arXiv:2602.20228v1 [math.AT] 23 Feb 2026

《图辫群的渐近同调》勘误

安炳熙 、加布里埃尔·C·德拉蒙德-科尔和本 ·克努森

摘要。我们纠正了标题所指论文中的一个错误。论证的一部分被组织成一种通用方法，用于确定（导出）函子何时经由某个固定的 Serre 子范畴分解；这一方法或许具有更广泛的意义。

1. 引言

本文旨在更正 [ADCK22第 3 条引理15]的证明。我们先回顾一些相关概念和记号。首先， Γ表示边集为 $E(\Gamma)$的图，而 Γ_v 表示通过在某条（固定的）边 v 上添加一个二价顶点 e，再将该顶点展开后得到的图 Γ——参见[ADCK22第 2 节。2]的边集与 Γ_v 的边集相同，只是 Γ中那条固定边 Γ 被拆分成了两条边，分别记为 e和 e'。

其次，我们将关注给定背景集合 X的（无序）划分 P，也就是说， P 是由互不相交的子集组成的集合，这些子集称为块，其并集覆盖 X。当 x 和 y 位于 P的同一块中时，我们记作 $x \sim_P y$ 。在我们的情形中， X 将是多项式环 $\mathbb{Z}[X]$的生成元集合，我们将其视为一个分次环，其中 X 的权为 1。划分 P 确定了一个商映射$\mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[P]$, 据此我们将目标视为源上的一个模。

当背景集合是图的边集时，我们可以谈论“驯服”划分。这里大多用不到这一概念的细节，但感兴趣的读者可参阅 [ADCK22，定义 3。2]。[1] 由 $E(\Gamma)$的所有驯服划分确定的模，连同它们的分次移位，生成一个 Serre 子范畴，即驯顺的 $\mathbb{Z}[E(\Gamma)]$-模范畴。记$\mathrm{Tor}_{e-e'}(M)$ 为$(e-e')$-挠子模 M，我们的主要结果如下。

命题 1.1。若 M 是一个驯顺的 $\mathbb{Z}[E(\Gamma_v)]$-模，则 $\mathbb{Z}[E(\Gamma)]$-模$M/(e-e')$ 以及$\mathrm{Tor}_{e-e'}(M)$ 也都是驯顺的。

这一结果的第一个断言是《前引文》中我们感兴趣的引理。第二个断言在那里被错误地声称为显然成立，并被用来推导第一个断言；事实上，这两个断言在逻辑上等价，证明难度也相当。

简言之，我们的策略是先观察到这两个断言对驯性模范畴的生成元都成立，然后对该范畴的一个自然滤过应用归纳法。值得强调的是，诺特性在错误的论证中并未出现，但在这里却起着至关重要的作用。

[1]细心的读者会注意到，这一定义中包含一个与同调次数对应的参数。对我们而言，这个参数始终固定不变，因此为使表述简洁，我们将其省略。

具体而言，论证分为三个部分，分别对应引言之后的三个简短章节。第一部分具有很强的普遍性，建立了一个框架，用以证明右正合函子及其导出函子可经由目标范畴的一个 Serre 子范畴分解。第二部分仍具有一定普遍性，将这一框架应用于诺特环上的模这一情形。第三部分则专门讨论*loc. cit.* 这一情形，并利用前文的结果证明所讨论的结论。

1.1. **约定**。 环和模按“权”而非“次数”分次，也就是说，我们使用不包含任何 Koszul符号的张量积对称同构。因此，交换分次环是严格交换的，而非“分次交换”的。

1.2. **致谢**。 第三位作者受益于美国国家科学基金会 DMS2551600 项目的资助。

2. 经由 Serre 子范畴分解

本节中，我们固定一个阿贝尔范畴之间的右正合函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，其中 $\mathcal{A}$ 有足够多的投射对象，并固定一个子范畴 $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$。将 F 的第 i 个左导出函子记为 F_i，我们将探讨何时 F_i 经由 $\mathcal{B}_0$分解，也可能需要先将其限制到定义域的某个子范畴。

