arXiv:2602.20335v1 [math.AG] 23 Feb 2026

G-非交换极小模型纲领

DONGJIAN WU 和 NANTAO ZHANG

摘要。本文研究G-等变非交换极小模型纲领（G-NMMP），这是对 [Hal24]中提出的框架的等变推广。该纲领旨在构造导出范畴中G-等变相干层的 Bridgeland 稳定条件空间中的拟收敛路径。对于有限群，我们采用诱导技巧，从非等变情形构造此类路径。对于代数群作用，我们引入 $\mathbb{T}$-稳定性条件的概念，以重新表述这一设想，随后利用小量子上同调为等变射影空间构造拟收敛路径。

目录

1. 引言 1
2. 预备知识 5
3. G-非交换极小模型纲领 10
4. 诱导拟收敛路径 19
5. $\mathbb{T}$-稳定性条件的拟收敛路径 28
6. 与双有理极小模型纲领的关系 41
参考文献 43

1. 引言

1.1. **动机**。经典极小模型纲领（MMP）旨在通过一系列双有理变换来简化代数簇，最终得到极小模型（其典范类非负）或莫里纤维空间。在存在群作用时，G-等变极小模型纲领（G-MMP）在整个过程中保留群作用。经典 MMP 中，二维情形已得到充分理解：每一步都对应于对一条（−1）曲线的压缩。三维情形则引入了新的现象，例如翻转 [KM98]。有限群的二维G-MMP 也已发展成熟，并在许多情况下得到成功应用 [Bla09；Dol10；Tsy11]。关于[Pro21] 的综合性综述详细讨论了G-MMP，包括其在高维双有理几何中的应用。

关键词和短语。Bridgeland 稳定条件、等变导出范畴、半正交分解、量子上同调。

从范畴论视角来看，光滑射影簇X 的经典 MMP 与相干层有界导出范畴的结构密切相关 $D^b(X)$。Bondal 和 Orlov 的开创性工作 [BO95] 证明，MMP 中出现的双有理变换（例如除子收缩和简单翻转）会诱导 $D^b(X)$ 的半正交分解。当 X 带有约化代数群G的作用时，我们考虑G-等变导出范畴 $D^b{}_G(X)$，其对象是G-等变相干层。与非等变情形类似，G-等变双有理映射也可以诱导 $D^b{}_G(X)$ 的半正交分解。这为通过导出范畴研究G-MMP 提供了范畴论框架。

双有理几何与半正交分解之间的经典对应关系，进一步推动了非交换极小模型纲领（NMMP）的发展。该纲领由 Halpern-Leistner [Hal24]提出，直接作用于三角范畴，利用 Bridgeland 稳定条件[Bri09]，在稳定性流形中通过拟收敛路径构造半正交分解。NMMP 的一个重要动机来自量子上同调。对于 Fano簇X，量子乘积 $\star_\tau$ 通过 Gromov-Witten 不变量使经典杯积发生形变，而相应的量子微分方程控制着量子联络的平坦截面 [Iri09]。Dubrovin 猜想及其细化版本 Gamma 猜想 II [GGI16], 预言，该方程的解的解析性质与$D^b(X)$ 中的例外集之间存在深刻对应。这表明，中心荷常常类似于周期积分的稳定条件，应当能够由量子微分方程构造出来。

等变对应物——等变Gromov-Witten理论与等变量子微分方程——在文献中已有充分研究（见[Kon95; Giv96; CK99; LS17; AF24]）。因此，研究以下主题之间的关系是自然的：

（1）$D^b{}_G(X)$ 的半正交分解；（2）X 在G作用下的等变量子上同调；（3）稳定条件空间 $\mathrm{Stab}(D^b{}_G(X))$ 中的拟收敛路径。

本注记的目标是发展G-等变非交换极小模型纲领（G-NMMP），作为系统纳入群作用的NMMP的等变推广。

1.2. **主要设想**。 在 [Hal24], 中，作者在 NMMP 框架内提出了一项设想，将半正交分解、稳定条件与（截断的）量子微分方程联系起来。在等变情形下，自然会寻求一种纳入群作用的类似设想。我们工作中的一个关键新要素是 $\mathbb{T}$-稳定条件的概念（见第5.1节），它推广了q-稳定条件，该概念由[IQ23]引入。回顾一下， $\mathbb{T}$-范畴 $\mathcal{D}_{\mathbb{T}}$ 由一个三角范畴 $\mathcal{D}$ 及其m 个交换自等价

$$T_i : \mathcal{D}_{\mathbb{T}} \to \mathcal{D}_{\mathbb{T}}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

定义 1.1 (定义 5.3)。 一个 预$\mathbb{T}$-稳定条件 $(\sigma,\ \mathbf{s})$ 定义在一个 $\mathbb{T}$-范畴$\mathcal{D}_{\mathbb{T}}$ 上，由一个（ Bridgeland）预稳定条件 $\sigma=(Z,\ \mathcal{P})$ 定义在 $\mathcal{D}_{\mathbb{T}}$ 上，以及一个元组 $\mathbf{s}=(s_1,,\ \ldots,\ s_m)\in\mathbb{C}^m$ 满足

$$T_i(\sigma)=s_i\cdot\sigma,\ \text{for } i=1,\ldots,m. \tag{1}$$

在假设 5.6 下，格罗滕迪克群 $K(\mathcal{D}_{\mathbb{T}})$ 可赋予一个范数 $\|\cdot\|$，借此我们可以表述预-$\mathbb{T}$-稳定性条件的 $\mathbb{T}$-支撑性质（见定义 5.7）。若预-$\mathbb{T}$-稳定性条件（σ,$\mathbf{s}$）在$\mathcal{D}_{\mathbb{T}}$ 上满足 $\mathbb{T}$-支撑性质，则称其为 $\mathbb{T}$-稳定性条件。对于固定的元组 $\mathbb{T}$稳定条件空间 ${}_{\mathbf{s}}\mathcal{D}_{\mathbb{T}}$ 表示所有 $\mathbb{T}$关于该元组的 $\mathbf{s}\in\mathbb{C}^m$的 -稳定性条件所构成的空间。命题 5.8 确立了该空间的变形性质。

对于带有连通约化代数群G作用的光滑射影簇X，等变范畴$D^b_{\ G}(X)$自然地继承了一个 $\mathbb{T}$-范畴的结构，其中涉及G 的极大环面（例5.2）。因此，我们得到相应的 $\mathbb{T}$-稳定性条件空间，记为$\mathbb{T}$稳定条件空间$_{\mathbf{s}}(X)$:= $\mathbb{T}$稳定条件空间$_{\mathbf{s}}(D^b_{\ G}(X))$。我们的主要设想如下:

提案 1.2 (提案 3.11)。 设 $\pi\colon X\ \to Y$ 是光滑射影簇 X的一个G-压缩，且该簇的维数为m； $\Phi_t^G\in\mathrm{End}(H^*_{\ G}(X;\mathbb{C}))$ 是G-截断量子微分方程 (5) 的一个基本解。那么，对于任意一般的元组 $\mathbf{s}=(s_1,..,s_m)\ \in\mathbb{C}^m$，存在一条准收敛路径 $\sigma_t^G=(Z_t^G,\mathcal{P}_t^G)$，对应于 $\mathbb{T}$稳定条件空间$_{\mathbf{s}}(X)$ 中的$t\in[t0,\infty$，其中心荷具有如下形式

$$Z_t^G(\mathcal{E})=\mathrm{ev}_{\mathbf{s}}\int_X^{eq}\Phi_t^G(v^G(\mathcal{E})),$$

对于 $\mathcal{E}\in K^G(X)$，其中 ev$_{\mathbf{s}}$ 是关于 $\mathbf{s}$ 的求值映射，详见第 3.3节。

注 1.3。 s **的一般性**确保求值映射 ev$_{\mathbf{s}}$ 给出定义良好的复数。当G 是有限群时，无须假设连通性。此外，由于环面的极大子环面 $\mathbb{T}$ 是平凡的，我们有 $\mathbb{T}$稳定条件空间$_{\mathbf{s}}(X)$ = = 稳定条件空间$(D^b_{\ G}(X))$。在此情形下，还可以考虑支撑在陈－饶安上同调环所给格上的稳定条件，以及由轨形Gromov-Witten理论导出的量子微分方程 [CR04;CR02]。

在 [Hal24的注记 13], 中，有人建议提案1.2 的准收敛路径应从一个几何稳定性条件出发——在该条件下，所有点的凝聚层都是稳定的，且具有相同的相位。在等变情形下，我们引入G-点层的概念，并用它们来为$D^b_{\ G}(X)$定义几何稳定条件的类似物（定义3.15）。

1.3. **主要结果**。 基于 [MMS09； QZ25； DHL25], 中发展出的诱导稳定条件的技巧，我们的第一个结果展示了如何将非等变情形中的拟收敛路径提升到等变情形，从而为有限群作用下的提案 1.2 构造解。

定理 *1.4*（定理 *4.5*）。设 X 是一个带有有限群 G 作用的光滑射影簇。设 $\sigma_t = (Z_t, \mathcal{P}_t)$ 对于 $t \in [t0, \infty)$ 是 $Stab(X)^G$ 中的一条拟收敛路径，它通过（*5*）的基本解 Φ_t 求得非等变提案 *1.2* 的解。那么，它诱导出 $Stab(D^b\ G(X))$ 中的一条拟收敛路径 σ_t^G，该路径通过（*5*）的基本解 Φ_t^G 求得提案 *1.2* 的解，并保留张成条件。此外，若 σ_{t_0} 是几何的，那么 $\sigma_{t_0}^G$ 也是几何的。

这里，张成条件确保量子微分方程中中心荷的渐近增长率对应于真正的极限半稳定对象（见定义4.4）。作为推论，我们恢复了 [KN25]关于通过拟收敛路径诱导半正交分解的结果。回顾一下，在 [Hal24], Halpern-Leisner 验证了命题1.2对射影直线成立；后续工作 [Zul24] 研究了射影空间，而 [Kar24] 研究了爆破曲面的 NMMP。最近， [KRZ26]将拟收敛提升的构造推广到更多 Fano 例子，例如格拉斯曼流形、二次超曲面以及光滑三次三维簇和四维簇。将定理 1.4 应用于这些已知的非等变解，我们得到了显式的拟收敛路径族，它们解决了等变命题 1.2。具体例子将在第 4.2 节讨论。

在第5.2节中，我们考察G-NMMP，针对配备环面 $\mathbb{T}$-作用的射影空间。设 $\Omega_{\mathbb{T}}$ 为 $\mathbb{C}^m$ 中超平面的补集

$$z_i - z_j = k, \quad i, j = 1, \cdots, m, i \neq j, k \in \mathbb{Z}$$

并定义

$$H_{\mathbb{T}}^{\Omega_{\mathbb{T}}}(\mathbb{P}^{m-1}) = H_{\mathbb{T}}^*(\mathbb{P}^{m-1}) \otimes_{H_{\mathbb{T}}(\mathrm{pt})} \mathcal{O}_{\Omega_{\mathbb{T}}},$$

其中 $\mathcal{O}_{\Omega_{\mathbb{T}}}$ 表示 $\Omega_{\mathbb{T}}$上的全纯函数环。我们的第二个结果如下:

定理 1.5（定理 5.20）。对任意 $\mathbf{s} \in \Omega_{\mathbb{T}}$，存在 $R > 0$，使得对每个可容许的 θ，存在一条拟收敛路径 $\sigma_t = (Z_t, \mathcal{A}_t) \in \mathbb{T}$稳定条件空间$_{\mathbf{s}}(\mathbb{P}^{m-1})$，对于

$$t = re^{-2\mathbf{i}\pi\theta}, \quad r \in (R, +\infty)$$

且 $Z_t(\alpha) = \mathrm{ev}_{\mathbf{s}}(\int_{\mathbb{P}^{m-1}} T \Phi_t(\mathrm{Ch}_{\mathbb{T}}(\alpha)))$，其中 Φ_t 是等变量子微分方程的一个基本解，并线性延拓至端$(H_{\mathbb{T}}^{\Omega_{\mathbb{T}}}(\mathbb{P}^{m-1}))$，在该扇区内有效

$$\frac{n}{m} - 1 < \phi < \frac{n}{m}, \quad n \in \mathbb{Z}, \phi \in \mathbb{R}.$$

当$m = 3$（即对于 $\mathbb{P}^2$）时，我们在定理5.22 中证明，拟收敛路径可以选择为从一个几何点出发。同样的论证也可能适用于任何满足 Gamma猜想 II [GGI16]的 Fano簇X。我们预计，当$t \to \infty$时，等变参数不会影响渐近行为，而量子微分方程的基本解应当再次产生一条与半正交分解对应的拟收敛路径

$$D_{\mathbb{T}}^b(X) = \langle \mathcal{E}_1 \otimes \mathrm{Rep}(\mathbb{T}), \cdots, \mathcal{E}_n \otimes \mathrm{Rep}(\mathbb{T}) \rangle$$

如同在射影空间情形中一样。

最后，在第 6 节中，我们基于 [Hal24] 探讨与经典双有理几何的联系。对于有限群G，我们证明，在提案 1.2 和猜想 3.8 的假设下，相应的 D-等价猜想成立（推论 6.3），且 Dubrovin 猜想的单向蕴含成立（命题 6.5）。

1.4. 内容。第 2 节回顾三角范畴上的稳定性条件、等变层的导出范畴以及半正交分解的基本概念。第 3 节介绍 G-NMMP 的框架；该框架通过纳入约化代数群 G 在射影簇及其导出范畴上的作用，扩展了经典 NMMP。第 4 节介绍在有限群情形下构造 Stab(D^b G(X)) 中拟收敛路径的技巧，以满足 NMMP 中提案 3.11 的要求。第 5 节引入 $\mathbb{T}$-稳定性条件在 $\mathbb{T}$-范畴上的概念，并证明 $\mathbb{T}$-稳定条件空间的变形性质。随后，我们在 $\mathbb{T}$-稳定条件空间中构造拟收敛路径，以利用小量子上同调满足提案 3.11 对等变射影空间的要求。第 6 节说明，猜想 3.8 和提案 3.11 如何将一些非等变双有理结果推广到有限群的 G-等变情形。

致谢。 D. W. 感谢 Atsushi Takahashi 在其整个研究过程中给予的支持。N. Z. 感谢 Will Donovan 在研究期间提供的支持，并感谢 Tomohiro Karube 和 Yukinobu Toda 在作者访问 Kavli, IPMU 期间的热情接待和富有成效的讨论。我们还感谢 Yiran Cheng、Fabian Haiden、Koshiro Murai 和 Tianle Mao 提供的有益讨论。D. W. 获得 JSPS KAKENHI KIBAN(S) 21H04994 的资助。N. Z. 获得丘成桐数学科学中心、清华大学的资助。

2. 预备知识

本节基于 [BO95；BO02；Bri07；Ela15；CV21；BO23]，回顾三角范畴上的稳定条件、等变层的导出范畴以及半正交分解的基本概念。

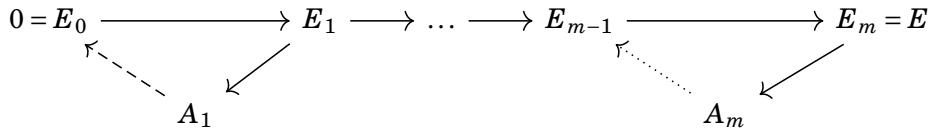
2.1. **Bridgeland 稳定条件**。 设 $\mathcal{D}$ 是一个三角范畴，$K(\mathcal{D})$ 为 $\mathcal{D}$ 的格罗滕迪克群，其秩可能是无限的。三角范畴 $\mathcal{D}$ 上的（*Bridgeland*）预稳定条件 $\sigma = (Z, \mathcal{P})$ 由一个群同态 $Z : K(\mathcal{D}) \to \mathbb{C}$（称为中心荷）以及一族满加性子范畴 $\mathcal{P}(\phi) \subset \mathcal{D}$（对每个 $\phi \in \mathbb{R}$），即切片，所刻画。这一对对象需满足以下公理：

(a) 若 $0 \neq E \in \mathcal{P}(\phi)$，则 $Z(E) \in \mathbb{R}_{>0} \cdot \exp(\mathbf{i}\pi\phi)$；(b) 对所有 $\phi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\phi + 1) = \mathcal{P}(\phi)[1]$,(c) 若 $\phi_1 > \phi_2$ 且 $A_i \in \mathcal{P}(\phi_i) (i = 1, 2)$，则 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A_1, A_2) = 0$,

(d) 对于每个非零对象 $E \in \mathcal{D}$，存在一个有限实数序列

$$\phi_1 > \phi_2 > \cdots > \phi_m$$

以及一组称为*Harder-Narasimhan*滤过的三角



满足对所有 $1 \le i \le m$，$A_i \in \mathcal{P}(\phi_i)$。

设E 是 $\mathcal{D}$ 中的一个非零对象，且存在如公理 (d) 所述的 Harder-Narasimhan滤过。我们为E关联两个数:

$$\phi_\sigma^+(E) := \phi_1, \quad \phi_\sigma^-(E) := \phi_m,$$

其中 ϕ_1 和 ϕ_m 是滤过中出现的第一个和最后一个相位。若对象$E \in \mathcal{P}(\phi)$对某个 $\phi \in \mathbb{R}$ 成立，则称其为半稳定；此时，$\phi = \phi_\sigma^{\pm}(E)$。此外，若$E$ 是 $\mathcal{P}(\phi)$中的一个简单对象，则称其为稳定。对于 $\mathbb{R}$中的一个区间I，我们定义 $\mathcal{P}(I)$

$$\mathcal{P}(I) = \{E \in \mathcal{D} \mid \phi_\sigma^{\pm}(E) \in I\} \cup \{0\}.$$

因此，对于任意 $\phi \in \mathbb{R}$，$\mathcal{P}[\phi, \infty)$ 和 $\mathcal{P}(\phi, \infty)$ 都是 $\mathcal{D}$上的 t-结构，其心分别为 $\mathcal{P}((\phi, \phi+1])$ 和 $\phi((\phi, \phi+1])$。根据 [Bri07],, 每个范畴 $\mathcal{P}(\phi) \subset \mathcal{D}$ 都是阿贝尔范畴；对于长度小于 1 的任意区间 I，子范畴 $\mathcal{P}(\mathrm{I}) \subset \mathcal{D}$ 是拟阿贝尔范畴。若存在 $\eta > 0$，使得对每个 $\mathrm{t} > \mathbb{R}$，拟阿贝尔范畴 $\mathcal{P}((\mathrm{t} - \eta, \mathrm{t} + \eta)) \subset \mathcal{D}$都是有限长度的，则称稳定性条件 σ 为局部有限。下文中，我们将注意力限制在满足局部有限性性质的预稳定条件上。满足局部有限性性质的预稳定条件称为稳定性条件。我们用 $\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ 表示 $\mathcal{D}$ 上的稳定性条件集合。 [Bri07] 的主要结果断言，$\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ 具有自然的复结构:

定理 2.1 ([Bri07，定理 1。2])。 稳定条件空间$\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$具有复流形的结构，并且映射

$$\mathrm{Stab}(\mathcal{D}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K(\mathcal{D}), \mathbb{C})$$

将稳定条件映到其中心荷的映射是局部同构。

现在假设 $K(\mathcal{D})$ 是有限秩自由的，即 $K(\mathcal{D}) \cong \mathbb{Z}^{\oplus n}$ 对某个 n 成立。在这种情况下，可以将支撑性质 （参见 [KS08]）表述为预稳定条件。固定 $K(\mathcal{D}) \otimes \mathbb{R}$上的范数 $\|\cdot\|$。若预稳定条件 $\sigma = (Z, \mathcal{P})$ 满足支撑性质，则存在常数 $C_\sigma > 0$，使得对每个 σ-半稳定对象 $0 \neq E \in \mathcal{D}$,

$$\|E\| \le C_\sigma |Z(E)|. \tag{2}$$

本文始终以光滑射影簇上的相干层有界导出范畴为主要背景。在这种情况下，格罗滕迪克

群取为数值格罗滕迪克群，并在$K(\mathcal{D})\otimes\mathbb{R}$上定义范数，其中$K(\mathcal{D})$现在表示数值格罗滕迪克群。根据 [Bri08], ，支撑性质蕴含局部有限性条件。此外，具有支撑性质的预稳定条件空间也具有复结构，如定理2.1所述。鉴于此，我们将此类预稳定条件简称为稳定性条件，并继续以 Stab($\mathcal{D}$) 表示其空间。

令 Aut($\mathcal{D}$) 为 $\mathcal{D}$ 的自等价群，令 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ 为 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 中行列式为正的元素所成的群，并令 $\widetilde{\mathrm{GL}}_2^+(\mathbb{R})$ 为 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ 的万有覆盖。如 [Bri07], 所述，Aut($\mathcal{D}$) 在 Stab($\mathcal{D}$) 上有自然作用，而群 $\widetilde{\mathrm{GL}}_2^+(\mathbb{R})$ 在其上有一个右作用。具体而言，对于 $\mathrm{T}\in \mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ 以及一个稳定性条件 $\sigma=(\mathrm{Z},\mathcal{P})$，我们定义

$$T\sigma=(Z',\mathcal{P}'),\quad Z'=ZT^{-1},\quad \mathcal{P}'_\phi=T\mathcal{P}_\phi.$$

对于任意元素 $g=(T,f)\in\widetilde{\mathrm{GL}}_2^+(\mathbb{R})$，定义

$$\sigma[g]=(Z[g],\mathcal{P}[g]),\quad Z[g]=T^{-1}Z,\quad \mathcal{P}[g]_\phi=\mathcal{P}_{f(\phi)}.$$

特别地，对于 $a+\mathbf{i}b\in\mathbb{C}\subset\widetilde{\mathrm{GL}}_2^+(\mathbb{R})$，有

$$Z[a+\mathbf{i}b]=e^{-\mathbf{i}\pi a+\pi b}Z,\quad \mathcal{P}[a+\mathbf{i}b]_\phi=\mathcal{P}_{\phi+a}.$$

