arXiv:2602.20367v1 [math.AT] 23 Feb 2026

分类空间的等变实循环类映射与 WITT 层上同调

LORENZO MANTOVANI、 ´AKOS K. MATSZANGOSZ 和 MATTHIAS WENDT

Abstract. 本文研究实概形上群作用的等变实循环类映射，并着眼于 WITT 层特征类。这些循环类映射的取值落在商栈实点的奇异上同调中；该上同调可识别为复共轭在复点上作用所对应的同伦不动点。这在实代数群的几何分类空间的 WITT 层上同调与其强实形式的分类空间的奇异上同调之间建立了紧密联系，本文将通过若干示例探讨这一联系。作为一个应用示例，我们计算实数域上自旋群的 WITT 层上同调不变量的数量。

Contents

1. 引言 1 2. （商）栈预备知识 9 3. 动机同伦中的栈 12 4. 栈的实点作为不动点群胚 18 5. 等变同伦与实现函子 22 6. 等变同伦中的粗同伦轨道与同伦不动点 27 7. 商栈的等变与实实现 30 8. 不动点群胚、伽罗瓦上同调与强实形式 36 9. 等变实循环类映射 40 10. 双挠子与商栈的等价 48 11. 示例 52 参考文献 63

1. Introduction

在代数几何与动机同伦中，近年来人们对与二次型相关的上同调理论产生了兴趣，例如厄米 K 理论（即高阶Grothendieck–Witt群）、Chow–Witt 群或 Witt 层上同调。除了与二次型的关联之外，这些上同调理论还在精细计数几何中得到了应用，例如 [Lev20]或 [BW23], ，并被用于研究向量丛，或更一般地研究线性代数群的扭子，例如 [AF15]。它们与实代数几何以及实代数簇之实点的拓扑之间也有紧密联系，这是经由动机同伦中的实实现函子或实循环类映射建立的，例如 [Jac17,HWXZ21]。

上同调理论的等变版本在研究与代数群相关的问题时自然出现，因此约化群作用的等变上同调出现

Date: 2026年2月。2020 *Mathematics Subject Classification.* 14F43, 55N91, 55R91, 19G12, 11E70。
Key words and phrases. Witt 层上同调、等变上同调、实循环类映射、同伦不动点、分类空间、强实形式.....´A. K. M. 得到匈牙利国家研究、发展与创新办公室 NKFIH K 138828 与 NKFIH PD 145995 的资助。

在从枚举几何到几何表示论的诸多领域中。即便最简单的情形——点上的平凡 G-作用——也非常有趣：群 G 的分类空间的上同调编码了 G-丛的特征类。事实上，当前项目源于试图从概念上理解二次型的Witt 层特征类，即计算$\mathrm{B}_{\text{ét}}\mathrm{O}(n)$的Witt 层上同调（在特征为$\neq 2$的域上）。

本文所考虑的研究背景如下：我们关注 Witt 层上同调或*Borel* 等变版本的**I**-上同调。基于此前的工作 [HWXZ21], ，我们描述了一个从**I**-上同调到与群作用 $G \curvearrowright X$相关的商栈之实点的奇异上同调的等变实循环类映射 。此外，我们将实循环类映射的目标识别为复共轭在该栈的复点上作用所产生的同伦不动点。鉴于同伦不动点空间在实李群的几何表示论中早已得到广泛研究，这或许并不令人意外；本文在很大程度上受到 Ben Zvi–Nadler [BN13] 和 Virk[Vir21]相关论文的启发。因此，群的实形式及其作用在等变 Witt 层上同调中发挥着重要作用，但据我们所知，这一观察对二次上同调理论的影响迄今尚未得到阐明。我们还在第 11 节讨论了若干例子。作为一个特例，我们的结果从概念上解释了正交群的 Witt 层特征类：它们可由其实形式——不定正交群——的庞特里亚金类和欧拉类来描述。

1.1. 等变实循环类映射。 回顾一下，对于一个（分离的、有限型）实概形$X/\mathbb{R}$，Jacobson [Jac17] 定义了一个实循环类映射 $\mathrm{H}^{p}{}_{\mathrm{Zar}}(X, \mathbf{I}^{q}) \to \mathrm{H}^{p}{}_{\mathrm{sing}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z})$，从基本理想的 q 次幂所成层 $\mathbf{I}^{q}$ 的 Zariski 上同调映至具有解析拓扑的实点 $X(\mathbb{R})$ 的奇异上同调。实循环类映射由态射 $\mathrm{sgn}\colon \mathbf{I}^{q} \to a_{\mathrm{rét}}\mathbb{Z}$ （从 $\mathbf{I}^{q}$ 到实-´étale 层化 $a_{\mathrm{rét}}\mathbb{Z}$）诱导，其本质上由实闭域上二次型的符号差给出，参见 [Bac18]。在 [HWXZ21], 中，这一循环类映射被扩展以纳入线丛扭曲，并建立了它与拉回、推前（沿闭浸入）及交乘积之间的各种相容性。在本文中，我们希望考察实循环类映射的 Borel 等变版本。或者说，我们希望将实循环类映射推广到商栈；有关商栈的术语和背景见第 2.2 节。

在动机同伦论中，将（商）栈视为对象有不同方式，参见例如 [HPL21]or [CDH20]。一方面，可以遵循 Totaro [Tot99] 和 Edidin–Graham [EG98]，用光滑概形逼近 Borel 构造。采用这一视角，可以相当直接地定义实循环类映射；而且， [HWXZ21]中关于拉回、推前（沿闭浸入）和交积的所有相容性也都适用于等变情形。另一方面，通过实现拓扑群胚（或同伦不动点空间）的替代方法，更容易根据同伦不动点识别（或计算）空间的实点；我们将在下文第 1.2 节讨论这一点。

以下概述了以 Borel 构造的逼近定义的等变实循环类映射的基本性质，参见定理 9.5。相容性陈述的准确表述见第 9 节。为说明定理中的记号，对于群作用 $G \curvearrowright X$ ，我们用 $[G\backslash X]$ 表示相应的商栈，将其视为不稳定动机同伦范畴中的对象，参见第 2 节；用 $\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}[G\backslash X]$ 表示其在实数域上的实实现，参见第7节。

定理 1.1. 设 G 是 $\mathbb{R}$ 上的线性代数群， $G \curvearrowright X$ 是带有G-作用的光滑概形，且 $\mathscr{L} \in \mathrm{CH}^{1}_{G}(X)$ 是 X 上的 G- 等变线丛。则符号映射 $\mathrm{sgn}\colon \mathbf{I}^{q} \to a_{\mathrm{rét}}\mathbb{Z}$ 诱导出一个良定义的等变实循环类映射

$$\mathrm{H}^{p}_{G}(X, \mathbf{I}^{q}(\mathscr{L})) = \mathrm{H}^{p}([G\backslash X], \mathbf{I}^{q}(\mathscr{L})) \to \mathrm{H}^{p}_{\mathrm{sing}}(\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}[G\backslash X], \mathbb{Z}(\mathscr{L}))$$

它满足以下性质：

i）等变实循环类映射仅取决于栈 $[G\backslash X]$。*ii*）平凡群 $G=\{1\}$ 的情形恢复了[Jac17,HWXZ21]中的非等变循环类映射。对于自由作用 $G\curvearrowright X$，等变实循环类映射与商概形 $G\backslash X$上的非等变循环类映射一致。*iii*）等变实循环类映射与交乘积相容，参见命题 *9.11*。*iv*）等变实循环类映射与（局部完全交）拉回及真推前（沿商栈的可表闭浸入）相容，参见命题 *9.8* 和 *9.13*。它还与局部化序列及商／归纳等价相容，参见推论 *9.15* 和 *9.16*。*v*）对于 $q\gg 0$，实循环类映射是同构；张量化 $\mathbb{Z}[1/2]$ 后，它也是同构。

类似于非等变循环类映射，可以用商栈上的线丛（即等变线丛）对等变二次上同调理论进行扭曲。对于等变线丛 $\mathscr{L}$， $\mathscr{L}$-扭曲的等变 **I**-上同调映射到 $\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}[G\backslash X]$ 的奇异上同调，其系数为局部系统 $\mathbb{Z}(\mathscr{L})$。这一赋值 $\mathscr{L}\to\mathbb{Z}(\mathscr{L})$ 编码在模 2 等变循环类映射中

$$\mathrm{Ch}^1_G(X)\to \mathrm{H}^1_{\mathrm{sing}}(\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}[G\backslash X],\mathbb{F}_2)\colon \mathscr{L}\mapsto\mathbb{Z}(\mathscr{L}).$$

引入等变线丛扭曲的一个原因是，它们与局部化序列有一定关联，在局部化序列中，它们作为等变正规丛的（行列式）出现。

实循环类映射中的扭曲行为可能相当微妙。一个尤其有趣的情形是极大环面的正规化子 $N=\mathrm{N}_{\mathrm{SL}_2}(T)$ 在 SL_2 中的分类空间的实循环类映射。在这一情形下，Witt 层上同调由 Marc Levine 在 [Lev19]，中计算得到，我们将在第 11.3 节讨论他的计算与实实现 $\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}[N\backslash *]=\mathrm{BS}^1\sqcup \mathrm{BC}_4$ 之间的关系。

注 1.2. 显然，也可以将周群上的循环类映射扩展到等变情形。出于我们的目的，我们还将 *Borel–Haefliger* 模 *2* 循环类映射 $\mathrm{Ch}^p(X)\to \mathrm{H}^p(X(\mathbb{R})\ \mathbb{F}_2)$ 扩展到等变情形。事实上，对于实概形 $X/\mathbb{R}$，我们讨论等变模 *2 Milnor K* 上同调上的循环类映射，参见定理 *9.17*：

$$\mathrm{H}^p_G(X,\mathbf{K}^{\mathrm{M}}_q/2)\to \mathrm{H}^p_{\mathrm{sing}}(\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}[G\backslash X],\mathbb{F}_2).$$

情形 $p=q=1$ 给出了等变线丛的实实现，这已在上文表述扭曲的等变实循环类映射时用到。

1.2. **商栈的实现与同伦不动点**。 等变实循环类映射可以帮助我们直观理解等变 Witt 层上同调或 **I**-上同调应具有怎样的形式，但要充分利用这一点，我们需要理解商栈的实点。一般而言，对于非特殊群 G 的作用 $G\curvearrowright X$，商栈的实点 $[G\backslash X](\mathbb{R})$ 并非简单地由 $[G(\mathbb{R})\backslash X(\mathbb{R})]$ 给出（即实李群作用 $G(\mathbb{R})\curvearrowright X(\mathbb{R})$ 的 Borel 构造）。对于 $\mu_2\curvearrowright *$，这一点已经显而易见。在此情形下，群胚 $[\mu_2\backslash *](\mathbb{R})$ 的神经与 $\mathrm{BC}_2\sqcup\mathrm{BC}_2$，相对应，且与 [dLM23]，中关于 Witt 层上同调的公式相容；另见第 11.2 节中的讨论。这意味着，等变循环类映射的目标并非作用 $G(\mathbb{R})\curvearrowright X(\mathbb{R})$ 下的等变奇异上同调 $\mathrm{H}^*_{\mathrm{sing},G(\mathbb{R})}(X(\mathbb{R})\ \mathbb{Z})$。

相反，将商栈视为动机同伦中的一个对象，可以通过两种方式理解其真实现。一方面，可以考虑 Borel 构造的概形逼近，并取它们的实点。对于例子 μ_2，这会得到正确答案；两个连通分支分别来自 $(\mathbb{C}^n\setminus\{0\})/\{\pm1\}$ 中所有坐标均为实数的点和所有坐标均为虚数的点。不过，根据群 G 的不同，这一过程在实践中可能难以实现。另一方面，我们可以取其几何实现

，即实点（拓扑）群胚的几何实现。一般而言，这可以等同于复共轭在栈的复点（拓扑）群胚$[G\backslash X](\mathbb{C})$的几何实现上作用所得到的同伦不动点。

事实上，通过分解并经过复数域$_2$-等变同伦，我们可以更好地理解实实现函子。[1] 在 Γ-等变情形中，可以考虑两类等价：粗 Γ-等价只关心底层空间，而细 Γ-等价则是对所有子群 $H \leq \Gamma$的不动点空间都诱导等价的映射。在 $\mathbb{R}$上，有一些众所周知的实现函子，我们将在第5节讨论：从（Nis- nevich）动机同伦范畴到细复数域$_2$-等变同伦范畴；类似地，也有从 ´étale 动机到粗复数域$_2$-等变同伦的函子。我们可以先进行细复数域$_2$-等变实现，再取（真正的）复数域$_2$-不动点，从而得到实实现。我们想强调的关键一点是，商栈的等变实现也是一个等变商栈，即一个粗 同伦轨道空间。这样，同伦不动点便自然出现在 ´étale 分类空间的实实现中。

描述商栈的等变与实实现的结果如下，参见第7节，尤其是尼斯涅维奇情形的命题 7.6 和 7.9，以及 ´etale 情形的命题 7.10 和 7.13。

定理 1.3。设 G 是 $\mathbb{R}$ 上的线性代数群，$G \curvearrowright X$ 是带有 G 作用的光滑概形，并记商栈为 $[G\backslash X]$。记 $G(\mathbb{C}) \curvearrowright X(\mathbb{C})$ 为等变实现，即取复点并赋予解析拓扑，以及由复共轭给出的 复数域$_2$-作用。类似地，记 $G(\mathbb{R}) \curvearrowright X(\mathbb{R})$ 为实实现，即取实点并赋予解析拓扑。

等变： 尼斯涅维奇同伦轨道 $X_{\mathrm{h}G}$ 的 复数域$_2$-等变实现由细同伦轨道 $X(\mathbb{C})^{\mathrm{h}G(\mathbb{C})}$ 给出。 ***´etale*** 同伦轨道$[G\backslash X]$ 的 复数域$_2$-等变实现由粗同伦轨道 $[G(\mathbb{C})\backslash X(\mathbb{C})]$ 给出。特别地，$\mathrm{Re}_{\mathrm{C}_2}\mathrm{B}_{\text{ét}}G$ 是分类等变主 $(\mathrm{C}_2, G(\mathbb{C}))$-丛的空间。

实： ***Nisnevich*** 同伦轨道 $X_{\mathrm{h}G}$ 的实实现由同伦轨道$X(\mathbb{R})^{\mathrm{h}G(\mathbb{R})}$给出。 ***´etale*** 同伦轨道（即商栈 $[G\backslash X]$）的实实现由等变实现的同伦不动点给出：

$$\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}([G\backslash X]) \simeq \mathrm{Re}_{\mathbb{C}}([G\backslash X])^{\mathrm{h}\mathrm{C}_2},$$

特别地，在动机同伦中，商栈的实实现有以下几种等价描述：

- 作为商栈实点的（拓扑）群胚 $[G\backslash X](\mathbb{R})$的几何实现，
- 作为复数域$_2$-等变实现的同伦不动点（它是复点的拓扑群胚的几何实现，带有由复共轭给出的复数域$_2$作用），或者
- 作为使用容许装置对 $[G\backslash X]$ 作出的光滑概形逼近的实点的余极限（即代数 *Borel* 构造的实点）。

除了对等变与实实现函子的一些讨论之外，这最终是商栈的 ´étale 下降性质的推论。其他地方也提到过同伦不动点的描述，例如，[GMM17] 从等变视角出发，[Aco20] 从几何不变量理论视角出发（尽管相关内容在伽罗瓦上同调论述中多少有所隐含），最近则见于 [AdGF25a,AdGF25b]。

我们将在第 4 节、第 6 节和第 8 节中讨论这些内容，以及有关栈上群作用的不动点的更多背景知识。第 7 节讨论商栈的复数域实现和实实现。在第 6 节中，

[1]对于这里存在两种不同的等变情形，我们深表歉意。在涉及等变或实实现，且群为 C_2, 时，我们通常讨论的是 Bredon 型（真正的）等变拓扑。另一方面，如果等变群是作用于概形上的线性群，我们讨论的则是博雷尔型等变拓扑。这不应造成太大的困惑。