定义 2.1。 相对于子范畴 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$，我们称 F 具有性质

O(i) 若 $F_i(A) \in \mathcal{B}_0$，则当 A 是 $\mathcal{C}$中的一个**对象** 时；**Q(i)** 若 $F_i(A) \in \mathcal{B}_0$，则当 A 是 $\mathcal{C}$中某个对象的**商对象** 时；**S(i)** 若 $F_i(A) \in \mathcal{B}_0$，则当 A 是 $\mathcal{C}$中某个对象的**子对象** 时；以及**E(i)** 若 $F_i(A) \in \mathcal{B}_0$，则当 A 是 $\mathcal{C}$中对象的**扩张** 时。

按照约定，对于 $i < 0$，每个条件都自动成立。

我们记录关于这些性质的以下简单观察。

引理 2.2. 设 $\mathcal{B}_0$ 是一个 *Serre* 子范畴。

(1) 若相对于 $\mathcal{C}$满足性质 **O(i)**，则性质 **E(i)**也成立。*(2)* 若相对于 $\mathcal{C}$满足性质 **O(i)**和**S(i-1)**，则性质**Q(i)**也成立。

证明。 我们从正合列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 开始。对于第一个断言，考虑由此得到的正合列 $F_i(A) \to F_i(B) \to F_i(C)$。由**O(i)**，若 A 和 C 属于 $\mathcal{C}$，则 $F_i(A)$ 和 $F_i(C)$ 属于 $\mathcal{B}_0$；结合假设 $\mathcal{B}_0$ 是 Serre 子范畴，即得所求。对于第二个断言，考虑由此得到的正合列 $F_i(B) \to F_i(C) \to F_{i-1}(A)$。由**O(i)**和**S(i-1)**，若 B 属于 $\mathcal{C}$，则$F_i(B)$ 和 $F_{i-1}(A)$ 分别属于 $\mathcal{B}_0$，其余证明同上。□

为陈述本节的主要结果，我们固定一个子范畴 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$，并将其生成的 Serre 子范畴记作 $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$。

命题 2.3. 设 $\mathcal{B}_0$ 是一个 *Serre* 子范畴。若对于每个 $i \geq 0$，性质**O(i)** 和**S(i)** 相对于 $\mathcal{G}$ 都成立，则对于每个 $i \geq 0$，性质 **O(i)** 都相对于$\mathcal{A}_0$ 成立。

注2.4。 由于 $\mathcal{A}_0$ 是 Serre，因此在命题 2.3 的情形下，另外三个性质对每个 $i \geq 0$也成立。

为证明这一点，我们将使用一系列范畴，在$\mathcal{G}$和 $\mathcal{A}_0$之间进行插值。

定义 2.5。我们称 $A \in \mathcal{A}$ 为类型 **0**，当且仅当 $A \in \mathcal{G}$。递归地，我们称A 为类型 n，如果它是类型为 $n-1$ 的对象的子对象、商对象或扩张。

将由所有类型为 n 的对象张成的满子范畴记作 $\mathcal{A}_0^{(n)} \subseteq \mathcal{A}$，我们有 $\mathcal{G} = \mathcal{A}_0^{(0)}$ 和 $\mathcal{A}_0^{(n)} \subseteq \mathcal{A}_0^{(n+1)}$。按照约定，对于 $n < 0$，我们令 $\mathcal{A}_0^{(n)} = \{0\}$。

引理 2.6。我们有 $\mathcal{A}_0 = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{A}_0^{(n)}$。

证明。由于 $\mathcal{A}_0$ 是一个包含 $\mathcal{G}$的 Serre 子范畴，由归纳法可得$\mathcal{A}_0$ 包含 $\mathcal{A}_0^{(n)}$ 对每个 $n \geq 0$都成立；因此，根据 $\mathcal{A}_0$的定义，只需证明这个并集是一个 Serre 子范畴，而这由定义2.5立即可得。□