2.2. **G-等变三角范畴**。 令 $\mathcal{D}$ 为一个在域 $\mathbf{k}$ 上线性的预加性范畴，并令G 为一个代数群。我们首先讨论 G 为有限群的情形。在此情形下，除非 $\mathbf{k}$ 是代数闭域，否则我们假设 $(\mathrm{char}(\mathbf{k}),|G|)=1$。$G$ 在 $\mathcal{D}$ 上的一个（右）作用 由一族自等价 $(\phi_g:\mathcal{D}\to\mathcal{D})_{g\in G}$ 以及自然同构组成

$$(\varepsilon_{g,h}:\phi_g\phi_h\to\phi_{hg})_{g,h\in G}$$

满足相容条件：对于所有的 f、g、$h\in G$，下图交换：

$$\begin{array}{ccc}
\phi_f\phi_g\phi_h & \xrightarrow{\varepsilon_{g,h}} & \phi_f\phi_{hg}\\
{\scriptstyle\varepsilon_{f,g}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon_{f,gh}}\\
\phi_{gf}\phi_h & \xrightarrow{\varepsilon_{gf,h}} & \phi_{hgf}
\end{array}$$

给定这样的作用， $\mathcal{D}$ 中的G-等变对象是一个对偶 $(F,(\theta_g)_{g\in G})$，其中$F\in\mathcal{D}$，且每个 $\theta_g\colon F\to\phi_g(F)$ 都是一个同构，称为G-线性化，使得对于所有 g、$h\in G$，图表

$$\begin{array}{ccc}
F & \xrightarrow{\theta_g} & \phi_g(F)\\
{\scriptstyle\theta_{hg}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\phi_g(\theta_h)}\\
\phi_{hg}(F) & \xleftarrow{\varepsilon_{g,h}} & \phi_g(\phi_h(F))
\end{array}$$

可交换。一个从 $(F_1,(\theta_g^1))$ 到 $(F_2,(\theta_g^2))$ 的G-态射-等变对象是一个态射$f: F_1 \to F_2$，它属于 $\mathcal{D}$，且使图表

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \xrightarrow{\theta_g^1} & \phi_g(F_1) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta_g(f)} \\ F_2 & \xrightarrow{\theta_g^2} & \phi_g(F_2) \end{array}$$

对所有$g \in G$均成立。$\mathcal{D}$ 中的G-等变对象范畴记为 $\mathcal{D}_G$。对于子群$H \subset G$，限制函子

$$\mathrm{Res}_H^G : \mathcal{D}_G \to \mathcal{D}_H$$

定义为 $(F, (\theta_g)) \mapsto (F,(\theta_g|_H))$。反过来，诱导函子

$$\mathrm{Ind}_H^G : \mathcal{D}_H \to \mathcal{D}_G$$

将 $(F, (\theta_h))$ 送到

$$\left(\bigoplus_{[g]\in G/H} \phi_g F, (\theta_g^G) \right),$$

其中，对于每个陪集 $[g] \in G/H$，θ_g^G到直和项$\phi_{g_i}F$ 的限制由以下复合给出

$$\phi_{g_i}F \xrightarrow{\phi_{g_i}\theta_h} \theta_{g_i}\theta_h F \xrightarrow{\varepsilon_{g_i,h}} \phi_{g_i h}F \xrightarrow{\varepsilon_{g,g_j}^{-1}} \phi_g\phi_{g_j}F,$$

其中g_j和h 由$gg_j = g_i h$唯一确定。

例 2.2. 设G 为作用在概形X上的有限群，并对每个$g \in G$，令 $\phi_g := g^* : \mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{Coh}(X)$。典范同构：

$$\phi_g\phi_h = g^*h^* \xrightarrow{\sim} (hg)^* = \phi_{hg}.$$

给出$\varepsilon_{g、h}$，从而定义G 在 $\mathrm{Coh}(X)$ 上的作用。在此情形下，G-等变对象恰好是G-等变相干层（G-层）。我们记

$$\mathrm{Coh}_G(X) := (\mathrm{Coh}(X))_G, \quad D_G^b(X) := D^b(\mathrm{Coh}_G(X)).$$

若$\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}$，且$G$ 在$\mathbf{k}$上的光滑射影簇X 上自由作用，则商映射 $\pi: X \to X/G$ 诱导等价

$$\mathrm{Coh}(X/G) \cong \mathrm{Coh}_G(X), \quad D_G^b(X) \cong D^b(X/G),$$

其中该函子将$F \in \mathrm{Coh}(X/G)$映到$(\pi^*F,(\theta_g))$，且

$$\theta_g : \pi^*F = \bigoplus_{h\in G} h^*F \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{h\in G} g^*(h^*F).$$

现在设 G 是作用于一个簇 X 上的代数群。记 μ: G × G → G 为乘法，记 a : G × X → X 为 G 在 X 上的作用。对于 G × G、G × X 或 G × G × X 这类乘积，记 p_i 为到第 i 个因子的投影。此外，p_{12} 和 p_{23} 分别表示从 G × G × X 或 G × G × G 到前两个或最后两个因子的投影。X 上的 G-层是一个

层 F 在 X 上，并配有一个同构 $\theta: p_2^*F \to a^*F$，它是 $G\times X$ 上的层之间的同构，并且满足以下图表在 $G\times G\times X$ 上可交换：

$$\begin{array}{ccc} P_3^*F & \xrightarrow{p_{23}^*\theta} & (ap_{23})^*(F) \\ {\scriptstyle (\mu\times \mathrm{Id})^*\theta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{Id}\times a)^*\theta} \\ (a(\mu\times \mathrm{Id}))^*F & \xlongequal{\varepsilon} & (a(\mathrm{Id}\times a))^*F \end{array}$$

其中，ε 是函子的规范同构。我们将 G-层构成的阿贝尔范畴记作 $\mathrm{Coh}_G(X)$。G-等变对象之间的态射$\mathrm{Coh}_G(X)$ 中从 $(F1,\theta_1)$ 到 $(F2,\theta_2)$ 的态射是一个态射 $f: F_1\to F_2$，使得该交换图

$$\begin{array}{ccc} p_2^*F_1 & \xrightarrow{\theta_1} & a^*F_1 \\ {\scriptstyle p_2^*f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a^*f} \\ p_2^*F_2 & \xrightarrow{\theta_2} & a^*F_2 \end{array}$$

交换。于是，G-等变层的有界导出范畴定义为 $D^b{}_G(X) := D^b(\mathrm{Coh}_G(X))$。

设 $\pi: X\to \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ 是结构态射。它诱导出以下函子：

$$R\pi_*: D^b(X)\to D^b(\mathbb{C}),\quad R\pi_*^G: D^b_G(X)\to D^b(\mathrm{Rep}(G)),$$

其中，$\mathrm{Rep}(G)$ 是有限维复表示的范畴。对于两个对象 $\mathcal{E},\mathcal{F}\in D^b{}_G(X)$，我们定义

$$\mathrm{Hom}^\bullet_G(\mathcal{E},\mathcal{F}) := R\pi_*^G(E^*\otimes F)\in D^b(\mathrm{Rep}(G)),$$

其中，$E^* := R\mathscr{H}om(E,\mathcal{O}_X)$ 是 E 的通常对偶层。对于任意代数子群 $H\subset G$，限制函子 $\mathrm{Res}^G{}_H: D^b{}_G(X)\to D^b{}_H(X)$ 的定义类似于有限群情形。当指数 $[G:H]$ 有限时，诱导函子 $Ind^G{}_H$ 定义为 $\mathrm{Res}^G{}_H$ 的正合右伴随。

2.3. **半正交分解与G-例外集**。 回顾一下，三角范畴 $\mathcal{D}$ 的一个半正交分解 是一个集合 $\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_n$，由满三角子范畴构成，并满足

(1) 对所有 $1\le j<i\le n$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_i,\mathcal{D}_j)=0$；(2) $\mathcal{D}=$厚$\langle\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_n\rangle$，即 $\mathcal{D}$ 是包含 $\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_n$的最小三角子范畴。

若半正交分解的每个因子都存在稳定性条件，则称其为可极化。我们用 $\mathcal{D}=\langle\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_n\rangle$ 表示这样的分解。若满三角子范畴 $\mathcal{D}_1\subset\mathcal{D}$ 的包含函子 i: $\mathcal{D}_1\to\mathcal{D}$ 存在左伴随i^*（分别地，存在右伴随$i^!$），则称其为左可容许（分别地，右可容许）。左可容许子范畴 $\mathcal{D}_1\subset\mathcal{D}$ 诱导出半正交分解 $\mathcal{D}=\langle{}^\perp\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_1\rangle$，其中

$${}^\perp\mathcal{D}_1 := \{E\in\mathcal{D}\mid \mathrm{Hom}(E,\mathcal{D}_1[n])=0 \text{ for all } n\in\mathbb{Z}\}$$

是 $\mathcal{D}_1$的左正交。对偶地，右可容许子范畴 $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}$给出 $\mathcal{D} = \langle \mathcal{D}_1^{\perp}, \mathcal{D}_1 \rangle$，其右正交

$$\mathcal{D}_1^{\perp} := \{E \in \mathcal{D} \mid \mathrm{Hom}(\mathcal{D}_1[n], E) = 0 \text{ for all } n \in \mathbb{Z}\}.$$

若一个子范畴既是左可容许的又是右可容许的，则称其为可容许子范畴。

现在设X 是一个带有代数群G作用的光滑射影簇。记 Rep(G) 为G的有限维复表示所构成的范畴。

定义 2.3 ([CV21，定义 2.1])。 对象 $\mathcal{E} \in D^b{}_G(X)$ 称为G-例外的，若

$$\mathrm{Hom}_G^{\bullet}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \cong \mathbb{C}_G,$$

其中， $\mathbb{C}_G$ 表示D^b(Rep(G)) 中由G的平凡一维表示给出的、集中于零次的对象。若一个有序集合 ($\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$) 满足$G$-例外集的条件，则称其为$G$-例外集，若

(1) 每个 $\mathcal{E}_i$ 都是G-例外的；(2)
对所有$j > i$， $\mathrm{Hom}^{\bullet}{}_G(\mathcal{E}_j, \mathcal{E}_i) = 0$。

对于 $\mathcal{E} \in D^b{}_G(X)$ 和 $V^{\bullet} \in D^b(\mathrm{Rep}(G))$，张量积 $E \otimes V^{\bullet}$定义为对象

$$\bigoplus_i E[-i] \otimes V^i,$$

它扩展了 $\mathrm{Coh}_G(X)$ 与 Rep(G) 之间通常的张量积。若一个 G-例外集 ($\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$) 诱导出半正交分解，则称其为$G$-满的

$$D_G^b(X) = \langle \mathcal{E}_1 \otimes D^b(\mathrm{Rep}(G)), \ldots, \mathcal{E}_n \otimes D^b(\mathrm{Rep}(G)) \rangle.$$

3. G-非交换极小模型纲领

本节介绍G-等变非交换极小模型纲领（G-NMMP）。该框架通过将约化代数群G 对射影簇及其导出范畴的作用纳入考量，扩展了非交换极小模型纲领（NMMP），遵循 [Hal24]。通过

-

在本节中，我们假设G 是有限群或连通约化代数群。

3.1. **拟收敛路径**。设 $\mathcal{D}$ 为三角范畴，并考虑一条连续路径 $\sigma_{\bullet} : [t0, \infty) \to$ Stab($\mathcal{D}$)。对于每个 $t \in [t0, \infty)$，记作$\sigma_t := (Z_t, \mathcal{P}_t)$。对于对象 $E \in \mathcal{D}$，记 $\phi_t^+(E)$ $= \phi_{\sigma_t}^+(E)$ 以及 $\phi_t^-(E) = \phi_{\sigma_t}^-(E)$。令 $A_1^t, \ldots, A^{k_t}$ 为 E关于σ_t的Harder-Narasimhan因子。E 在t 处的质量为

$$m_t(E) := \sum_{i=1}^{k_t} |Z_t(A_i^t)|,$$

并且我们将E 在t 处的平均相位 定义为

$$\phi_t(E) := \frac{1}{m_t(E)} \sum_{i=1}^{k_t} \phi_t^+(A_i^t) \cdot |Z_t(A_i^t)|.$$

回顾一下，对于固定的$t \in [t0,\infty)$，对象 $0 \neq E \in \mathcal{D}$ 是 σ_t-半稳定的，当且仅当 $\phi_t^+(E) = \phi_t^-(E)$。因此，沿整条路径的半稳定性概念自然如下：

定义 3.1. 非零对象 $E \in \mathcal{D}$ 称为极限半稳定 （相对于 $\sigma_\bullet$），如果：

$$\lim_{t\to\infty}(\phi_t^+(E) - \phi_t^-(E)) = 0.$$

定义 3.2 ([HJR24])**.** 若稳定条件空间中的路径 $\sigma_\bullet$ 称为准收敛，如果：

(1) 对任意 $E \in \mathcal{D}$，存在一列态射

$$0 = E_0 \to E_1 \to E_2 \to \cdots \to E_{n-1} \to E_n = E$$

其锥 G_i =cone$(E_{i-1} \to E_i)$ 是极限半稳定的，并且满足

$$\liminf_{t\to\infty}(\phi_t(G_i) - \phi_t(G_{i+1})) > 0.$$

该序列称为对象E的极限半稳定滤过。

(2) 对于极限半稳定对象 $E \in D$，我们将其平均对数 定义为

$$l_t(E) := \ln(|Z_t(E)|) + i\pi\phi_t(E).$$

对于两个极限半稳定对象 E、F，令$l_t(E|F) := l_t(E) - l_t(F)$，并要求极限

$$\lim_{t\to\infty}\frac{l_t(E|F)}{1+|l_t(E|F)|}$$

存在。

定义 3.3 ([HJR24，定义 2.16])。 给定两个极限半稳定对象E、F，记作

(1) 若 $\liminf_{t\to\infty}(\phi_t(E) - \phi_t(F)) < +\infty$，则 $E \sim^{\inf} F$；(2) 若 $\liminf_{t\to\infty}(\phi_t(E) - \phi_t(F)) = +\infty$，则 $E <^{\inf} F$。

根据 [HJR24，引理 2.17]， $\sim^{\inf}$ 是极限半稳定对象集合 $\mathcal{P}$ 上的等价关系。等价类集合记为 $\mathcal{P}_\bullet/\sim^{\inf}$，其为有限集（参见 [HJR24，例 2.42 和引理 2.35]）。此外，根据 [HJR24，引理 2.17]， $<^{\inf}$ 在 $\mathcal{P}/\sim^{\inf}$ 上诱导出一个全序。对于$E \in \mathcal{P}_\bullet$，令 $\mathcal{D}^E$ 为满足其极限半稳定 Harder-Narasimhan 因子与 E $\sim^{\inf}$ 等价的对象所构成的满子范畴。集合 $\{\mathcal{D}^E \mid E \in \mathcal{P}_\bullet/\sim^{\inf}\}$ 是有限集，并由 $<^{\inf}$赋予全序。

考虑无穷远处实C^0 函数的芽，即以下空间的元素

$$C^0_\infty := \varinjlim C^0((a,\infty),\mathbb{R}).$$

若 $\lim_{t\to\infty} f(t) - g(t) = 0$，记作 $f = g$；若 $\lim_{t\to\infty} f(t) - g(t) < 0$，记作 $f < g$。给定 $f \in C^0_\infty$，用 $\mathcal{P}_\bullet(f) \subset \mathcal{D}$ 表示由 0 以及所有满足 $\phi_t^{\pm}(E) = f$ 的极限半稳定对象 $E \in \mathcal{D}$ 所组成的全子范畴。此外，令 $\mathcal{P}_\bullet(>f)$（分别为 $\mathcal{P}_\bullet(\preceq f)$）表示由 $\{\mathcal{P}_\bullet(g): g > f\}$（分别为 $\{\mathcal{P}_\bullet(g): g \leq f\}$）生成的 $\mathcal{D}$ 的扩张闭子范畴。

定义 3.4 ([HJR24，定义 3.4])**.** 令 $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \prod^n{}_{i=1}$稳定条件空间 $\mathrm{Stab}(\mathcal{D}_i)$，并对每个$i$记 $\sigma_i = (Z_i, \mathcal{P}_i)$。设 $\mathcal{A}_i = \mathcal{P}_i((0,1])$。我们称稳定性条件 $\sigma = (Z, \mathcal{P}) \in \mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ 是由 $\vec{\sigma}$粘合而成的，当且仅当

(1) $\mathrm{Hom}^{\leq}_{\mathcal{D}}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j) = 0$; (2) $\mathcal{A}_\sigma := \mathcal{P}((0,1]) = \langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \rangle$; (3) $Z|_{\mathcal{D}_i} = Z_i$.

定理 3.5 ([HJR24，命题 2.20 和定理 3.15])。 对于任意 $E \in \mathcal{P}_\bullet$，子范畴 $\mathcal{D}^E$ 都是厚三角子范畴，并给出一个半正交分解

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{D}^E \mid E \in \mathcal{P}_\bullet / \sim^{\inf} \rangle,$$

其中分支的顺序由诱导函子 $<^{\inf}$给出。此外，若 $\mathcal{D}$ 是光滑、真且幂等完备的，则 $\mathcal{D}$ 的每个可极化半正交分解都可以通过基于上述构造的拟收敛路径恢复

证明思路。 令 $E, F \in \mathcal{P}_\bullet$ 满足 $E <^{\inf} F$。根据定义，对于任意固定的$k \in \mathbb{Z}$，当t充分大时，有 $\phi_t^-(F) > \phi_t^+(E) + k$。因此 $\mathrm{Hom}(F, E(k)) = 0$，这意味着 $\mathrm{Hom}(\mathcal{D}^F, \mathcal{D}^E) = 0$。通过粗化极限 Harder-Narasimhan滤过， $\mathcal{D}$ 中的每个对象都属于子范畴 $\{\mathcal{D}^E\}$ 的三角包络。由于 $\mathcal{P}_\bullet / \sim^{\inf}$ 由 $<^{\inf}$全序化，集合 $\langle \mathcal{D}^E \mid E \in \mathcal{P}_\bullet / \sim^{\inf} \rangle$ 构成一个半正交分解。

现在令 $\mathcal{D} = \langle \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n \rangle$ 为一个可极化半正交分解，并选取稳定性条件 $\sigma_i \in \mathrm{Stab}(\mathcal{D}_i)$。选取函数 $z_i : [t0, \infty) \to \mathbb{C}$ for$i = 1, \ldots, n$ 使得对所有 $i < j$,

$$\lim_{t \to \infty} \frac{z_j(t) - z_i(t)}{1 + |z_j(t) - z_i(t)|} = e^{\mathbf{i}\theta_{ij}},$$

对 $\theta_i \mathrm{j} \in (0, \pi)$。根据 [HJR24, 命题 3.2],, 族 $\vec{\sigma_t} := (\mathrm{z}_i(\mathrm{t}) \cdot \sigma_i)^n \mathrm{i}_{=1}$可拼接成一条准收敛路径 $\sigma_\bullet \in \mathrm{Stab}(\mathcal{D})$，其中 $\mathrm{t} \gg 0$。根据这一构造， $\sigma_\bullet$ 还原给定的半正交分解。注意，这样的路径准收敛路径的选取在每个 σ_i上的 $\mathbb{C}$-作用下是唯一的；参见 [HJR24, 定理 2.30]。□

3.2. **等变量子上同调**。 我们简要回顾射影簇的等变量子上同调，并推荐阅读 [AF24] 以了解详情。设 X 是一个维数为 m 的光滑射影簇，且带有一个复代数约化群 G的作用。 X的等变上同调定义为 Borel构造的普通上同调：

$$H^*_G(X) = H^*(X \times_G EG),$$

其中EG 是一个带有自由G-作用的可缩空间，群G 在$X \times EG$上对角作用。记$BG := EG/G$ 为G 的分类空间。投影

$$p_X : X \times_G EG \to BG$$

是以X为纤维的纤维化。特别地，如果X 是一个点，我们有

$$H^*_G(\mathrm{pt}) = H^*(BG).$$

一般而言，$H^*_G(X)$是$H^*_G(\mathrm{pt})$上的一个代数，它与魏尔群作用于极大环面的特征类所得的不变量一致[T]:

$$H^*_G(\mathrm{pt}) = H^*_{\mathbb{T}}(\mathrm{pt})^W.$$

例如，若$G = \mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^n$，则

$$H^*_G(\mathrm{pt}) = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n].$$

对于$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$，魏尔群是对称群$S_n$，并且

$$H^*_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}(\mathrm{pt}) = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]^{S_n}.$$

若G是有限群，$H^*_G(\mathrm{pt}) = \mathbb{C}$。根据 [GKM98],$H^*_{\mathbb{T}}(X)$的等变形式性结果，它是秩为 $\dim H^*(X)$的自由模，其系数环为$H^*_{\mathbb{T}}(\mathrm{pt})$。

令 $\beta \in H_2(X;\mathbb{Z})$。一个$n$点标记、亏格为$g$、次数为 β的预稳定映射到X是一个态射f: $(C, x_1, \ldots, x_n) \to X$，其中

(1) $(C, x_1, \ldots, x_n)$是一个连通代数曲线C，其算术亏格为g，带有n个有序标记点$x_1, \ldots, x_n \in C$，其中C至多具有节点奇点，并且$(x_1, \ldots, x_n)$是互不相同的光滑点；(2) $f_*[C] = \beta$。

两个这样的预稳定映射

$$f : (C, x_1, \ldots, x_n) \to X, \quad \text{and } f' : (C', x'_1, \ldots, x'_n) \to X$$

同构，当且仅当存在一个同构 ϕ: $(C, x_1, \ldots, x_n) \to (C', x'_1, \ldots, x'_n)$，它是 n点标记预稳定曲线之间的同构，并且$f = f' \circ \phi$。若预稳定映射 f的自同构群有限，则称其为稳定的。

记 $\mathcal{M}_{g,n}(X, \beta)$为 n点标记、属数为 g、次数为 β 的稳定映射的德利涅–芒福德叠。根据 [BM96]，当 X是射影簇时， $\mathcal{M}_{g,n}(X, \beta)$ 是真叠。我们假设 $\beta \in \mathrm{Eff}(X)$ 或 $2g + n > 2$，使得 $\mathcal{M}_{g,n}(X, \beta)$ 非空。给定 n 个上同调类

$$\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in H^*_G(X;\mathbb{C}),$$