我们还将指出一个证明，说明实商栈 $[G\backslash *]$ 的 C_2-等变实现是普适的 C_2-等变 G-丛。

以同伦不动点描述，可对线性代数群 G 的分类空间 $\mathrm{B}_{\text{ét}}G \simeq [G\backslash *]$ 的实实现进行非常显式的计算。我们将在第 8 节讨论这一点（以及它与伽罗瓦上同调和强实形式的联系）；特别参见命题 8.8。

推论 1.4. 设 G 是 $\mathbb{R}$ 上的光滑仿射代数群。我们通过 $G(\mathbb{C})$ 的伽罗瓦自同构，将 $G(\mathbb{C})$ 视为复数域$_2$-群，并将其记为 σ。那么存在一个等价

$$\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}(\mathrm{B}_{\text{ét}}G) \simeq (\mathrm{B}G(\mathbb{C}))^{\mathrm{hC}_2} \simeq \coprod_{[g]\in \mathrm{H}^1(\mathrm{C}_2, G)} \mathrm{B}[G(\mathbb{C})^{\mathrm{C}_2}],$$

其中，$[g] \in \mathrm{H}^1$(复数域$_2, G$) 遍历伽罗瓦上同调集。右侧与 $[g]$ 对应的连通分支中的群 $G(\mathbb{C})$ 具有由 $[g]$-扭曲复共轭 $\sigma_g = \mathrm{int}(g) \circ \sigma$ 给出的复数域$_2$-作用。

伽罗瓦上同调集 H^1(复数域$_2$, G) 可识别为具有给定中心不变量的强实形式集；关于强实形式的更多信息，参见 [AT18]，或参见我们在第 8.2 节中的讨论。[2] 采用这一术语后，上述结果表明，线性代数群 G 在 $\mathbb{R}$ 上的几何/´etale 分类空间 $\mathrm{B}_{\text{ét}}G$ 的实实现，是具有给定中心不变量的 G 的强实形式之分类空间的不交并。特别地，这意味着具有相同中心不变量的 G 的实形式具有等价的实实现。

事实上，借助非阿贝尔上同调和双扭子理论，我们在定理 10.2 中更一般地讨论了强内形式下分类栈 $[G\backslash *]$ 的不变性。由此可得，强内形式的分类空间的上同调和实实现彼此等价，参见推论 10.3；关于强实形式与强内形式之间关系的讨论，另见第 10 节。

推论 1.5. 设 G 和 G' 是域 F 上彼此为强内形式的线性代数群，且 E 是稳定动机同伦中可表的上同调理论。那么，任意一个 (G, G')-双主齐性空间都会诱导同构

$$E^*([G\backslash \mathrm{pt}]) \cong E^*([G'\backslash \mathrm{pt}]).$$

类似地，在 $F = \mathbb{R}$ 上，定理 *1.1* 的等变实循环类映射在强内形式下保持不变。

1.3. **例子：正交群与自旋群。** 我们将在第 11 节讨论这些描述的若干实例及其对等变实循环类映射的影响。其中一个例子是 $G = \mu_2$ 的情形，此时实实现为

$$\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}\left(\mathrm{B}_{\text{ét}}\mu_2\right) \simeq \mathbb{RP}^\infty \sqcup \mathbb{RP}^\infty,$$

关于有限群例子的更一般讨论，见第 11.2 节。更一般地，在正交群这一特定情形下，我们得到如下描述，参见第 11.5 节的讨论，尤其是定理 11.10：

$$\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}(\mathrm{B}_{\text{ét}}\mathrm{O}(n)) \simeq \coprod_{p+q=n} \mathrm{BO}(p, q), \tag{1}$$

其中右侧的 O(p, q) 表示与 $\mathbb{R}$ 上秩为 $p+q$、符号差为 $p-q$ 的对称双线性型相关联的不定正交群（视为李群）。特殊正交群也有类似的结论。这个公式给出了关键直觉：正交群在 Witt 层上同调中的特征类应与强实形式的庞加莱类和欧拉类相关。或者说，这表明，不属于沿 $\mathrm{B}_{\text{ét}}\mathrm{O}(n) \to \mathrm{BGL}_n$ 的限制映射像中的特征类，可以在

[2] 注意，[AT18] 将伽罗瓦上同调集记为 $\mathrm{H}^1(\sigma, G)$，以强调 C_2 的生成元通过自同构 σ 作用于 $G(\mathbb{C})$。

纤维 $\mathrm{GL}_n/\mathrm{O}(n)$ 上检测到。注意，纤维是可逆对称矩阵构成的空间，而实点空间为

$$\mathrm{Sym}(n;\mathbb{R}) \simeq \bigsqcup_{0\le k\le n} \mathrm{Gr}_k(n;\mathbb{R}).$$

关于这一同伦等价的证明，参见 [Jon97]；本质上，连通分支是 $\mathrm{diag}(-1_k,\ 1_{n-k})$ 的轨道，而该对应将一个对称矩阵映射为由负特征值对应的特征向量张成的子空间。[3]

总之，从某种意义上说，Witt 层上同调能够反映正交群的实形式。这一点也可以从实实现中看出：对于实概形 $X/\mathbb{R}$ 上的代数 $\mathrm{O}(n)$-扭子，在 $X(\mathbb{R})$ 的每个连通分支上，其实实现都是一个 $\mathrm{O}(p,\ q)$-扭子，但分解 $p+q=n$ 可能因实连通分支而异。

将等变实循环类映射与商栈的实实现描述相结合，可以深入了解分类空间的 Witt 层上同调。我们提出一个关于实约化群的 Witt 层上同调不变量的具体推论[4] ；根据我们的结果，这些不变量与强实形式有关，参见第 11 节 11.6 中的讨论：

推论 1.6. 设 G 是 $\mathbb{R}$ 上的分裂约化群。那么存在一个同构

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{B}_{\text{ét}}G, \mathbf{W}[1/2]) \cong \mathrm{H}^0(\mathrm{B}G(\mathbb{C})^{\mathrm{hC}_2}, \mathbb{Z}[1/2]).$$

因此，除去挠元后，G 上的扭子的 *Witt* 层上同调不变量的数量等于具有平凡中心不变量的 $G(\mathbb{R})$ 强实形式的数量。

特别地，对于分裂自旋群，我们可根据 [AT18] 中的表格，得到 *Witt* 层上同调不变量（除去挠元后）数量的如下公式：

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}\,\mathrm{H}^0(\mathrm{B}_{\text{ét}}\,\mathrm{Spin}(n,n+1),\mathbf{W}) \cong \left\lfloor \frac{2n+1}{4} \right\rfloor + \begin{cases} 2 & n\equiv 0,3 \bmod 4 \\ 1 & n\equiv 1 \bmod 4 \\ 0 & n\equiv 2 \bmod 4 \end{cases} \tag{2}$$

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}\,\mathrm{H}^0(\mathrm{B}_{\text{ét}}\,\mathrm{Spin}(n,n),\mathbf{W}) \cong \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \begin{cases} 3 & n\equiv 0 \bmod 4 \\ 1 & n\equiv 1 \bmod 4 \\ 0 & n\equiv 2,3 \bmod 4 \end{cases} \tag{3}$$

自旋群的这一结果似乎是新的。据我们所知，Spin_n 的 Witt 层上同调不变量尚未得到一般性的确定；最接近的结果是对 $n\le 14$ 的模 2 上同调不变量的计算，参见 [Gar09] ，以及 Weinzierl 的学位论文 [Wei23]，中关于上同调不变量的讨论，或第 11.6 节以了解更多讨论。[5]

1.4. 分类空间的 Witt 层上同调的猜想图景。等变实循环类映射为我们初步勾勒出了分类空间的 Witt 层上同调可能呈现的面貌。这是一个良好的开端，但当然，最终我们希望从更具概念性的层面理解如何构造上同调类，或给出分类空间 Witt 层上同调的一般描述（可以想想半单李群有理上同调的通常 Weyl 群公式 $\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{B}G;\mathbb{Q}) \cong \mathrm{H}^\bullet(\mathrm{B}T;\mathbb{Q})^W$）。我们将根据目前的理解，概述这一更大图景的若干部分。

正如我们将要讨论的，Witt 层上同调在 0 次时就已经是一个非常有趣的问题 ed in t前一节。重新考察上文公式 (1) 中正交群的情形，我们 te

[3]MW 谨此感谢与 Anubhav Nanavaty 就对称矩阵簇进行的讨论。[4]关于术语，*Witt-sheaf cohomological invariants* 对于一个群 G将表示其分类空间上的 0 次 Witt 层上同调类，即 $\mathrm{H}^0(\mathrm{B}_{\text{ét}}G, \mathbf{W})$ 的元素。[5]文献中有些计算针对一般域，而另一些则针对含有 -1平方根的域。可以验证，在适用的情况下，我们的公式与文献中的公式一致。我们的公式与文献中的公式始终存在差异，这是因为平凡上同调不变量 $1\in \mathrm{H}^0(\mathrm{B}_{\text{ét}}G, \mathbf{W})$ 被计入了我们的公式，但在文献中并未被视为上同调不变量。

发现 $\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}\mathrm{B}_{\text{ét}}\mathrm{O}(n)$ 的连通分支数与 Serre 在 [GMS03] 中对正交群的 Witt 层上同调不变量所作的计算一致。我们可以用增广态射来解释这一点

$$\mathrm{W}^0_G(*) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{B}_{\text{ét}}G, \mathbf{W}) \tag{4}$$

从点的 G-等变 Witt 群（即对称 G-表示的格罗滕迪克环）到非分歧维特群。该态射可视为维特群预层的（Zariski 或尼斯涅维奇）层化态射，也是 Witt 层上同调不变量的来源之一。更确切地说，我们可以将 Serre 的计算解读为：基本 $\mathrm{O}(n)$-表示（共有 $n+1$ 个，均由定义 n 维表示的外幂给出）的像构成了 Witt 层上同调不变量的一组基。鉴于我们的结果，特别是推论 1.6，深入研究 Witt 层上同调不变量与强实形式（由等变实循环类映射所提示）之间的联系，似乎颇有意义。同样地，我们也可以探讨半单群 G 的 Witt 层上同调不变量的一般公式，并以 G 的环面型或非环面型初等阿贝尔2-子群的 Witt 群上的外尔群不变量来表示。

上文（4）中的增广态射，似乎也适合作为分类空间 Witt 群可能的 Atiyah–Segal 型完备化结果中的增广态射，例如 [HRZ23] 中的结果（尽管目前所有已知的二次阿蒂亚–塞格尔完备化结果都针对特殊群，而此时（4）中的增广态射实际上只编码秩信息）。作为初步猜想，我们可以问自然映射

$$\mathrm{W}^0_G(*) \to \mathrm{W}^0(\mathrm{B}_{\text{ét}}G) \tag{5}$$

is 是否是关于公式（4）中层化映射的增广理想完备化 .

在此背景下，我们还可以探讨 $\mathrm{W}^0_G(*)$ 上的各种可能滤过，以及它们与 Witt 层上同调的关系。Witt 层的情形很可能与 K理论和周群中相应的经典情形相似；在后者中，人们会讨论表示环上的不同滤过及其相互关系，例如见 [KM21]。根据上文的讨论，我们有由层化映射（4）的核的幂给出的增广滤过。对称表示环 $\mathrm{W}^0_G(*)$ 也具有一种 λ-环结构， [Zib15]，对此进行了描述和讨论，由此产生相应的 γ-滤过。最后，我们预期还存在某种与余维滤过及 Balmer 和 Walter 的 Gersten–Witt 谱序列相关的几何滤过 [BW02]:[6][7]

$$E_2^{p,q} \colon \mathrm{H}^p(X, \mathbf{W}(\mathscr{L})) \Rightarrow \mathrm{W}^{p+q}(X, \mathscr{L}). \tag{6}$$

如 [KM21]，中讨论的 Chow 环情形，我们大概不应期待这些滤过彼此一致，而应预期它们之间存在相当微妙的差异。不过，与 K 理论/Chow 环情形一样，合理的猜想似乎是，这三种滤过在对称表示环 $\mathrm{W}^0_G(*)$ 上诱导出相同的拓扑。在 Chow 环的情形中，表示环的 λ-环结构为表示提供了陈类，从而在 $\mathrm{CH}^\bullet(\mathrm{B}_{\text{ét}}G)$ 中产生许多有趣的元素。Witt 层上同调类很可能并非全都是特征类；在 0 次情形中，这已经与二次型的纯性问题有关（基于复数域上有限 2-群的分类空间构造的例子将在别处给出）。尽管如此，对称表示环上的 λ-环结构和 γ-运算应当是 Witt 层上同调 $\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{B}_{\text{ét}}G, \mathbf{W})$ 中一类丰富的上同调类来源，它们是对称表示的特征类。

[6]注意，严格来说，loc. cit. 中的假设并不适用于 $X = \mathrm{B}_{\text{ét}}G$，而且 Witt群并不像 Witt 层上同调群那样在容许装置中趋于稳定。因此，尽管 loc. cit. 的结果不能立即适用，但似乎可以合理地假定 Witt群与 Witt 层上同调之间的关系可推广至分类空间，或就此而言推广至商栈。[7]此外，谱序列的指标编排略显微妙。该谱序列的 E_2页在第 $q \equiv 0 \bmod 4$ 行中含有所示的 Witt 层上同调，而在其余各行中则没有。

最后，我们也可以询问 K 理论与乔环之间的有理识别是否存在类似结果。对于 Witt 环和 Witt 层上同调，相关的问题是是否存在有理同构[8]

$$\mathrm{gr}^\bullet \mathrm{W}_G^0(*) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathrm{H}^\bullet(\mathrm{B}_{\text{ét}} G, \mathbf{W}) \otimes \mathbb{Q}. \tag{7}$$

这个问题与 [DF23] 中的 Borel 特征有很大关联。如果这一点成立，我们便可以将其与等变实循环类映射结合起来，从而把实约化群 G 的实表示与其强实形式的上同调联系起来（这与强实形式在实李群表示论中的出现有关，参见 [AT18]）。对于小 n 的 SO(n)，至少初步的维数计数似乎是吻合的。另一方面，有限群的情形表明其中可能存在一些微妙之处——如果存在如 (7) 所示的同构，那么实表示的数量必须与对合的共轭类数量一致（但在某些例子中并非如此，参见第 11.2 节中的讨论）。也许，利用 Borel 特征构造有理同构时，需要在适当的厄米 K 理论框架下进行，而在转向 Witt群和 Witt 层上同调的过程中，会有一些信息丢失。

我们将在第 11 节的例子中探讨对称表示论的若干方面，尤其是正交群的情形。一般而言，若能了解这一理论是否存在适用于一般商栈的版本，以及该版本应当是什么样子，也会很有意思。

1.5. 进一步的方向。 正如我们将在第 11 节讨论的，等变实循环类映射为 $\mathrm{B}_{\text{ét}}$O(n) 的 Witt 层上同调提供了一种具体描述。基于 [RV06]，中采用的分层方法，可以实际计算（特殊）正交群的维特层上同调环（其中底域的特征为 $\neq 2$）。本质上，维特层上同调环看起来类似于实实现 $\bigoplus_{p+q=n}$ BO(p,q) 的上同调环，只是多出了一些无关紧要的 2-挠元，这些挠元源于某些非平凡边界映射的计算。作为一项更长远的目标，我们可以期待，对 $\mathrm{B}_{\text{ét}}$O(n) 的二次上同调进行计算，有助于加深我们对厄米 K 理论各种变体中运算的理解。

虽然我们聚焦于分类空间，即群作用的商栈 $G \curvearrowright *$，但还有许多有趣的其他商栈实例值得用等变实循环类映射来研究。一个特别有趣、也与几何表示论相关的例子，是与 G 对自身的伴随作用相关联的特征/惯性代数栈 $[G/\!/_{\mathrm{ad}} G]$。受 Freed–Hopkins–Teleman定理及其在[Fok18]，中的实版本启发，我们可以将 $\mathrm{W}_G(G)$ 视为实Verlinde代数的代数版本。在上文概述的分类空间叙事的一个版本中，我们可以考虑层化增广 $\mathrm{W}_G(G) \to \mathrm{H}^0([G/\!/_{\mathrm{ad}} G], \mathbf{W})$，并希望相应增广滤过的伴随分次对象在有理意义下与 $\mathrm{H}^\bullet([G/\!/_{\mathrm{ad}} G], \mathbf{W})$ 一致。由此，等变实循环类映射将揭示代数实Verlinde代数与其强实形式的实Verlinde代数之总体之间的关系，从而展现强实形式的实Verlinde代数之间有趣的相互作用。我们认为，推导出这一结果的详细内容会很有趣。