论证中的主要技术步骤如下。

引理 2.7。若相对于 $\mathcal{A}_0^{(n+1)}$，性质 **Q(i)** 和 **E(i)** 成立，且若相对于 $\mathcal{A}_0^{(n)}$，性质**S(i)**成立，则相对于 $\mathcal{A}_0^{(n+1)}$ ，性质 **S(i)** 成立。

证明。给定一个子对象 $S \subseteq A$，它与 A 一起构成类型为 $n+1$ 的对象，我们希望证明 $F_i(S) \in \mathcal{B}_0$。需要考虑三种情况。首先，若 A 是类型为 n 的对象 B 的子对象，则 S 也是 B 的子对象；因此，由于相对于 $\mathcal{A}_0^{(n)}$，性质**S(i)** 成立，所需结论便可得出。其次，假设 A 是类型为 n 的对象 B 的商对象，并考虑拉回图

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & A. \end{array}$$

由于下方的箭头是单态射，上方的箭头也如此，因此 $P \in \mathcal{A}_0^{(n+1)}$。由于右侧的箭头是满态射，左侧的箭头也如此（我们利用了 $\mathcal{A}$ 是阿贝尔的这一点），所以所需结论由相对于 $\mathcal{A}_0^{(n+1)}$ 的性质**Q(i)** 得出。最后，假设给定正合列 $0 \to B \to A \to C \to 0$，其中 B 和 C 的类型为 n。我们将此列扩充为具有正合行的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & S & \longrightarrow & S/P & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & A & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

其中，P 的定义是要求左侧的方块为拉回。根据第一同构定理，映射 $S/P \to C$ 同构于 $S \to C$的像的包含映射；特别地，它是一个单态射，因此我们得出 P 和 S/P均为 $n+1$类型。由于性质**E(i)** 相对于 $\mathcal{A}_0^{(n+1)}$ 成立，结论即得。□

我们还记录以下引理，它可由定义直接得出。

引理 2.8。 如果相对于 $\mathcal{A}_0^{(n)}$ 满足性质**O(i)**、**Q(i)**、**S(i)**和**E(i)**，那么相对于 $\mathcal{A}_0^{(n+1)}$ 就满足性质**O(i)** 。

命题 *2.3* 的证明。 令 $P(i,\ n)$ 表示性质 **O(i)**、**Q(i)**、**S(i)** 和 **E(i)** 相对于 $\mathcal{A}_0^{(n)}$ 成立。由引理 2.6可知，该结论等价于对每个 $P(i,\ n)$， $i,\ n \geq 0$（见备注 2.4），都满足 $P(i,n)$。

我们首先注意到，命题 $P(i,n-1)$ 和 $P(i-1,n)$ 合起来蕴含 $P(i,n)$。假设 $P(i,n-1)$，由引理 2.8 可知，性质 O(i) 相对于 $\mathcal{A}_0^{(n)}$ 成立，因此由引理 2.2(1) 可知性质 E(i) 成立。再假设 $P(i-1,n)$ 也成立，由引理 2.2(2) 可得性质 Q(i) 相对于 $\mathcal{A}_0^{(n)}$ 成立。最后，$P(i,n-1)$ 和引理 2.7 现在蕴含 $P(i,n)$。

根据我们的假设和引理 2.2，对每个 $i \geq 0$， $P(i,0)$ 都成立，因此只需证明对每个 $n \geq 0$， $P(0,n)$ 成立即可。由于 $P(-1,n)$ 是空泛成立的，上述论证表明， $P(0,n-1)$ 蕴含 $P(0,n)$，因此对 n 使用归纳法，可将该命题归结为 $P(0,0)$，而这由假设成立。□