以及整数 $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，属数为 g、次数为 β，G-等变后代 *Gromov-Witten* 不变量（属于 X）定义为

$$\langle \tau_{d_1}(\gamma_1), \ldots, \tau_{d_n}(\gamma_n) \rangle^{X,G}_{g,n,\beta} := \left(\int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)]^{\mathrm{vir}}_G}^{eq} \prod_{j=1}^{n} \psi_j^{d_j} \mathrm{ev}_j^*(\gamma_j) \right) \in H^*_G(\mathrm{pt}, \mathbb{C}),$$

其中

(1) $[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)]^{\mathrm{vir}}$ G是等变虚基本类，属于$A^G{}_{D_{\mathrm{vir}}}(\mathcal{M}_{g,n}(X, \beta))$。虚维数为

$$D_{\mathrm{vir}} := \int_\beta c_1(TX) + (m-3)(1-g) + n;$$

(2) ev_j: $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta) \to X$是第$j$个标记点处的求值映射，它是$G$-等变的；(3) $\psi_j \in A^G_1(\mathcal{M}_{g,n}(X, \beta))$表示泛余切线丛 $\mathcal{L}_j$在 $\mathcal{M}_{g,n}(X, \beta)$ 上第一陈类的任意等变提升。

如果 $d_1,\ldots,d_n$ 都为零，那么上述 G-等变后裔 Gromov-Witten 不变量称为初级等变 Gromov-Witten 不变量。设 $\{\phi_i\}^s$ i=0 是 H^* G(X) 关于 H^* G(pt) 的齐次基，其中 $\phi_0 = 1$；设 $\{\tau^i\}^s$ i=0 是 H^* G(X) 上的对偶坐标系。一般点 $\tau \in H^*$ G(X) 可写为 $\tau = \sum^s$ i=0 $\tau^i\phi_i$，其中 $\tau^i \in H^*$ G(pt)。规定 τ^i 的次数为 $\deg\tau^i := 2 - \deg\ \phi_i$。

等变量子上同调定义在环上

$$\mathbb{C}[\![Q,\tau]\!] = \mathbb{C}[\![Q]\!][\![\tau^0,\ldots,\tau^s]\!].$$

注意奇变量彼此反交换：对于 $|i| := \deg\ \phi_i \pmod 2$,

$$\tau^i\tau^j = (-1)^{|i||j|}\tau^j\tau^i, \quad \tau^i\phi_j = (-1)^{|i||j|}\phi_j\tau^i.$$

$\tau \in H^*{}_G(X,\ \mathbb{C})$ 上的大等变量子乘积 记作 $\star_\gamma$，定义为

$$\langle\phi_\alpha \star_\tau \phi_\beta,\phi_\gamma\rangle^{X,G} = \sum_{d\in \mathrm{NE}_{\mathbb{N}}(\mathrm{X}),n\geq 0} \langle\phi_i,\phi_j,\phi_k,\tau,\cdots,\tau\rangle^{X,G}_{0,n+3,d}\frac{Q^d}{n!}$$

量子乘积 $\star_\tau$ 使$H^*{}_G(X)[\![Q,\tau]\!]$ 成为一个*Frobenius* 代数：它是交换、结合且有单位元的代数，并且与等变 *Poincaré* 配对相容

$$\eta^G(a,b) := \int_X^{eq} a\cdot b.$$

i.e.

$$\eta^G(a\star_\tau b,c) = \eta^G(a,b\star_\tau c), \quad a,b,c\in B.$$

代数（$H^*{}_G(X)[\![Q,\ \tau]\!],\star_\tau$）称为等变量子上同调。该乘积是齐次的，且以 ϕ_0 为单位元。我们假设存在一个开子集$B \subset H^*{}_G(X)$，使得对每个 $\tau\in B$，定义$\star_\tau$ 的和都收敛。若 $\tau \in H^2{}_G(X)$ 且令 $Q = 1$，则除子方程将表达式简化为

$$\langle\phi_\alpha \star_\tau \phi_\beta,\phi_\gamma\rangle = \sum_{d\in \mathrm{NE}(X)_{\mathbb{N}}} \langle\phi_\alpha,\phi_\beta,\phi_\gamma\rangle^{X,G}_{0,3,d}\exp(\tau\cdot d)$$

3.3. **主要设想**。设G 是一个约化代数群，作用于光滑射影簇 X 和 Y。回顾一下，G-压缩 是一个射影满射 G-等变态射 $\pi : X \to Y$，其纤维连通。基于 [Li26], 最近取得的突破性成果，该成果证明任意光滑射影簇上都存在稳定性条件，本文以下部分均假设 $D^b{}_G(X)$ 也存在稳定性条件。此外，我们考虑的所有半正交分解都要求是可极化的，即每个分支都存在稳定性条件。为简便起见，我们记

$$\mathrm{Stab}(X_G) := \mathrm{Stab}(D^b_G(X)), \quad K^G(X) := K^G_{\mathrm{num}}(D^b_G(X)).$$

定义 3.6. 令 $\mathcal{K}$ 为仿射概形 $\mathrm{Spec}(H^*{}_G(\mathrm{pt}))$ 上的亚纯函数域。系数为 $\mathcal{K}$ 的 X 的 G-等变上同调定义如下：

$$H^{\mathcal{K}}_G(X;\mathbb{C}) := H^*_G(X;\mathbb{C})\otimes_{H^*_G(\mathrm{pt};\mathbb{C})}\mathcal{K}.$$

于是，扭曲陈特征映射定义如下：

$$v^G := (2\pi\mathbf{i})^{\deg/2}\,\mathrm{ch}_G : K^G_{\mathrm{num}}(X) \to H^{\mathcal{K}}_G(X;\mathbb{C}).$$

我们要求稳定条件空间 $\mathrm{Stab}(\mathcal{X}_G)$ 中的中心荷经过 v^G 分解。

为完整起见，我们给出 Bondal-Orlov 分解结果的等变版本的证明 [BO95]。

命题 3.7。 设 G 为作用于光滑射影簇 X 和 X'上的代数群，并设 $\pi: X \to X'$ 为一个 G-等变态射，满足 $R\pi_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_{X'}$。则 π^* 是全忠实的，并且 $D^b G(X)$ 存在半正交分解：

$$D^b_G(X) = \langle \ker(R\pi_*), \pi^*(D^b_G(X'))\rangle.$$

证明。 对于 $\mathcal{E},\mathcal{F} \in D^b G(X')$，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_G(\pi^*\mathcal{E},\pi^*\mathcal{F}) &= \mathrm{Hom}_G(\mathcal{E}, R\pi_* L\pi^*\mathcal{F}) \\ &= \mathrm{Hom}_G(\mathcal{E},\mathcal{F})\end{aligned}$$

其中第二个等式使用了投影公式和假设$R\pi_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{X'}$。因此， π^* 是全忠实的。对于任意 $\mathcal{E} \in \ker(\pi_*)$ 和 $\mathcal{F} \in D^b G(X')$，我们有

$$\mathrm{Hom}_G(\mathcal{E},\pi^*\mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_G(R\pi_*\mathcal{E},\mathcal{F}) = 0.$$

因此，$\ker(\pi_{R*})$ 左正交于 $\pi^*(D^b G(X'))$。对任意 $\mathcal{E} \in D^b G(X)$，伴随 $(\pi^*, R\pi_*)$ 的余单位给出 $D^b G(X)$ 中的三角：

$$\pi^* R\pi_*\mathcal{E} \xrightarrow{\eta} B \to \mathcal{B} \to C(\eta) \to \pi^* R\pi_*\mathcal{E}[1].$$

应用 $R\pi_*$ 并利用 $R\pi_*\pi^* \cong \mathrm{id}$，我们得到 $R\pi_* C(\eta) \cong 0$，即 $C(\eta) \in \ker(\pi_*)$。因此，这给出了所断言的半正交分解。□

我们现在陈述如下猜想：

猜想 3.8. 设 $\pi: X \to Y$ 为光滑射影簇 X 的 G-压缩。

(A) 可以为 π 关联一个由拟收敛路径$\{\sigma^{\pi,\psi}\ \mathrm{t}\}$组成的典范族，它们位于 $\mathrm{Stab}(\mathrm{X}_G)/\mathbb{C}$ 中。参数 ψ 的一般值给出 $\mathrm{D}^b\ \mathrm{G(X)}$ 的 G-线性半正交分解，不同的一般值则给出突变等价的分解。(B) 对于一般的 ψ，$\mathrm{D}^b\ \mathrm{G(X)}$ 的半正交因子在与形如 π^*(E) 的复形作张量积后仍保持不变，其中 $\mathrm{E} \in \mathrm{Perf}_G(\mathrm{Y})$。(C) 给定另一个 G-收缩 $\mathrm{Y} \to \mathrm{Y}'$，与 $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}'$ 相关联的 $\mathrm{D}^b\,\mathrm{G(X)}$ 的半正交分解细化了与 $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ 相关联的分解。(D) 如果 $\pi: \mathrm{X} \to \mathrm{X}'$ 是光滑簇之间的 G- 等变态射，且 $\mathrm{R}\pi_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_{X'}$，那么对于适当的参数，与 $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ 相关联的 $\mathrm{D}^b\ \mathrm{G(X)}$ 的半正交分解细化了该分解

由以下半正交分解组合得到:

$$\pi^*(D^b_G(X')) \cong D^b_G(X')$$

与分解相关的 $X' \to Y$

$$D^b_G(X) = \langle \ker(\pi_*), \pi^*(D^b_G(X'))\rangle.$$

一项近期工作 [ESS25] 为这一猜想在二维情形下提供了有力支持。

现在，我们为猜想 3.8 所预言的 $\mathrm{Stab}(\mathcal{X}_G)$ 中的典范拟收敛路径给出一个精确的方案。令 $\zeta = \zeta(t) \in H^*{}_G(X;\mathbb{C})$。考虑等变量子微分方程

$$t\frac{d\zeta}{dt} + c_1^G(X) \star_{\ln(t)c_1^G(X)} \zeta = 0. \tag{3}$$

这里，$c_1^G(X)$ 表示 G-等变第一陈类。一般而言，式（3）中的和仅具有 t 形式意义。为处理这一点，我们回顾 [Hal24] 引入的截断技术。记 $\mathrm{NE}(X/Y)_{\mathbb{N}}$ 为由被π压缩的曲线所张成的有效整 1-循环的数值等价类集合。对于一个满足 $c_1(X)\cdot d > 0$ 的 1-循环 $d \in \mathrm{NE}(X/Y)_{\mathbb{N}}$，定义算子 $T^G{}_d$ 如下:

$$\eta^G(T^G_d(\alpha), \beta) = \langle \alpha, \beta\rangle^{X,G}_{0,2,d}.$$

令 $\psi = \omega + iB \in H^2(X;\mathbb{C})$，其中 ω 为相对充足类。G-截断量子自同态定义为

$$E^G_\psi(t) := c_1^G(X) \cup (-) + \sum_{\substack{d\in \mathrm{NE}(X/Y)_{\mathbb{N}} \\ (c_1(X)-\omega)\cdot d>0}} (c_1(X)\cdot d) t^{c_1(X)\cdot d} e^{-\psi\cdot d} T^G_d. \tag{4}$$

根据 [Hal24，引理 6]，（4）中的和是有限的。相应的G-截断量子微分方程 为

$$t\frac{d\zeta(t)}{dt} + \frac{1}{z}E^G_\psi(t)\zeta(t) = 0, \quad \zeta(t) \in H^*_G(X;\mathbb{C}), \tag{5}$$

其中$z \in \mathbb{C}$ 是一个参数。回忆一下$H^*{}_G(X)$上的分次算子 μ：对于 $\phi_i \in H^i{}_G(X)$ 和 $\tau \in H^k(BG)$,

$$\mu(\tau\phi_i) := \frac{\deg(\tau\phi_i) - m}{2} = \frac{i+k-m}{2}\tau\phi_i.$$

对于 $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^n$，这变为

$$\mu(t_i^k\phi_d) = \left(\frac{\deg\phi_i - m}{2} + |k|\right) t_i^k\phi_i.$$

引理 3.9。$tE^G_\psi(1)t^\mu = t^\mu E^G_\psi(t)$。

证明。 根据 [Hal24，引理 6], 算子 $T^G{}_d$ 是次数为 $\Delta_d := 2(1 - c_1(X)\cdot d)$ 的齐次算子。事实上，对于齐次的 $\alpha, \beta \in H^*{}_G(X)$,

$$\deg(\alpha) + \deg(\beta) - 2(m - 1 + c_1(X)\cdot d) = \deg\langle \alpha, \beta\rangle^{X,G}_{0,2,d},$$

and

$$\deg(T_d^G\alpha)+\deg(\beta)-2m=\deg(\eta^G(T_d^G(\alpha),\beta)).$$

因此,

$$\deg(T_d^G\alpha)-\deg(\alpha)=2-2c_1(X)\cdot d.$$

因此,

$$t^\mu(T_d^G\alpha)=t^{\frac{(\deg(\alpha)+\Delta_d)-m}{2}}\cdot T_d^G\alpha=t^{1-c_1(X)\cdot d}\cdot T_d^G(t^\mu\alpha).$$

此外,

$$t^\mu(c_1^G(X)\cup\alpha)=t^{\frac{(\deg\alpha+2)-m}{2}}(c_1^G(X)\cup\alpha)=t\cdot(c_1^G(X)\cup((t^\mu\alpha))).$$

于是,

$$\begin{aligned}t^\mu E_\psi^G(t)(\alpha)&=t\cdot(c_1^G(X)\cup((t^\mu\alpha)))+\sum_{\substack{d\in\mathrm{NE}(X/Y)_{\mathbb{N}}\\(c_1(X)-\omega)\cdot d>0}}(c_1(X)\cdot d)te^{-\psi\cdot d}T_d^G(t^\mu\alpha)\\&=tE_\psi^G(1)t^\mu.\end{aligned}$$

□

˜在变量替换 $\zeta(t)=t^\mu\zeta(t)$下，我们得到等价系统:

$$\frac{d\tilde{\zeta}(t)}{dt}=A(t)\tilde{\zeta}(t),$$

其中

$$A(t):=\frac{1}{t}\mu^G-\frac{1}{z}E_\psi^G(1).$$

注意到$A(t)$ 是亚纯函数，在 0 和 ∞处有极点。根据 [Was87], 关于 $|t|>t_0$ 在包含 $S\subset\mathbb{C}$ 的扇区 $\mathbb{R}_{>0}$中所述的 Hukuhara-Turrittin 定理，存在如下形式的基本解

$$\Phi_t^G=Y^G(t)e^{tD^G+B^G(t)},$$

其中

(1) $Y^G(t)$ 可逆且全纯，并具有一致的渐近展开

$$Y^G(t)\sim Y_0^G+Y_1^Gt^{-1/p}+Y_2^Gt^{-2/p}+\cdots,$$

对于某个 $p\in\mathbb{Z}_{>0}$，且 Y_0^G 的列构成 $^{-1}{}_z\,E_\psi^G(1)$ 的广义特征向量基;

(2) D^G 是与 Y_0^G 对应的 $^{-1}{}_z\,E_\psi^G(1)$ 的特征值对角矩阵;

(3) $B^G(t)=\sum^{p-1}{}_{k=1}D^G{}_kt^{k/p}+C^G\ln t$，其中常数对角矩阵 $D^G{}_k$ 和 C^G 与 D^G 对易，且 $\|B^G(t)\|=O(t^{(p-1)/p})$。

此外,

- 若$E_{G\psi}(1)$是半单的，则$D_{Gk}=0$对$k=1,\ldots,p-1$;
- 若$E_{G\psi}(1)$ 的特征值互不相同，则在一组正交归一特征向量基下，可以取$B(t)=0$。

令 $\Phi_t^G \in \mathrm{End}(H^*{}_G(X;\ \mathbb{C}))$ 为方程 (5) 的基本解。它可典范地延拓至

$$\Phi_t^G \in \mathrm{End}_{\mathcal{K}}(H_G^{\mathcal{K}}(X;\mathbb{C}))$$

通过设定

$$\Phi_t^G(\alpha \otimes f) := \Phi_t^G(\alpha) \otimes f$$

对于 $\alpha \in H^*{}_G(X;\mathbb{C})$ 和 $f \in \mathcal{K}$。考虑求值映射:

$$\mathrm{ev}_{\mathbf{s}} : H_{\mathbb{T}}^*(\mathrm{pt}) \to \mathbb{C}$$
$$z_i^n \mapsto \mathbf{i}\pi n s_i,$$

借助其在 $H_{\mathbb{T}}^*(\mathrm{pt})$ 上的模结构，它自然延拓到 $H_{\mathbb{T}}^*(X)$。令$\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^m$为 G的一个极大环面，其魏尔群为W，并令$\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_m) \in \mathbb{C}^m$。通过等变上同调中的限制映射，我们有一个同构

$$H_G^*(X) \cong H_{\mathbb{T}}^*(X)^W.$$

因此，我们可以将 $\mathrm{ev}_{\mathbf{s}}$限制到$H^*{}_G(X)$。对于在 $(\mathbf{i}\pi s_1, \ldots, \mathbf{i}\pi s_m)$ 处全纯的亚纯函数 $f \in \mathcal{K}$，设

$$\mathrm{ev}_{\mathbf{s}}(\alpha \otimes f) := \mathrm{ev}_{\mathbf{s}}(\alpha) \cdot f(\mathbf{s}).$$

其中$f(\mathbf{s})$ 表示f在点 $(\mathbf{i}\pi s_1, \ldots, \mathbf{i}\pi s_m)$ 处的取值。我们称$\alpha \otimes f \in H^{\mathcal{K}}{}_G(X;\mathbb{C})$ 在$\mathbf{s}$处全纯，若f在 $(\mathbf{i}\pi s_1, \ldots, \mathbf{i}\pi s_m)$ 处全纯。

备注 3.10. 求值映射 $\mathrm{ev}_{\mathbf{s}}$ 的选取与第 $\mathbb{T}$节中用于定义5.1的 -稳定条件的求值映射相兼容。对于有限群G，极大环面是平凡的。因此，求值映射也变为平凡映射。

主要设想现可表述如下:

提案 3.11. 设 $\pi: X \to Y$ 是从一个维数为m的光滑射影簇X出发的 G-压缩。设 $\Phi_t^G \in \mathrm{End}(H^*{}_G(X;\mathbb{C}))$ 是G-截断量子微分方程 (5) 的一个基本解。那么，对于任意一般的元组$\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_m) \in \mathbb{C}^m$，在 $\mathrm{Stab}(\mathcal{X}_G)/\mathbb{C}$ 中存在一条拟收敛路径 $\sigma_t^G = (Z_t^G, \mathcal{P}_t^G)$，满足$t \in [t0, \infty$，其中心荷由下式给出

$$Z_t^G(\mathcal{E}) = \mathrm{ev}_{\mathbf{s}} \int_X^{eq} \Phi_t^G(v^G(\mathcal{E})),$$

对于 $\mathcal{E} \in K^G(X)$。

这里，$\mathbf{s}$的一般性确保求值 $\mathrm{ev}_{\mathbf{s}}$ 产生有限的复数。例如，对于 $\mathbb{P}^{m-1}$ 赋予环面$\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^m$ (见第5.2节)，元组$\mathbf{s}$ 可取自集合 $\Omega_{\mathbb{T}}$，该集合定义为从 $\mathbb{C}^m$ 中去除由下式给出的超平面后所得的补集

$$z_i - z_j = k, \quad i, j = 1, \cdots, m, i \neq j, k \in \mathbb{Z}.$$

注记3.12. 若X 是Fano簇，(3)中的和是有限的。在此情形下，可以表述猜想3.8的提议，直接使用等变量子微分方程(3)。若G 有限，还可以考虑支撑在由Chen-Ruan上同调环给出的格上的稳定条件，以及由轨形Gromov-Witten理论产生的量子微分方程 [CR04; CR02]。对于连通约化代数

群G，提议3.11 所要求的拟收敛路径实际上包含于子空间 $\mathbb{T}$稳定条件空间$\mathbf{s}(X)$，即稳定条件空间(X_G)的子空间，定义于第5.1节，其中 $\mathbb{T}$表示G的极大环面。

注 3.13. 去范畴化猜想3.11指出，G-等变拓扑 K 理论应当有一个直和分解：

$$K_G^{\mathrm{top}}(X)_{\mathbb{Q}} \cong H^G_{1,\psi} \oplus \cdots \oplus H^G_{n,\psi},$$

这应当源于方程 (5) 的解的渐近行为。具体而言，子空间 $H^G{}_{i,\psi}$ 应当对应于算子 $^{-1}{}_z\, E^G_\psi(1)$ 在 $H^*{}_G(X)$ 上作用时的广义特征空间，而相对于G-等变欧拉配对，该分解是上三角的。

注 3.14. 这里发展的整个G-等变框架是对非交换极小模型纲领的自然推广。当G = 1 (平凡群) 时，它恰好化为 [Hal24] 中所述的经典非等变情形。

在 [Hal24 中，注 13], 指出，猜想 3.11 中的拟收敛路径应从一个几何的稳定性条件出发，即在该条件下，所有点的凝聚层都稳定且具有相同的相位。现在我们将这一思想推广到等变情形。设 $x \in X$，并以$G_x \subseteq G$ 表示 x 的稳定子。赋予平凡 G_x-作用的凝聚层 $\mathcal{O}_x$ 定义了一个对象 $\mathcal{O}^{G_x}{}_x \in D^b{}_{G_x}(X)$。假设指数 $[G\colon G_x]$ 有限，则与x 关联的G-点凝聚层定义为

$$P_x := \mathrm{Ind}^G_{G_x}(\mathcal{O}_x^{G_x}) \in D^b_G(X).$$

定义 3.15。 设X 是一个带有代数群G作用的光滑射影簇。稳定性条件 $\sigma \in \mathrm{Stab}(X_G)$称为几何的，如果对于每个$x \in X$，只要 $[G:G_x]$有限，相应的G-点层 P_x 就是 σ-稳定的，并且所有这样的P_x 都具有相同的相位。

若G 有限，则对于任意x， $[G,G_x]$ 自动有限。对于 $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^m$ 在 $\mathbb{P}^{m-1}$上的对角作用， $\mathbb{T}$-点层仅对m 环面不动点定义。