本文结构。 我们首先在第 2 节介绍一些与栈相关的背景知识，并在第 3 节回顾动机同伦中栈的实现。第 4 节中，我们回顾如何用不动点群胚描述栈的实点。随后，我们在第5节讨论复数域$_2$-等变同伦以及（等变与实）实现函子。第 6 节中，我们从粗同伦的角度探讨等变主丛，这种视角十分适合研究复数域$_2$-等变实现 ´etale同伦轨道。接着，我们在第7节证明关于商栈的等变与实实现的主要结果。我们将在第

[8]我们暂且不明确左侧所考虑的究竟是哪一种滤过。若将此同构视为 [BW02], 的 Gersten–Witt 谱序列的有理退化，则它应是几何/余维滤过。在 K理论情形中，几何滤过与 γ-滤过之间的差别仅为挠元，因而在有理陈述中不可见。

8 节讨论同伦不动点、伽罗瓦上同调与强实形式之间的关系，并回顾关于 ´etale分类空间实实现的主要公式。第 9 节将介绍等变实循环类映射，并确立它与（Borel）等变上同调中自然结构的相容性。在第 10 节中，我们证明若干关于商栈（以及其实现和循环类映射）在强内形式下不变性的结果。最后，我们将在第 11 节讨论一些具体例子的计算。其他提及的有趣内容将留待续篇。或者前传。也可能不会。你懂的。

致谢： MW 谨向 Fr´ed´eric D´eglise、JensEberhardt、VincentGajda、Jens Hornbostel、Marc Levine 和 Kirsten Wickelgren 致谢，感谢他们就本文主题展开的讨论。我们感谢 Jens Hornbostel 对本文初稿提出的宝贵意见。

2. Preliminaries on (quotient) stacks

在这一预备章节中，我们将汇集本文所需的一些关于（商）栈的材料。具体而言，后续讨论需要商栈的实点和复点，以及商栈的各种类型的态射。全文中，我们研究基域 F 上的概形；在动机同伦或二次型的语境下，假设基域的特征为 $\neq 2$。

2.1. 群与作用。 在处理群作用时，我们将遵循[SVW18, I.2.1]中的记号：

定义 2.1。 所谓带有作用的簇（$G \curvearrowright X$）或 G-簇，是指由线性代数群 G、一个（拟射影）簇 X 以及一个 G-作用 $\rho\colon\ G\times X \to X$组成的三元组（$G, X, \rho$）。带有作用的簇之间的态射（$\varphi, f$）：（$H \curvearrowright Y$） $\to$（$G \curvearrowright X$）是由线性代数群之间的同态 $\varphi\colon\ H \to G$ 以及簇之间的 φ-等变态射 $f\colon\ Y \to X$ 组成的一对。

注 2.2。 我们通常考虑左作用 $G \curvearrowright X$，并相应地将概形商或商栈分别记作 $G\backslash X$ 或 $[G\backslash X]$。

我们回顾扭子的经典概念，它是代数几何中主丛的类似物。

定义 2.3。 对于代数群 G，底 B 上的一个 G-扭子是一个带有作用的簇 $\rho\colon\ G \curvearrowright E$，使得由此诱导的态射（$\rho$，$\mathrm{pr}_2$）：$G \times E \to E \times_B E$ 是一个同构。

注记 2.4. 该条件中的同构表明，G在纤维上的作用是自由且传递的。通常要求 G-扭子在某种合适的拓扑下局部平凡（即局部同构于平凡的 G-扭子，G 通过乘法作用于自身）。例如，后文所说的 ´*etale* G-扭子，是指该扭子在 ´*etale*拓扑下局部平凡。

F关于 Borel 构造的逼近构造，我们采用与
如M23，第 2.2 节2]:

约定 2.5. 设 F 是特征为 $\neq 2$的完美域，G 是 F上的有限型光滑仿射代数群。本文中，我们假设 X 是F上的有限型概形，并且满足以下条件之一：

i) 约化概形 X_{red} 是拟射影的，且 G 的作用相对于某个拟射影嵌入是线性化的。*ii)* 群 G 是连通的，且 X_{red} 等变地嵌入为某个正规簇的闭子概形。*iii)* 群 G 在 *Serre* 的意义下是特殊的，即 ´的 *étale* 局部平凡扭子已经是 *Nisnevich* 局部平凡的。

事实上，对于所有关键示例，我们的概形都是域上的有限型拟射影概形（我们有时将此类概形称为簇）。在研究实实现函子和等变实循环类映射时，我们主要关注 $\mathbb{R}$上的簇。关于等变 Witt 层上同调的一些一般性讨论适用于特征为 $\neq 2$的完美基域。

对于两个带作用的簇 $(G \curvearrowright X)$ 与 $(U \curvearrowleft G)$，即后者带有右 G-作用，我们有平衡积

$$U \times_{/G} X := G\backslash(U \times X)$$

其 G-作用由 $g\cdot(u,x) = (ug^{-1}, gx)$ 给出，即我们在轨道空间 $G\backslash(U \times X)$ 中作等同 $(ug, x) \sim (u, gx)$。同样，我们沿用记号 $U \times_{/G} X$ [SVW18]，以区分平衡积与拉回。

2.2. 商栈、态射及相关例子。 我们现在回顾所需的商栈基本知识。一般参考文献见 [Sta24，标签 0268 、 02ZH 、 044O]，并由此出发。特别地，栈是（基范畴 $\mathbf{Sch}_F$ 上的）群胚纤维化范畴，而栈的态射是与该结构相容的函子。

设 $G \curvearrowright X$ 是基域 F 上一个带作用的簇。与之关联的商栈 $[G\backslash X]$ 是一个范畴，其对象为跨度 $S \xleftarrow{p} P \xrightarrow{f} X$，其中 $p\colon P \to S$ 是一个 G-扭子，而 $f\colon P \to X$ 是一个 G-等变态射。从 $T \xleftarrow{q} Q \xrightarrow{g} X$ 到 $S \xleftarrow{p} P \xrightarrow{f} X$ 的态射由一个 F-概形间的映射 $\psi\colon T \to S$ 和一个 G-等变映射 $\varphi\colon Q \to P$ 构成，并满足 $f \circ \varphi = g$，且该方块

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\varphi} & P \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ T & \xrightarrow[\psi]{} & S \end{array}$$

是笛卡尔的。

注意，对于每个 F-概形 S，给出一个对象 $(S \leftarrow P \to X) \in [G\backslash X](S)$，等价于给出一个 G_S-扭子 P，其定义在 S 上，并附带一个 S-概形间的 G_S-等变映射$P \to X_S$；态射的情形也类似。

投影

$$[G\backslash X] \to \mathbf{Sch}_F, \quad (S \leftarrow P \to X) \mapsto S$$

赋予 $[G\backslash X]$ 群胚纤维化范畴的结构。概形 S 上的纤维是群胚 $[G\backslash X](S)$，其对象为跨度 $S \leftarrow P \to X$，态射为 G-等变同构 $\varphi\colon Q \to P$，它们位于 S 上且与到 X 的映射相容。若 $T \to S$ 是 F-概形之间的映射，则有一个诱导函子

$$[G\backslash X](S) \to [G\backslash X](T)$$

其在对象上的定义为

$$\left(S \xleftarrow{p} P \xrightarrow{f} X\right) \mapsto \left(T \xleftarrow{p'} P' \xrightarrow{f'} X\right),$$

其中 $P' := T \times_S P$，态射 $p'\colon P' \to T$ 是箭头 $p\colon P \to S$ 沿着 $T \to S$ 的拉回，而 f' 是投影 $P' \to P$ 与 $f\colon P \to X$ 的复合。图示如下

$$\begin{array}{ccc} & {\scriptstyle f}\nearrow X & \\ P & & \\ & {\scriptstyle p}\searrow S & \end{array} \quad \mapsto \quad \begin{array}{ccccc} & & {\scriptstyle f'} & \nearrow & X \\ & & & & {\scriptstyle f}\uparrow \\ P' & & \longrightarrow & & P \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ T & & \longrightarrow & & S \end{array}$$

函子在态射上的定义是：将 G-扭子的态射 $\varphi\colon P \to Q$ 位于 S 上，与到 X的映射相容，得到相应的态射

$$T \times_S \varphi\colon P' = T \times_S P \to T \times_S Q = Q'.$$

例 2.6. 此处对我们而言最重要的例子是平凡作用 $G \curvearrowright *$，它产生了线性代数群 G/F 的分类栈 $[G\backslash *]$ 。在这种情况下，对于光滑的 F-概形 S，群胚 $[G\backslash *](S)$ 可识别为 ´étale G-扭子在S上的群胚。[9] 我们有 $\pi_0([G\backslash *](S)) \cong \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(S, G)$，并且 $\pi_1([G\backslash *](S)\ P) \cong \mathrm{Aut}_S(P)$，也就是说，对应于 G-扭子 P/S 的连通分支的基本群，是该扭子的等变S-自同构群。□

给定一个基域F上的带作用簇的态射 $(\varphi, f) : (H \curvearrowright Y) \to (G \curvearrowright X)$，它诱导出一个商栈态射 $f\colon [H\backslash Y] \to [G\backslash X]$。对于一个 F-概形 S，态射 $[H\backslash Y](S) \to [G\backslash X](S)$ 定义如下：

$$\left(S \xleftarrow{p} P \xrightarrow{g} Y\right) \mapsto \left(S \xleftarrow{q} (G \times_{/H} P) \xrightarrow{\tilde{g}} X\right),$$

也就是说，它将一个由 H-扭子 $p\colon P \to S$和等变映射$g\colon P \to Y$组成的跨度 $S \xleftarrow{p} P \xrightarrow{g} Y$，映为由诱导的 G-扭子 $q\colon (G \times_{/H} P) \to S$以及态射 $\tilde{g}\colon G \times_{/H} P \to X$ 组成的跨度；该态射在诱导-限制伴随下与H-等变态射 $P \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ 伴随，其中 X 通过沿着$\varphi\colon H \to G$的限制映射视为一个 H-概形。

就我们的目的而言，若对每个 F-概形S 及态射 $g\colon S \to \mathcal{Y}$，其拉回

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} S & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ {\scriptstyle \tilde{f}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S & \xrightarrow[g]{} & \mathcal{Y} \end{array}$$

仍是一个概形。在这种情况下，若对每个$g\colon S \to \mathcal{Y}$，基变换 $f\colon \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} S \to S$ 也具有光滑、真、有限型等性质，则称 $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 是光滑/真/有限型等。

我们将在下文的例 3.19 中讨论商栈的态射为真且光滑的一些判别准则。

例 2.7。 注意，带有作用的簇之间的态射（$H \curvearrowright *$）$\to$（$G \curvearrowright *$）无非就是一个群同态。相应的商栈态射 $[H\backslash *] \to [G\backslash *]$ 可表，当且仅当 $H \leq G$ 是一个子群。在这种情况下，我们可以将商栈之间的态射看作 $[G\backslash *]$上的 G/H-纤维丛：对于任意光滑概形 X 及态射 $X \to [G\backslash \mathrm{pt}]$，将 $[H\backslash *] \to [G\backslash *]$ 拉回到 X 所得的是一个 X上的 G/H-纤维丛，它在 ´étale 拓扑下局部平凡。

对于一般的群同态 $\varphi\colon H \to G$，相应的商栈态射并不可表。对于群的正合列 $1 \to K \to H \to G \to 1$，我们应得到一个商栈的纤维丛 $[K\backslash *] \to [H\backslash *] \to [G\backslash *]$，而态射 $[H\backslash *] \to [G\backslash *]$ 的可表性则要求 $[K\backslash *]$ 是一个概形。

对于子群包含 $H \leq G$，相应的可表态射 $[H\backslash *] \to [G\backslash *]$ 在 G/H 为光滑/真时也是光滑/真。该态射的相对维数为 $d = \dim(G/H)$。□

我们以两个众所周知且相关的商栈同构结束本节，它们与等变上同调中的商与归纳等价有关。在代数 Borel 构造的情形下，这些结果的证明可见 [Kri12，推论 2.6 和 2.7]。

命题 2.8（栈的商与归纳等价）。

(1) 设 $G \curvearrowright X$ 是一个带作用的簇， $N \subset G$ 是一个闭正规子群，且限制作用 $N \curvearrowright X$ 是自由的。则态射 $(\pi, p)\colon (G \curvearrowright X) \to (G/N \curvearrowright$

[9]这利用了底 S 的光滑性；一般而言， G-扭子在 fppf 拓扑中只能是局部平凡的，参见 [Sta24，标签 044O]。

$N\backslash X$) 诱导出商栈之间的一个同构

$$[G\backslash X] \cong [(G/N) \setminus (N\backslash X)]\,.$$

（2）设 $i\colon H \hookrightarrow G$ 为光滑闭子群到光滑仿射代数群 G 的包含，并设 $H \curvearrowright X$ 为带作用的簇，使得 $G\times X$上对角映射 H-作用的商 $G \times_{/H} X$ 作为光滑拟射影簇存在。则显然的态射 $(i, s)\colon (H \curvearrowright X) \to (G \curvearrowright G \times_{/H} X)$ 诱导商栈的同构

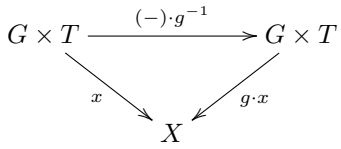
$$[H\backslash X] \cong [G\backslash (G \times_{/H} X)].$$

证明。 我们概述（1）的证明，（2）的论证类似。

对于概形 T，存在一个自然函子

$$[G\backslash X](T) \to [(G/N)\backslash(N\backslash X)](T)\colon \left(T \xleftarrow{p} P \xrightarrow{f} X\right) \mapsto \left(T \xleftarrow{\overline{p}} P/N \xrightarrow{\overline{f}} N\backslash X\right)$$

其中 $p\colon P \to T$ 是一个 G-扭子， f 是 G-等变的，而 $\overline{f}$ 是由自由 N-作用在商空间上诱导的映射。这些函子关于 T是自然的，从而给出自然叠态射 $[G\backslash X] \to [(G/N)\backslash(N\backslash X)]$。由于我们有一个叠态射，只需在 ´etale 拓扑中局部验证该态射是等价，即我们可以假设 ´etale G-扭子在 T 上是平凡的。在 Hom 集上，该函子将 $[G\backslash X](T)$ 中跨度的态射映到对应于一个交换三角形



到 (G/N) 与 $N\backslash X$ 的相应三角形，其中顶部水平态射 $(-)\cdot g^{-1}$被替换为 $(-)\cdot g^{-1}$。

该函子是满的，因为 $N\backslash X$ 中 G/N-轨道映射之间的任意态射，由元素 $g^{-1} \in G/N$ 的右乘给出，都可以提升为X中 G-轨道映射之间的态射，由 $g^{-1} \in G$ 的右乘给出。

该函子是忠实的：给定到 X 的 G-轨道映射之间的两个态射 $(-)\cdot g_1^{-1}$,$(-)\cdot g_2^{-1}$，若到 $N\backslash X$ 的 G/N-轨道映射之间的相应态射一致，则 $g_1 \cdot g_2^{-1} \in N$属于 X 上一个 G-轨道的稳定子。但由于 N 在 X 上自由作用，这蕴含 $g_1 = g_2$。

该函子是本质满的：给定一个轨道映射 $G/N \times T \to N\backslash X$，即一个概形态射 $T \to N\backslash X$，我们可以将其提升为一个概形态射 $T \to X$，因为 N-扭子 $T \times_{N\backslash X} X$是平凡的。于是给定的轨道映射可以容易地提升为一个轨道映射 $G \times T \to X$。□

