n$ (7) $q_nq_{n+2}q_{n+4}h_0^2$ (10) $q_{n-1}^2q_{n+2}h_1h_{n+4}$ (11) $q_1q_{n-1}q_{n+4}h_{n-1}h_{n+2}$ (12) $q_{n-1}^2q_{n+4}h_1h_{n+2}$ (13) $q_1q_{n+2}q_{n+4}h_{n-1}^2$ (14) $q_{n-1}q_{n+2}q_{n+4}h_1h_{n-1}$(17) $q_nq_{n+1}^2h_1h_{n+4}$ (18) $q_1q_nq_{n+4}h_{n+1}^2$ (19) $q_nq_{n+1}q_{n+4}h_1h_{n+1}$ (20) $q_{n+1}^2q_{n+4}h_1h_n$ (23) $q_nq_{n+2}q_{n+3}h_1h_{n+3}$ (24) $q_1q_{n+3}^2h_nh_{n+2}$ (25) $q_nq_{n+3}^2h_1h_{n+2}$ (26) $q_{n+2}q_{n+3}^2h_1h_n$

对于 $n \geq 4$，上述所有元素都是非平凡且互不相同的。
N其中一个元素存活到 CESS E_1 页。以下是按次数列出的微分 es:
（那些“$\neq 0$”对所有 $n \geq 4$ 成立。当 $n = 3$ 时，我们还需要更多计算。）
(1) $d_1(q_0^2q_nh_{n+2}h_{n+4}) = q_0^2q_{n-1}h_{n-1}h_{n+2}h_{n+4} \neq 0$(2) $d_1(q_0^2q_{n+2}h_nh_{n+4}) = q_0^2q_{n+1}h_nh_{n+1}h_{n+4} = 0d_2(q_0^2q_{n+2}h_nh_{n+4}) = q_0^2q_n\langle h_n,h_{n+1},h_n\rangle h_{n+4} = q_0^2q_nh_{n+1}^2h_{n+4} \neq 0$ (3) $d_1(q_0^2q_{n+4}h_nh_{n+2}) = q_0^2q_{n+3}h_nh_{n+2}h_{n+3} = 0d_2(q_0^2q_{n+4}h_nh_{n+2}) = q_0^2q_{n+2}\langle h_{n+2},h_{n+3},h_{n+2}\rangle h_n = q_0^2q_{n+2}h_nh_{n+3}^2 \neq 0$(4) $d_1(q_0q_nq_{n+4}h_0h_{n+2}) = q_0q_{n-1}q_{n+4}h_0h_{n-1}h_{n+2} \neq 0$(5) $d_1(q_0q_nq_{n+2}h_0h_{n+4}) = q_0q_{n-1}q_{n+2}h_0h_{n-1}h_{n+4} + q_0q_nq_{n+1}h_0h_{n+1}h_{n+4} \neq 0$(6) $d_1(q_0q_{n+2}q_{n+4}h_0h_n) = q_0q_{n+2}q_{n+3}h_0h_nh_{n+3} \neq 0$(7) $d_1(q_nq_{n+2}q_{n+4}h_0^2) = q_{n-1}q_{n+2}q_{n+4}h_0^2h_{n-1} + q_nq_{n+1}q_{n+4}h_0^2h_{n+1} + q_nq_{n+2}q_{n+3}h_0^2h_{n+3} \neq 0$(8) $d_1(q_1q_{n-1}^2h_{n+2}h_{n+4}) = q_0q_{n-1}^2h_0h_{n+2}h_{n+4} \neq 0$(9) $d_1(q_1q_{n-1}q_{n+2}h_{n-1}h_{n+4}) = q_0q_{n-1}q_{n+2}h_0h_{n-1}h_{n+4} + q_1q_{n-1}q_{n+1}h_{n-1}h_{n+1}h_{n+4} \neq 0$(10) $d_1(q_{n-1}^2q_{n+2}h_1h_{n+4}) = q_{n-1}^2q_{n+1}h_1h_{n+1}h_{n+4} \neq 