3. 诺特性的作用

现在，我们通过分别取 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 为交换分次环 R 和 S 上的有限生成分次模范畴，来具体化上一节的设定。我们固定一个生成元集合 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$、一个右正合函子$F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，以及一个 Serre 子范畴 $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$。

命题 3.1。 设 R 是诺特的。若 $\mathcal{G}$对循环子模的形成封闭，那么只要性质**O(0)** 成立，性质 **S(0)** 就相对于 $\mathcal{G}$ 成立。

证明。 设 S 是生成元 $G \in \mathcal{G}$ 的一个子模。由诺特性，对 $1 \leq i \leq n$ 存在 $x_i \in S$，使得

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} Rx_i,$$

其中 $Rx_i \subseteq G$ 是由 x_i 生成的循环子模。于是，由右正合性，典范映射

$$\bigoplus_{i=1}^{n} F_0(Rx_i) \to F_0(S)$$

是一个满态射。我们对 $\mathcal{G}$ 的假设以及性质 **O(0)** 保证源的每个直和项都落在 $\mathcal{B}_0$ 中；又由于 $\mathcal{B}_0$ 是塞尔的，故目标亦然。□

4. 关于驯顺模的应用

我们现在进一步专门考虑 [ADCK22], 的设定，如引言中部分回顾的那样。首先，我们记录如下结果，即引理 3.14（见前引文献）。

引理 4.1. 若 P 关于 Γ_v 是驯顺的，则把 P 中包含 e 的块与包含 e' 的块合并后得到的划分关于 Γ 是驯顺的。

我们还需要以下简单的观察结果。

引理 4.2. 设 P 是集合 X 的一个划分。$\mathbb{Z}[P]$ 的每个循环 $\mathbb{Z}[X]$-子模都同构于 $\mathbb{Z}[P]$ 的一个分次移位。

证明。 只需考虑情形 $X = P$，此时该断言等价于 $\mathbb{Z}[X]$ 是整环这一事实。□

为了应用上文建立的一般理论，我们现在来确定各项。阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 是有限生成分次 $\mathbb{Z}[E(\Gamma_v)]$-模的范畴（分别为 $\mathcal{B}, \Gamma$）。Serre 子范畴 $\mathcal{A}_0$ 由集合 $\mathcal{G}$ 生成，该集合由形如 $\mathbb{Z}[P]$ 的模的分次移位构成，其中 P 是 $E(\Gamma_v)$的一个驯服划分；而 $\mathcal{B}_0$ 则由对应于 Γ 的集合生成。函子 F 是沿自然同态 $\mathbb{Z}[E(\Gamma_v)] \to \mathbb{Z}[E(\Gamma)]$, 的标量变换函子，即 $F(M) = M/(e - e')$。

根据这些设定，命题 1.1指出，性质 $\mathbf{O(0)}$ 和 $\mathbf{O(1)}$ 相对于 $\mathcal{A}_0$成立。

命题 *1.1*的证明。 由命题 2.3，且由于 $F_i \equiv 0$ 对于 $i > 1$成立，只需证明性质 $\mathbf{O(i)}$ 和 $\mathbf{S(i)}$ 相对于 $\mathcal{G}$ 对于 $i \in \{0, 1\}$成立。性质 $\mathbf{O(0)}$ 正是引理 4.1；命题 3.1 和引理 4.2则确立了性质 $\mathbf{S(0)}$。至于 $\mathbf{O(1)}$，显然我们有

$$F_1(\mathbb{Z}[P]) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}[P] & \text{if } e \sim_P e' \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中属于 $\mathcal{B}_0$ 根据引理4.1。最后，性质 $\mathbf{S(1)}$ 由性质 $\mathbf{O(1)}$以及 F_1 是左正合的这一事实得出。□

参考文献

[ADCK22] B. H. An、G. C. Drummond-Cole 和 B. Knudsen，图辫群的渐近同调，Geom. Topol. **26** (2022)，1745–1771。