3. Stacks in motivic homotopy

本节回顾将群作用 $G \curvearrowright X$与不稳定动机同伦论中的对象联系起来的不同方式。对此至少有两种常见选择。一种是尼斯涅维奇同伦轨道空间，通常可用单纯 Borel 构造来描述，我们将在第 3.2 节讨论这种构造。另一种是将与群作用关联的商栈实现为一个 ´étale 同伦轨道空间。这可以描述为归纳光滑概形，我们将在第 3.3 节讨论这一方法。对于特殊群 G，两种方法是一致的。这里的讨论将成为本文后半部分的核心内容，因为它是我们在第7节描述商栈的实实现、第 9 节定义并研究等变实循环类映射的性质，以及第 11 节给出具体计算示例的关键基础。

注 3.1. 在更详细地讨论同伦轨道之前，我们指出，可以考虑更一般的设定，即 $G \curvearrowright X$ *in* ∞-拓扑斯中的群作用。取适当的商，可得到（同伦）轨道空间 $X_{\mathrm{h}G}$ ，对于 $X = \mathrm{pt}$ ，它给出一个对象，用以分类给定 ∞-拓扑斯中的主 G-丛。关于以单纯预层表述的一个版本，

参见 [Wen11], ; 关于对此进行 ∞-范畴论重述，参见 [NSS15]。对我们而言，相关的设定是定义在 $\mathbf{Sm}_F$上的尼斯涅维奇层或 ´*étale*层的 ∞-拓扑斯。下文结果中非形式化的部分在于，我们关注的是尼斯涅维奇设定中的实现函子，但它们作用于´*étale*同伦轨道空间，因此一般结果不能直接应用。

3.1. **动机同伦中的栈**。 我们首先回顾（摘自 [CDH20]）栈的不稳定动机同伦型的一种定义。该定义将栈视为群胚层，并对其应用神经构造以得到单纯层。以下定义见该文献的注记 2.1。

定义 3.2。 对于一个代数栈 $\mathcal{X}$（定义在域 F 上光滑概形的范畴 $\mathbf{Sm}_F$ 上），存在一个相应的群胚层，也记作 $\mathcal{X}$。对该群胚层逐节取神经，便定义了一个单纯层，因而也定义了不稳定动机同伦范畴 $\mathbf{H}(F)$ 中的一个对象。这就是 $\mathcal{X}$ 的不稳定动机同伦型，仍记作 $\mathcal{X}$。

注记 3.3。 经稳定化，我们还得到一个稳定动机同伦类型 $\Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1}\mathcal{X}$，它属于 $\mathbf{SH}(F)$；类似地，还得到一个动机 $\mathrm{M}(\mathcal{X})$，它属于 $\mathbf{DM}(F)$。这就是栈的动机的定义，参见 [CDH20，定义 2。4]。这些定义适用范围更广，并不局限于商栈。在本文中，我们只需要处理商栈；不过，商栈的实实现描述自然可以推广到尼斯涅维奇局部为商栈的代数栈。无论如何，关于栈的动机的文献中通常要求的拟射影性或拟分离性假设，在我们所关注的商栈情形下均得到满足。

3.2. **同伦轨道空间与单纯方法**。 接下来我们讨论单纯方法，考虑与$\mathbf{Sm}_F$中的群作用 $G \curvearrowright X$ 相关联的 Nisnevich 同伦轨道，亦即单纯 Borel 构造。与该群作用相关联的商栈 $[G\backslash X]$ 由单纯 Borel 构造的“层叠化”给出。我们的讨论，包括记号的选择，大致基于 [Kri12]。

定义3.4. 设 X 是带有左 G-作用的集合。作用群胚 $\mathbf{E}_G(X)$ 是对象集为 X的群胚，其中态射集 $x \to y$ （对于 x、 $y \in X$）是满足 $y = g \cdot x$的那些 $g \in G$ 所成的集合。我们用(g, x) 表示箭头 g: $x \to g \cdot x$。复合由如下设定定义：$(h, y) \circ (g, x) = (hg, x)$，假定 $y = g \cdot x$。

我们将 $\mathrm{E}_G(X)$ 记作作用群胚的神经。具体而言，$\mathrm{E}_G(X)$ 是一个单纯集，其 n-单形为 $G^{\times n} \times X$，面映射为

$$d_i \colon G^{\times n} \times X \to G^{\times n-1} \times X \colon (g_n, \dots, g_1, x) \mapsto \begin{cases} (g_n, \dots, g_2, g_1 \cdot x) & i{=}0, \\ (g_n, \dots, g_{i+2}, g_{i+1}g_i, g_{i-1}, \dots, g_1, x) & 0 < i < n, \\ (g_{n-1}, \dots, g_1, x) & i{=}n. \end{cases}$$

退化映射为

$$s_i \colon G^{\times n} \times X \to G^{\times n+1} \times X \colon (g_n, \dots, g_1, x) \mapsto (g_n, \dots, g_{i+1}, e, g_i, \dots, g_1, x) \text{ for } i = 0, \dots, n.$$

R注 3.5. • 构造$\mathrm{E}_G(-)$ 关于左 G-集的范畴具有函子性；当 G 配备了其自身上的左平移作用时，它还可还原出通常的$\mathrm{B}G = \mathrm{E}_G(*)$ 和$\mathrm{E}G = \mathrm{E}_G(G)$构造。

- 这个定义可以推广到范畴$\mathbf{C}$、群对象 $G \in \mathbf{C}$ 以及带有 G-作用的对象$X \in\mathbf{C}$ 。此时，作用群胚是$\mathbf{C}$中的群胚对象，其神经是$\mathbf{C}$中的单纯对象。此外，还有一种直接明了的 ∞-范畴表述。

- 这尤其适用于上述定义的带有作用 $G \curvearrowright X$ 的簇/概形。我们注意到， [Kri12] 使用的记号 $E_G(X)$ 更接近同伦轨道记号$X_{\mathrm{h}G}$。

注记 3.6。 单纯集$\mathrm{E}_G(G)$ 也可以用另一种方式构造，另见[Kri12，第 3]节。我们可以考虑单纯集 $n \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(n, G) = \check{C}(G/*)$，即

映射 $G \to *$ 的 ***Čech*** 神经。明确地，我们有 $\check{C}(G/*)_n = G^{n+1}$，其面映射为

$$d_i \colon G^{n+1} \to G^n \colon (g_0, \dots, g_n) \mapsto (g_0, \dots, g_{i-1}, \hat{g}_i, g_{i+1}, g_n)$$

以及退化映射

$$s_i \colon G^{\times n+1} \to G^{\times n+2} \colon (g_0, \dots, g_n) \mapsto (g_0, \dots, g_i, g_i, \dots, g_{n-1}, g_n)$$

对于 $i = 0, \dots, n$。映射 $\check{C}(G/*) \to \mathrm{E}_G(G)$ 定义在 n-单纯形上，形式如下：

$$\check{C}(G/*)_n \to \mathrm{E}_G(G)_n, \quad (g_0, \dots, g_n) \mapsto (g_0 g_1^{-1}, g_1 g_2^{-1}, \dots, g_{n-1} g_n^{-1}, g_n)$$

这是一个单纯同构。在此同构下，G 在 $\check{C}(G/*)$ 上的逐分量左平移作用，对应于 G在 $\mathrm{E}_G(G)$ 上的左作用，后者在 n-单纯形上的定义如下：

$$(h, (g_0, \dots, g_n)) \mapsto (c_h(g_0), \dots, c_h(g_{n-1}), h g_n).$$

另一方面，G 在 $\check{C}(G/*)$ 上的逐分量右平移作用，对应于 G 在 $\mathrm{E}_G(G)$ 上的右作用，后者在 n-单纯形上的定义如下：

$$((g_0, \dots, g_n), h) \mapsto (g_0, \dots, g_n h).$$

对于每个左 G-集合 X，都有自然的单纯同构

$$\check{C}(G/*) \times X \to \mathrm{E}_G(G) \times X, \quad (g_0, \dots, g_n, x) \mapsto (g_0 g_1^{-1}, g_1 g_2^{-1}, \dots, g_{n-1} g_n^{-1}, g_n, x)$$

$$\mathrm{E}_G(G) \times X \to \mathrm{E}_G(X), \quad (g_0, \dots, g_n, x) \mapsto (g_0, \dots, g_{n-1}, g_n \cdot x)$$

它们对于前两个集合上的 G 的“混合”作用，以及第三个集合上的平凡作用，都是等变的。特别地，当 $X = *$ 时，这便给出

$$\check{C}(G/*)/G \simeq \mathrm{E}_G(G)/G \simeq \mathrm{E}_G(*) = \mathrm{B}G.$$

注3.7。 我们的记号约定与 ***Breen*** 在 [Bre90]中的约定相反。每当 X是一个左 G-集时， G 在 X 上的左作用便自然地定义了 G^{o} 在 X上的右作用。分别对应于 G 的左作用和 G^{o} 的右作用的作用群胚$\mathbf{E}_G(X)$、$\mathbf{E}_{G^{\mathrm{o}}}(X)$相等，因此$\mathrm{E}_G(X) = \mathrm{E}_{G^{\mathrm{o}}}(X)$。因此，在考虑到因子顺序选择相反后，定义***3.4***（相对于 $G \looparrowright X$）和 [Bre90] 中的公式（***3.4.2***）（相对于 $X \hookleftarrow G^{\mathrm{o}}$）定义了同构的单纯对象。

关于单纯 Borel 构造（即作用群胚的神经）与商栈之间的关系，有如下比较命题，参见 [Kri12]:

命题 3.8。 设 $G \looparrowright X$ 是域 F上的一个带作用的簇。那么存在一个单纯预层的自然态射 $\mathrm{E}_G(X) \to [G\backslash X]$，它将 $[G\backslash X]$ 呈现为 $\mathrm{E}_G(X)$的 ***étale*** 层叠化。由此诱导的态射 $\mathrm{E}_G(X) \to [G\backslash X]$ 在同伦范畴 $\mathbf{H}(F)$ 中是一个同构，如果 G 是特殊的，也就是说，所有光滑概形上的 ***étale*** 扭子都是扎里斯基局部平凡的。

证明。 对于每个 F-概形 T，总存在一个函子

$$\Phi_T \colon \mathbf{E}_G(X)(T) \to [G\backslash X](T)$$

将点 $x \in X(T)$ 映射到相应的轨道映射 $G_T \to X_T$：$h \mapsto h \cdot x$，并将一个态射 (g, x)：$x \to g \cdot x$ 映射到交换图

$$\begin{array}{ccc} G_T & \xrightarrow{(-)\cdot g^{-1}} & G_T \\ & {\scriptstyle \cdot x} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \cdot g\cdot x} & \\ & X_T. & \end{array}$$

容易验证，这些函子 Φ_T 关于 T 是自然的。态射 $\mathrm{E}_G(X) \to [G\backslash X]$ 由此通过逐截面取神经得到，而相应的自然变换 Φ表明， $[G\backslash X]$是函子$\mathbf{E}_G(X)(-)$ 的层叠化。

函子 Φ 是全忠实的。事实上，给出平凡 G-扭子 G_T在 T 上的一个自同构 φ，等价于给出元素 $\varphi(e_T) \in G(T)$，其中 e_T 表示群 $G(T)$ 的单位元；实际上，$\varphi = (-) \cdot \varphi(e_T)$。因此，图表满足以下条件：

$$\begin{array}{ccc} G_T & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & G_T \\ & {\scriptstyle \cdot x} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \cdot g\cdot x} & \\ & X_T. & \end{array} \tag{8}$$

在 $[G\backslash X](T)$ 中的态射被转化为条件 $x = \varphi(e) \cdot g \cdot x$ 属于 $X(T)$，换言之，箭头 $\varphi(e_T)^{-1}$：$x \to g \cdot x$ 是 $\mathbf{E}_G(X)(T)$ 中唯一满足以下性质的态射：$\Phi_T(\varphi(e_T)^{-1})$ 为图表（8）。

函子 Φ_T 本质满，当 T 上的所有 G-扭子均为平凡时成立，但通常并非等价。不过，若 G 是特殊的，则函子 Φ 在尼斯涅维奇拓扑下局部是等价，这意味着 $\mathrm{E}_G(X) \to [G\backslash X]$ 诱导出 $\mathbf{H}(F)$ 中的一个同构。请比较 Kri12 命题 3.2] 证明中的局部论证。□

注 3.9。这一点的一个应用是，对于特殊群 G，商栈的（复数或实数）实现可以通过对单纯概形 $\mathrm{E}_G(X)$ 逐层取实现来计算。我们将在第7节中使用这一点。

例 3.10. 证明命题 3.8 中的论证使我们能够描述当 $k = k$ 为代数闭域时，$[G\backslash X]$ 在 $T = \mathrm{Spec}(k)$ 上的取值。在这种情况下，所有 G-扭子在 T上都是平凡的，因此 Φ_T 是本质满的。特别地，对于基域 F的任意代数闭扩张 k，$[G\backslash X](k)$的连通分支就是 $X(k)$的 $G(k)$-轨道，而对象 $f\colon G_{\bar{k}} \to X$ 的自同构群由相应点 $f(e)$的稳定子群给出。□

例 3.11. 设 $G \curvearrowright X$ 是 $\mathbb{R}$上的簇之间的一个群作用。接下来，我们描述商栈 $[G\backslash X]$的实点群胚 $[G\backslash X](\mathbb{R})$。$[G\backslash X](\mathbb{R})$的对象是跨度 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{R} \xleftarrow{p} P \xrightarrow{f} X$，由一个 G-扭子 $p\colon P \to \mathrm{Spec}\ \mathbb{R}$ 和一个等变态射 $f\colon P \to X$组成。在自然态射下

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{C}_2, G) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{C}_2, G^{\mathrm{ad}}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{C}_2, \mathrm{Aut}(G)),$$

G-扭子 P 对应于 G 的一个强内形式，另见第 8.2 节中的讨论。请注意，上述伽罗瓦上同调集中的 C_2-作用，是实群 G 在 $G(\mathbb{C})$ 上的复共轭作用。

本质上，$[G\backslash X](\mathbb{R})$ 的对象是从 G 的强内形式到 X 的轨道映射。态射是由轨道映射构成的交换三角形，因此，$[G\backslash X](\mathbb{R})$ 在基点 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{R} \xleftarrow{p} P \xrightarrow{f} X$ 处的基本群，是强内形式 $\mathrm{Aut}(P)$ 中相应轨道的稳定子群。我们将在第 8 节中对此作更详细的讨论。□

注 *3.12*。借助这个例子，我们现在可以说明为什么一般而言，$E_G(X) \to [G\backslash X]$ 并非 $H(F)$ 中的等价。例如，在 $G = O(n)$ 的情形下，$\mathbb{R}$ 上的作用群胚 $E_G(*)$ 是连通的，其中仅包含平凡 G-扭子对应的轨道映射 $G \to *$。另一方面，群胚 $[O(n)\backslash *](\mathbb{R})$ 并不连通；其连通分支与 $O(n)$ 的实形式一一对应。在不稳定动机同伦范畴中，$E_G(*)$ 等价于 $B_{\mathrm{Nis}}G$，而 $[G\backslash *]$ 等价于 $B_{\text{ét}}G$。

例 3.13. 为准备在第 8 节讨论同伦不动点，我们简要介绍复化函子 $[G\backslash X](\mathbb{R}) \to [G\backslash X](\mathbb{C})$，即沿 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C} \to \mathrm{Spec}\ \mathbb{R}$ 的限制映射。回顾例 3.11，$[G\backslash X](\mathbb{R})$ 的对象是 G-等变态射 $f\colon P \to X$，其中 $p\colon P \to \mathrm{Spec}\ \mathbb{R}$ 是 $\mathrm{Spec}\ \mathbb{R}$ 上的 G-扭子，而态射是与到 X 的态射相容的 G-等变映射 $P \to P'$。限制映射 $[G\backslash X](\mathbb{R}) \to [G\backslash X](\mathbb{C})$ 由沿 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C} \to \mathrm{Spec}\ \mathbb{R}$ 的基变换给出。因此，正如预期，限制映射是

一个复化函子，它将对象 $f\colon P \to X$ 映射为其复化 $P_{\mathbb{C}} \cong G_{\mathbb{C}} \to X_{\mathbb{C}}$。类似地， G-等变态射 $P \to P'$ 被映射为其复化 $P_{\mathbb{C}} \to P'_{\mathbb{C}}$，后者将与到 $X_{\mathbb{C}}$ 的复化态射相容。□