4. 诱导拟收敛路径

本节中，我们讨论有限群的G-NMMP。借助从 [MMS09； QZ25； DHL25], 诱导稳定性条件的技巧，我们在 $\mathrm{Stab}(X_G)/\mathbb{C}$ 中构造拟收敛路径，使其满足命题 3.11，方法是提升已知的非等变解。随后，我们将此方法应用于射影空间以及具有有限群作用的某些爆破曲面，并借助 [Zul24；Kar24]中得到的显式非等变路径。

4.1. **诱导定理**。

定义 4.1 ([MMS09；DHL25])。 设 $\mathcal{D}$ 是一个带有有限群 G 作用的三角范畴。一项稳定性条件（Z， $\mathcal{P}$） $\in$ 稳定条件空间$(\mathcal{D})$ 称为 G-不变的，如果：

- $\phi_g\mathcal{P}(\phi) = \mathcal{P}(\phi)$ 对所有 $g \in G$ 以及所有 $\phi \in \mathbb{R}$;
- $Z \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K(\mathcal{D}), \mathbb{C})^G \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K(\mathcal{D}), \mathbb{C})$,

其中 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K(\mathcal{D}), \mathbb{Z})^G$ 表示G-不变态射Z的 $\mathbb{C}$-线性子空间。我们用 $\mathrm{Stab}(\mathcal{D})^G$ 表示所有G-不变稳定性条件的集合。

基于 [Li26], 的一项近期结果，我们证明任意光滑射影簇上都不存在G-不变稳定性条件:

命题 4.2。 设 X 是一个带有有限群 G 作用的光滑射影簇。那么$\mathrm{Stab}(X)^G$ 非空。

证明。我们首先考虑 X $= \mathbb{P}^n$ 的情形。根据 [Li26，定理 6.3], , 存在一个稳定性条件 $\sigma = (Z, \mathcal{P})$，其定义在 $\mathbb{P}^n$ 上，且其中中心荷 Z 在 G $\subseteq$Aut($\mathbb{P}^n$) =PGL(n + 1) 的作用下不变。由于 PGL(n + 1) 保持 $\mathbb{P}^n$ 的数值格罗滕迪克群不变，Z 实际上在整个 PGL(n+1) 作用下不变。此外，由于 PGL(n + 1) 连通，且其在 Stab($\mathbb{P}^n$) 上的作用连续， σ 是 PGL(n + 1)-不变的，因而也是 G-不变的。因此， $\sigma \in \mathrm{Stab}(\mathbb{P}^n)^G$。现在设 X 是任意带有 G-作用的光滑射影簇。取 X 上一个极丰富线丛 L，并令

$$\widetilde{L} := \otimes_{g\in G} g^* L.$$

那么 ˜L 是一个 G-不变极丰富线丛，我们可以将 $\mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \widetilde{\mathrm{L}})) \cong \mathbb{P}^n$ （其中 n 为某个整数）认定为相同对象。这给出一个 G-等变嵌入 $\iota : \mathrm{X} \hookrightarrow \mathbb{P}^n$。根据证明的第一部分，存在一个 G-不变稳定性条件 $\sigma \in \mathrm{Stab}(\mathbb{P}^n)^G$。应用 [Li26 定理 6.5], 中的拉回构造，我们得到一个稳定性条件

$$\iota^{\#}\sigma = (Z \circ \iota_*, \iota^{\#}\mathcal{P}) \in \mathrm{Stab}(X),$$

其中

$$\iota^{\#}\mathcal{P}(\phi) := \{E \in D^b(X) \mid \iota_* E \in \mathcal{P}(\phi)\}.$$

由于 σ 是G-不变的，且嵌入 ι 是G-等变的，因此诱导的稳定性条件 $\iota^{\#}\sigma$ 也是G-不变的。因此， $\iota^{\#}\sigma \in \mathrm{Stab}(X)^G$，证明至此完成。□

定义 4.3。 若拟收敛路径 σ_t 满足对任意t， $\sigma_t \in \mathrm{Stab}(\mathcal{D})^G$，则称其为$G$-不变的。

给定一条拟收敛路径 σ_t^G位于稳定条件空间(X_G)中，并通过基本解满足猜想3.11 , 我们定义（ Φ_t^G式5）的张成条件如下:

定义 4.4. 设 $r \in \mathbb{R}$ 为 $^{-1}{}_z E_\psi^G(1)$ 的一个特征值的实部。则渐近增长子空间 为:

$$F_G^r := \left\{ \alpha \in H_G^*(X; \mathbb{C}) \colon \limsup_{t\to\infty} \frac{\ln \|\Phi_t^G(\alpha)\|}{t} \le r \right\}.$$

我们称对 (σ_t^G, Φ_t^G) 满足张成条件，如果 $F^r{}_G$ 由极限半稳定对象 $\mathcal{E} \in D^b{}_G(X)$（相对于 σ_t^G）的类所张成，且这些对象满足

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{|Z_t^G(\mathcal{E})|}{\|\Phi_t^G(\mathcal{E})\|} > 0.$$

本节的主要结果是以下提升定理：

定理 *4.5.* 设 X 是一个带有有限群 G 作用的光滑射影簇。若 $\sigma_t = (Z_t, \mathcal{P}_t)$ 对于 $t \in [t0, \infty)$ 是稳定条件空间 $Stab(X)^G$ 中的一条 G-不变拟收敛路径，它通过方程 *(5)* 的基本解 Φ_t 求解非等变猜想 *3.11*。那么它诱导出稳定条件空间 $Stab(X_G)$中的一条拟收敛路径 σ_t^G，该路径通过方程 *(5)* 的基本解 Φ_t^G求解提案 *3.11*，并保持张成条件。此外，若 σ_{t_0} 是几何的，则 $\sigma_{t_0}^G$ 也是几何的。

定理 4.6 ([QZ25；DHL25])。设 $\mathcal{D}$ 是一个带有有限群 G 作用的三角范畴。那么，G-不变稳定条件在 稳定条件空间 $\mathrm{Stab}(\mathcal{D})^G$ 中的子集 是 稳定条件空间 $\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$的闭复子流形。此外，存在一个闭嵌入

$$\mathrm{Res}^{-1} : \mathrm{Stab}(\mathcal{D})^G \hookrightarrow \mathrm{Stab}(\mathcal{D}_G),$$
$$\sigma = (Z, \mathcal{P}) \mapsto (Z \circ \mathrm{Res}, \mathrm{Res}^{-1}\mathcal{P})$$

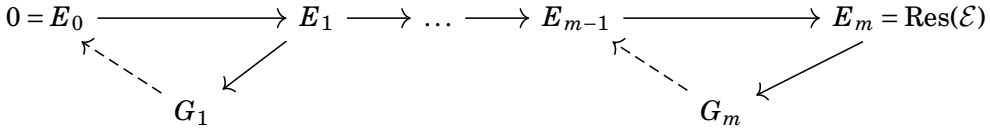
其中 $\mathrm{Res}:= \mathrm{Res}^1{}_G$，且 $\mathrm{Res}^{-1}\mathcal{P}(\phi):=\{\mathcal{E} \in \mathcal{D}_G \mid \mathrm{Res}(\mathcal{E}) \in \mathcal{P}(\phi)\}$。

注 4.7。在 [DHL25], 中，Res 的像$^{-1}$ 得到了精确刻画：它由 $\mathcal{D}_G$ 上那些 $\mathrm{Rep}(G)$-等变的稳定性条件组成，其中 $\mathrm{Rep}(G)$ 被视为一个融合范畴。根据命题 4.2，对于任意带有有限群X_G作用的光滑射影簇 X，$\mathrm{Stab}(G)$ 非空。

引理 4.8。设 $\mathcal{D}$ 是一个带有有限群G作用的三角范畴。任意 G-不变的准收敛路径 $\sigma_\bullet \in \mathrm{Stab}(D^b(X))$ 都诱导出一条准收敛路径 $\sigma_\bullet^G \in \mathrm{Stab}(\mathcal{D})$。

证明。根据定理 4.6，映射 Res^{-1} 将 $\sigma_\bullet$ 映为所需的准收敛路径 $\mathrm{Res}^{-1}(\sigma_\bullet)$i nStab$(\mathcal{D}_G)$。我们断言，这条诱导路径是准收敛的。

对于任意 $\mathcal{E} \in \mathcal{D}_G$，考虑 $\mathrm{Res}(\mathcal{E}) \in \mathcal{D}$ 关于 $\sigma_\bullet$的极限半稳定滤过：



根据 [HJR24，引理 2。7], 该对 $(\mathcal{P}_t(> \phi_t^+(G_i)), \mathcal{P}_t(\leq \phi_t^+(G_i)))$ 是 $\mathcal{D}$ 上的一个 t-结构。因此，$E_{i-1} \in \mathcal{P}_t(> \phi_t^+(G_i))$。根据 [DHL25，定理 B], ，我们有

$$(\mathrm{Res} \circ \mathrm{Ind}(\mathcal{P}(\phi))) \subset \mathcal{P}(\phi),$$

对任意 $\phi \in \mathbb{R}$。因此，由 [Pol07，定理 2.1。2], 该对

$$(\mathrm{Res}^{-1}\mathcal{P}_\bullet(> \phi_t^+(G_i)), \mathrm{Res}^{-1}\mathcal{P}_\bullet(\leq \phi_t^+(G_i)))$$

是 $\mathcal{D}_G$ 上的一个 t-结构。因此存在一个三角

$$\mathcal{E}_{i-1} \to \mathcal{E}_i \to \mathcal{G}_i$$

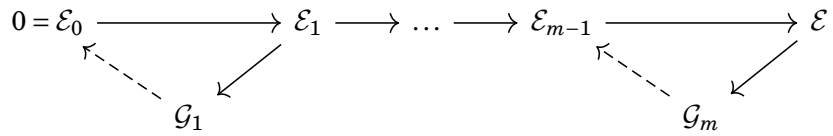
在 $\mathcal{D}_G$ with $\mathcal{E}_{i-1} \in \mathrm{Res}^{-1}\mathcal{P}_\bullet(> \phi_t^+(G_i))$ 和 $\mathcal{G}_i \in \mathrm{Res}^{-1}\mathcal{P}_\bullet(\leq \phi_t^+(G_i))$ 中。由于 Res 是正合的，我们得到一个三角

$$\mathrm{Res}(\mathcal{E}_{i-1}) \to \mathrm{Res}(\mathcal{E}_i) \to \mathrm{Res}(\mathcal{G}_i)$$

in $\mathcal{D}_G$ with

$$\mathrm{Res}(\mathcal{E}_{i-1}) \cong \boldsymbol{E}_{i-1}, \quad \mathrm{Res}(\mathcal{G}_i) \cong G_i.$$

特别地， $\mathcal{G}_i \in \mathrm{Res}^{-1}\mathcal{P}_\bullet(\phi_t^+(G_i))$，这意味着 $\mathcal{G}_i$ 关于 $\mathrm{Res}^{-1}(\sigma_\bullet)$ 是极限半稳定的。因此，我们得到 $\mathcal{E}$ 在 $\mathcal{D}_G$ 中的一个极限半稳定滤过：



给定两个关于 $\mathrm{Res}^{-1}(\sigma_\bullet)$ 的极限半稳定对象 $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathcal{D}_G$，令 $\boldsymbol{E} = \mathrm{Res}(\mathcal{E})$，$\boldsymbol{F} = \mathcal{F}$。那么，

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{l_t(\mathcal{E}|\mathcal{F})}{1+|l_t(\mathcal{E}|\mathcal{F})|} &= \lim_{t\to\infty} \frac{\ln(Z_t\circ\mathrm{Res}(\mathcal{E})) - \ln(Z_t\circ\mathrm{Res}(\mathcal{E})) + i\pi(\phi_t(\mathcal{E}) - \phi_t(\mathcal{F}))}{1+|\ln(Z_t\circ\mathrm{Res}(\mathcal{E})) - \ln(Z_t\circ\mathrm{Res}(\mathcal{E})) + i\pi(\phi_t(\mathcal{E}) - \phi_t(\mathcal{F}))|} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{\ln(Z_t(\boldsymbol{E})) - \ln(Z_t(\boldsymbol{E})) + i\pi(\phi_t(\boldsymbol{E}) - \phi_t(\boldsymbol{F}))}{1+|\ln(Z_t(\boldsymbol{E})) - \ln(Z_t(\boldsymbol{E})) + i\pi(\phi_t(\boldsymbol{E}) - \phi_t(\boldsymbol{F}))|} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{l_t(\boldsymbol{E}|\boldsymbol{F})}{1+|l_t(\boldsymbol{E}|\boldsymbol{F})|}
\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{E} = \mathrm{Res}(\mathcal{E})$ 和 $\boldsymbol{F} = \mathrm{Res}(\mathcal{F})$ 关于 $\sigma_\bullet$ 是极限半稳定的，最后一个极限存在。因此，$\mathrm{Res}^{-1}(\sigma_\bullet)$ 也满足准收敛的第二个条件，从而完成了 $\mathrm{Stab}(\mathcal{D}_G)$。□

引理 4.9. 设 X 是一个带有有限群 G 作用的光滑射影簇，并且 $\sigma = (Z, \mathcal{P}) \in \mathrm{Stab}(X)^G$ 是一个 G-不变的稳定性条件。

(1) 若 $\mathcal{O}_x$ 是相位为 ϕ_0 的 σ-稳定对象，则 G-点层 P_x 是 $\mathrm{Res}^{-1}(\sigma)$-稳定的，且相位相同 ϕ_0；(2) 若 P_x 是相位为 ϕ_0 的 $\mathrm{Res}^{-1}(\sigma)$-稳定对象，并且 $\mathcal{O}_x$ 在 $\mathcal{P}(\phi_0)$ 中的每个子对象 A 都满足 $g^*A \cong A$，对所有 $g \in G_x$ 均成立，则 $\mathcal{O}_x$ 是 σ-稳定的。

特别地，Res^{-1} 保持几何性。

证明. 假设 $\mathcal{O}_x$ 是相位为 ϕ_0 的 σ-稳定对象。由于 σ 是 G-不变的，对所有 $g \in G$，每个 g^* 也都是相位为 ϕ_0 的稳定对象。因此，

$$\mathrm{Res}(P_x) = \bigoplus_{g\in G/G_x} g^*\mathcal{O}_x \in \mathcal{P}(\phi_0),$$

这意味着 $P_x \in \mathrm{Res}^{-1}\mathcal{P}(\phi_0)$。假设 P_x 不稳定。那么在 $\mathrm{Res}^{-1}\mathcal{P}(\phi_0)$ 中存在一个短正合列：

$$0 \to \mathcal{E} \to P_x \to \mathcal{F} \to 0,$$

其中 $\mathcal{E}$ 既不为 0，也不等于 P_x。应用 Res 可得一个短正合列

$$0 \to \mathrm{Res}(\mathcal{E}) \to \bigoplus_{g\in G/G_x} g^*\mathcal{O}_x \to \mathrm{Res}(\mathcal{F}) \to 0$$

在 $\mathrm{Res}^{-1}\mathcal{P}(\phi_0)$ 中。由于 $\mathrm{Res}(\mathcal{E})$ 是 $\oplus_{g\in G/G_x} g^*\mathcal{O}_x$ 的G-不变子对象，而 $\oplus_{g\in G/G_x} g^*\mathcal{O}_x$ 是不同凝聚层的直和，因此 $\mathrm{Res}(\mathcal{E})$ 必为 0 或$\oplus_{g\in G/G_x} g^*\mathcal{O}_x$，这就产生矛盾。因此，$P_x$ 是稳定的。

反过来，设P_x 是相位为 ϕ_0 的 $\mathrm{Res}^{-1}(\sigma)$-稳定对象。那么 $\mathrm{Res}(P_x) = \oplus_{g\in G/G_x} g^*\mathcal{O}_x \in \mathcal{P}(\phi_0)$，并且由于 $\mathcal{P}(\phi_0)$ 对直和项封闭，$\mathcal{O}_x \in \mathcal{P}(\phi_0)$。若 $\mathcal{O}_x$ 不稳定，则在 $\mathcal{P}(\phi_0)$ 中存在一个短正合列：

$$0 \to A \to \mathcal{O}_x \to B \to 0$$

其中 $A \neq 0$ 和 $A \neq \mathcal{O}_x$。根据假设，对于所有 $g \in G_x$，$g^*A \cong A$。因此，我们可以赋予A 平凡的G_x-作用，从而使A^{G_x} 成为$\mathcal{O}^{G_x}{}_x$在$D^b{}_{G_x}(X)$ 中的一个G_x-等变子对象。应用 $\mathrm{Ind}^G{}_{G_x}(A^{G_x})$ 可得到一个非零真子对象

$$\mathrm{Ind}^G_{G_x}(A^{G_x}) \hookrightarrow \mathrm{Ind}^G_{G_x}(\mathcal{O}_x^{G_x}) = P_x$$

在 $\mathrm{Res}^{-1}\mathcal{P}(\phi_0)$ 中。这与P_x的稳定性矛盾。因此，$\mathcal{O}_x$ 必须是稳定的。

结论直接由这两部分得出。 □

引理 4.10. 设X 是一个带有有限群G作用的光滑射影簇。那么，

(1) $H^*{}_G(X;\mathbb{C}) = H^*(X;\mathbb{C})^G$；(2) 庞加莱配对 η 在$H^*(X;\mathbb{C})^G$上的限制是非退化的。

证明。 考虑纤维化

$$X \to X \times_G EG \to BG.$$

其 Leray-Serre 谱序列满足：

$$E_2^{p,q} = H^p(BG; H^q(X)) \Rightarrow H_G^{p+q}(X).$$

由于G 是有限群，我们有

$$E_2^{p,q} = \begin{cases} H^q(X;\mathbb{C})^G & \text{if } p = 0; \\ 0 & \text{if } p > 0. \end{cases}$$

因此，谱序列在E_2 页退化，这意味着

$$H^*_G(X) = H^*(X;\mathbb{C})^G.$$

考虑平均映射

$$\mathrm{Av}\colon H^*(X) \to H^*(X)^G, \quad \mathrm{Av}(\alpha) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^*\alpha.$$

若 $\alpha \in H^*(X;\mathbb{C})^G$ 对每个 $\beta \in H^*(X;\mathbb{C})^G$ 都满足 $\eta(\alpha,\beta)_X = 0$，则对于任意 $\gamma \in H^*(X;\mathbb{C})$,

$$\eta(\alpha,\gamma)_X = \eta(\mathrm{Av}(\alpha),\gamma)_X = \eta(\alpha,\mathrm{Av}(\gamma))_X = 0.$$

由于 η 在$H^*(X;\mathbb{C})$上非退化，$\alpha = 0$。因此，η 在$H^*(X;\mathbb{C})^G$上仍然非退化。□

定理的证明 4.5。 设 $\alpha,\beta\in H^*{}_G(X;\mathbb{C})$。由引理 4.10,

$$\eta^G(T_d^G(\alpha),\beta)=\eta(T_d^G(\alpha),\beta),$$

and

$$\eta^G(T_d^G(\alpha),\beta)=\langle\alpha,\beta\rangle_{0,2,d}^{X,G}=\langle\alpha,\beta\rangle_{0,2,d}^{X}=\eta(T_d(\alpha),\beta).$$

由引理 4.10， η 在 $H^*(X;\mathbb{C})^G$ 上的非退化性迫使 $T^G{}_d=T_d|_{H^*(X;\mathbb{C})^G}$。因此，对于 $\alpha\in H^*{}_G(X;\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned}E_\psi^G(t)(\alpha)&=c_1^G(X)\cup\alpha+\sum_{\substack{d\in\mathrm{NE}(X/Y)_{\mathbb{N}}\\(c_1(X)-\omega)\cdot d>0}}(c_1(X)\cdot d)t^{c_1(X)\cdot d}e^{-\psi\cdot d}T_d^G(\alpha)\\&=c_1(X)\cup\alpha+\sum_{\substack{d\in\mathrm{NE}(X/Y)_{\mathbb{N}}\\(c_1(X)-\omega)\cdot d>0}}(c_1(X)\cdot d)t^{c_1(X)\cdot d}e^{-\psi\cdot d}T_d(\alpha)\\&=E_\psi(t)(\alpha).\end{aligned}$$

因此， $\Phi_t^G:=\Phi_t|_{H^*{}_G(X;\mathbb{C})}$ 是 G-截断量子微分方程（3.3）的基本解，且显然

$$\int_X^{eq}\Phi_t^G(\alpha)=\int_X\Phi_t(\alpha)=Z(\alpha).$$

设 $\sigma_t^G:=\mathrm{Res}^{-1}\sigma_t$。由引理 4.8， σ_t^G在稳定条件空间（X_G）中形成一条拟收敛路径，该路径解决提案 3.11 ，经由 Φ_t^G。

现设 $r\in\mathbb{R}$ 为 $^{-1}{}_z E_\psi^G(1)$ 的一个特征值的实部。注意到

$$F_G^r=F_1^r\cap H^*(X;\mathbb{C})^G.$$

取 $\alpha\in F^r{}_G$。由 $H^*(X;\mathbb{C})$ 的张成条件，存在常数$c_1,\ldots\ldots,c_k\in\mathbb{C}$ 以及关于 σ_t 的极限半稳定对象 $E_1,\ldots\ldots,E_k\in D^b(X)$，使得

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{|Z_t(E_i)|}{\|\Phi_t(v(E_i))\|}\quad\text{for all } i,$$

and

$$\alpha=\sum_{i=1}^k c_i v(E_i).$$

令 $\mathcal{E}_i:=$ 诱导函子$^G(E_i)=(\oplus_{g\in G}\phi_g^*E_i,\{\theta_h\}_{h\in G})$. 根据引理 4.8，每个 $\mathcal{E}_i$ 相对于 σ_t^G都是极限半稳定的。由于 $\alpha\in H^*(X;\mathbb{C})^G$ 是 G-不变的,

$$\alpha=\sum_{i=1}^k c_i\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\phi_g^*v(E_i)\right)=\sum_{i=1}^k c_i v^G(\mathcal{E}_i).$$