0$(11) $d_1(q_1q_{n-1}q_{n+4}h_{n-1}h_{n+2}) = q_0q_{n-1}q_{n+4}h_0h_{n-1}h_{n+2} \neq 0$ (12) $d_1(q_{n-1}^2q_{n+4}h_1h_{n+2}) = 0d_2(q_{n-1}^2q_{n+4}h_1h_{n+2}) = q_{n-2}^2q_{n+4}h_1h_{n-1}h_{n+2} + q_{n-1}^2q_{n+2}h_1h_{n+3}^2$ (13) $d_1(q_1q_{n+2}q_{n+4}h_{n-1}^2) = q_0q_{n+2}q_{n+4}h_0h_{n-1}^2 + q_1q_{n+1}q_{n+4}h_{n-1}^2h_{n+2} + q_1q_{n+2}q_{n+3}h_{n-1}^2h_{n+3}$ (14) $d_1(q_{n-1}q_{n+2}q_{n+4}h_1h_{n-1}) = q_{n-1}q_{n+1}q_{n+4}h_1h_{n-1}h_{n+1} + q_{n-1}q_{n+2}q_{n+3}h_1h_{n-1}h_{n+3} \neq 0$ (15) $d_1(q_1q_nq_{n+1}h_{n+1}h_{n+4}) = q_0q_nq_{n+1}h_0h_{n+1}h_{n+4} + q_1q_{n-1}q_{n+1}h_{n-1}h_{n+1}h_{n+4} \neq 0$(16) $d_1(q_1q_{n+1}^2h_nh_{n+4}) = q_0q_{n+1}^2h_0h_nh_{n+4} \neq 0$(17) $d_1(q_nq_{n+1}^2h_1h_{n+4}) = q_{n-1}q_{n+1}^2h_1h_{n-1}h_{n+4} \neq 0$ (18) $d_1(q_1q_nq_{n+4}h_{n+1}^2) = q_0q_nq_{n+4}h_0h_{n+1}^2 + q_1q_nq_{n+3}h_{n+1}^2h_{n+3} \neq 0$(19) $d_1(q_nq_{n+1}q_{n+4}h_1h_{n+1}) = q_{n-1}q_{n+1}q_{n+4}h_1h_{n-1}h_{n+1} + q_nq_{n+1}q_{n+3}h_1h_{n+1}h_{n+3} \neq 0$(20) $d_1(q_{n+1}^2q_{n+4}h_1h_n) = q_{n+1}^2q_{n+3}h_1h_nh_{n+3} \neq 0$(21) $d_1(q_1q_nq_{n+2}h_{n+3}^2) = q_0q_nq_{n+2}h_0h_{n+3}^2 + q_1q_{n-1}q_{n+2}h_{n-1}h_{n+3}^2 \neq 0$(22) $d_1(q_1q_{n+2}q_{n+3}h_nh_{n+3}) = q_0q_{n+2}q_{n+3}h_0h_nh_{n+3} \neq 0$(23) $d_1(q_nq_{n+2}q_{n+3}h_1h_{n+3}) = q_{n-1}q_{n+2}q_{n+3}h_1h_{n-1}h_{n+3} + q_nq_{n+1}q_{n+3}h_1h_{n+1}h_{n+3} \neq 0$(24) $d_1(q_1q_{n+3}^2h_nh_{n+2}) = q_0q_{n+3}^2h_0h_nh_{n+2} \neq 0$(25) $d_1(q_nq_{n+3}^2h_1h_{n+2}) = q_{n-1}q_{n+3}^2h_1h_{n-1}h_{n+2} \neq 0$

(26) $d_1(q_{n+2}q_{n+3}^2h_1h_n)=0$，$d_2(q_{n+2}q_{n+3}^2h_1h_n)$
$=q_nq_{n+3}^2h_1h_{n+1}^2+q_{n+2}^3h_1h_nh_{n+3}\neq 0$

蓝色 中的微分的靶并非线性无关。(14)+(19)+(23)、(6)+(22)、(4)+(11)以及(5) + (9) +(15) 具有 $d_1=0$。为解决这个问题，我们还需要四个微分：