注记 3.14. 还有其他方法可以将商栈 $[G\backslash X]$ 与单纯概形联系起来，例如参见 [CDH20, 引理 2。6]。选取一个单纯预层的局部满态射 $p\colon Y \to \mathcal{X}$ 会诱导一个局部等价 $\check{C}(Y) \to \mathcal{X}$，从而可以在动机同伦中将栈视为单纯概形。就我们的目的而言，我们希望使用单纯 ***Borel*** 构造（即使某些识别仅适用于特殊群），因为它们提供了通往同伦不动点图景的联系。

3.3. **动机同伦中的栈：通过光滑概形进行逼近**。 理解与带作用的簇 $G \curvearrowright X$ 相关联的商栈 $[G\backslash X]$ 的另一种方式，是从 Borel 构造的代数逼近来考察；这一方法最初由 Totaro [Tot99]和 Edidin–Graham [EG98]采用。他们的思想后来由 Morel 和 Voevodsky [MV99], 扩展为容许装置的概念，并被用于多篇论文中定义栈的动机，例如 [HPL21]。逼近方法的关键特点是，它允许将栈写成光滑概形的余极限（在动机空间中取），这为计算（复数与实数）实现以及之后定义等变实循环类映射提供了有效方法。这一描述也更清楚地表明，商栈是光滑概形上的 ∞-拓扑中 ´étale 空间层的同伦轨道空间。

我们还讨论了定义（商）栈不稳定同伦型的各种方式之间的等价性，这建立在 [CDH20] 和 Krishna [Kri12]的早期工作之上。关于等变动机的逼近与单纯 Borel 构造之间的一些比较，也可见于 [SVW18] （针对群作用，不使用栈的语言）。

可以像 [Tot99] 或 [EG98]那样，利用 G- 表示，通过光滑概形来逼近 Borel 构造 $\mathrm{E}G \times_{/G} X$ 。若要确定一种具体的余极限描述，可以使用源自 [MV99], 的容许装置；另见 [Kri12，定义 2.1] 或 [CDH20，定义 3.2]。

定义 3.15. 设 G 是域 F上的线性代数群。若一对(V, U) 光滑F-概形满足以下条件，则称其为 G 的好对： V 是定义在 F 上的右 G-表示；$U \subset V$ 是一个 G-稳定开子集， G 在其上自由作用；并且商 U/G 是光滑拟射影概形。

一列对 $\rho = (V_i, U_i)_{i\geq 1}$ 称为 G 的容许装置，如果存在一个 G 的好对(V, U)，使得 $V_i = V^{\oplus i}$，且 $U_i \subset V_i$ 是一个 G-稳定开子概形，G 在其上自由作用，并且其商存在且为光滑拟射影概形，从而满足以下条件：

- $(U_i \oplus V) \cup (V \oplus U_i) \subseteq U_{i+1}$
- 余维$_{U_{i+2}}(U_{i+2} \setminus (U_{i+1} \oplus V)) >$ 余维$_{U_{i+1}}(U_{i+1} \setminus (U_i \oplus V))$
- 余维$_{V_{i+1}}(V_{i+1} \setminus U_{i+1}) >$ 余维$_{V_i}(V_i \setminus U_i)$

定义3.16。设 $G \curvearrowright X$ 是定义在 F上的带作用的光滑拟射影簇。我们将“逼近”定义为

$$B^i_G(X, \rho) = X^i_G(\rho) := U_i \times_{/G} X$$

作为 $U_i \times X$ 关于左作用的商（即与之相关联的 ***´étale层***）

$$G \times U_i \times X \to U_i \times X\colon\ (g, u, x) \mapsto (ug^{-1}, gx).$$

类似地，我们记

$$E^i_G(X, \rho) = U_i \times X \simeq B_G(G \times X, \rho).$$

对于带作用的簇 $G \curvearrowright X$ 和容许装置 ρ，其余极限

$$X_G(\rho) = \mathrm{colim}_i \left(U_i \times_{/G} X\right),$$

在动机空间范畴中取出，是 Borel 构造的代数版本，另见[CDH20，第 256] 页。我们可以通过自然态射$U_i \times_{/G} X \to [G\backslash X]$ 将其与商栈 $[G\backslash X]$进行比较，该态射将 $U_i \times_{/G} X$ 映射到如下跨度：

$$U_i \times_{/G} X \xleftarrow{q} U_i \times X \xrightarrow{\mathrm{pr}_X} X.$$

这里 q： $U_i \times X \to U_i \times_{/G} X$ 是平衡积的商投影，而该张成本身被视为 $[G\backslash X](U_i \times_{/G} X)$ 中的一个元素，即一个态射 $U_i \times_{/G} X \to [G\backslash X]$。这些态射的自然性蕴含一个良定义的态射

$$X_G(\rho) = \mathrm{colim}_i \left(U_i \times_{/G} X\right) \to [G\backslash X].$$

比较结果如下：

命题 3.17. 对于带作用的簇 $G \curvearrowright X$ 以及容许装置 ρ，自然态射 $X_G(\rho) \to [G\backslash X]$ 是 $\mathbf{H}(F)$ 中的一个等价。

证明. 这本质上是 [Kri12，命题 3.2] 或 [CDH20，引理 3.3]。然而我们想指出，所引结果陈述的其实是 $X_G(\rho)$ 与上一节所讨论的单纯 Borel 构造 $X_G^\bullet = \mathrm{E}_G(X)$ 之间的等价，其前提是G 为特殊。不过，这些结果的证明实际上是经由之字形链 $X_G(\rho) \to [G\backslash X] \leftarrow X_G^\bullet$ 进行的，并表明第一个箭头在一般情况下是一个等价，而第二个箭头对特殊群是一个等价。无论如何，知道 $X_G(\rho) \to [G\backslash X]$ 对特殊群是一个等价，便蕴含一般情形：我们选取一个忠实表示 $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$，并考虑诱导作用 $\mathrm{GL}_n \curvearrowright (\mathrm{GL}_n \times_{/G} X)$。对于 $\mathrm{GL}_n \curvearrowright (\mathrm{GL}_n \times_{/G} X)$ 的一个容许装置选取 ρ，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} X_G(\rho) & \longrightarrow & [G\backslash X] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left(\mathrm{GL}_n \times_{/G} X\right)_{\mathrm{GL}_n}(\rho) & \longrightarrow & \left[\mathrm{GL}_n \backslash \left(\mathrm{GL}_n \times_{/G} X\right)\right] \end{array}$$

这里，GL_n 的容许装置 ρ 也是子群 $G \leq \mathrm{GL}_n$的容许装置；水平态射是命题 3.17 陈述之前讨论的典范态射。竖直态射是归纳等价；根据[Kri12，推论 2.7]，，左边的是同构；根据命题 2.8 (2)，右边的也是同构。下方的水平态射是等价，即特殊群的 Krishna 等价 [Kri12，命题 3.2]，因此上方的水平态射也是等价。□

注 3.18. 另一种理解这一等价的方式是识别 G-主丛。在栈这一侧，$[G\backslash(G \times X)] \to [G\backslash X]$ 是万有 G-丛的栈版本。我们可以证明 $[G\backslash(G\times X)]$ 与 X等价，进而自然映射$\mathrm{colim}_i(U_i \times X) \to [G\backslash(G\times X)]$是等价。将其转至同伦 G-轨道即可得到结论。

无论如何，上述结果表明，商栈的不稳定动机同伦类型可以用代数 Borel 构造来描述，因此可具体写成光滑概形的滤过余极限。可表态射也有同样的结论：商栈之间的可表态射，也就是说，栈之间的可表态射，可以写成逼近之间的态射的余极限。这可用于构造商栈之间真／光滑／局部完全交可表态射的相关例子，并将与我们在第 9 节对等变实循环类映射相容性的讨论有关：

例 3.19. 根据 [EG98，命题 2]，，若态射 $(\mathrm{id}\ f) : (G \curvearrowright X) \to (G \curvearrowright Y)$ 具有以下任一性质（真、平坦、光滑、正则嵌入、局部完全交），则任意 Borel 构造的逼近 $U \times_{/G} X$ 也具有该性质。特别地，相应的态射f: $[G\backslash X] \to [G\backslash Y]$ 也具有该性质。□

3.4. 栈的向量丛与皮卡群。 我们回顾一些关于商栈上向量丛的基础知识，后文将会用到。一方面，我们所考虑的上同调理论可以由线丛扭曲，因此其等变版本将由等变线丛扭曲（或者更一般地，由 $K([G\backslash X])$ 中的虚向量丛类扭曲，如 [dLM23]所示）。另一方面，我们还将在第 11.7 节讨论（对称）向量丛的实实现，这将使我们能够比较代数特征类与其拓扑对应物。

设 $G \curvearrowright X$ 是一个带作用的簇。那么， G-向量丛，或称等变向量丛，是定义在 X 上的一个带作用的簇之间的态射 $(G \curvearrowright E) \to (G \curvearrowright X)$，其底层簇态射$E \to X$ 是一个向量丛，并且 E 的纤维上的 G-作用由线性同构给出。[10]

或者，对于一个光滑商栈 $[G\backslash X]$，栈上的等变向量丛可以用栈态射 $[G\backslash X] \to [\mathrm{GL}_n\backslash *]$来描述。本质上，这意味着对于每个光滑概形 S 以及任意态射 $f\colon S \to [G\backslash X]$，我们都有一个关联向量丛 $E_f \to S$，并且这些关联向量丛与沿态射 $S \to S'$的拉回相容。对于一个 G-等变向量丛 $E \to X$，相应的态射 $[G\backslash X] \to [\mathrm{GL}_n\backslash *]$ 在局部由伴随丛构造给出，如下文例 3.20 所示。

更一般地，我们也可以将商栈上的 H-主丛描述为从商栈到 H 的分类栈的态射 $[G\backslash X] \to [H\backslash *]$ 。对我们而言，相关情形将是 G-等变对称向量丛，它们由形如 $[G\backslash X] \to [\mathrm{O}(n)\backslash *]$ 的态射给出。我们将在第 11.7 节讨论它们的实实现。

我们将 X 上的 G-线丛所成的群记为 $\mathrm{Pic}_G(X) = \mathrm{Pic}([G\backslash X])$。根据 [EG98，定理 1 的推论 1，第 602] 页，该群可以与等变 Chow 群对应起来：如果 $G \curvearrowright X$ 是带作用的光滑簇，那么映射 $c_1\colon \mathrm{Pic}_G(X) \to \mathrm{CH}^1_G(X)$ 是一个同构。由于这一对应关系，我们通常将 X 上的 G- 等变线丛所成的群记为 $\mathrm{CH}^1_G(X)$。

例 3.20. 对于线性代数群 G， $[G\backslash *]$ 上秩为 n 的 G 向量丛可由表示 $G \to \mathrm{GL}_n$ 唯一确定。与表示 $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_n$ 对应的态射 $[G\backslash *](S) \to [\mathrm{GL}_n\backslash *](S)$，将一个图式 $S \leftarrow P \to *$ （由一个 G-主丛 $P \to S$ 和一个G-等变态射 $P \to X$ 组成）映到将 P 替换为由 P 和 ρ关联的向量丛后所得的图式。

特别地，点上的等变线丛群 $\mathrm{CH}^1_G(*)$ 与 G 的特征标群 $G \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 同构。□

分类栈 $[G\backslash *]$ 上的向量丛（更准确地说，对称向量丛）将成为我们描述 $[G\backslash *]$ 上同调中作为特征类的元素的首选方法。

4. Real points of stacks as fixed-point groupoids

在接下来的章节中，我们将回顾商栈 $[G\backslash X]$ 的实点群胚如何描述为其复点的不动点群胚。本节讨论主要依据 Virk 论文 [Vir21]，中关于同伦不动点的讨论、Romagny 关于栈上群作用的讨论 [Rom05]，以及 Vistoli 在下降理论背景下的讨论 [Vis05, § 3.8 和 § 4.4]。关于向量空间的下降以及伽罗瓦作用的同伦不动点，Qiaochu Yuan 的一篇博客文章对此也有非常清晰的讨论，精确得令人称奇。

https://qchu.wordpress.com/2015/11/11/fixed-points-of-group-actions-on-categories/虽然我们所说的大部分内容适用于群胚上的一般（有限）群作用，但我们不会给出尽可能一般的讨论，而只详细讨论复数域 $_2$ 的情形。

我们首先回顾实商叠 $[G\backslash X]$ 的复点上自然的 C_2-作用（由复共轭给出）。关于范畴上的群作用的一般定义，参见 [Rom05，第 1] 节。

[10]在几何不变量理论文献中，这称为 G-线性化向量丛。

例 4.1。 设 $G \curvearrowright X$ 是一个带有（光滑）群概形 G 作用的光滑概形，且一切都定义在 $\mathbb{R}$ 上。我们希望明确描述 $\mathrm{C}_2 = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ 在 $[G\backslash X](\mathbb{C})$ 上的复共轭作用。

注意，对于任意实代数簇 Y，复点集合 $Y(\mathbb{C})$ 上都有一个自然的伽罗瓦作用 C_2：通过与 $\mathrm{Spec}(\sigma)\colon \mathrm{Spec}\ \mathbb{C} \to \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}$ 复合，对点 $y\colon \mathrm{Spec}\ \mathbb{C} \to Y$ 进行预复合即可定义该作用。此伽罗瓦作用与定义 3.4中的作用群胚 $\mathbf{E}_G(X)(\mathbb{C})$ 的所有结构映射相容，因此后者继承了群 C_2 的严格作用。具体而言，$\sigma \in \mathrm{C}_2$ 按上述方式作用于 $\mathbf{E}_G(X)(\mathbb{C})$ 的对象，即为$x \mapsto \sigma(x)$，并作用于态射，其作用方式为

$$(g\colon x \to g\cdot x) \mapsto (\sigma(g)\colon \sigma(x) \to \sigma(g)\cdot\sigma(x)).$$

利用等价 $\Phi_{\mathbb{C}}\colon [G\backslash X](\mathbb{C}) \cong \mathbf{E}_G(X)(\mathbb{C})$，可在复点 $[G\backslash X](\mathbb{C})$ 上定义伽罗瓦作用。具体而言，对象 $x \in \mathbf{E}_G(X)(\mathbb{C})$ 在 $\Phi_{\mathbb{C}}$ 下的像为 $G_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\cdot x} X_{\mathbb{C}}$，而对象 $\sigma(x)$ 的像为 $G_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\cdot\sigma(x)} X_{\mathbb{C}}$。若 $g\colon x \to g\cdot x$ 是 $\mathbf{E}_G(X)(\mathbb{C})$ 中的一个箭头，则 $\sigma(g)$ 在 $\Phi_{\mathbb{C}}$ 下的像是图表

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\cdot\sigma(g)^{-1}} & G_{\mathbb{C}} \\ & {\scriptstyle \cdot\sigma(x)} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \cdot\sigma(g\cdot x)} & \\ & X_{\mathbb{C}}. & \end{array}$$

这可以识别为第 2.2 节中讨论的 $\sigma\colon \mathrm{Spec}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ 在 $[G\backslash X](\mathbb{C})$ 上诱导的拉回作用，它将 $(\mathrm{Spec}(\mathbb{C}) \xleftarrow{\pi} P \xrightarrow{f'} X)$ 映射到 $(\mathrm{Spec}(\mathbb{C}) \xleftarrow{\pi'} \sigma.P \xrightarrow{f} X)$。 □

接下来，我们回顾群 $_2$ 对群胚 $\mathcal{C}$ 的群作用所对应的不动点群胚 $\mathcal{C}^{\mathrm{hC}_2}$ 的定义。我们将在第 6.3 节讨论，不动点群胚的几何实现将是群胚实现的 C_2-同伦不动点。由此，计算分类栈上复共轭作用的不动点群胚将很容易，参见第 8 节。

定义 4.2。 对于带有群 Γ 左作用的范畴 $\mathcal{C}$，不动点范畴 $\mathcal{C}^{\mathrm{h}\Gamma}$ 定义如下。其对象是由对象 $X \in \mathcal{C}$ 和同构 $\varphi_\gamma\colon X \to F(\gamma)(X)$ 组成的集合 $(X,(\varphi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma})$，并满足以下相容性。对于每一对 γ, $\delta \in \Gamma$，我们要求以下交换图成立：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi_{\gamma\delta}} & F(\gamma\delta)(X) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_\gamma} & & {\scriptstyle \eta_{\gamma,\delta}}\uparrow \\ F(\gamma)(X) & \xrightarrow{F(\gamma)(\varphi_\delta)} & F(\gamma)(F(\delta)(X)). \end{array}$$