此外,

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{|Z_t^G(\mathcal{E}_i)|}{\|\Phi_t^G(v^G(\mathcal{E}_i))\|}=\liminf_{t\to\infty}\frac{|Z_t(E_i)|}{\|\Phi_t(v(E_i))\|}>0.$$

因此，这些类 $v^G(\mathcal{E}_i)$ 张成 $F^r{}_G$，且对 (σ_t^G,Φ_t^G) 满足关于 Φ_t^G 的张成条件。由引理 4.9， $\sigma_{t_0}^G$ 是几何的，只要 σ_{t_0} 是几何的。 □

推论 4.11 ([KN25])。 设 $\mathcal{D}$ 容许一个（强）完全例外集，形如

$$\mathcal{D} = \langle E_{1,1}, \ldots, E_{1,l_1}, E_{2,1}, \ldots, E_{2,l_2}, \ldots, E_{k,1}, \ldots, E_{k,l_k} \rangle$$

使得有限群 G 在每个块 $(E_{i,1}, \ldots, E_{i,l_i})$上传递作用，即指标集 $\{1, \ldots, l_i\}$ 上存在一个传递的 G-作用，使得 $g_* E_{i,l_i} \cong E_{i,g(l_i)}$。令 H_i 为第 i 个块中首个成员 $E_i := E_{i,1}$ 的稳定子。假设存在 $\mathcal{E}_i = (E_i, (\theta_h)) \in \mathcal{D}_{H_i}$，满足

$$\mathrm{Res}^1_{H_i}(\mathcal{E}_i) = E_i = E_{i,1}.$$

那么在 $\mathcal{D}_G$上存在一个诱导的（强）全例外集合，即

$$\left\langle \mathrm{Ind}^G_{H_1}(\rho \otimes_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_1)_{\rho \in \mathrm{Irr}(H_1)}, \ldots, \mathrm{Ind}^G_{H_k}(\rho \otimes_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_k)_{\rho \in \mathrm{Irr}(H_k)} \right\rangle,$$

其中 $\mathrm{Irr}(H_i)$ 表示 $H_i \subset G$ 的不可约表示集合。

证明。 根据定理 3.5，存在拟收敛路径 $\sigma_\bullet \in$稳定条件空间$(\mathcal{D})$，它恢复了全例外集合 $\langle E_{1,1}, \ldots, E_{k,l_k} \rangle$。利用定理3.5中拟收敛路径的粘合构造，我们可以选择 $\sigma_\bullet$ 使其具有 G-不变性。

设 $\mathcal{E} \in \mathrm{Res}^{-1}\mathcal{P}_\bullet$。由引理 4.8，对象 $E = \mathrm{Res}(\mathcal{E})$ 关于 $\sigma_\bullet$ 是极限半稳定的。因此，$\mathcal{D}^E \cong E_{i,j}$，$j$ 对某个 $1 \le i \le k$ 以及 $1 \le j \le l_i$。于是

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\mathcal{E}}_G \subset \mathrm{Ind}(\mathcal{D}^{E_{i,j}}) &\cong \mathrm{Ind}(\mathcal{D}^{E_{i,1}}) \\ &\cong \mathrm{Ind}^G_{H_i} \mathrm{Ind}^{H_i}_1 \mathrm{Res}^1_{H_i}(\mathcal{E}_i) \\ &\cong \mathrm{Ind}^G_{H_i}(\mathbf{k}\langle H_i \rangle \otimes_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_i) \\ &\cong \bigoplus_{\rho \in \mathrm{Irr}(H_i)} \mathrm{Ind}((\rho \otimes_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_i)^{\oplus m_{i,\rho}}), \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{k}\langle H_i \rangle$ 是 H_i 的正则表示，并且

$$m_{i,\rho} = \frac{\dim_{\mathbf{k}} \rho}{\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{End}_{H_i}(\rho)}.$$

另一方面，$\mathrm{Res}(\mathcal{D}^{\mathcal{E}_G}) = \mathcal{D}^E \cong E_{i,j}$。由于 Res 是忠实的，存在$\rho \in \mathrm{Irr}(H_i)$，使得 $\mathcal{D}^{\mathcal{E}_G} \cong$ 诱导函子 $(\rho \otimes \mathcal{E}_i)$。因此，$\mathrm{Res}^{-1}(\sigma_\bullet)$ 是稳定条件空间 $(\mathcal{D}^G)$ 中所需的拟收敛路径，它恢复了 $\left\{\text{诱导函子}^G{}_{H_i}(\rho \otimes_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_i)_{\rho \in \mathrm{Irr}(H_i)}\right\}$。 □

4.2. **应用**。

4.2.1. 射影空间。 设 V 是 $\mathbb{C}$ 上的 m 维向量空间，并且$\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^{m-1}$ 为其射影化。$D^b(\mathbb{P}^{m-1})$ 的导出范畴具有一个全例外集合

$$\{\mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \ldots, \mathcal{O}(m-1)\}.$$

设G 是一个有限群，在线性作用于 $\mathbb{P}(V)$上，即存在一个群同态

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$$

使得对于$g \in G$ 以及 $[v] \in \mathbb{P}(V)$（其中$v \neq 0 \in V$），

$$g \cdot [v] = [\rho(g)(v)].$$

每个 $\mathcal{O}(i)$ 因而继承了自然的 G-等变结构。设 $V_1,\dots,V_m$ 为 G 在 $\mathbb{C}$ 上的不可约表示。根据推论 4.11，在 $D^b_G(\mathbb{P}^{m-1})$ 上存在一个诱导的强半正交分解：

$$\begin{pmatrix} \mathcal{O}\otimes V_1 & \mathcal{O}(1)\otimes V_1 & \cdots & \mathcal{O}(m-1)\otimes V_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{O}\otimes V_m & \mathcal{O}(1)\otimes V_m & \cdots & \mathcal{O}(m-1)\otimes V_m \end{pmatrix}$$

满足

(1) 对于 $i<j$,

$$\mathrm{Hom}^k_G(\mathcal{O}(j)\otimes V_p, \mathcal{O}(i)\otimes V_q) = 0 \text{ for any } k.$$

(2) 对于 $i=j$,

$$\mathrm{Hom}^k_G(\mathcal{O}(i)\otimes V_p, \mathcal{O}(i)\otimes V_q) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{for } p=q, k=0; \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

我们简要回顾拟收敛路径和基本解的构造，以说明非等变 Proposal 3.11 关于 $\mathbb{P}^{m-1}$，遵循 [Zul24]。记 B 为 $H^*(\mathbb{P}^{m-1};\mathbb{C})$ 的开轨迹，使得对任意 $\tau\in B$，$\star_\tau$ 中的求和收敛。关于 [Man99] 中 B非空性的证明。量子微分方程由平凡丛上的亚纯联络 $\tilde{}$定义 Δ

$$H^*(\mathbb{P}^{m-1};\mathbb{C})\times(B\times\mathbb{P}^1)\to B\times\mathbb{P}^1.$$

$\tilde{}$在坐标 (τ,z) 中，Δ 定义为

$$\tilde{\nabla}_{\partial_\alpha} = \partial_\alpha + \frac{1}{z}(\alpha\star_\tau), \quad \alpha\in T_\tau B\cong H^*(\mathbb{P}^{m-1};\mathbb{C}),$$

$$\tilde{\nabla}_{z\partial_z} = z\partial_z - \frac{1}{z}(E\star_\tau) + \mu,$$

其中 E 是欧拉向量场，而 μ 是 $H^*(\mathbb{P}^{m-1};\mathbb{C})$ 上的分次算子。根据 [GGI16], , 对于固定的 $\tau\in B$，Φ的典范基本解 $\tilde{\nabla}_{|_\tau}$ 诱导出一个同构

$$\Phi\colon H^*(\mathbb{P}^{m-1};\mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} \left\{s\colon \mathbb{R}_{>0}\to H^*(\mathbb{P}^{m-1};\mathbb{C}) \mid \tilde{\nabla}_{|_\tau} s = 0\right\},$$

给定为

$$\Phi(\alpha)(z) := (2\pi)^{\frac{1-m}{2}} S(\tau,z) z^{-\mu} z^{\rho}\alpha,$$

其中 $S(\tau,-)$ 是定义在 $\mathbb{R}_{>0}$ 上的一个特定全纯函数，且 $\rho = (c_1(\mathbb{P}^{m-1})\cup) \in \mathrm{End}(H^*(\mathbb{P}^{m-1};\mathbb{C}))$。根据 [Zul24, 定理 5.15], , 存在一条拟收敛路径 $\sigma_t = (Z_t,\mathcal{P}_t) \in \mathrm{Stab}(\mathbb{P}^{m-1})$，对于 $t\in\mathbb{R}$，其中心荷 Z_t 是量子上同调中心荷

$$Z_t(E) := (2\pi t)^{\frac{m-1}{2}} \int_{\mathbb{P}^{m-1}} \Phi(\hat{\Gamma}\cdot \mathrm{Ch}(E)).$$

其中 $\hat{\Gamma}$ 是 $\mathbb{P}^{m-1}$ 的伽马类，而 Ch 是定义如下的修正陈特征

$$\mathrm{Ch} := (2\pi i)^{\deg}\mathrm{ch}.$$

应用定理 4.5 可得一条准收敛路径 $\sigma^G_t = (Z^G_t,\mathcal{P}^G_t)$，对于 $t\in\mathbb{R}_{>0}$ 其G-等变量子上同调中心荷为 Z^G_t。在

射影平面的特殊情形 $\mathbb{P}^2$，结合 [Zul24，定理 5.17]与推论 4.11 给出的诱导半正交分解为

$$\begin{pmatrix} \mathcal{O}\otimes V_1 & \mathcal{O}(1)\otimes V_1 & \mathcal{O}(2)\otimes V_1 \\ \mathcal{O}\otimes V_2 & \mathcal{O}(1)\otimes V_2 & \mathcal{O}(2)\otimes V_2 \\ \mathcal{O}\otimes V_3 & \mathcal{O}(1)\otimes V_3 & \mathcal{O}(2)\otimes V_3 \end{pmatrix}$$

如$r \to 0^+$。

4.2.2. 爆破曲面。 设 X 是一个次数为 d $(1 \leqslant d \leq 9)$ 的光滑德尔佩佐曲面，由在一般位置的 $\mathbb{P}^2$ 个 r个互异点 $x_1,\dots,x_r \in \mathbb{P}^2$爆破得到。记 $\pi : X \to \mathbb{P}^2$ 为爆破态射，并令 $E_i = \pi^{-1}(x_i)$ 为例外因子。根据 [Orl92] ， X 上的相干层导出范畴具有如下全例外集合

$$\begin{pmatrix} \mathcal{O}_{E_1}(-1) & & & \\ \vdots & \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} & \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) & \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2) \\ \mathcal{O}_{E_r}(-1) & & & \end{pmatrix},$$

其中层 $\mathcal{O}_{E_1}(-1),\dots,\mathcal{O}_{E_r}(-1)$ 两两正交。设 G是作用于 X 上的有限群，满足推论 4.11中的条件。例如，取G 为 PGL(3) 的一个有限子群，该子群置换这 r 个点。在这种情况下，G在底空间 $\mathbb{P}^2$ 上的作用继承自原始的 PGL(3) 作用；对于 $g \in G$，有

$$g(E_i) = E_j, \quad \text{if } g(x_i) = x_j.$$

因此， $\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k)$ 通过 $\mathbb{P}^2$ 上 PGL(3) 作用的拉回继承了一个G-等变结构。同时， $\mathcal{O}_{E_i}(-1)$ 上的 G-等变结构由自然同构给出

$$\theta_g : \mathcal{O}_{E_i}(-1) \to g^*\mathcal{O}_{E_{g(i)}}(-1).$$

由推论 4.11，这给出了 $D^b{}_G(X)$ 的一个诱导半正交分解。根据 [Dol10], , 对于 $4 \leq r \leq 8$，自同构群 Aut(X) 是有限的，并且这样的群G 对于这些 r 个点的适当构型存在。

为简单起见，我们限制在如下情形： $\pi : X \to Y$ 是德尔佩佐曲面 Y 上一点的爆破，其次数为 $d \geq 2$ ，用以研究提议 3.11。记 E 为例外因子。非等变提议 3.11关于爆破曲面的解的构造归功于 [Kar24]。一般类 $\zeta(t) \in H^*(X;\mathbb{C})$ 可以写成

$$\zeta(t) = (\zeta_0(t), \pi^*\zeta_1(t) + c(t)E, \zeta_2(t)),$$

其中 $\zeta_i(t) \in H^{2i}(X;\mathbb{C})$ 且 $c(t) \in \mathbb{C}$。截断后的量子微分于是变为：

$$t\frac{d\zeta(t)}{dt} = \frac{1}{z}(0, \pi^*K_Y\zeta_0 + (\zeta_0 + e^{-\psi E}tc)E, K_Y\zeta_1 - c),$$

其中 K_Y 是Y的典范类。根据 [Kar24], , 存在一条稳定性条件的拟收敛路径 $\sigma_t = (Z_t, \mathcal{P}_t)$， 当$t \in [t0,\infty)$时，其中心荷具有如下形式

$$Z_t(F) = w(\lambda, Z_0)(\mathrm{Ei}(\lambda t) - \mathrm{Ei}(\lambda t_0))\mathrm{ch}_1(F)\cdot E + Z_0(e^{-sE}\,\mathrm{ch}(F)),$$

with

(1) $Z_0 = Z_{t_0}$ 是初始中心荷，选自一个特定的室；(2) $\mathrm{Ei}(z)$ 是指数积分函数，定义如下

$$\mathrm{Ei}(z) := -\int_{-z}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt;$$

(3) $\lambda \in \mathbb{R} \oplus i[-1,1]$ 和 $s \in \mathbb{R}$; (4) $w(s,\lambda,Z_0)$ 是某个归一化函数。

现在应用定理 4.5 即可得到一条拟收敛路径 $\sigma_t^G = (Z_t^G, \mathcal{P}_t^G)$ 属于稳定条件空间(X_G)，其中 $t \in [t_0,\infty)$，且满足提案 3.11的要求。

5. $\mathbb{T}$-稳定条件的准收敛路径

本节首先介绍 $\mathbb{T}$-稳定条件在 $\mathbb{T}$-范畴上的概念，它推广了 $\mathbb{X}$-范畴上的 q-稳定条件，这些条件见 [IQ23],，并确立 $\mathbb{T}$-稳定条件空间的变形性质。随后，我们在 $\mathbb{T}$-稳定条件空间中构造拟收敛路径，以满足提案 3.11 关于由小量子上同调得到的等变射影空间的要求。

5.1. **$\mathbb{T}$-稳定条件 $\mathbb{T}$-范畴**。 A $\mathbb{T}$-范畴，记作 $\mathcal{D}_{\mathbb{T}}$，由一个三角范畴 $\mathcal{D}$ 以及 m 个交换自等价组成

$$T_i : \mathcal{D}_{\mathbb{T}} \to \mathcal{D}_{\mathbb{T}}, \quad i = 1,\dots,m.$$

我们将 $E[\sum^m{}_{i=1} l_i T_i] := T_1^{l_1} \circ \cdots \circ T^{l_m}{}_m(E)$ 记作 $l_i \in \mathbb{Z}$，且 $E \in \mathcal{D}_{\mathbb{T}}$。令

$$R(\mathbb{T}) = \mathbb{Z}[T_1^{\pm},\dots,T_m^{\pm}]$$

并定义 $R(\mathbb{T})$ 在 $K(\mathcal{D}_{\mathbb{T}})$ 上的作用为

$$T_i^l \cdot [E] := [E[lT_i]].$$

因此，$K(\mathcal{D}_{\mathbb{T}})$ 被赋予 $R(\mathbb{T})$-模结构。在此语境下，自等价的 $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_{\mathbb{T}})$ 是指与 $\{T_i\}$ 交换的自等价。

现在我们给出两个 $\mathbb{T}$-范畴的例子。

例5.1 （$\mathbb{T}$-分次代数）。 一个微分 $\mathbb{T}$-分次（mdg）代数 A 可描述为一个代数

$$A := \bigoplus_{l_i \in \mathbb{Z}} A^{l+\sum_{i=1}^m l_i T_i}$$

按 $\mathbb{Z}T_1 \oplus \mathbb{Z}T_2 \cdots \oplus \mathbb{Z}Tm$ 分次，并带有微分 $d : A^{l+\sum^m{}_{i=1} l_i T^i} \to A^{l+1+\sum^m{}_{i=1} l_i T_i}$，其次数为 1。设 $M = \oplus_{m_i \in \mathbb{Z}} M^{l+\sum^m{}_{i=1} l_i T^i}$ 是 A 上的 $\mathbb{T}$-分次模，并带有微分 d。次数平移

$$M' = M[k + \sum_{i=1}^m k_i T_i]$$

定义为

$$(M')^{l+\sum_{i=1}^m l_i T_i} := M^{l+k+\sum_{i=1}^m (l_i+k_i)T_i}$$

具有微分 $d' := (-1)^k d$。于是我们得到 $\mathbb{T}$-范畴：

(1) $D(A)$： $\mathbb{T}$分次模上的导出范畴，其中模取自A；(2) Perf$A$： 完美导出范畴，它是$D(A)$中由A 生成且对取直和项封闭的最小满三角子范畴。

Calabi-Yau-$\mathbb{T}$ 完备化的 A 定义为

$$\Pi_{\mathbb{T}}(A) := T_A(\theta) = A \oplus \theta \oplus (\theta \otimes_A \theta) \oplus \cdots$$

其中 $\theta := \Theta_A(\mathrm{T}_1 + \cdots + \mathrm{T}_m - 1)$，且 $\mathrm{T}_A(\theta)$ 是 θ在 A 上的张量代数。现在假设 A 是一个同调光滑的 $\mathbb{T}$分次代数，并且 Θ_A 是它的逆对偶化复形。根据 [Kel11，定理 6.3]，，Calabi-Yau-$\mathbb{T}$ 完备化 $\Pi_{\mathbb{T}}$(A) 成为一个 Calabi-Yau-$\mathbb{T}$ 代数，其意义是 A 满足

$$\Theta_A \xrightarrow{\sim} A[T_1 + \cdots + T_m]$$

此外，$D_{fd}(\Pi_{\mathbb{T}}(A))$ 是一个*Calabi-Yau*-$\mathbb{T}$范畴，也就是说，对于其中任意对象X、$Y\mathcal{D}$，都有一个自然同构

$$\mathrm{Hom}(X,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{DHom}(Y, X[T_1 + \cdots + T_m]).$$

例 5.2 （启发性例子： $\mathbb{T}$-等变层）。 设X 是一个带有环面 $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^m$作用的光滑射影簇。根据定义， $\mathbb{T}$ 的有限维复表示构成的环为

$$R(\mathbb{T}) = \mathbb{C}[T_1^{\pm}, \ldots, T_m^{\pm}],$$

其中，每个T_i 对应于 $\mathbb{T}$的第i个坐标特征。结构态射 $\pi: X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$诱导出两个态射

$$\begin{aligned} \pi_* : K(X) &\to K(\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z} \\ E &\mapsto \sum (-1)^i \mathrm{rk} H^i(X,E), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \pi_*^G : K^{\mathbb{T}}(X) &\to R(\mathbb{T}) \\ \mathcal{E} &\mapsto \sum (-1)^i [H^i(X,\mathcal{E})], \end{aligned}$$

其中， $[H^i(X,\mathcal{E})]$表示上同调空间$H^i(X, \mathcal{E})$的$R(\mathbb{T})$类。于是，格罗滕迪克群$K_{\mathrm{num}}(X)$和等变格罗滕迪克群$K^{\mathbb{T}}_{\mathrm{num}}(X)$分别具有 $\mathbb{C}$-代数结构和$R(\mathbb{T})$-代数结构，并且有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^b_{\mathbb{T}}(X) & \xrightarrow{R\pi_*^{\mathbb{T}}} & \mathcal{D}^b(\mathrm{Rep}(\mathbb{T})) \\ {\scriptstyle F_{\mathbb{T}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ \mathcal{D}^b(X) & \xrightarrow{R\pi_*} & \mathcal{D}^b(\mathbb{C}), \end{array}$$

其中F、$F_{\mathbb{T}}$是相应的遗忘函子。对于任意 $\mathcal{E} \in D^b_{\mathbb{T}}(X)$，$T_i$ 在 $\mathcal{E}$ 上的作用定义为

$$T_i \cdot \mathcal{E} := \mathcal{E} \otimes T_i,$$

使 $\{T_i\}$ 成为m 个$D^b_{\mathbb{T}}(X)$ 中的交换自等价。因此，配备 $\{T_i\}$ 的$D^b_{\mathbb{T}}(X)$ 构成一个 $\mathbb{T}$-范畴。为简便起见，我们将其记作$D^b_{\mathbb{T}}(X)$。

最后，设G是一个作用于X上的约化群，且 $\mathbb{T}\subset G$是一个魏尔群为W的极大环面。利用同构

$$H_G^*(X)\cong H_{\mathbb{T}}^*(X)^W,\quad K^G(X)_{\mathbb{Q}}\cong K^{\mathbb{T}}(X)_{\mathbb{Q}}^W,$$

我们可以通过限制到 $\mathbb{T}$ 并结合W-不变结构，将$D^b\ G(X)$视为一个 $\mathbb{T}$-范畴。

定义 5.3. 一个 $\mathbb{T}$-范畴 $\mathcal{D}_{\mathbb{T}}$ 上的预$\mathbb{T}$稳定性条件 $(\sigma,\mathbf{s})$由以下部分组成： $\mathcal{D}_{\mathbb{T}}$ 上的一个（Bridgeland）预稳定性条件 $\sigma=(Z,\mathcal{P})$，以及一个元组$\mathbf{s}=(s_1,\ldots,s_m)\in\mathbb{C}^m$，满足

$$T_i(\sigma)=s_i\cdot\sigma,\ \text{for } i=1,\ldots,m. \tag{6}$$

注 5.4. 当 $m=1$, (6) 是熟知的 Gепner 点，已在 [Tod14；16]。因此，我们将 (6) 称为 多重-*Gepner*点。

对于固定的元组$\mathbf{s}\subset\mathbb{C}$，定义求值映射

$$\overline{\mathrm{ev}}_{\mathbf{s}}:R(\mathbb{T})\to\mathbb{C},\quad T_i\mapsto e^{\mathbf{i}\pi s_i}.$$