- $q_0q_nq_{n+2}h_0h_{n+4}+q_1q_{n-1}q_{n+2}h_{n-1}h_{n+4}+q_1q_nq_{n+1}h_{n+1}h_{n+4}=d_1(q_1q_nq_{n+2}h_{n+4})$
- $q_0q_nq_{n+4}h_0h_{n+2}+q_1q_{n-1}q_{n+4}h_{n-1}h_{n+2}=d_1(q_1q_nq_{n+4}h_{n+2})$
- $q_0q_{n+2}q_{n+4}h_0h_n+q_1q_{n+2}q_{n+3}h_nh_{n+3}=d_1(q_1q_{n+2}q_{n+4}h_n)$
- $q_{n-1}q_{n+2}q_{n+4}h_1h_{n-1}+q_nq_{n+1}q_{n+4}h_1h_{n+1}+q_nq_{n+2}q_{n+3}h_1h_{n+3}=d_1(q_nq_{n+2}q_{n+4}h_1)$

	$s=1$	$s=2$	$s=3$
$3n+8$		(26) $q_{n+2}q_{n+3}^2h_1h_n$	
$3n+7$			
$3n+6$	$q_nq_{n+2}q_{n+4}h_1$	(7) $q_nq_{n+2}q_{n+4}h_0^2$ (20) $q_{n+1}^2q_{n+4}h_1h_n$ (25) $q_nq_{n+3}^2h_1h_{n+2}$	$q_{n+2}^3h_1h_nh_{n+3}$ $q_nq_{n+3}^2h_1h_{n+1}^2$
$3n+5$		(14) $q_{n-1}q_{n+2}q_{n+4}h_1h_{n-1}$ (19) $q_nq_{n+1}q_{n+4}h_1h_{n+1}$ (23) $q_nq_{n+2}q_{n+3}h_1h_{n+3}$	$q_{n-1}q_{n+2}q_{n+4}h_0^2h_{n-1}$ $q_nq_{n+1}q_{n+4}h_0^2h_{n+1}$ $q_nq_{n+2}q_{n+3}h_0^2h_{n+3}$ $q_{n+1}^2q_{n+3}h_1h_nh_{n+3}$ $q_{n-1}q_{n+3}^2h_1h_{n-1}h_{n+2}$
$3n+4$			$q_{n-1}q_{n+1}q_{n+4}h_1h_{n-1}h_{n+1}$ $q_{n-1}q_{n+2}q_{n+3}h_1h_{n-1}h_{n+3}$ $q_nq_{n+1}q_{n+3}h_1h_{n+1}h_{n+3}$
$3n+3$			
$3n+2$		(12) $q_{n-1}^2q_{n+4}h_1h_{n+2}$ (17) $q_nq_{n+1}^2h_1h_{n+4}$	
$3n+1$			$q_{n-1}q_{n+1}^2h_1h_{n-1}h_{n+4}$
$3n$		(10) $q_{n-1}^2q_{n+2}h_1h_{n+4}$	$q_{n-2}^2q_{n+4}h_1h_{n-1}h_{n+2}$ $q_{n-1}^2q_{n+2}h_1h_{n+3}^2$
$3n-1$			$q_{n-1}^2q_{n+1}h_1h_{n+1}h_{n+4}$
$\cdots$			
$2n+7$	$q_1q_{n+2}q_{n+4}h_n$	(13) $q_1q_{n+2}q_{n+4}h_{n-1}^2$ (24) $q_1q_{n+3}^2h_nh_{n+2}$	
$2n+6$		(6) $q_0q_{n+2}q_{n+4}h_0h_n$ (22) $q_1q_{n+2}q_{n+3}h_nh_{n+3}$	$q_0q_{n+2}q_{n+4}h_0h_{n-1}^2$ $q_1q_{n+1}q_{n+4}h_{n-1}^2h_{n+2}$ $q_1q_{n+2}q_{n+3}h_{n-1}^2h_{n+3}$ $q_0q_{n+3}^2h_0h_nh_{n+2}$
$2n+5$	$q_1q_nq_{n+4}h_{n+2}$	(18) $q_1q_nq_{n+4}h_{n+1}^2$	$q_0q_{n+2}q_{n+3}h_0h_nh_{n+3}$
$2n+4$		(4) $q_0q_nq_{n+4}h_0h_{n+2}$ (11) $q_1q_{n-1}q_{n+4}h_{n-1}h_{n+2}$	$q_0q_nq_{n+4}h_0h_{n+1}^2$ $q_1q_nq_{n+3}h_{n+1}^2h_{n+3}$
$2n+3$	$q_1q_nq_{n+2}h_{n+4}$	(16) $q_1q_{n+1}^2h_nh_{n+4}$ (21) $q_1q_nq_{n+2}h_{n+3}^2$	$q_0q_{n-1}q_{n+4}h_0h_{n-1}h_{n+2}$
$2n+2$		(5) $q_0q_nq_{n+2}h_0h_{n+4}$ (9) $q_1q_{n-1}q_{n+2}h_{n-1}h_{n+4}$ (15) $q_1q_nq_{n+1}h_{n+1}h_{n+4}$	$q_0q_{n+1}^2h_0h_nh_{n+4}$ $q_0q_nq_{n+2}h_0h_{n+3}^2$ $q_1q_{n-1}q_{n+2}h_{n-1}^2h_{n+3}$
$2n+1$			$q_0q_{n-1}q_{n+2}h_0h_{n-1}h_{n+4}$ $q_0q_nq_{n+1}h_0h_{n+1}h_{n+4}$ $q_1q_{n-1}q_{n+1}h_{n-1}h_{n+1}h_{n+4}$
$2n$			
$2n-1$		(8) $q_1q_{n-1}^2h_{n+2}h_{n+4}$	
$2n-2$			$q_0q_{n-1}^2h_0h_{n+2}h_{n+4}$