态射 $(X,(\varphi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}) \to (Y,(\psi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma})$ *in* $\mathcal{C}^{\mathrm{h}\Gamma}$ 是满足以下条件的态射 $f\colon X \to Y$对于每个$\gamma \in \Gamma$，下图交换：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi_\gamma} & F(\gamma)(X) \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle F(f)} \\ Y & \xrightarrow{\psi_\gamma} & F(\gamma)(Y). \end{array}$$

存在一个自然遗忘函子 $\mathcal{C}^{\mathrm{h}\Gamma} \to \mathcal{C}$，它将同伦不动点 $(X,(\varphi_\gamma)_\gamma)$ 映射到其底层对象 X。

例4.3。 在定义 4.2 的情形下（其中我们有 复数域$_2 = \langle\sigma\rangle$ 在范畴 $\mathcal{C}$上的严格作用），不动点仅仅是一个对象 $X \in \mathcal{C}$ 连同一个同构$\varphi\colon X \to F(\sigma)(X)$ 的二元组 (X,φ)，满足 $F(\sigma)(\varphi) = \varphi^{-1}$。$(X,\varphi) \to (Y,\psi)$ 在 $\mathcal{C}^{\mathrm{hC}_2}$ 中的一个态射是一个态射

f: $X \to Y$ 在 $\mathcal{C}$ 中满足以下图表交换:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & F(\sigma)(X) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(\sigma)(f)} \\ Y & \xrightarrow[\psi]{} & F(\sigma)(Y) \end{array}$$

□

例 4.4. 我们回到例 4.1，即实群作用$G \curvearrowright X$所对应的复数域$_2$-作用在 $[G\backslash X](\mathbb{C})$上的情形。从 [Vir21], 中的作用群胚观点来看，一个同伦不动点是一对 $(g, x) \in G(\mathbb{C}) \times X(\mathbb{C})$，使得 $g \cdot x = \sigma(x)$ 且 $\sigma(g) = g^{-1}$。于是我们可以把一个同伦不动点的态射写成一个交换图

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{g} & \sigma(x) \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma(h)} \\ y & \xrightarrow[g']{} & \sigma(y) \end{array}$$

换言之，同伦不动点的一个态射 $(g, x) \to (g', y)$ 是一个元素 $h \in G(\mathbb{C})$，它满足关系 $g' = \sigma(h)gh^{-1}$ 。□

设 $G \curvearrowright X$ 是 $\mathbb{R}$上的一个带群作用的概形。我们最终得到商栈 $[G\backslash X]$ 的实点群胚与复点的不动点群胚的等同。为便于阐述，我们描述两种做法：一种是利用商栈的 ´平展下降所作的高层论证，另一种则更明确地说明如何对扭子使用 ´平展下降来写出一个群胚等价。

定理 4.5. 设 $\mathscr{X}$ 是光滑 k-概形的大 *´étale* 位点上的群胚值栈。设 Γ 是有限群， Γ 是与之关联的常值群概形。若 $T' \to T$ 是一个 Γ-扭子，则存在一个典范的群胚等价 $\mathscr{X}(T')^{\mathrm{h}\Gamma} \simeq \mathscr{X}(T)$。

证明。 该结果是对 [Vis05] 中讨论的下降陈述的重新表述。更准确地说，它结合了两个识别：第一个识别由 [Vis05, 定理 4.46], 给出，是 $\mathscr{X}(T)$ 与 $\mathscr{X}(T')$ 中 Γ-等变对象范畴之间的典范等价，记作 $\mathscr{X}(T')^{\Gamma}$。第二个识别由 [Vis05, 命题 3.49] 给出，是 Γ-等变对象与同伦不动点之间的典范等价 $\mathscr{X}(T')^{\Gamma} \simeq \mathscr{X}(T')^{\mathrm{h}\Gamma}$。□

更具体地说，这意味着对于 ´étale 栈 $\mathscr{X}$ over Spec($\mathbb{R}$)，实点 $\mathscr{X}(\mathbb{R})$ 可以识别为复点上的不动点数据，具体表述如下:

推论 4.6。 设 $G \curvearrowright X$ *be* 是 $\mathbb{R}$ 上带群作用的光滑概形。复化函子诱导出拓扑群胚的等价

$$[G\backslash X](\mathbb{R}) \xrightarrow{\simeq} [G\backslash X](\mathbb{C})^{\mathrm{hC}_2}$$

这直接由定理 4.5 得出，将其应用于 C_2-扭子 Spec($\mathbb{C}$) $\to$ Spec($\mathbb{R}$) 和商栈 $[G\backslash X]$ 即可。本节余下部分将更具体地阐述证明中的情况。其关键要素本质上是关于伽罗瓦上同调和伽罗瓦下降的论述，见 [Ser02，第 I 章第 5.2 节和第 5.3] 节。

首先要注意，复化经过 $[G\backslash X](\mathbb{C})^{\mathrm{hC}_2}$。这需要理解复化轨道映射上的同伦不动点结构，并进一步阐述例 4.4。给定一个 G-扭子 p: $P \to$ Spec $\mathbb{R}$ 以及一个 G-等变态射 f: $P \to X$，我们得到复化态射 $f_{\mathbb{C}}$: $P_{\mathbb{C}} \to X_{\mathbb{C}}$。该态射与复共轭交换，因此是伽罗瓦等变的。因此，我们可以通过与复共轭作前复合来改变轨道映射 $f_{\mathbb{C}}$

。我们将得到的轨道映射称为 $f_{\mathbb{C}} = F(\sigma)(f_{\mathbb{C}}\colon P_{\mathbb{C}} \to X_{\mathbb{C}})$。复共轭诱导出一个自然映射

$$(f_{\mathbb{C}}\colon P_{\mathbb{C}} \to X_{\mathbb{C}}) \to F(\sigma)(f_{\mathbb{C}}\colon P_{\mathbb{C}} \to X_{\mathbb{C}}).$$

注意，复共轭并不提供 G-等变的 $f_{\mathbb{C}}$ 自同构： $P_{\mathbb{C}} \to X_{\mathbb{C}}$而是一种半线性作用 $\sigma(g\cdot x) = \sigma(g)\cdot\sigma(x)$，我们可以将其视为从 $f_{\mathbb{C}}$ 到扭曲轨道映射 $f_{\mathbb{C}}$ 的同构。这提供了一个规范的同伦不动点数据。从构造中还可以看出，对于 $\mathbb{R}$ 上 G-扭子的态射 $f\colon P_1 \to P_2$ 以及相应的轨道映射，复化后的态射与规范的同伦不动点结构相容。因此，我们发现复化函子 $[G\backslash X](\mathbb{R}) \to [G\backslash X](\mathbb{C})$ 可经由函子 $[G\backslash X](\mathbb{R}) \to [G\backslash X](\mathbb{C})^{hC_2}$ 分解到不动点群胚。

牺牲函子性，我们可以通过选取一个同构 $\varphi\colon G_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\cong} P_{\mathbb{C}}$，并考虑态射 $f\circ\varphi\colon G_{\mathbb{C}} \to X_{\mathbb{C}}$，使这一点更明确一些（并将其与作用群胚联系起来）。同构 φ 不一定与复共轭交换；事实上，只有当 P 是 Spec $\mathbb{R}$ 上的平凡 G-扭子时，才会如此。记 x 为 1_G 在 $f\circ\varphi$ 下的像，我们知道 x 也在 $f\circ\varphi$ 的像中，因为 $f\colon P_{\mathbb{C}} \to X_{\mathbb{C}}$ 与复共轭交换。我们需要找到满足 $g = g^{-1}$ 的 $g \in G(\mathbb{C})$。通过

$$G_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\varphi} P_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sigma} P_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\varphi^{-1}} G_{\mathbb{C}}$$

我们在 $G_{\mathbb{C}}$ 上得到一个对合，它与复共轭 σ 相差一个由某个 $g \in G(\mathbb{C})$ 给出的共轭。然后，乘以 g 可得到同构 $f\circ\varphi \cong f\circ\varphi$。[11]

接下来我们注意到，函子 $[G\backslash X](\mathbb{R}) \to [G\backslash X](\mathbb{C})^{hC_2}$ 是全忠实的。为此，假设我们有两个定义在 Spec $\mathbb{R}$ 上的 G-扭子 P_1，P_2，以及 G-等变态射 $f_i\colon P_i \to X$。假设存在一个同构 $\varphi\colon P_{1,\mathbb{C}} \xrightarrow{\cong} P_{2,\mathbb{C}}$，它与复化轨道映射$f_{i,\mathbb{C}}$ 及其如上所述的自然同伦不动点结构相容。这尤其意味着φ 与复共轭相容；取不动点后，我们得到一个同构$P_1 \to P_2$。特别地，Hom$(P_1,\ P_2)$ 在 $[G\backslash X](\mathbb{R})$ 中非空，当且仅当 Hom$(P_1\otimes\mathbb{C},\ P_2\otimes\mathbb{C})$ 在 $[G\backslash X](\mathbb{C})^{hC_2}$ 中非空。为证明全忠实性，我们要说明 Hom 空间之间的态射

$$\mathrm{Hom}_{[G\backslash X](\mathbb{R})}(P_1,P_2) \to \mathrm{Hom}_{[G\backslash X](\mathbb{C})^{hC_2}}(P_1\otimes\mathbb{C}, P_2\otimes\mathbb{C})$$

由复化诱导的是一个双射。为看出这一点，我们可以首先把 $\mathbb{R}$ 上的态射Hom$_{[G\backslash X](\mathbb{R})}(P_1,P_2)$等同于满足 $g\circ f_2 = f_1$的 $g \in G(\mathbb{R})$所成的集合。这是 $\mathbb{R}$上任一轨道映射 $f_i\colon P_i \to X$ 的稳定子下的一个扭子。类似地， $\mathbb{C}$ 上的态射Hom$_{[G\backslash X](\mathbb{C})}(P_1\otimes\mathbb{C}, P_2\otimes\mathbb{C})$被等同为从$f_{1,\mathbb{C}}\colon P_{1,\mathbb{C}} \to X_{\mathbb{C}}$到$f_{2,\mathbb{C}}\colon P_{2,\mathbb{C}} \to X_{\mathbb{C}}$的传递子，而这是轨道映射 $P_{\mathbb{C}} \to X_{\mathbb{C}}$的稳定子下的一个扭子。后一个群是实稳定子群的复化。最后，我们把与$P_{i,\mathbb{C}}$的不动点结构（即复共轭）相容的态射，等同于复化传递子群的不动点，即Hom$_{[G\backslash X](\mathbb{C})^{hC_2}}(P_1\otimes\mathbb{C}, P_2\otimes\mathbb{C})$。

最后一步，我们需要证明复化函子 $[G\backslash X](\mathbb{R}) \to [G\backslash X](\mathbb{C})^{hC_2}$是本质满的。因此，设 $f\colon G_{\mathbb{C}} \to X_{\mathbb{C}}$ 是一个态射，它与其伽罗瓦共轭通过某个元素 $g \in G(\mathbb{C})$ 同构，其中 $g = g^{-1}$。那么根据定义， $g \in Z^1(C_2,\ G(\mathbb{C}))$. 根据[Ser02，第一章，第 5 节，3], 另见下文第 8.1 节关于伽罗瓦上同调基础的讨论， g 在 $H^1(C_2,\ G)$ 中的类对应于 G 上的一个扭子 P。此外， P 是 G 在由 g 共轭的伽罗瓦作用所给出的对合下的不动点。对于这个对合，态射 $f\colon P_{\mathbb{C}} \to X_{\mathbb{C}}$ 是伽罗瓦等变的，因而定义了一个态射 $P \to X$；这意味着我们起初考虑的同伦不动点 f 确实是某个 G-扭子的实轨道映射的复化。这就证明了本质满性，并结束了对推论 4.6 稍作展开的证明。

[11]或者，我们也可以使用后合成；由于伽罗瓦等变性，这不会造成任何区别。

我们注意到，如上所述将证明明确写出，也显然表明这些构造与群胚上的拓扑结构相容（这些拓扑结构是通过在 $G(\mathbb{C})$ 和 $X(\mathbb{C})$ 上赋予解析拓扑而得到的；对实点和稳定子群也同样如此，见G）。

5. Equivariant homotopy and realization functors

本节将讨论动机同伦论上的等变与实实现函子的定义及基本性质。为此，我们需要回顾一些等变同伦论的基础知识。具体而言，我们将讨论精细与粗等变同伦，以及相关的不动点函子。

5.1. 等变同伦论。 等变同伦论研究 Γ-空间，即带有群作用的空间，在同伦意义下的性质。与前文一样，大多数陈述适用于一般的有限群 Γ；但在我们的应用中，只需考虑 $\Gamma =$复数域$_2$ 的情形。本节旨在回顾与本文相关的等变同伦主要事实。

首先需要注意的是，为建立 Γ-空间的同伦论，弱等价有两种可能的选取方式。

定义 5.1. • 一个粗（或朴素） Γ-等价是一个 Γ-等变映射 $X \to Y$，它在底层空间上是弱等价。

• 一个精细（或真正） Γ-等价是一个 Γ-等变映射 $X \to Y$，它对每个子群 $H \leq \Gamma$都诱导出弱等价 $X^H \to Y^H$。

这些弱等价概念各自对应于 Γ-空间上的一种适当模型结构，从而产生粗等变同伦论和精细等变同伦论。

注 5.2. 术语方面，我们将沿用粗／精细这一说法，例如参见 [MV99，第 3 节。3]。这些术语似乎比朴素／真正的说法少一些评判意味；事实上，粗等变同伦在 *´etale* 分类空间的实实现中发挥着重要作用。

等变同伦论有多种可能的模型选择；遗憾的是，关于不动点函子的某些微妙之处，很大程度上取决于所使用的模型。根据 Elmendorf 定理，精细 Γ-等变同伦论的一种实用模型，是将其视为 Γ 的轨道范畴上的空间预层的同伦论。

与此有些相似，但更适用于研究从动机同伦论出发的实现函子的是 [MV99, 第 3 节.3] 中使用的模型。Morel 和 Voevodsky 定义了一个由适当局部可缩的复数域$_2$-空间构成的范畴，并将其记为复数域$_2$–Tlc；该范畴带有两种可能的 Grothendieck拓扑（粗和细）。他们证明 [MV99, 命题 3.3, p. 120] ，相应的带区间站点的同伦论（区间由带平凡复数域$_2$-作用的单位区间给出）分别等价于粗等变同伦理论和细等变同伦理论。

对于细等变同伦理论，文中所建立的等价是通过将一个复数域$_2$-空间映到复数域$_2$–Tlc 上的可表预层而诱导的。[12] 一旦我们知道这是一个等价，便可得出其逆由沿轨道范畴到复数域$_2$–Tlc 的显然包含映射作限制给出。粗等变同伦理论也有类似说法，只是我们必须考虑轨道范畴上“´étale”拓扑的限制，在该拓扑下，映射复数域$_2/\langle e\rangle \to \mathsf{C}_2/\mathsf{C}_2$ 是一个覆盖。

注 5.3. 精细与粗等变同伦之间的关系，与尼斯涅维奇动机同伦和 *´étale* 动机同伦之间的关系完全平行。我们还将在下文关于粗实现函子和精细实现函子的讨论中，以及关于等变同伦中主丛的讨论中看到这一点，参见第 *6* 节。

[12]注意，Morel 与 Voevodsky 采用 G-空间的单纯形模型。

5.2. **不动点函子**。 为了后续描述实实现函子，我们简要讨论精细和粗等变同伦中的不动点函子。[13]

我们首先讨论精细等变同伦上的不动点函子。这些通常称为真正的不动点。在 Elmendorf 模型或 Morel–Voevodsky 模型中，我们基本上可以取一点（带平凡作用，即轨道 C_2/C_2）上的空间（预）层的节。由于这基本上是一个预层情形，取不动点是一个左伴随函子。事实上，它是一个左 Quillen 函子，因此会下降到同伦范畴，并且其左导出函子保留同伦余极限。