为了明确 (6) 的条件，我们给出以下等价定义： $\mathbb{T}$-稳定性条件:

定义 5.5。 一个预-$\mathbb{T}$-稳定性条件（σ,$\mathbf{s}$）由 $\mathcal{D}_{\mathbb{T}}$上的预稳定性条件 $\sigma=(Z,\mathcal{P})$和一个复数元组$\mathbf{s}=(s_1,\ldots,s_m)\in\mathbb{C}^m$组成，该元组满足:

(1) 对所有 $\phi\in\mathbb{R}$，切片满足 $\mathcal{P}(\phi+\mathrm{Re}(s_i))=\mathcal{P}(\phi)[T_i]$；(2) 中心荷 Z： $K(\mathcal{D}_{\mathbb{T}})\to\mathbb{C}$ 是 $R(\mathbb{T})$- 线性的，并且经由 ev$_{\mathbf{s}}$ 分解。

在本文余下部分，我们作如下假设:

假设 5.6。 格罗滕迪克群 $K(\mathcal{D}_{\mathbb{T}})$ 是$R(\mathbb{T})$ 上有限秩自由的，即 $K(\mathcal{D}_{\mathbb{T}})\cong R(\mathbb{T})^n$ 其中某个 $n\in\mathbb{N}$。

我们注意到，假设5.6在例 5.1 的背景下自动成立。在例 5.2 的设定中，其中 X 是带有 $\mathbb{T}$ 作用的光滑射影对象，并令 $\pi:X\to\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ 为例 5.2 中讨论的结构态射，对象 $\mathcal{E}\in D_{\mathbb{T}}^b(X$的等变格罗滕迪克-欧拉-庞加莱特征定义为

$$\chi^{\mathbb{T}}(\mathcal{E}):=\pi_*^{\mathbb{T}}(\mathcal{E}),$$

相应的等变 Grothendieck–Euler–Poincaré 配对为

$$\chi^{\mathbb{T}}(\mathcal{E},\mathcal{F}):=\chi^{\mathbb{T}}(\mathcal{E}^*\otimes\mathcal{F}),$$

对于任意 $\mathcal{E},\mathcal{F}\in\mathrm{D}_{\mathbb{T}}^b(\mathrm{X})$。等变数值格罗滕迪克群 $\mathrm{K}_{\mathrm{num}}^{\mathbb{T}}(\mathrm{X})$ 定义为 K(X) 对形式 $\chi^{\mathbb{T}}(-,-)$ 的根基取商。如第 2.1 节所述，格罗滕迪克群 $\mathrm{K}^{\mathbb{T}}(\mathrm{X})$ 取为数值格罗滕迪克群 $\mathrm{K}_{\mathrm{num}}^{\mathbb{T}}(\mathrm{X})$。回想一下， [GKM98] 的等变形式性结果意味着 $\mathrm{H}_{\mathbb{T}}^*(\mathrm{X})$ 是 $\mathrm{H}_{\mathbb{T}}^*(\mathrm{pt})$ 上的自由模，其秩等于

维数 $H^*(X)$。此外，还可以证明 $K^{\mathbb{T}}(X)$ 是一个自由的 $R(\mathbb{T})$-模，其秩等于 rk $K(X)$。因此，假设 5.6 对于 $D^b_{\mathbb{T}}(X)$ 成立。

设 $\|\cdot\|$ 是 $\Gamma\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ 上的一个固定范数。在假设 5.6 下，我们通过如下定义，将范数 $\|\cdot\|$ 延拓到 $K(\mathcal{D}_{\mathbb{T}})$ 上：

$$\|\sum_{i=1}^{l} T_1^{k_{i,1}}\cdots T_m^{k_{i,m}}\alpha_i\| := \sum_{i=1}^{l} |e^{\mathbf{i}\pi(k_{i,1}s_1+\cdots+k_{i,m}s_m)}|\|\alpha_i\|,$$

对 $\alpha_i\in\Gamma$。

利用 (2)，我们现在可以为预-$\mathbb{T}$-稳定性条件定义相应的支撑性质：

定义 5.7. 若存在常数 $C_\sigma>0$，使得对于每个满足 $[E]=\alpha\in K(\mathcal{D}_{\mathbb{T}})$ 的 σ-半稳定对象 E，均有.....则称预-$\mathbb{T}$-稳定性条件 $(\sigma,\mathbf{s})$ 满足 $\mathbb{T}$-支撑性质 。

$$\|\alpha\|\le C_\sigma\cdot|Z(\alpha)|.$$

若 $\mathcal{D}_{\mathbb{T}}$ 上的预-$\mathbb{T}$-稳定性条件 $(\sigma,\mathbf{s})$ 满足 $\mathbb{T}$-支撑性质，则称其为 $\mathbb{T}$-稳定性条件。对于固定的元组 $\mathbf{s}\subset\mathbb{C}$，我们用 $\mathbb{T}\mathrm{Stab}_{\mathbf{s}}\mathcal{D}_{\mathbb{T}}$ 表示所有 $\mathbb{T}$-稳定性条件组成的集合。由于空间 $\mathbb{T}\mathrm{Stab}_{\mathbf{s}}\mathcal{D}_{\mathbb{T}}$ 是通常稳定性空间 $\mathrm{Stab}(\mathcal{D}_{\mathbb{T}})$ 的子集，$\mathrm{Stab}(\mathcal{D}_{\mathbb{T}})$ 上的距离 d 在 $\mathbb{T}\mathrm{Stab}_{\mathbf{s}}\mathcal{D}_{\mathbb{T}}$ 上诱导出一个拓扑。令 $\mathbb{C}_{\mathbf{s}}$ 表示配备了通过求值映射 $\mathrm{ev}_{\mathbf{s}}$ 赋予的 $R(\mathbb{T})$- 模结构的复数。$\mathbb{T}\mathrm{Stab}_{\mathbf{s}}\mathcal{D}_{\mathbb{T}}$ 的变形性质如下：

命题 5.8。遗忘映射

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{\mathbf{s}}:\mathbb{T}\mathrm{Stab}_{\mathbf{s}}(X)&\to\mathrm{Hom}_R(K(\mathcal{D}_{\mathbb{T}}),\mathbb{C}_{\mathbf{s}})\\((Z,\mathcal{P}),\mathbf{s})&\mapsto Z\end{aligned}$$

是拓扑空间间的局部同胚。特别地，$\mathcal{Z}_{\mathbf{s}}$ 在 $\mathbb{T}$稳定条件空间$_{\mathbf{s}}\mathcal{D}_{\mathbb{T}}$ $\subset$稳定条件空间$(\mathcal{D}_{\mathbb{T}})$上诱导一个复结构。

证明。 我们首先证明，$\mathbb{T}$-支撑性质蕴含局部有限性。假设 $((Z,\mathcal{P}),\mathbf{s})\in\mathbb{T}$稳定条件空间$_{\mathbf{s}}(\mathcal{D}_{\mathbb{T}})$ 不是局部有限的。那么对某些 ϕ和$0<\epsilon<\frac{1}{2}$，$\mathcal{P}(\phi-\epsilon,\phi+\epsilon)$ 不具有有限长度。因此，存在$E\in\mathcal{P}(\phi-\epsilon,\phi+\epsilon)$，它有一个简单商对象为 $\{S_i\}$ 的无限合成列。我们断言 $|Z(S_i)|\to 0$。否则，

$$|Z(E)|=\left|\sum Z(S_i)\right|=\left|\sum e^{-\mathbf{i}\pi\phi}Z(S_i)\right|\ge\sum\mathrm{Re}(e^{-\mathbf{i}\pi\phi}Z(S_i))\to\infty,$$

这是不可能的。由于每个 S_i 都是 σ-半稳定的，并且对于某个常数$C>0$，$\|S_i\|>0$，$\mathbb{T}$-支撑性质给出

$$0<C_\sigma\le\frac{|Z(S_i)|}{\|S_i\|}\to 0,$$

这是矛盾的。因此，$((Z,\mathcal{P}),\mathbf{s})$ 是局部有限的。根据 $\mathrm{Stab}(\mathcal{D}_{\mathbb{T}})$ 的变形性质，存在 $0<\epsilon'<\frac{1}{8}$，使得对于任意满足以下条件的 $W\in\mathrm{Hom}_R(K(\mathcal{D}_{\mathbb{T}}),\mathbb{C})_{\mathbf{s}}$

$$|W(E)-Z(E)|<\sin(\epsilon\pi)|Z(E)|$$

对于每个 σ-半稳定对象 E，都存在唯一的切片 $\mathcal{Q}$，使得 $(W,\mathcal{Q})$ 是 $\mathcal{D}_{\mathbb{T}}$ 上的稳定条件，且 $d((Z,\mathcal{P}),(W,\mathcal{Q})) < \epsilon$。根据 $\mathcal{Q}$ 在[Bri07], 中的构造，我们有 $E \in \mathcal{P}(\phi-\epsilon, \phi+\epsilon)$。假设 $E[T_i] \notin \mathcal{P}(\phi + \mathrm{Re}(s_i) - \epsilon, \phi + \mathrm{Re}(s) + \epsilon)$。那么存在一个短正合列

$$0 \to A \to E[T_i] \to B \to 0$$

在 $\mathcal{P}(\phi+\mathrm{Re}(s_i)-\epsilon, \phi+\mathrm{Re}(s_i)+\epsilon)$ 中，$\phi_W(A) > \phi_W(E[T_i]) > \phi_W(B)$。根据定义，序列

$$0 \to A[-T_i] \to E \to B[-T_i] \to 0$$

属于 $\mathcal{P}(\phi-\epsilon, \phi+\epsilon)$，这与$E$是$W$-半稳定的事实矛盾。因此，$((W,\mathcal{Q}),\mathbf{s})$ 是一个预-$\mathbb{T}$-稳定性条件。现在设F关于$(W,\mathcal{Q})$半稳定，并设$\{A_i\}$是F 关于σ的Harder-Narasimhan因子。那么

$$\begin{aligned} \frac{|W(F)|}{\|F\|} &\geq \frac{|Z(F)|}{\|F\|} - \frac{|W(F)-Z(F)|}{\|F\|} \\ &\geq \frac{|Z(F)|}{\|F\|} - \epsilon \\ &\geq \cos(2\epsilon)\frac{\sum |Z(A_i)|}{\sum \|A_i\|} - \epsilon \\ &\geq C_\sigma^{-1}\cos(2\epsilon) - \epsilon \end{aligned} \tag{7}$$

为简便起见，我们假设 $\|W-Z\| \leq \epsilon$。因此，$((W,\mathcal{Q}),\mathbf{s})$ 满足$\mathbb{T}$-支撑性质，且属于 $\mathbb{T}$稳定条件空间$\mathbf{s}(\mathcal{D}_{\mathbb{T}})$。证明完毕。□

定义

$$\mathbb{T}\mathrm{Stab}(\mathcal{D}_{\mathbb{T}}) := \bigcup_{\mathbf{s}\in\mathbb{C}^m} \mathbb{T}\mathrm{Stab}_{\mathbf{s}}(\mathcal{D}_{\mathbb{T}}).$$

若 $(\sigma,\mathbf{s}) \in \mathbb{T}$稳定条件空间$\mathbf{s}(\mathcal{D}_{\mathbb{T}})$ 且 $(\sigma',\mathbf{s}') \in \mathbb{T}$稳定条件空间$_{\mathbf{s}'}(\mathcal{D}_{\mathcal{T}})$，其中$\mathbf{s} \neq \mathbf{s}'$，则

$$\begin{aligned} d(\sigma,\sigma') &\geq \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ |\phi_\sigma^{\pm}(E[kT_i]) - \phi_{\sigma'}^{\pm}(E[kT_i])| \right\} \\ &= \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ |\phi_\sigma^{\pm}(E) - \phi_{\sigma'}^{\pm}(E) + k(\mathrm{Re}(s_i) - \mathrm{Re}(s_i'))| \right\} \\ &= \infty \end{aligned}$$

因此，当 $\mathbf{s} \neq \mathbf{s}'$ 时，$\mathbb{T}\mathrm{Stab}_{\mathbf{s}}(\mathcal{D}_{\mathbb{T}})$ 和 $\mathbb{T}\mathrm{Stab}_{\mathbf{s}'}(\mathcal{D}_{\mathbb{T}})$ 位于 $\mathrm{Stab}(\mathcal{D}_{\mathbb{T}})$ 的不同连通分支中。

我们通过转向某些 $\mathbb{T}$-范畴的轨道范畴，来考虑 $\mathbb{T}$-稳定条件的约化。设 $\mathcal{D}$ 是一个带有自函子 $\Phi\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ 的三角范畴。回顾一下，轨道范畴 $\mathcal{D}/\Phi$ 具有与 $\mathcal{D}$ 相同的对象，其态射空间为

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}/\Phi}(E,F) := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, \Phi^k(F)).$$

定义 5.9。设 $\mathbf{n} = \{n_1, \ldots, n_m\} \subset \mathbb{Z}_{>0}$是一个正整数集。轨道商

$$\mathcal{D}_N = \mathcal{D}_{\mathbb{T}} /\!\!/ [T_1 - n_1, \ldots, T_m - n_m]$$

定义为轨道范畴 $\mathcal{D}_{\mathbb{T}}/[T_1 - n_1, \ldots, T_m - n_m]$ 的三角包络。若其为$\mathbf{n}$-约化的，则

- 商函子 $\pi_{\mathbf{n}}: \mathcal{D}_{\mathbb{T}} \to \mathcal{D}_{\mathbf{n}}$ 是正合的;
- $\mathcal{D}_N$ 的格罗滕迪克群是有限秩自由的，且诱导的$R(\mathbb{T})$-线性映射是由$t_i \mapsto (-1)_{ni}$给出的满射。

$$[\pi_{\mathbf{n}}]: K(\mathcal{D}_{\mathbb{T}}) \to K(\mathcal{D}_{\mathbf{n}})$$

给定 $\mathcal{D}_{\mathbb{T}}$上带有 $\sigma = (Z, \mathcal{P})$的一个 $\mathbb{T}$-稳定性条件$(\sigma, \mathbf{n})$，我们如下在 $\mathcal{D}_{\mathbf{n}}$ 上定义 $\sigma_{\mathbf{n}} := (Z_{\mathbf{n}}, \mathcal{P}_{\mathbf{n}})$

- $\mathcal{P}_{\mathbf{n}}(\phi) := \mathcal{P}(\phi)$
- $Z_{\mathbf{n}}: K(\mathcal{D}_{\mathbf{n}}) \to \mathbb{C}$ 满足$Z = Z_{\mathbf{n}} \circ [\pi_{\mathbf{n}}]$。

由定义， $\sigma_{\mathbf{n}}$ 构成 $\mathcal{D}_{\mathbf{n}}$ 上具有支撑性质的稳定性条件。这给出复流形的一个单射

$$\iota_{\mathbf{n}}: \mathbb{T}\mathrm{Stab}_{\mathbf{n}}(\mathcal{D}_{\mathbb{T}}) \to \mathrm{Stab}\mathcal{D}_{\mathbf{n}}$$
$$(\sigma, \mathbf{n}) \to \sigma_{\mathbf{n}}$$

此外，由命题5.8可知， $\iota_{\mathbf{n}}$ 的像在稳定条件空间$\mathcal{D}_{\mathbf{n}}$中既开又闭。

5.2. **G-等变射影空间的 NMMP**。 本节研究配备环面G的射影空间上的 NMMP $\mathbb{T}$-作用。基于第 $\mathbb{T}$5.1 节引入的 5.1稳定条件框架，我们将在适当的复数元组下，构造满足命题 3.11的准收敛路径，其所在空间为 $\mathbb{T}$-稳定条件。首先，我们按照 [CV21]，简要介绍射影空间的等变量子上同调。

设$m \geq 2$。考虑 $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^m$ 在 $\mathbb{C}^m$上的对角作用。它诱导出 $\mathbb{T}$ 在 $\mathbb{P}^{m-1}$上的作用；$\mathbb{P}^{m-1}$是参数化一维子空间的射影空间$F \subset \mathbb{C}^m$。若 $(u_1, \ldots, u_m)$ 是 $\mathbb{C}^m$的标准基，记由u_I张成的坐标直线所对应的点为$pt_I \in \mathbb{P}^{m-1}$，其中$I = 1, \ldots, m$。点$pt_I$ 是 $\mathbb{T}$-作用的不动点。

考虑 $\mathbb{T}$-等变上同调代数 $H^*_{\mathbb{T}}(\mathbb{P}^{m-1}, \mathbb{C})$。记

(1) x 表示典范线丛$\mathcal{O}(-1)$的第一等变陈类，该线丛 $\mathbb{P}^{m-1}$ 带有标准的 $\mathbb{T}$结构；(2) $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_{m-1})$表示商丛$\mathcal{Q}$ 的等变陈根（若$F \subset \mathbb{C}^m$ 是由$p \in \mathbb{P}^{m-1}$表示的直线，则纤维$\mathcal{Q}_p$ 为$\mathbb{C}^m/F$）；(3) $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_m)$表示与环面 $\mathbb{T}$各因子对应的等变参数。

Then

$$H^*_{\mathbb{T}}(\mathbb{P}^{m-1}; \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}[x, \mathbf{z}] \Big/ \Big\langle \prod_{i=1}^{m} (x - z_i) \Big\rangle.$$

and

$$K^*_{\mathbb{T}}(\mathbb{P}^{m-1}; \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}[x^{\pm 1}, \mathbf{T}^{\pm 1}] \Big/ \Big\langle \prod_{i=1}^{m} (x - T_i) \Big\rangle, \tag{8}$$

其中，$T_1,\ldots,Z_m$是与 $\mathbb{T}=(\mathbb{C}^*)^m$各因子对应的等变参数。环$H^*_{\mathbb{T}}(\mathbb{P}^{m-1},\mathbb{C})$是$H^*_{\mathbb{T}}($pt, $\mathbb{C})\cong\mathbb{C}[\mathbf{z}]$上的模。令所有等变参数$z_i$均为零，即可恢复经典上同调代数

$$H^*(\mathbb{P}^{m-1},\mathbb{C})\cong\mathbb{C}[x]/\langle x^m\rangle.$$

对于给定的 $\beta\in H_2(\mathbb{P}^{m-1};\mathbb{Z})$ 以及整数 g、$n\geq 0$，设 $\mathcal{M}_{g,n}(\overline{\mathbb{P}}^{m-1},\beta)$ 为到 $\mathbb{P}^{m-1}$、次数为 β、带有 n 个标记点的亏格 g 稳定映射的模叠。$\mathbb{P}^{m-1}$ 上的 $\mathbb{T}$-作用诱导 $\mathcal{M}_{g,n}(\mathbb{P}^{m-1},\beta)$ 上的 $\mathbb{T}$-作用。在 $\gamma:=e^t x\in H^2_{\mathbb{T}}(\mathbb{P}^{m-1};\overline{\mathbb{C}})$ 处的小量子乘积由下式给出

$$x\star_\gamma x_j=\begin{cases}x_{j+1}, & j=0,\ldots,m-2\\ e^t+\sum_{i=1}^m s_i(\mathbf{z})x_{m-i}, & j=m-1\end{cases}$$

其中 $s_i(\mathbf{z})$ 是 $\mathbf{z}$ 的初等对称多项式。由 $\star_\gamma$ 在 $H^*_{\mathbb{T}}(\mathbb{P}^{m-1};\mathbb{C})$ 上诱导的代数结构称为 $\mathbb{P}^{m-1}$ 的小等变量子上同调。此外，在标准基 $\{x^i\}$ 下，γ 处与欧拉向量场 $\mathcal{E}$ 的等变量子乘积可写为

$$E_\gamma:=c_1(\mathbb{P}^{m-1})\star_\gamma=m\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&e^t+(-1)^{m-1}s_m(\mathbf{z})\\1&0&0&\cdots&0&(-1)^{m-2}s_{m-1}(\mathbf{z})\\0&1&0&\cdots&0&(-1)^{m-3}s_{m-2}(\mathbf{z})\\&&&\cdots&&\\0&0&0&\cdots&1&s_1(\mathbf{z})\end{pmatrix}.$$

相应的量子微分方程为

$$(q\frac{d}{dq}-x\star_q)I(q,\mathbf{z})=0 \tag{9}$$

这与（5）相符，其中 $\star_q=\star_{(0,\ln q,0,\cdots,0)}$ 在坐标变换 $q=t^m$下成立。

定义 5.10。定义主函数 Φ 如下:

$$\Phi(t,q,\mathbf{z}):=e^{\mathbf{i}\pi\sum_{i=1}^m T_i}(e^{-\mathbf{i}\pi m}q)^t\prod_{i=1}^m\Gamma(T_i-t)$$

其中 Γ 是伽马函数，其泰勒展开为

$$\Gamma(1+T)=\exp(-\gamma T+\sum_{n=2}^\infty\frac{(-1)^n}{n}\zeta(n)T^n)$$

定义权函数 W 如下:

$$W(t):=\prod_{j=1}^{m-1}(y_j-t)$$

其中$y_1,\cdots$，y_{m-1}是自然商丛 Q在 $\mathbb{P}^{m-1}$上的等变陈根。

杰克逊积分 Φ_J，$J=1\cdots m$是定义在$\sim\mathbb{C}^*\times\Omega_{\mathbb{T}}$ 上的$H^*_{\mathbb{T}}(\mathbb{P}^{m-1},\mathbb{C})$值函数，其定义为

$$\Phi_J(q,\mathbf{z}):=-\sum_{r=0}^\infty\mathrm{Res}_{t=T_J+r}\Phi(t,q,\mathbf{z})W(t),$$

$\widetilde{\text{其中，}}\ \mathbb{C}^*$ 是 $\mathbb{C}^*$ 的万有覆盖，而 $\Omega_{\mathbb{T}}$ 是 $\mathbb{C}^m$ 中超平面的补集

$$z_i - z_j = k, \quad i,j = 1,\cdots,m, i \neq j, k \in \mathbb{Z}$$

定理 5.11. *([CV21，定理 7。4])* 函数 $\Phi_J(q, \mathbf{z}) with J = 1, \cdots, m$ $\widetilde{\text{在}}\ \mathbb{C}^* \times \Omega_{\mathbb{T}}$ 上全纯，且是量子微分方程 (9)的解。