	$s=1$	$s=2$	$s=3$
$n+4$		(3) $q_0^2 q_{n+4} h_n h_{n+2}$	
$n+3$			
$n+2$		(2) $q_0^2 q_{n+2} h_n h_{n+4}$	$q_0^2 q_{n+2} h_n h_{n+3}^2$
$n+1$			
n		(1) $q_0^2 q_n h_{n+2} h_{n+4}$	$q_0^2 q_n h_{n+1}^2 h_{n+4}$
$n-1$			$q_0^2 q_{n-1} h_{n-1} h_{n+2} h_{n+4}$

图1. 次数 $(s,\ k,\ t) = (2,\ 3,\ 2^{n+1}\cdot 21+1)$ 引理 3.1 中的 BXSS，其中$n \geq 4$。纵轴表示 BX过滤，横轴表示 s-次数。红色箭头表示 d_1-微分，蓝色箭头表示 d_2-微分。

当 n 较小时，最左列上的 BX过滤可能会重复。但对于 $n \geq 4$，上表中出现的所有项都各不相同且非平凡。

在 $n=3$ 的情况下，大多数项和微分保持不变，除了以下内容：

- (25) $d_2(q_3 q_6^2 h_1 h_5) = d_2(q_3 h_1 \cdot q_6^2 h_5) = q_1 h_2^2 \cdot q_6^2 h_5 + q_3 h_1 \cdot q_5^2 h_6 h_5 = q_1 q_6^2 h_2^2 h_5 \neq 0$
- (14) $q_2 q_5 q_7 h_1 h_2 = 0$
- (19) $d_1(q_3 q_4 q_7 h_1 h_4) = q_3 q_4 q_6 h_1 h_4 h_6 \neq 0$
- (23) $d_1(q_3 q_5 q_6 h_1 h_6) = q_3 q_4 q_6 h_1 h_4 h_6 \neq 0$
- (17) $d_2(q_3 q_4^2 h_1 h_7) = d_2(q_3 h_1 \cdot q_4^2 h_7) = q_1 h_2^2 \cdot q_4^2 h_7 + q_3 h_1 \cdot q_3^2 h_4 h_7 \neq 0$
- (12) $d_2(q_2^2 q_7 h_1 h_5) = q_2^2 q_5 h_1 h_6^2 \neq 0$
- (13) $d_1(q_1 q_5 q_7 h_2^2) = q_1 q_4 q_7 h_2^2 h_5 + q_1 q_5 q_6 h_2^2 h_6 \neq 0$