例 5.4. 我们应当指出，左伴随这一性质不幸取决于模型。在 C_2-空间中，带有翻转作用的 S^1 是一个标准例子，说明不动点与余极限不交换（在此情形下，余极限是恒等映射与翻转映射的余等化子）。在 Elmendorf 或 Morel–Voevodsky 的（预）层模型中，对象更多（尤其是，C_2/C_2 上的节不一定是 C_2作用在 $C_2/\langle e\rangle$上的不动点），因此商保留了更精细的信息，使不动点成为左伴随。□

转向粗等变同伦，显然，取不动点并非同伦不变；粗 Γ-同伦等价会诱导底层空间之间的等价，但不必以任何方式保持不动点。因此，我们唯一能考虑的函子就是同伦不动点 $X^{\mathrm{h}C_2} = \mathrm{Map}^{C_2}(EC_2, X)$。本质上，在 Morel–Voevodsky 的层模型中，这就是取整体截面的通常右导出函子。特别是，我们不能指望同伦不动点与余极限交换。

例 5.5。 作为另一项未经请求的澄清，我们指出，即使对于复点这类其他方面良好的空间（例如实代数簇的复点），不动点与同伦不动点通常也并不相同。对于配备解析拓扑并带有复共轭作用的 $\mathbb{CP}^1$，这种差异已经显现。细不动点／真正不动点就是真正的不动点，等价于 $\mathbb{RP}^1$。同伦不动点$\left(\mathbb{CP}^1\right)^{\mathrm{h}C_2}$ 似乎难以描述，但无论如何都不等价于 $\mathbb{RP}^1$；要证明这一点，可以使用 Carlsson 的一个定理 [Car91，定理 B]。该定理蕴含存在一个具有连通纤维的连续映射 $\left(\mathbb{CP}^1\right)^{\mathrm{h}C_2} \to \left(S^1\right)^\wedge_2$，进而得到一个满射 $\pi_1\left(\mathbb{CP}^1\right)^{\mathrm{h}C_2} \to \mathbb{Z}_2$（到 2-进整数），这说明同伦不动点不可能是 $\mathbb{RP}^1$。□

注记 5.6. 在 *Morel–Voevodsky* 模型中，我们可以考虑由粗层化诱导的换拓扑映射，它在不动点上诱导自然映射$X^{C_2} \to X^{\mathrm{h}C_2}$。*Sullivan*猜想，如 [Car91]，中所证明的，断言该映射在 *2*-完备化之后是一个等价，对于 X有限的复数域$_2$-空间（例如光滑实代数簇的复点）。我们再次看到，粗等变同伦是动机侧 ′平展拓扑的直接类比。

5.3. **动机同伦上的等变实现**。 作为下一步，我们希望回顾等变实现函子，它们建立了 $\mathbb{R}$ 上的动机同伦（或更一般地，具有实点的概形）与复数域$_2$-等变同伦之间的联系。我们着重讨论从不稳定 Nisnevich 局部动机同伦到精细复数域$_2$-等变同伦的函子，同时也会对从 ′平展动机同伦到粗复数域$_2$-等变同伦的相应版本作一些评注。此处将述及的大部分内容已在其他地方说过，参见例如 [WW20] 或 [MV99，第 3 节3]。

在讨论 $\mathbb{R}$ 上的复数域$_2$-等变实现之前，我们先简要回顾复数情形。复实现函子 $\mathrm{Re}_{\mathbb{C}}$: $\mathbf{sPre}(\mathbf{Sm}_{\mathbb{C}}) \to \mathbf{Top}$ 是一个左 Quillen 函子（相对于动机射影模型结构），其定义是将一个光滑概形 $X/\mathbb{C}$映射到复点的拓扑空间$X(\mathbb{C})$，并赋予解析拓扑。特别地，它保持同伦余极限。另一种方式是，将函子 $\mathbf{Sm}_{\mathbb{C}} \to \mathbf{Top}$: $X \mapsto X(\mathbb{C})$ 左 Kan 延拓，从而得到相应 ∞-范畴之间的函子。复实现也与积相容，

[13]在此，MW 谨向 Jens Hornbostel 和 Kirsten Wickelgren 致谢，感谢他们围绕不动点和等变／实实现所进行的启发性讨论。

参见 [PPR09，附录 A。4], 这尤其意味着，带有作用 $G \curvearrowright X$ 的光滑概形的复实现将是在复流形上的复李群作用 $G(\mathbb{C}) \curvearrowright X(\mathbb{C})$。此外， $G \curvearrowright X$ 的巴构造的复实现将是 $G(\mathbb{C}) \curvearrowright X(\mathbb{C})$ 的巴构造，参见 [WW20，第 3 节。1]。

在实数域上，我们有类似的复数域$_2$-等变实现函子：它们由如下映射确定：将一个光滑概形 $X/\mathbb{R}$映到复数域$_2$-空间 $X(\mathbb{C})$，其$_2$-作用为复共轭。等变实现函子有不同的描述方式。一种可能的做法是，直接将复点函子 $\mathbf{Sm}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{Top}$: $X/\mathbb{R} \mapsto (X(\mathbb{C})\ \sigma)$ 左 Kan 延拓为一个 ∞-范畴函子 $\mathbf{Spc}(\mathbb{R}) \to \mathbf{Spc}^{\mathrm{C}_2}$。

或者，也可以用模型范畴来描述这个函子；Morel 和 Voevodsky 早已给出了这种描述。在 [MV99 的第 3],节引理 3.6 中，他们证明函子

$$(\mathbf{Sm}_{\mathbb{R}})_{\mathrm{Nis}} \to \left(\mathbf{Top}_{\mathrm{lc}}^{\mathrm{C}_2}\right)_{\mathrm{fine}} : X \mapsto (X(\mathbb{C}), \sigma)$$

将一个光滑 $\mathbb{R}$-概形映到其复点并赋予复共轭作用，是位点之间一个合适的连续映射。因此，存在一个诱导的左导出函子 $\mathcal{H}(\mathbb{R}) \to \mathcal{H}^{\mathrm{C}_2\text{细}}$，从动机同伦到细拓扑下的复数域$_2$-等变同伦。该构造的关键在于，Nisnevich 覆盖的等变实现是细拓扑中的一个覆盖。

作为另一种选择，也可以将目标（$\mathbf{Top}^{\mathrm{C}_2\text{lc}}$ 上的精细 I-局部空间层）替换为等变同伦的 Elmendorf 模型（轨道范畴上的空间预层）：轨道范畴可以用显然的方式嵌入到局部可缩的复数域 C$_2$-空间中，而将层从$\mathbf{Top}^{\mathrm{C}_2\text{lc}}$ 限制到轨道范畴，会诱导出模型范畴之间的 Quillen 等价（或相关联的 ∞-范畴之间的等价）。

对我们而言，这些描述中最相关的结论是，与复实现函子的情形一样，复数域 C$_2$-等变实现与（同伦）余极限相交换。由于它也与积相交换，因此会将群作用的巴构造 $G \curvearrowright X$映射为实现 $G(\mathbb{C}) \curvearrowright X(\mathbb{C})$的巴构造，并将其视为复数域 C$_2$-空间上的作用。

最后要指出的是，也可以将复数域 C$_2$-空间的范畴$\mathbf{Top}^{\mathrm{C}_2}$ 用作等变实现函子的目标，并且具有完全相同的性质。我们不采用该模型，因为不动点函子存在一些依赖于模型的问题，而我们希望在讨论实实现时避开这些问题；参见上文第 5.2 节的讨论。

5.4. **关于 ´étale 到粗糙实现函子**。 我们简要讨论等变实现的一种变体，它将 ´étale $\mathbb{A}^1$-局部动机同伦论映射到粗糙复数域$_2$-等变同伦论：

$$\mathbf{Sh}_{\text{ét}}^{\mathbb{A}^1}(\mathbf{Sm}_{\mathbb{R}}) \to \mathbf{Sh}_{\mathrm{coarse}}^{\mathrm{I}}\left(\mathbf{Top}_{\mathrm{lc}}^{\mathrm{C}_2}\right) : X \mapsto (X(\mathbb{C}), \sigma)$$

如上所述，该函子是将一个实概形映射到其复点所成的复数域$_2$-空间的函子的左 Kan 延拓。关键在于， ´étale 超覆盖会被映射为粗糙超覆盖；在 [DI04，定理 5.2] 关于实现函子的讨论中，这一点已被隐含地指出。（由于我们使用粗等价，只需检查底层空间上的条件，而相关文献证明中的局部分裂蕴含了粗糙覆盖条件。）需要注意的是，我们无法期望在 ´étale 动机同伦论上得到精细等变实现，因为 ´étale 覆盖未必在 $\mathbb{R}$-点上是满射，因此 ´étale 超覆盖通常不会诱导精细弱等价。

我们不会大量使用 ´平展到粗实现函子，但它的存在已经暗示了 ´平展同伦轨道空间（如几何分类空间 $\mathrm{B}_{\text{ét}}G$）与粗同伦轨道空间之间可能存在的关系。这一关系将在第 6 节和第 7 节中得到更精确的阐述。

备注 5.7。 最后，我们指出，可以将 *´étale*到粗等变实现与同伦不动点函子复合，从而得到一个从 *´étale*动机同伦到普通拓扑的实实现函子。这个实现函子将光滑 $\mathbb{R}$概形 X 送到

同伦不动点空间 $X(\mathbb{C})^{hC_2}$。根据 *Carlsson* 关于 *Sullivan*猜想的结果，参见 [Car91]，这个函子（在光滑概形上）与"通常的"实实现函子（将 *Nisnevich*到精细等变实现与真正不动点复合）在 *2*-完备化后相同。

5.5. **不稳定动机同伦中的实实现**。一旦我们得到如上所述的复数域$_2$-等变实现函子，就可以通过将复数域$_2$-等变实现函子与取复数域$_2$-不动点相复合，得到实实现函子 $\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}\colon \mathbf{sPre}(\mathbf{Sm}_{\mathbb{R}}) \to \mathbf{Top}$ 。

如果我们使用复数域$_2$-等变同伦论的预层模型（例如上文第 5.1 节讨论的 Elmendorf 模型或 Morel–Voevodsky 模型），那么真正不动点函子是一个左伴随（如上文第 5.2 节所述）。复合得到的实实现函子于是也是左伴随，即将光滑 $\mathbb{R}$-概形 X 映到其在解析拓扑下的实点空间 $X(\mathbb{R})$的函子的左 Kan 延拓。这就是[Bac18], 所考虑的实实现函子 LR_2 ，也是本文余下部分将使用的函子。[14]

注记 5.8。 函子 $\varphi_{\mathbb{R}}^{-1}\colon \ X \mapsto X(\mathbb{R})$ 定义了位点的连续映射

$$\varphi_{\mathbb{R}}\colon (\mathrm{T}lc)_{\mathrm{open}} \to (\mathbf{Sm}_{\mathbb{R}})_{\mathrm{Nis}}.$$

在 [MV99，第 2 节定义 1.55。1], 的意义下，这个映射似乎是合理的，因为函子 $\varphi_{\mathbb{R}}^{-1}$ 将 *Nisnevich*方形映射为由局部微分同胚组成的方形，而这些局部微分同胚是局部分裂的（它们由局部可缩复数域$_2$-空间的精细覆盖的不动点得到）。上面的实实现（作为精细复数域$_2$-等变实现与随后取真正不动点的复合）也可以改写为$\mathbf{L}\varphi_{\mathbb{R}}^{*}$，从而提供另一种方式来理解它是取实点函子的左 *Kan* 延拓。

5.6. **关于稳定动机同伦中的实实现的注记**。 我们汇集几条关于稳定实现函子的注记。上文所述的非稳定实现函子延拓到稳定 动机同伦范畴。对于复实现和 C_2-等变实现，这并没有什么问题。任意复嵌入 $\sigma\colon \ F \hookrightarrow \mathbb{C}$ 都诱导出一个从 F 上的对称动机 $\mathbb{P}^1$-谱到拓扑空间的对称 $\mathbb{CP}^1$-谱的对称幺半左 Quillen 函子，该函子将对称谱送到其拓扑实现，参见 [PPR09]。特别地，它将悬挂谱 $\Sigma^{\infty}_{\mathbb{P}^1}X_+$ 送到悬挂谱 $\Sigma^{\infty}X(\mathbb{C})_+$ ，并且与余极限相容。类似地，稳定的 C_2-等变实现是一个对称幺半左伴随，参见 [HO16，第 4.8]号命题。

稳定实实现函子 $\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}\colon \ \mathbf{SH}(\mathbb{R}) \to \mathbf{SH}$ 可以用两种方式描述。一种可能性是 Bachmann 在 [Bac 18] 中采用实-étale 拓扑，并建立了一个等价

$$\mathbf{SH}(\mathbb{R})[\rho^{-1}] \cong \mathbf{SH}.$$

在这种描述中，实实现可以解释为 ρ-局部化函子。另一种可能性，如 [HO16], 中所述，是将实实现定义为复合函子

$$\mathbf{SH}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\mathrm{Re}_{C_2}} \mathbf{SH}^{C_2} \xrightarrow{\Phi^{C_2}} \mathbf{SH}$$

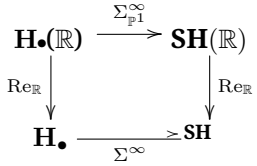
由 C_2-等变实现与几何 C_2-不动点组成。在 [Bac18 的第 10], 节中，Bach- mann 证明这两个版本的实现函子是一致的。本质上，一旦我们知道这些函子是左伴随，就可以检验它们在光滑概形上的作用一致。第二种描述立即推出以下陈述：

命题 5.9。

(1) 稳定　实实现是一个对称幺半左伴　　左伴随。

[14]请注意，如果我们使用 C_2-空间作为等变同伦的模型，那么真正不动点函子在点集层面并不是左伴随。因此，复合实实现并不具有特定的伴随性，正如 [WW20]中所提到的。

(2) 存在一个交换图



联系不稳定实实现与稳定实实现（分别对应左侧和右侧的垂直箭头）。

证明。（1）等变实现和几何不动点都是对称幺半左伴随，因此它们的复合也具有同样的性质。

（2）几何不动点的一个（如果不是最）关键特征是等价

$$\Phi^{\mathrm{C}_2}(\Sigma^\infty X_+) \cong \Sigma^\infty X_+^{\mathrm{hC}_2},$$

也就是说，对于任意 C_2-空间，悬挂谱的几何不动点等价于同伦不动点的悬挂谱。该图只是对这一点的重新表述。□

虽然本文主要关注商栈的不稳定实实现，但我们提及稳定实实现的原因，是为商栈的上同调理论上的实现映射提供一般框架。对于任意动机谱 E，稳定 实实现函子 $\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}$ 诱导出一个映射

$$E^{**}(X) = [\Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1} X_+, E(*)[*]]_{\mathbf{SH}(\mathbb{R})} \to [\Sigma^\infty \left(\mathrm{Re}_{\mathbb{R}} X_+\right), \mathrm{Re}_{\mathbb{R}}(E)[*]]_{\mathbf{SH}} = \mathrm{Re}_{\mathbb{R}}(E)^*(\mathrm{Re}_{\mathbb{R}} X)$$

从空间 X 的 E-上同调到其X的实实现 $\mathrm{Re}_{\mathbb{R}} X$ 的 $\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}(E)$-上同调。这类映射通常是联系代数上同调与拓扑上同调的有力工具，并且可用于将信息从拓扑方面传递到动机方面（例如检测映射不为零），反之亦然（例如根据权的理由推导映射为零）。

在本文余下部分，我们将研究商栈的实现 $\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}[G\backslash X]$ （即与之关联的不稳定动机空间），其中该商栈对应于带作用的簇 $G \curvearrowright X$。一般而言，对于一般动机谱 E，实现映射的目标是商栈实点上的 $\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}(E)$-上同调。本文主要关注 Witt 层上同调，它由 Witt 层同伦模对应的 Eilenberg–Mac Lane 谱 $\mathbb{H}\mathbf{W}_\bullet$ 表示。利用 Jacobson 同构 $\mathrm{colim}_n \mathbf{I}^n \xrightarrow{\cong} a_{\text{ét}}\mathbb{Z}$，参见 [Jac17，定理 8.5] 以及 [Bac18，第 7]，节，该谱的实实现是表示整数奇异上同调的 Eilenberg–Mac Lane 谱$\mathbb{H}\mathbb{Z}$。在这种情况下，上文讨论的等变实实现映射具有如下形式

$$\mathrm{H}^p(X, \mathbf{W}) \cong [\Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1} X_+, \mathbb{H}\mathrm{W}_\bullet[p]]_{\mathbf{SH}(\mathbb{R})} \to [\Sigma^\infty(\mathrm{Re}_{\mathbb{R}} X_+), \mathbb{H}\mathbb{Z}[p]] \cong \mathrm{H}^p(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}).$$

我们将在第.....节给出这个等变实循环类映射更明确的定义 9.