Let

$$\check{T} := \exp(2\mathbf{i}\pi t), \quad \check{Z}_J := \exp(2\mathbf{i}\pi z_J), \quad J = 1,\cdots,m.$$

对于洛朗多项式 $Q(X,\mathbf{Z}) \in \mathbb{C}[X^{\pm 1}, \mathbf{Z}^{\pm 1}]$, 我们定义

$$\Phi_Q(q,\mathbf{z}) := \sum_{J=1}^{m} Q(\check{Z}_J, \check{\mathbf{Z}})\Phi_J(q,\mathbf{z}).$$

特别地，每个 Φ_Q 都是9的解。若 $Q(X,Z) = X^n$，我们记

$$\Phi^n := \Phi_{X^n} = \sum_{J=1}^{m} \check{Z}_J^m \Phi_J.$$

定理 5.12. *([CV21，定理 7。11])* 存在一个良定义的态射，从 $K_0^{\mathbb{T}}(\mathbb{P}^{m-1})_{\mathbb{C}}$ 到 (9) 的解空间，该态射由将 (8) 与复合而得

$$Q \to \Phi_Q.$$

我们将该态射记为 θ。在 θ 下，Beilinson基〈$\mathcal{O}$, $\cdots$, $\mathcal{O}(m-1)$〉映为

$$(\Phi^0, \cdots, \Phi^{m-1}).$$

现在我们考察 Φ^n 的渐近行为。令 (r,ϕ) 为 $\widetilde{\text{万有覆盖}}\ \mathbb{C}^*\ \text{of}\ \mathbb{C}^*$ 的坐标。设

$$q = s^m, s = re^{-2\mathbf{i}\pi\phi}, \quad \text{for } r > 0, \phi \in \mathbb{R}.$$

引理 5.13. 在满足以下条件的扇区内：$n \in \mathbb{Z}$ 和 $\phi \in \mathbb{R}$

$$\frac{n}{m} - 1 < \phi < \frac{n}{m},$$

当$s \to \infty$时，我们有渐近展开

$$\Phi^n(s^m,\mathbf{z}) = \frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{m}} e^{\mathbf{i}\pi\sum_{i=1}^m z_i} (e^{-\mathbf{i}\pi}\zeta_m^n s)^{\sum_{i=1}^m z_i + \frac{m-1}{2}} e^{ms\zeta_m^n}(1 + O(\frac{1}{s})),$$

其中

$$\zeta_m = \exp(\frac{2\mathbf{i}\pi}{m}),$$

and

$$\arg(e^{-\mathbf{i}\pi}\zeta_m^n s) = 2\pi\frac{n}{m} - \pi - 2\pi\phi.$$

取对数得

$$\log \Phi^n(s^m, \mathbf{z}) = ms\zeta_m^n + O(\log s). \tag{10}$$

对于任意光滑簇X，等变导出范畴$D^b_{\mathbb{T}}(X)$是光滑且真的，因为 $\mathbb{T}$-作用是光滑且真。

$\mathbb{T}$ 在 $\mathbb{C}^m$ 上的作用在结构层$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{m-1}}$ 和 $\mathbb{P}^{m-1}$上的典范线丛 $\mathcal{O}(-1)$上诱导出自然的 $\mathbb{T}$-结构。通过张量运算由 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{m-1}}$ 和 $\mathcal{O}(-1)$得到的任意向量丛都继承了 $\mathbb{T}$-结构。回顾一下，作为$D^b(\mathbb{P}^{m-1})$的导出范畴上的一个全例外集，Beilinson例外集为

$$\{\mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \ldots, \mathcal{O}(m-1)\}.$$

带有其自然的 $\mathbb{T}$-结构，这个集合是$D^b_{\mathbb{T}}(\mathbb{P}^{m-1})$中的一个全等变例外集。

引理5.14. 通过同构 θ，例外基

$$([\mathcal{O}(-k-m+1)], \cdots, [\mathcal{O}(-k)])$$

被识别为

$$Q_k := (\Phi^{k+m-1}, \cdots, \Phi^k).$$

我们知道如何在稳定性空间中构造一条拟收敛路径。令 $\mathbf{1}^{(w_1,\cdots,w_n)}$ 表示权重为 $(w_1, \cdots, w_m) \in \mathbb{Z}^m$ 的一维 $\mathbb{T}$-表示。具体而言，

$$(z_1, \cdots, z_m) \cdot z = z_1^{w_1} \cdots z_m^{w_m} z.$$

对于$\mathbf{s} = (s_1, \cdots, s_m) \in \mathbb{C}^m$和 $\phi \in \mathbb{R}$，定义

$$\mathcal{A}_{\mathbf{s},\phi} = \left\langle \mathbf{1}^{w_1,\cdots,w_m}[\lfloor \sum_{i=1}^m w_i \mathrm{Re} s_i + \phi \rfloor]_{(w_1,\cdots,w_m)\in\mathbb{Z}^m} \right\rangle_{\mathrm{ext}}.$$

引理5.15. $\mathcal{A}_{\mathbf{s},\phi}$ 是 $D^b(\mathrm{Rep}(\mathbb{T}))$ 中一个有界t-结构的心。

证明. 由于 $\mathrm{Rep}(\mathbb{T})$ 完全可分解，$D^b(\mathrm{Rep}(\mathbb{T}))$ 中的每个对象 $\mathcal{E} \in$ 都可以写成

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{i\in I} (\mathbf{1}^{(w_{1,i},\cdots,w_{m,i})}[k_i])^{\oplus n_i}$$

其中指标集 I是有限的。重新排列求和可得到一列满足 [Bri09中引理 3.2] 要求的态射。因此，$\mathcal{A}_{\mathbf{s},\phi}$ 确实是一个有界t-结构的心。□

由于

$$K(D^b(\mathrm{Rep}(\mathbb{T})))_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}[T_1^{\pm 1}, \cdots, T_m^{\pm 1}],$$

我们考虑中心荷

$$Z_{\mathbf{s}} = \overline{\mathrm{ev}}_{\mathbf{s}} : \mathbb{C}[T_1^{\pm 1}, \cdots, T_m^{\pm 1}] \to \mathbb{C}$$
$$T_i^n \to e^{\mathbf{i}\pi n s_i}.$$

对于 $0 < M \in \mathbb{R}$和 $\phi \in \mathbb{R}$，我们记 $Z_{\mathbf{s},M,\phi} = Me^{\mathbf{i}\pi\phi} Z_{\mathbf{s}}$。

引理 5.16。 设 $\mathcal{D}=D^b(\mathrm{Rep}(\mathbb{T}))$。则 $\sigma_0=(Z_0:=Z_{\mathbf{s},M,\phi},\mathcal{A}_{\mathbf{s},\phi})$ 是 $\mathcal{D}$ 上的 $\mathbf{s}$-稳定性条件。

证明。 对于任意对象 $\mathcal{E}\in\mathcal{A}_{\mathbf{s},\phi}$，我们有一个直和分解

$$\mathcal{E}=\bigoplus_{i\in I}(\mathbf{1}^{(w_{1,i},\cdots,w_{i,m})}[k_i])^{\oplus M_i},$$

由此可直接得到Harder-Narasimhan滤过。其余条件显然均满足。□

命题 5.17。 设 $\mathcal{E}=\{\mathcal{E}_0,\ \cdots,\ \mathcal{E}_{m-1}\}$ 是 $\mathcal{D}=D_{\mathbb{T}}(\mathbb{P}^{m-1})$ 的一个强例外集合，使得

$$\mathcal{D}=\langle\mathcal{E}_0\otimes\mathrm{Rep}(\mathbb{T}),\cdots,\mathcal{E}_{m-1}\otimes\mathrm{Rep}(\mathbb{T})\rangle.$$

那么对于任意 $M_i\in\mathbb{R}_{>0}$ 和 $\phi\in\mathbb{R}$，$i=0,\ \ldots,\ n-1$，满足 $\lceil\phi_i\rceil<\phi_{i+1}$ 对于 $i=0,\ \ldots,\ n-2$，存在唯一的 $\mathbf{s}$-稳定性条件 $\sigma=(Z,\ \mathcal{P})$，使得每个 $\mathcal{E}_i\otimes L\ \in\mathcal{E}_i\otimes\mathrm{Rep}(\mathbb{T})$（其中 L 是一维 $\mathbb{T}$-表示）均为半稳定，且

$$Z(\mathcal{E}_i\otimes L)=M_i e^{\mathbf{i}\pi\phi_i}Z_{\mathbf{s}}([L]).$$

证明。 唯一地选取整数 $p_i\in\mathbb{Z}$，使得 $\phi_i+p_i\in(0,1]$。那么子范畴 $\langle\mathcal{E}_i\otimes\mathrm{Rep}(\mathbb{T})\rangle$ 的心 $H_i=\mathcal{E}_i\otimes\mathrm{Rep}(\mathbb{T})[p_i]$ 满足

$$\mathrm{Hom}^{\leq 0}_{\mathcal{D}}(H_i,H_j)=0,\ \text{for } i<j.$$

由引理 5.16，每个 $\sigma_i=(Z_i=(-1)^{p_i}Z_{s,M_i,\phi_i},H_i)$ 都是 $\langle\mathcal{E}_i\otimes\mathrm{Rep}(T)\rangle$ 上的预稳定条件。归纳应用 [CP10，命题 2.2], 可得稳定性条件 $\sigma=(Z,H)$，其中

$$H=\langle\mathcal{E}_0\otimes\mathrm{Rep}(\mathbb{T})[p_0],\cdots,\mathcal{E}_m\otimes\mathrm{Rep}(\mathbb{T})[p_m]\rangle_{\mathrm{ext}}$$

并且 $Z|_{\mathcal{E}_i\otimes\mathrm{Rep}(\mathbb{T})}=Z_{i\circ}$ 因此 $Z(\mathcal{E}_i\otimes L)=M_i e^{\mathbf{i}\pi\phi_i}Z_{\mathbf{s}}([L])$。

同样由 [CP10，命题 2.2], 所有对象 $\mathcal{E}_i\otimes L\in\mathcal{E}_i\otimes\mathrm{Rep}(\mathbb{T})$ 都是半稳定的。唯一性由构造可得。□

方程（10）给出了与层 $\mathcal{O}(n)$ 对应的量子微分方程解的渐近行为。然而，Φ^i 并未按照 $\mathrm{Im}\log\Phi^i((re^{-2\mathbf{i}\pi\phi})^m,\mathbf{z})$ 的顺序排列（当 $r\to\infty$ 时）。事实上，要得到正确的强满例外集合，需要进行变异。回顾一下，对于例外对（E,F），左变异 L_EF 和右变异 R_FE 由以下三角范畴中的特 distinguished 三角定义

$$\mathrm{Hom}^*(E,F)\otimes E\to F\to L_EF,$$

$$R_FE\to E\to\mathrm{Hom}^*(E,F)^\vee\otimes F.$$

如果 $\{E_0,\cdots,E_n\}$ 是一个全例外集合，那么

$$\{E_0,\cdots,E_i,L_{E_{i+1}}E_{i+2},E_{i+1},E_{i+3},\cdots,E_n\},$$

$$\{E_0,\cdots,E_i,E_{i+2},R_{E_{i+2}}E_{i+1},E_{i+3},\cdots,E_n\}.$$

也都是全例外集合。

一般来说，强满例外集合经过突变后不一定仍然是强的，但对于射影空间，我们有以下事实。

引理 5.18。 ([BP93，推论 2.4，命题 3。3]) 如果光滑射影簇 $n+1$ 上的相干层全例外集合长度为 X维数为 n ，且该集合是强的，那么对该集合进行任意突变后，所得集合仍然是强的。

如果数 $\mathrm{Im}e^{-2\pi\mathbf{i}\theta}\zeta_m^n$ 和 $\mathrm{Re}e^{-2\pi\mathbf{i}\theta}\zeta_m^n$、$0\le n\le m-1$ 对所有 $0\le n\le m-1$ 都互不相同，则称参数 θ 可容许。

引理 5.19。 对于一个可容许的 θ，存在一个满强例外集合 $\{cE_0,\cdots,\mathcal{E}_{m-1}\}$，其中对象属于 $D(^b)$，以及一个 σ到 $\{0,\cdots,m-1\}$ 的置换，使得

(1) $\log\Phi_{\mathcal{E}_i}(s^m,\mathbf{z})=ms\zeta_m^{\sigma(i)}+O(\log s)$；(2) 对于 $i=0$、$\cdots$、$m-2$，有 $\mathrm{Im}e^{-2\mathbf{i}\pi\theta}\zeta_m^{\sigma(i)}<\mathrm{Im}e^{-2\mathbf{i}\pi\theta}\zeta_m^{\sigma(i+1)}$。

证明。 我们从集合 $\mathcal{E}=\{\mathcal{O},\cdots,\mathcal{O}(m-1)\}$ 开始。注意到 $\mathcal{E}$ 已经满足条件 (1)。如果它还满足条件 (2)，则结论成立。否则，由于 θ 是可容许的，存在一个指数 $0\le j\le m-2$，使得

$$\mathrm{Im}e^{-2\mathbf{i}\pi\theta}\zeta_n^{\sigma(j)}>\mathrm{Im}e^{-2\mathbf{i}\pi\theta}\zeta_m^{\sigma(j+1)}.$$

此外，若 $\mathrm{Re}e^{-2\mathbf{i}\pi\theta}\zeta_n^{\sigma(j)}>\mathrm{Re}e^{-2\mathbf{i}\pi\theta}\zeta^{\sigma(}{}_{j+1)m}$，则将对 $(\mathcal{E}_j,\mathcal{E}_{j+1})$ 替换为 $(\mathcal{E}_{j+1},R_{\mathcal{E}_{j+1}}\mathcal{E}_j)$。若实部的不等式反向，则将对 $(\mathcal{E}_j,\mathcal{E}_{j+1})$ 替换为 $(L_{\mathcal{E}_j}\mathcal{E}_{j+1},\mathcal{E}_j)$。

我们声称，经过这样的突变后，条件 (1) 仍然成立。假设这一断言成立，则每次操作都会使虚部的逆序数减少一，因此经过有限步后，我们将得到一个同时满足两个条件的全例外集合。根据引理 5.18，所得集合是强的。

为证明这一断言，考虑右变异的情形。由$R_{\mathcal{E}_{j+1}}\mathcal{E}_j$的定义三角可知，

$$\Phi_{R_{\mathcal{E}_{j+1}}\mathcal{E}_j}=\Phi_{\mathcal{E}_j}-\hom(\mathcal{E}_j,\mathcal{E}_{j+1})\Phi_{\mathcal{E}_{j+1}}.$$

由于 $\mathrm{Re}e^{-2\mathbf{i}\pi\theta}\zeta_m^{\sigma(j)}>\mathrm{Re}e^{-2\mathbf{i}\pi\theta}\zeta_m^{\sigma(j+1)}$，

$$1+\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_j,\mathcal{E}_{j+1})e^{mre^{-2\mathbf{i}\pi\theta}\zeta_m^{\sigma(j+1)}-mre^{-2\mathbf{i}\pi\theta}\zeta_m^{\sigma(j)}}=1+O(s^{-1})$$

当$r\to\infty$时。取对数后，我们得到所需的渐近行为。左变异的情形类似。□

与定义 3.6中的一般基变换不同，我们针对当前情形采用了一种更为特殊的构造。在此，我们定义

$$H_{\mathbb{T}}^{\Omega_{\mathbb{T}}}(\mathbb{P}^{m-1})=H_{\mathbb{T}}^*(\mathbb{P}^{m-1})\otimes_{H_{\mathbb{T}}(\mathrm{pt})}\mathcal{O}_{\Omega_{\mathbb{T}}},$$

其中 $\mathcal{O}_{\Omega_{\mathbb{T}}}$ 是 $\Omega_{\mathbb{T}}$上的全纯函数环。对于 $\mathbb{P}^{m-1}$上的一个秩为r 的 $\mathbb{T}$-等变向量丛V，其等变陈特征由下式给出：

$$\mathrm{ch}_{\mathbb{T}}(V):=\sum_{j=1}^{r}e^{2\pi\mathbf{i}\xi_j}$$

其中 ξ_j是V的等变陈根。右侧的指数函数一般是关于 ξ_j的无穷幂级数。这正是必须进行基变换到 $\mathcal{O}_{\Omega_{\mathbb{T}}}$ 的原因。

定理 5.20. 对于$\mathbf{s} \in \Omega_{\mathbb{T}}$，存在 $R > 0$，使得对于每个可容许的 θ，都存在一条拟收敛路径 $\sigma_t = (Z_t, \mathcal{A}_t)$，满足

$$t = re^{-2\mathbf{i}\pi\theta}, \quad r \in (R, +\infty)$$

其中心荷由下式给出

$$Z_t(\alpha) = \mathrm{ev}_{\mathbf{s}}(\int_{\mathbb{P}^{m-1}}^{T} \Phi_t(\mathrm{Ch}_{\mathbb{T}}(\alpha))),$$

其中 Φ_t 是等变量子微分方程的基本解，线性扩张至$\mathrm{End}(H_{\mathbb{T}}^{\Omega_{\mathbb{T}}}(\mathbb{P}^{m-1}))$，在扇区

$$\frac{n}{m} - 1 < \phi < \frac{n}{m}, \quad n \in \mathbb{Z}, \phi \in \mathbb{R}.$$

此外，整条路径都位于 $\mathbb{T}$稳定条件空间$_{\mathbf{s}}(\mathbb{P}^{m-1})$内。

证明. 取基本解 $\Phi_t(\alpha) = \Phi_\alpha(t)$，并令 $s = t^m$。由于 θ 是可容许的，引理 5.19给出一个强例外集合 $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_0, \cdots, \mathcal{E}_{m-1}\}$ 和一个置换 $\sigma \in S_{\{0,\cdots,m-1\}}$，使得

$$\mathrm{Imlog}\,\Phi^{\sigma(i)}(t, \mathbf{s}) < \mathrm{Imlog}\,\Phi^{\sigma(i+1)}(t, \mathbf{s}).$$

当r充分大时，我们有

$$\left|\mathrm{Imlog}\,\Phi_{\mathcal{E}_i}(t, \mathbf{s}) - \mathrm{Imlog}\,\Phi_{\mathcal{E}_{i+1}}(t, \mathbf{s})\right| \geq 2$$

对于 $0 \leq i \leq m-2$，因此

$$\lceil \mathrm{Imlog}\,\Phi_{\mathcal{E}_i}(t, \mathbf{s}) \rceil < \mathrm{Imlog}\,\Phi_{\mathcal{E}_{i+1}}(t, \mathbf{s}).$$

于是，由命题5.17，我们得到稳定性空间中的一条路径 $\sigma_\bullet$，使得每个 $\mathcal{E}_i \otimes L$都是极限半稳定的。由于 $\langle \mathcal{E}_0 \otimes \mathrm{Rep}(\mathbb{T}), \cdots, \mathcal{E}_n \otimes \mathrm{Rep}(\mathbb{T}) \rangle$ 是一个半正交分解，拟收敛的第一个条件得以满足。另一方面，对于两个极限半稳定对象 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_i \otimes R_1$ 和 $\mathcal{F} = \mathcal{E}_j \otimes R_2$,，我们有

$$l_t(\mathcal{E}) = \log \Phi^{\sigma(i)}(t, \mathbf{s}) + O(\log s) = ms\zeta_m^{\sigma(i)} + O(\log s).$$

因此，

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \frac{l_t(\mathcal{E}/\mathcal{F})}{1 + |l_t(\mathcal{E}/\mathcal{F})|} &= \lim_{t\to\infty} \frac{ms(\zeta_m^{\sigma(i)} - \zeta_m^{\sigma(j)})}{1 + \left|ms(\zeta_m^{\sigma(i)} - \zeta_{n+1}^{\sigma(j)})\right|} \\ &= e^{-2\mathbf{i}\pi\theta}(\zeta_m^{\sigma(i)} - \zeta_m^{\sigma(j)}),\end{aligned}$$

该值存在，从而满足拟收敛的第二个条件。 □

注 5.21. 同样的推理或可适用于任何满足 Gamma猜想 II [GGI16], 即 X 具有一般半单的量子上同调，并且存在全例外集合 $D^b(X)$ =

$\langle \mathcal{E}_1, \cdots, \mathcal{E}_n \rangle$ 使得 $\Phi_t(v(\mathcal{E}_i))$ 构成量子微分方程解的渐近指数基。我们预期等变参数不会影响$t \to \infty$ 时的渐近行为，并且基本解再次产生一条与之对应的准收敛路径

$$D^b_{\mathbb{T}}(X) = \langle \mathcal{E}_1 \otimes \mathrm{Rep}(\mathbb{T}), \cdots, \mathcal{E}_n \otimes \mathrm{Rep}(\mathbb{T}) \rangle.$$

与射影空间情形中一样。

定理 5.22. 若 $m = 3$，即 $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^3$ 作用于 $\mathbb{P}^2$，且 θ 是可容许的，则存在一条拟收敛路径 σ_t，$t \in [\delta, +\infty)$ 使得 σ_δ 是几何的。

证明。我们遵循 [Zul24，定理 5 的证明。11]令 $\mathcal{E}_0$，$\mathcal{E}_1$，$\mathcal{E}_2$ 为引理 5.19所给出的例外集合，并设

$$u_j = \mathrm{Im}(\zeta_3^{\sigma(j)} e^{-2\pi \mathbf{i}\theta}), \quad j = 0, 1, 2.$$

可容许性保证 u_j 彼此不同。定义

$$a_j(r) = e^{\mathbf{i}\beta_j} \Phi_{\mathcal{E}_i}(re^{-2\pi \mathbf{i}\theta}), \quad \phi_{\mathcal{E}_j}(r) := \frac{1}{\pi} \mathrm{Im}(\ln a_j(r)),$$