	$s=1$	$s=2$	$s=3$
17		(26) $q_5 q_6^2 h_1 h_3$	
16			
15	$q_3 q_5 q_7 h_1$	(7) $q_3 q_5 q_7 h_0^2$ (20) $q_4^2 q_7 h_1 h_3$ (25) $q_3 q_{n+3}^2 h_1 h_5$	$q_5^3 h_1 h_3 h_6$ $q_3 q_6^2 h_1 h_4^2$
14		(19) $q_3 q_4 q_7 h_1 h_4$ (23) $q_3 q_5 q_6 h_1 h_6$	$q_2 q_5 q_7 h_0^2 h_2$ $q_3 q_4 q_7 h_0^2 h_4$ $q_3 q_5 q_6 h_0^2 h_6$ $q_4^2 q_6 h_1 h_3 h_6$
13	$q_1 q_5 q_7 h_3$	(13) $q_1 q_5 q_7 h_2^2$ (24) $q_1 q_6^2 h_3 h_5$	$q_1 q_6^2 h_2^2 h_5$ $q_3 q_4 q_6 h_1 h_4 h_6$
12		(6) $q_0 q_5 q_7 h_0 h_3$ (22) $q_1 q_5 q_6 h_3 h_6$	$q_1 q_4 q_7 h_2^2 h_5$ $q_1 q_5 q_6 h_2^2 h_6$ $q_0 q_6^2 h_0 h_3 h_5$
11	$q_1 q_3 q_7 h_5$	(12) $q_2^2 q_7 h_1 h_5$ (17) $q_3 q_4^2 h_1 h_7$ (18) $q_1 q_3 q_7 h_4^2$	$q_0 q_5 q_6 h_0 h_3 h_6$
10		(4) $q_0 q_3 q_7 h_0 h_5$ (11) $q_1 q_2 q_7 h_2 h_5$	$q_0 q_3 q_7 h_0 h_4^2$ $q_1 q_3 q_6 h_4^2 h_6$
9	$q_1 q_3 q_5 h_7$	(10) $q_2^2 q_5 h_1 h_7$ (16) $q_1 q_4^2 h_3 h_7$ (21) $q_1 q_3 q_5 h_6^2$	$q_2^2 q_5 h_1 h_6^2$ $q_1 q_4^2 h_2^2 h_7 + q_3^3 h_1 h_7$ $q_0 q_2 q_7 h_0 h_2 h_5$

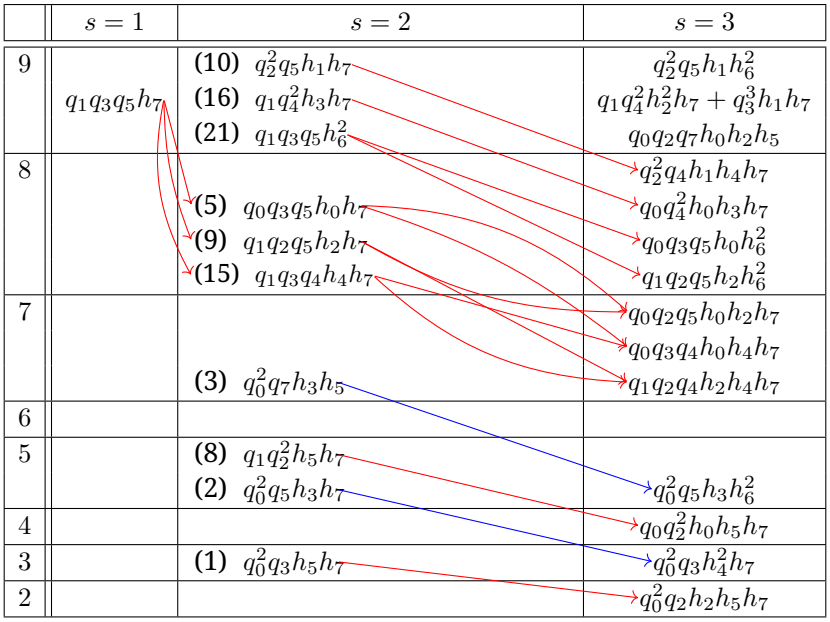


图2. 次数 $(s,\ k,\ t)=(2,\ 3,\ 2^{3+1}\cdot 21+1)$ 引理 3.1中的 BXSS。纵轴为 BX过滤，横轴为 s-次数。红色箭头表示 d_1-微分，蓝色箭头表示 d_2-微分。

利用命题2.1 可知，上述所有非平凡项都作为某个d_2 支撑平凡 d_1的靶出现。此外，由于它们无法写成任何 q_kh_k的可整除项之和，因此不会被 d_1-微分消去。因此，这些元素在 BXSS 的 E_2-页上仍然是非平凡的。

Therefore, for $n\geq 3$, $\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^{2,2^{n+1}\cdot 21+1}(\mathbb{F}_2,\mathrm{Ext}_{\mathcal{Q}}^{3}(\mathbb{F}_2,\mathbb{F}_2))\cong 0$.

□

引理3.2. 对于 $n\geq 3$, $\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^{0,2^{n+1}\cdot 21+1}(\mathbb{F}_2,\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{Q}}^{5}(\mathbb{F}_2,\ \mathbb{F}_2))\cong 0$。

证明。 我们考虑 BXSS E_1 中次数为 $(0,5,2^{n+1}\cdot 21+1,*)$ 的元素：这样的元素必须形如 $q_aq_bq_cq_dq_e$。计算 t-次数，我们得到：

$$2^{a+1}+2^{b+1}+2^{c+1}+2^{d+1}+2^{e+1}=2^{n+5}+2^{n+3}+2^{n+1}+2^2+2$$

此项必须是 $q_0q_1q_nq_{n+2}q_{n+4}$，它具有非平凡微分

$$\begin{aligned}d_1(q_0q_1q_nq_{n+2}q_{n+4})=&\ q_0^2q_nq_{n+2}q_{n+4}h_0+q_0q_1q_{n-1}q_{n+2}q_{n+4}h_{n-1}\\&+q_0q_1q_nq_{n+1}q_{n+4}h_{n+1}+q_0q_1q_nq_{n+2}q_{n+3}h_{n+3}\neq 0.\end{aligned}$$

□

因此我们能够证明：

定理 3.3。 对于 $n\geq 3$，元素 $q_0\cdot x_{n-1}\in\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}(\mathbb{F}_2,\mathrm{Ext}_{\mathcal{Q}}(\mathbb{F}_2,\mathbb{F}_2))$ 存活到 *CESS* 的 E_∞-页。

证明。 当 $k+t$ 为奇数时，BXSS 的 E_1-页为零，因此 CESS 的 E_2-页同样为零。因此，若某个元素消灭 q_0x_{n-1}，则它的次数必为 $(2,3,2^{n+1}\cdot 21+1)$ 或 $(0,5,2^{n+1}\cdot 21+1)$。由上述引理，$E^2_{2,\ 3,\ 2^{n+1}\cdot 21+1}$，与 $E^0_{2,\ 5,\ 2^{n+1}\cdot 21+1}$，均为平凡，故我们得出 $q_0\cdot x_{n-1}$ 存活到 E_∞-页。

□

结合定理 2.4 和定理 3.3，我们可以看出，对于 $n\geq 3$，元素

$$h_0\cdot x_n\in\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{6,2^{j+1}\cdot 21+1}(\mathbb{F}_2,\mathbb{F}_2)$$