其中 β_0 将在后文确定。

取 $0 < \epsilon \ll 1$ 使得 $\frac{\epsilon}{\pi} |\mathrm{Im}(u_j)| < \frac{1}{4}$ 对于 $j = 0, \ldots, d$ 成立。令

$$\mu' := \min \left\{ \min_{i=0,1} \left\{ \frac{\epsilon}{\pi} \mathrm{Im} u_{i+1} - \mathrm{Im} u_i \right\}, \mathrm{Im} u_0 \right\},$$

and

$$\mu := \min \left\{ \min_{i=0,1} \left\{ \frac{\epsilon}{\pi} \mathrm{Im} u_i - \mathrm{Im} u_{i+1} \right\}, \mathrm{Im} u_2 \right\}.$$

我们有 $-\frac{1}{2} \le \mu < 0 < \mu' < \frac{1}{2}$。取 $\delta' > 0$ 使得 $\delta' > \epsilon$，并且对每个 $r \in (\delta', +\infty)$,

$$e_j(r) = \left| \phi_{\mathcal{E}_j}(r) - \frac{1}{\pi}(3r \mathrm{Im}(u_j) + \beta_j) \right| < \min \left\{ \frac{-\mu}{4}, \frac{\mu'}{4} \right\}.$$

现在选取 β_j 使得

$$\frac{1}{\pi} \mathrm{Im}(u_j/\delta') + \beta_j = \frac{1}{2} + j.$$

固定 $\delta = \delta' - \epsilon > 0$。对于 $r \in (\delta - \epsilon, \delta + \epsilon)$，我们有 $\phi_{\mathcal{E}_j}(r) \in (j, j+1)$，且在 $r = \delta$处，

$$\left| \phi_{\mathcal{E}_{j+1}}(r) - \phi_{\mathcal{E}_j}(r) \right| < 1,$$

而对于 $r > \delta' + \epsilon$,

$$\left| \phi_{\mathcal{E}_{j+1}}(r) - \phi_{\mathcal{E}_j}(r) \right| > 1.$$

因此 $\lceil \phi_{\mathcal{E}_j}(r) \rceil < \phi_{\mathcal{E}_{j+1}}(r)$ 对所有 $r \in [\delta, \infty)$。由此，命题 5.17给出一条路径 $\sigma_\bullet$；根据与定理 5.20 相同的推理，它是准收敛的。

最后，对于固定的权重 ω，子范畴 $\langle \mathcal{E}_0 \otimes \mathbf{1}^\omega, \mathcal{E}_1 \otimes \mathbf{1}^\omega, \mathcal{E}_2 \otimes \mathbf{1}^\omega \rangle$ 与 $D^b(\mathbb{P}^2)$ 同构。根据 [Li17，命题 2。5], 我们得出结论，$r = \delta$ 处的稳定性条件是几何的。□

6. 与双有理极小模型纲领的关系

本节中，我们将说明猜想 3.8和提案3.11如何将某些非等变双有理结果推广到有限群的G-等变情形，并联系 D-等价猜想与 Dubrovin 猜想；这一讨论基于 [Hal24]。

6.1. **有限群的极小模型**。 我们从G-等变版本的 [KO18，定理 3.1]开始。

引理 6.1。 设G 为作用于光滑射影代数簇X上的有限群，并设$D^b{}_G(X) = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B}\rangle$为一个$G$-半正交分解。记$B = \mathrm{Bs}|\omega_X|^G$为$H^0(X,\omega_X)$的$G$-不变部分的基点集。对于闭点$x \in X$，令$E_x := \oplus_{g\in G} g^*\mathcal{O}_x$，并赋予其自然的$G$-作用。则以下两种情形之一成立，

(1) 对于每个闭点$x \in X\backslash B$，$E_x \in \mathcal{A}$。此外，任意对象 $\mathcal{B}$ 的支撑都包含于B中。
(2) 对于每个闭点$x \in X\backslash B$，$E_x \in \mathcal{B}$。此外，任意对象 $\mathcal{A}$ 的支撑都包含于B中。

证明。 取$x \in X\backslash B$，显然对于所有$g \in G$，都有$gx \in X\backslash B$。根据半正交分解的定义，存在一个三角范畴中的特 distinguished 三角

$$F \to E_x \to G \xrightarrow{f} F[1]$$

其中$F \in \mathcal{B}$且$G \in \mathcal{A}$。取一个截面$s \in H^0(X,\omega_X)^G$，使其在x处不消失。由G-不变性，s 在每个gx处也不消失。令$U = X\backslash Z(s)$。若$f|_U \neq 0$，则$(\otimes s\circ f)|_U = \otimes s|_U \circ f_U$也非零。然而，$G$-等变的 Serre 对偶给出

$$\mathrm{Hom}(G, F\otimes\omega_X[1]) \cong \mathrm{Hom}(G, F[\dim X - 1])^\vee = 0.$$

这迫使$f|_U = 0$，从而得到一个分裂$E_x = F|_U \oplus G|_U$。由于 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 都在G-作用下封闭，因此$F|_U = 0$ 或$G|_U = 0$。若$G|_U = 0$，则态射$E_x \to G|_U$为零，且该三角给出$F \cong E_x \oplus G[-1]$。由半正交性，$G = 0$，因此$E_x \in \mathcal{B}$。类似地，若$F|_U = 0$，则得到$E_x \in \mathcal{A}$。

现在假设$E_x \in \mathcal{B}$（相应地，$E_x \in \mathcal{A}$）。对任意对象$F \in \mathcal{A}$（相应地，$F \in \mathcal{B}$），这蕴含$x \notin \mathrm{Supp}F$。因此，F 的支撑是X的一个真闭子集。现在考虑带有自然G-结构的结构层的三角范畴中的特 distinguished 三角

$$F \to \mathcal{O}_x \to G \to F[1].$$

由于$\mathrm{Supp}\mathcal{O}_X = \mathrm{Supp}F \cup \mathrm{Supp}G$，我们必有$\mathrm{Supp}F = X$或$\mathrm{Supp}G = X$。由上述支撑论证可知，所有满足$x \in X\backslash B$的$E_x$都属于同一分支（$\mathcal{A}$ 或 $\mathcal{B}$），而另一分支中每个对象的支撑都包含在B中。这就完成了证明。□

命题 6.2. 设 G 为有限群，且 $\pi : X \to Y$ 是射影簇之间的 G-等变收缩，其中 X 光滑且 $p_g^G(X) :=$ 维 $H^0(X,\omega_X)^G >$

0. 假设 X 存在 G-不变稳定条件，且猜想 *3.8(A, D)* 对 Y 上的簇成立。那么存在一个可容许子范畴 $\mathcal{M}_{X/Y} \subset D^b\,G(X)$，其中包含一个支撑为 X 的对象，并具有如下性质：

对于任意其他压缩 $X' \to Y$，若 X' 与 X 在 Y 上 G-双有理等价，则存在一个可容许嵌入 $\mathcal{M}_{X/Y} \hookrightarrow D^b\,G(X')$。
若此外，簇 *over* Y 满足猜想 *3.8(B)*，则 $\mathcal{M}_{X/Y}$ 带有规范的 $\mathrm{Perf}(Y)^{\otimes}$-模结构，且嵌入 $\mathcal{M}_{X/Y} \hookrightarrow D^b(X')$ 是$\mathrm{Perf}(Y)^{\otimes}$-线性的。

证明。令 $\mathrm{D}^b(\mathrm{X}) = \langle \mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_n \rangle$ 为猜想 3.8(A) 在参数 ψ 的一般选取下指派给π 的半正交分解。由于 $\mathrm{p}_g^G(\mathrm{X}) > 0$，由引理 6.1 可知，恰有一个 $\mathcal{C}_i$ 包含一个支撑为 X 的对象。将此范畴记为 $\mathcal{C}_{X,\psi}$。由于不同的一般参数选取ψ 给出突变等价的半正交分解，故 $\mathcal{C}_{X,\psi}$ 的同构类与 ψ无关。我们将其简记为 $\mathcal{C}_X$。若猜想 3.8(B) 成立，则 $\mathcal{C}_X$ 继承一个 $\mathrm{Perf}(\mathrm{Y})^{\otimes}$-结构。

现在设 $\mathrm{f}: \mathrm{Z} \to \mathrm{X}$ 是一个 Z-光滑的射影 G-双有理态射。将范畴 $\mathcal{C}_Z$与 $\mathrm{f} \circ \pi$ 相联系。根据猜想 3.8(D)，我们有 $\mathcal{C}_Z \cong \mathcal{C}_X$ 作为可容许子范畴。由于 $\mathcal{C}_Z$ 对应于 $\mathcal{C}_X$ 的电荷格的直和，而这些电荷格都是有限维的，因此存在双有理态射 $\mathrm{Z} \to \mathrm{X}$，使得对于任意进一步的 G-双有理态射 $\mathrm{Z}' \to \mathrm{Z} \to \mathrm{X}$，我们都有$\mathcal{C}_Z \cong \mathcal{C}_{Z'}$。取另一个与 $\pi: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ 双有理等价的 G-收缩 $\mathrm{X}' \to \mathrm{Y}$。存在一个光滑射影 Z'，其上有 G-双有理映射 $\mathrm{G}' \to \mathrm{Z}$ 和 $\mathrm{G}' \to \mathrm{X}'$，且它们与 Y 上的双有理等价相容。由此可得，$\mathcal{C}_Z = \mathcal{C}_{Z'} \subset \mathcal{C}_{X'} \subset \mathrm{D}^b\,\mathrm{G}(\mathrm{X}')$ 是可容许包含。□

推论 6.3. 设 G 是有限群，并假设猜想 *3.8(A, D)* 对 $\mathbf{Spec_k}$ 上的簇成立。若 X 和 X' 是双有理等价的光滑射影簇，且线性系 $|K_X|$ 的 G-不变部分无基点，则存在一个典范的可容许嵌入 $D^b(X) \hookrightarrow D^b(X')$；若 $|K_{X'}|$ 的 G-不变部分也无基点，则该嵌入为等价。

证明。 如果G-不变部分K_X无基点，那么根据引理6.1，$D^b{}_G(X)$不允许存在G-半正交分解。根据命题6.2，只需证明 $\mathcal{M}_{X/\mathbf{Spec_k}} = D^b{}_G(X)$。为此，考虑一个$G$-双有理态射$f: Z \to X$，其中$Z$ 光滑且射影。于是根据猜想3.8(D)，$\mathcal{C}_Z$ 稠密支撑必须包含于$f^*(D^b{}_G(X))$，且必须等于$f^*(D^b{}_G(X))$。□

特别地，上述推论意味着，G-双有理等价的 Calabi-Yau 簇X和X'满足$D^b{}_G(X) \cong D^b{}_G(X')$。

6.2. **G-等变 Dubrovin 猜想。**

引理 6.4. 设G 为有限群，且 $\mathcal{C}$ 是一个正则、真、幂等完备的预三角 dg-G-范畴，使得$K(\mathcal{C}) = K(\mathrm{Rep}(G)$，并且 $\mathcal{C}$具有G-不变的稳定条件。则 $\mathcal{C}$ 由单个例外对象生成，即 $\mathcal{C}$ =Rep(G)。

证明。 设$\boldsymbol{E}$ 为 $\mathcal{C}$ 中的不可分解对象，并设$\{V_i\}$为G的不可约表示。对于每个i，设 $\mathcal{D}_i$ 为由$\boldsymbol{E}\otimes V_i$生成的子范畴。由于 $\mathrm{Hom}(\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{E})\ =\mathbb{C}$（$G$的平凡表示），对于$i\neq j$，有 $\mathrm{Hom}(\mathcal{D}_i,\ \mathcal{D}_j)\ =0$。因此存在一个单射

$$\oplus\mathcal{D}_i\to\mathcal{C}$$

由于 K(Rep(G)) = K($\mathcal{C}$)，这个单射是同构，并且每个 $\mathcal{D}_i$ 都满足 dim K($\mathcal{D}_i$) $\otimes\mathbb{Q}=1$。将给定的 G-不变稳定条件限制到 $\mathcal{D}_i$，得到 $\mathcal{D}_i$上的稳定性条件。根据 Hal24 的引理 23], ，每个 $\mathcal{D}_i$ 都由一个例外对象生成。我们可以从一开始就假设 E 本身是例外对象。因此， $\mathcal{C}$ 由 E 生成，并且 $\mathcal{C}=\mathrm{E}\ \otimes\mathrm{Rep(G)}\ \cong\mathrm{Rep(G)}$。□

命题 6.5. 设 G 是一个有限群，X 是一个光滑射影 G-簇，且对于一般参数 z，命题 *3.11* 成立。此外，假设

(1) $\mathrm{ch}_G:K^G(X)\otimes\mathbb{Q}\to H^*G(X;\mathbb{Q})$ 是同构，并且 *(2)* 存在一个 ψ，使得 $E\psi(1)\in\mathrm{End}(H^*{}_{\mathrm{alg}}(X)\otimes\mathbb{C})$ 是半单的，且具有互异特征值。

于是 $D^bG(X)$ 容许一个由极限半稳定对象构成的 G-满例外集合。

证明。 选取 z，使得特征值 $u_1,\cdots,\ u_n$（即 $^{-1}{}_z\boldsymbol{E}\psi(1)$ 的特征值）具有互不相同的实部。于是基本解 Φ_t 满足 $\|\Phi_t\|\sim e^{\mathrm{Re}(u_j)t}$（对某个 j）。若 $\boldsymbol{E}$ 是最终半稳定对象，则有 $|Z_t(\boldsymbol{E})|\sim e^{\mathrm{Re}(u_j)t}$。提案 3.11 中的张成条件保证，对每个特征值 u_j，存在最终半稳定的 $\boldsymbol{E}$，使得 $|Z_t(\boldsymbol{E})|\sim e^{u_jt}$。由此得到一个分解

$$D^b_G(X)=\langle\mathcal{C}_1,\cdots,\mathcal{C}_n\rangle$$

分成 n 个互异的G-子范畴。由于 ch_G 是同构，每个 $\mathcal{C}_i$ 满足 $\dim_{R(G)}\mathcal{C}_i=1$。引理 6.4 现在蕴含每个 $\mathcal{C}_i$ 由单个例外对象生成。□

参考文献

[AF24] David Anderson 和 William Fulton。代数几何中的等变上同调。第210卷。剑桥高等数学研究。剑桥大学出版社，剑桥，2024年，第xv+446页。[Bla09] Jérémy Blanc。平面克雷莫纳群有限阿贝尔子群的线性化。载于：*Groups Geom. Dyn.* 3.2（2009），第215–266页。[BM96] K. Behrend 和 Yu. Manin。稳定映射的代数栈与Gromov-Witten不变量。载于：*DukeMath. J.* 85.1（1996），第1–60页。[BO02] Alexei Bondal 和 Dmitri Orlov。“相干层的导出范畴”。载于：国际数学家大会论文集，第二卷（北京，*2002*）。高等教育出版社，北京，2002年，第47–56页。

[BO23] Thorsten Beckmann 和 Georg Oberdieck。关于等变导出范畴。载于：Eur. J. Math. 9.2（2023），论文编号36，共39页。[BO95] Alexei Bondal 和 Dmitri Orlov。代数簇的半正交分解。1995年。arXiv：alg-geom/9506012。[BP93] A. I. Bondal 和 A. E. Polishchuk。结合代数的同调性质：螺旋方法。载于：Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 57.2（1993），第3–50页。[Bri07] Tom Bridgeland。三角范畴上的稳定条件。载于：Ann. of Math.（2）166.2（2007），第317–345页。[Bri08] Tom Bridgeland。K3曲面上的稳定条件。载于：Duke Math. J. 141.2（2008），第241–291页。[Bri09] Tom Bridgeland。稳定条件空间。载于：《代数几何——西雅图2005》。第一部分。第80卷，第一部分。Proc. Sympos. Pure Math. 美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2009年，第1–21页。[CK99] David A. Cox 和 Sheldon Katz。镜像对称与代数几何。第68卷。数学综述与专著。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1999年，第xxii+469页。[CP10] John Collins 和 Alexander Polishchuk。粘合稳定条件。载于：Adv. Theor. Math. Phys. 14.2（2010），第563–607页。[CR02] Weimin Chen 和 Yongbin Ruan。轨形Gromov-Witten理论。载于：Contemp. Math. 310（2002），第25–85页。[CR04] Weimin Chen 和 Yongbin Ruan。轨形的一种新上同调理论。载于：Comm. Math. Phys. 248.1（2004），第1–31页。[CV21] Giordano Cotti 和 Alexander Varchenko。射影空间的等变量子微分方程与qKZ方程：斯托克斯基作为例外集、斯托克斯矩阵作为格拉姆矩阵以及B定理。载于：《可积性、量子化与几何》。第一卷。可积系统。第103.1卷。Proc. Sympos. Pure Math. 美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2021年，第101–170页。[DHL25] Hannah Dell、Edmund Heng 和 Anthony M. Licata。融合等变稳定条件与森田对偶。载于：Math. Z. 311.3（2025），论文编号48，共31页。[Dol10] Igor V. Dolgachev。平面克雷莫纳群的有限子群。载于：《东亚代数几何——首尔2008》。第60卷。纯粹数学进展研究。日本数学会，东京，2010年，第1–49页。[Ela15] Alexey Elagin。关于等变三角范畴。2015年。arXiv：1403.7027。[ESS25] Alexey Elagin、Julia Schneider 和 Evgeny Shinder。G曲面导出范畴的原子分解。2025年。arXiv：2512. 05064。[GGI16] Sergey Galkin、Vasily Golyshev 和 Hiroshi Iritani。法诺流形的伽马类与量子上同调：伽马猜想。载于：Duke Math. J. 165.11（2016），第2005–2077页。[Giv96] Alexander B. Givental。等变Gromov-Witten不变量。载于：Internat. Math. Res. Notices 13（1996），第613–663页。

[GKM98] Mark Goresky、Robert Kottwitz 和 Robert MacPherson。等变上同调、Koszul 对偶与局部化定理。载于：《数学发明》131.1（1998），第 25–83 页。[Hal24] Daniel Halpern-Leistner。非交换极小模型纲领。2024。arXiv：2301.13168。[HJR24] Daniel Halpern-Leistner、Jeffrey Jiang 和 Antonios-Alexandros Robotis。稳定条件与半正交分解 I：拟收敛。2024。arXiv：2401.00600。[IQ23] Akishi Ikeda 和 Yu Qiu。Calabi-Yau-𝕏范畴上的q-稳定条件。载于：《组合数学》159.7（2023），第 1347–1386 页。[Iri09] Hiroshi Iritani。环面轨形量子上同调中的整结构与镜像对称。载于：《数学进展》222.3（2009），第 1016–1079 页。[Kar24] Tomohiro Karube。爆破曲面的非交换 MMP。2024。arXiv：2410.18446。[Kel11] Bernhard Keller。变形 Calabi-Yau 完备化。载于：《纯粹与应用数学杂志》654（2011）。附录由 Michel Van den Bergh 撰写，第 125–180 页。[KM98] János Kollár 和 Shigefumi Mori。代数簇的双有理几何。第 134 卷。剑桥数学专著。剑桥大学出版社，剑桥，1998 年，第 viii+254 页。[KN25] Andreas Krug 和 Erik Nikolov。等变例外集的自同态代数。载于：《代数与表示论》28.1（2025），第 193–210 页。[KO18] Kotaro Kawatani 和 Shinnosuke Okawa。半正交的不存在性

-

典范丛的半正交分解与截面。2018。arXiv：1508.00682。[Kon95] Maxim Kontsevich。通过环面作用枚举有理曲线。载于：曲线模空间（泰瑟尔岛，*1994*）。第129卷。《数学进展》。Birkhäuser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1995年，第335–368页。[KRZ26] Tomohiro Karube、Antonios-Alexandros Robotis和Vanja Zuliani。面向 Fano 簇的非交换极小模型纲领。2026。arXiv：2601.20739。[KS08] Maxim Kontsevich和Yan Soibelman。稳定性结构、动机 Donaldson–Thomas 不变量与簇变换。2008。arXiv：0811.2435。[Li17] Chunyi Li。射影平面上的稳定条件空间。载于：《数学选刊》（新系列）23.4（2017），第2927–2945页。[Li26] Chunyi Li。关于光滑射影簇上稳定性条件的注记。2026。arXiv：2601.22994。[LS17] Chiu-Chu Melissa Liu和Artan Sheshmani。代数 GKM 流形的等变 Gromov–Witten 不变量。载于：《*SIGMA* 对称性、可积性、几何与方法应用》13（2017），论文编号048，共21页。[Man99] Yuri I. Manin。Frobenius 流形、量子上同调与模空间。第47卷。美国数学学会学术文集。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1999年，第xiv页+303。

[MMS09] Emanuele Macrì、Sukhendu Mehrotra和Paolo Stellari。诱导稳定条件。载于：《代数几何杂志》18.4（2009），第605–649页。[Orl92] Dmitri O. Orlov。射影丛、单项变换与相干层的导出范畴。载于：Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 56.4（1992），第852–862页。[Pol07] Alexander Polishchuk。相干层导出范畴上的常值 t-结构族。载于：《莫斯科数学杂志》7.1（2007），第109–134页，167。[Pro21] Yuri G. Prokhorov。等变极小模型纲领。载于：Uspekhi Mat. Nauk 76.3(459)（2021），第93–182页。[QZ25] Yu Qiu和Xiaoting Zhang。三角范畴上的融合稳定结构。载于：《数学选刊》（新系列）31.3（2025），论文编号50，共29页。[Tod14] Yukinobu Toda。分次矩阵分解上的 Gepner 型稳定性条件。载于：《代数几何》1.5（2014），第613–665页。[Tod16] Yukinobu Toda。通过 Orlov/Kuznetsov 等价得到的 Gepner 型稳定性条件。载于：Int. Math. Res. Not. IMRN 1（2016），第24–82页。[Tsy11] Vladimir I. Tsygankov。G-极小圆锥丛的方程。载于：Mat. Sb. 202.11（2011），第103–160页。[Was87] Wolfgang Wasow。常微分方程的渐近展开。1976年版本的重印本。Dover Publications, Inc.，纽约，1987年，第x页+374。[Zul24] Vanja Zuliani。由小量子上同调得到的射影空间半正交分解。2024。arXiv: 2406.17616。

数学系，理学研究科，大阪大学
AKA，丰中市，大阪，日本
电子邮箱地址：wu.dongjian.7cx@osaka-u.ac.jp

数学系 数学 科学，清华 大学，中国北京市，中国电子邮箱地址：znt21@mails.tsinghua.edu.cn