非平凡，这就是我们的主定理，定理 1.8。

参考文献

[Ada58] J. F. Adams. 关于斯廷罗德代数的结构及其应用。《Comment. Math. Helv.》，32 214, 1958 180: – .[Ada60] J. F. Adams. 关于霍普夫不变量一元素不存在的证明。《Ann. of Math. (2)》，72:20–104, 1960. [Ben24] Jordan Benson. 关于 $\mathbb{C}$-动机亚当斯谱序列（针对 $s \leq 5$）。arXiv 预印本 arXiv:2410.16521, 2024. [BJM84] M. G. Barratt, J. D. S. Jones, and M. E. Mahowald. 维数 62 中 Toda 括号与 Kervaire 不变量之间的关系。《J. London Math. Soc. (2)》，30(3):533–550, 1984. [BMMS86] R. R. Bruner, J. P. May, J. E. McClure, and M. Steinberger.《环谱及其应用》，《数学讲义》第 1176 卷。施普林格出版社，柏林，1986. [BMT70] M. G. Barratt, M. E. Mahowald, and M. C. Tangora. 亚当斯谱序列中的一些微分。II。《Topology》，9:309–316, 1970. [Bru84] Robert Bruner. 亚当斯谱序列中的一个新微分。《Topology》，23(3):271–276, 1984. [BX25] Robert Burklund and Zhouli Xu. 类 hj 3 上的亚当斯微分。《数学新进展》，239(1):1–77, 2025.[Che11] Tai-Wei Chen. $\mathrm{Ext}^{5,*}_{A}(Z/2, Z/2)$ 的确定。《拓扑学及其应用》，158(5):660–689, 2011. [HHR16] M. A. Hill, M. J. Hopkins, and D. C. Ravenel. 关于 Kervaire 不变量一元素不存在的证明。《Ann. of Math. (2)》，184(1):1–262, 2016. [IWX22] Daniel C Isaksen, Guozhen Wang, and Zhouli Xu. 球面的稳定同伦群与动机同伦论。载于《国际数学家大会论文集》，2022.[IWX23] Daniel C Isaksen, Guozhen Wang, and Zhouli Xu. 球面的稳定同伦群：从维数 0 到 90。《Publications mathématiques de l'IHÉS》，137(1):107–243, 2023. [Jon78] John DS Jones. 扩张幂流形的 Kervaire 不变量。《Topology》，17(3):249–266, 1978. [Lau00] Gerd Laures. 关于带角流形的配边。《Trans. Amer. Math. Soc.》，352(12):5667–5688, 2000. [Lin] Weinan Lin. 阿达姆斯谱序列交互图。https://waynelin92.github.io/ss/index. html。访问日期：2026-02-11.[Lin08] Wen-Hsiung Lin. $\mathrm{Ext}^{4,*}_{A}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ 和 $\mathrm{Ext}^{5,*}_{A}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$。《拓扑学及其应用》，155(5):459–496, 2008. [LWX24] Weinan Lin, Guozhen Wang, and Zhouli Xu. 关于最后一个 Kervaire 不变量问题。arXiv 预印本 arXiv:2412.10879, 2024.[Mil09] Haynes R. Miller. Browder 定理与带角流形。在线可查，2009. [Min95] Norihiko Minami. 亚当斯谱序列与三重传递。《Amer. J. Math.》，117(4):965–985, 1995. [Rav86] Douglas C. Ravenel. 复配边与球面的稳定同伦群，《纯粹与应用数学》第 121 卷。学术出版社，奥兰多，佛罗里达州，1986.[Wan67] John SP Wang. 关于模 2 斯廷罗德代数的上同调及霍普夫不变量一元素不存在的证明。《伊利诺伊数学杂志》，11(3):480–490, 1967. [Xu16] Zhouli Xu. 维数 62 中的强 Kervaire 不变量问题。《几何与拓扑》，20(3):1611–1624, 2016.

加利福尼亚大学，洛杉矶，数学系，洛杉矶，加利福尼亚州 90095-1555，USA
电子邮箱地址：runji@math.ucla.edu

中国北京 100084 清华大学求真书院电子邮箱地址：
yxli22@mails.tsinghua.edu.cn