最后，我们指出，研究其他动机谱的等变实实现映射也很有意思；下面列举一些例子。

例 5.10. 值得考虑的自然例子是与厄米 K 理论相关的谱。厄米 K 理论谱 KO 的实实现是 $\mathrm{KO}^{\mathrm{top}}[1/2]$，参见 [BH20，引理 3.9]。相应的等变实实现映射将是

$$\mathrm{KO}^{**}([G\backslash X]) \to \mathrm{KO}^{\mathrm{top}}[1/2]^*(\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}[G\backslash X]),$$

特别地，非连通版本会在实实现中丢失一些2-挠信息。注意，实实现映射对非连通代数 K-理论并不有趣，因为 $\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}\mathrm{KGL} = 0$，参见 [BH20，引理 3.9]，这本质上是由于 Bott 元的实实现是幂零的。不过，它对有效覆盖 kgl 可能是有趣的，而 kgl 应与连通实拓扑 K-理论 ko 相关，即作为无限 Grassmann 流形的不动点。在此背景下，将其与有限群分类空间的连通实 K 理论的 Bruner–Greenlees 计算加以比较会很有趣，参见 [BG10]。□

例 5.11. 类似地，考虑配边谱的实实现映射会很有趣。由 [BH20，引理 4.4]，我们有 $\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}\mathrm{MSp} \cong \mathrm{MU}$ 以及 $\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}\mathrm{MSL} \cong \mathrm{MSO}$。于是，特殊线性情形中的实实现映射将具有如下形式

$$\mathrm{MSL}^{**}([G\backslash X]) \to \mathrm{MSO}^{*}(\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}[G\backslash X]),$$

这或许能帮助我们更好地理解商栈的代数配边，方法是利用本文对实实实现的描述。□

6. Coarse homotopy orbits in equivariant homotopy, and homotopy fixed points

本节将从一个略有不同的视角来探讨等变主丛及其分类空间。我们将把等变主丛重新诠释为 C_2 –Tlc 上粗拓扑的扭子；从这个视角出发，可以直接类比动机情形中的 ´etale 分类空间，构造等变主丛的分类空间。第7节将利用这一对等变主丛理论的描述，证明商栈在动机同伦中的 C_2-等变实现将是等变同伦中的商栈。我们还将讨论粗博雷尔构造与同伦不动点之间的关系。以下内容是主要思想的概述，具体细节或许会在别处发表。

6.1. 等变主丛与粗扭子。我们简要回顾 [tD87 第 I.6–8] 章中主丛的定义，并将其具体化到如下情形： $\Gamma =$复数域$_2$ 作为反全纯对合，作用于复李群 $G = G(\mathbb{C})$。用 $S = G \rtimes$复数域$_2$ 表示半直积。

定义 6.1。一个复数域$_2$-等变主 G丛，亦称为(复数域$_2$, G)-丛，是一个 S-空间E，其从 S 限制而来的 G-作用使其成为一个主 G-丛。这等价于说，复数域$_2$ 与 G 在主 G-丛 E上的作用相容，即对于 $\gamma \in$ 复数域$_2$, $x \in E$ 和$g \in G$:

$$\gamma.(x.g) = (\gamma.x).(\gamma.g).$$

这在商 $B = E/G$上诱导出唯一的复数域$_2$-作用，使得投影 $p\colon E \to B$是复数域$_2$-等变的。两个复数域$_2$-等变主 G-丛之间的态射，是它们之间的一个 S-等变映射。

按照 [tD87，第58], 页的术语，若存在一个由 B 中的 C_2-稳定开子集构成的覆盖 U_j ，使得 $E|_{U_j}$ 可以映射到某个局部对象（即某个定义在某个子群 $\Lambda \leq C_2$ 的轨道 C_2/Λ 上的 (C_2, G)-丛），则称一个 (C_2, G)-丛为局部平凡。如果 $\{U_j\}$ 对 B 的覆盖存在从属单位分解，则称该丛为可数的。

备注 6.2。 通常，分类结果仅适用于局部平凡可数化丛。在文献中的某些地方（例如 [tD87，命题 8。10] 或 [GMM17]），假设群 G 是紧致的，以确保总空间完全正则的主丛具有自动局部平凡性。在我们的设定中，我们考虑良好空间，即局部可缩的旁紧 *Hausdorff* 空间，因此紧致性假设不起作用，可以省去。

命题 6.3. 设 G 是一个带复数域$_2$-作用的拓扑群，且 B 是复数域$_2$ –Tlc中的一个复数域$_2$-空间。那么，定义 *6.1* 中所述的 B 上的局部平凡复数域$_2$-等变主 G-丛，与定义 *2.3* 中所述的复数域$_2$-空间中的一个（可表） G-扭子在粗拓扑下局部平凡，是同一回事。

证明。 设 $p\colon E \to B$ 是一个复数域$_2$-等变主丛。这意味着 p 是复数域$_2$-空间的一个态射，存在一个作用 $\rho\colon G \times E \to E$，其取值于复数域$_2$-空间，并且 p 是一个局部平凡主 G-丛。另一方面，复数域$_2$-空间中的一个（可表） G-扭子，是一个复数域$_2$-等变态射$p\colon E \to B$，带有一个作用 $\rho\colon G \times E \to E$，满足 $(\rho, \mathrm{pr}_2)\colon G \times E \to E \times_B E$是同构。因此，这两种情形中的数据相同，而扭子情形中的同构条件恰好表达了 $p\colon E \to B$ 是一个（非等变的）主 G-丛。

为确定局部平凡性条件，我们首先注意到，复数域$_2$/C$_2$ 上的所有局部对象沿投影映射 C $_2$/1 →C$_2$/C$_2$, 拉回后都变得同构；该投影映射是一个粗覆盖。特别地，对于局部平凡等变主丛，我们可以取其平凡化开覆盖 $\{U_j\}$ ，并将其细化为一个粗覆盖，使相应的 G-扭子平凡化。[15]反过来，回顾一下，MV99] 99 中粗覆盖 $X \to Y$ 的定义：它是一个复数域$_2$-等变态射，使得任意点 $y \in Y$ 都有一个开邻域 U ，令投影$X \times_Y U \to U$ 成为拓扑空间之间的态射的分裂。特别地，这给出了 Y 的一个开覆盖（我们可以假设它在 MV99《定义 3.3.1]》的意义下是良好的）。这便为等变主丛提供了平凡化开覆盖，随后可将其细化为一个复数域$_2$-稳定开覆盖。局部模型由轨道上的纤维得到，而粗局部平凡性以及开覆盖的良好性保证了等变平凡化条件。□

备注 6.4. 这里的直观理解是，粗拓扑加入了复数域$_2$-等变版本的*´etale* 覆盖，例如$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{R})$ ，从而可以识别不同的实形式，换言之，就是复数域$_2$-群 G的不同局部模型。

作为这种识别的结果，我们得到沿粗覆盖的 C$_2$-等变 G-主丛的下降。

推论 6.5. 粗局部平凡的 G-扭子在粗拓扑下满足下降，即它们可以在粗覆盖中粘合。更准确地说，设 $f\colon X \to Y$ 是一个粗覆盖，并记$\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2\colon X \times_Y X \to X$ 为两个投影。若 $p\colon E \to X$ 是一个粗局部平凡的 G-扭子，且带有一个同构 $\alpha\colon \mathrm{pr}_1^* E \cong \mathrm{pr}_2^* E$，则存在唯一的粗局部平凡 G-扭子 $E \to Y$ ，满足 $f^* E \cong E$。

证明。 对于一个点 $y \in Y$，下降同构 α 规定了如何识别 E 在点$x \in f^{-1}(y)$ 上方的不同纤维，从而定义带有 $f^* E \cong E$ 的 G-扭子 E（位于 Y 上方）。根据定义，这个 G-扭子在粗拓扑下将是局部平凡的（将E 的一个平凡化覆盖与 f 复合，即得到 E的一个平凡化覆盖）。□

命题 6.6。 等变主丛满足同伦不变性，也就是说，对于 X 属于 复数域$_2$ –Tlc 的情形， $X \times \mathrm{I}$（带平凡 复数域$_2$-作用的区间）上的丛是从 X 延拓而来的。

*Pr*证明。 这是 [tD87，命题 8.13，定理 8.15]. □

6.2. **作为粗同伦轨道空间的万有等变主丛**。将等变主丛重新解释为复数域$_2$-空间中的扭子，且它们在粗拓扑下局部平凡之后，便可沿着第 2 节和第 3 节所述的代数情形，发展等变主丛的分类理论。下面概述其中的要点。

对于带有作用 $G \curvearrowright X$ 的复数域$_2$-空间，我们可以考虑商栈 $[G\backslash X]$ ，其在空间 $S \in$ C$_2$ – T lc 上的点群胚 $[G\backslash X](S)$ 是由跨度 $S \xleftarrow{p} P \xrightarrow{f} X$ 构成的群胚，其中 $p\colon P \to S$ 是一个粗拓扑局部平凡的 G-扭子，而 $f\colon P \to X$ 是 G-等变的。所得商栈是 C$_2$ –Tlc 上粗拓扑的群胚层（本质上源于等变主丛的粗下降性质）。在此设定下，我们还拥有命题 2.8 中商与归纳等价的相应版本。

按照第 3 节的内容，我们还可以通过几种方式将等变商栈 $[G\backslash X]$ 视为等变同伦中的对象。通过定义 3.2 的类似构造，我们可以取群胚层的神经的几何实现，并将其视为细 I-局部层的同伦范畴中的对象。[16] 完全类比第 3 节中 ´étale 与尼斯涅维奇的情形，商栈 $[G\backslash X]$ 的这一实现将是粗同伦轨道空间，在此记作 $\mathcal{X}_{\mathrm{h}G}$；它可以先在粗等变同伦中构造为同伦轨道，

[15]请注意，定义 6.1 中关于 (C$_2$, G)-丛的局部平凡性的定义实际上并不包含关于不动点集的条件，这使其更多地与粗拓扑而非细拓扑相关。[16]请注意，根据第 5.1 节的讨论，这等价于通常的真正 C$_2$-等变同伦范畴。

然后沿着从粗等变同伦理论到细等变同伦理论的拓扑变更态射进行导出推前。

粗下降加上同伦不变性（如上一节所述）利用 [AHW17] 中及其相关技术，蕴含了商栈的实现 $\mathcal{X}_{\mathrm{h}G}$ 的以下可表示性结果:

定理 6.7。 设 G 为带有反全纯 C_2-作用的复李群，且设 $G \curvearrowright X$ 为带有作用的 C_2-空间。我们将粗同伦轨道空间 $\mathcal{X}_{\mathrm{h}G}$ 视为空间的细层，其定义在C_2 –Tlc上。那么对于任意 $S \in \mathrm{C}_2 - \mathrm{T}lc$，存在等价

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{fine,I}}(S, \mathcal{X}_{\mathrm{h}G}) \simeq \left|\mathrm{Sing}^{\mathrm{I}}_{*}([G\backslash X](S))\right|$$

这些等价在 $S \in \mathrm{C}_2 - \mathrm{T}lc$中是自然的。具体来说，这意味着 ($[G\backslash X](S)$ 的奇异分解）是精细等变同伦范畴中粗同伦轨道的一个代表。因此，可以通过拓扑群胚 $[G\backslash X](S)$的几何实现来计算空间 S 上的 $\mathcal{X}_{\mathrm{h}G}$ 的节。

I特别地，当 $\mathrm{B}_{\mathrm{cs}}G$ 是以下对象的粗同伦轨道空间/实现时
商
栈对应于平凡作用 $G \curvearrowright \mathrm{pt}$ 时，我们得到

$$[X, \mathrm{B}_{\mathrm{cs}}G]_{\mathrm{fine,I}} \cong \mathrm{H}^1_{\mathrm{cs}}(X, G).$$

这意味着，粗同伦轨道空间 $\mathrm{B}_{\mathrm{sc}}G$ 是 C_2-等变主 G-丛的分类空间，而映入 $[G\backslash X]$ 的朴素 I-同伦类计算了粗 G-扭子的同构类。

沿着第 3 节的思路继续深入，我们可以用其他方式描述等变商栈的实现。

一方面，我们可以构造一个单纯对象，按照第 3.2 节的思路，实现精细等变同伦下的同伦轨道空间。所得结果是一个 C_2-空间 $\mathrm{E}_G(X)$，其底层空间是底层作用 $G \curvearrowright X$ 的 Borel 构造，而其不动点空间则是不动点作用 $G^{\mathrm{C}_2} \curvearrowright X^{\mathrm{C}_2}$ 的 Borel 构造。作为命题 3.8 的类似结果，这个精细同伦轨道空间的粗糙层化将是商栈 $[G\backslash X]$ 的实现。

在等变情形中，如果其粗上同调集

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{cs}}(\mathrm{pt}, G) \cong \pi_0([G\backslash \mathrm{pt}](\mathrm{pt}))$$

（即点 pt 上、带平凡复数域$_2$-作用的 G-扭子的同构类）只有一个元素，我们便称一个复数域$_2$-群为特殊。对于特殊群 G的作用 $G \curvearrowright X$，由单纯构造给出的精细同伦轨道空间 $\mathrm{E}_G(X)$，将等价于商栈的实现。这是 Krishna 等价在等变情形下的类比，见 [Kri12], ；另见命题 3.8 的第二部分。

另一方面，也可以用线性表示 G中开子集的商空间来逼近粗同伦轨道空间 $\mathcal{X}_{\mathrm{h}G}$；这是第 3.3 节中 Totaro–Edidin–Graham 构造在等变情形下的类比。本文中我们没有机会用到这一点。

注 6.8. 上述概述可以看作是对 [GMM17]，中等变主丛分类空间的范畴模型的一种不同理解，尤其是定理 *3.10* 和 *3.11*。我们不清楚此前的等变文献是否注意到等变主丛与粗糙局部平凡挠子之间的联系。我们发现这种联系很有用，也很自然，特别是在研究动机商栈的等变实现时。此外，在我们看来，通过 复数域$_2$ –Tlc 上的空间层来处理，能够避开 [GMM17] 及类似文献中的一些点集条件或紧致性条件。无论如何，只要满足点集条件（我们认为，约化实李群的复化应当满足这些条件）， [GMM17] 中的分类空间就等价于上文定理 *6.7* 中的粗同伦轨道空间。

6.3. **不动点群胚与同伦不动点**。由定理 6.7，我们可以很快读出粗同伦轨道空间 $\mathcal{X}_{\mathrm{h}G}$ 对于带有作用 $G \curvearrowright X$ 的复数域$_2$-空间的真正不动点空间的一种描述：

推论 6.9。 设 G 是一个带有反全纯 复数域$_2$-作用的复李群， $G \curvearrowright X$是一个带有作用的 复数域$_2$-空间。我们将粗同伦轨道空间 $\mathcal{X}_{\mathrm{h}G}$ 视为 复数域$_2$ $-\mathrm{T}lc$上的空间的细层。那么有如下结论：

(1) 真正不动点空间 $\mathcal{X}^{\mathrm{C}_2}{}_{\mathrm{h}G}$ 等价于拓扑群胚 $[G\backslash X](\mathrm{pt})$的几何实现。*(2)* 复数域$_2$ $\to\mathrm{pt}$ 之间的自然映射诱导出拓扑群胚的一个等价

$$[G\backslash X](\mathrm{pt}) \simeq [G\backslash X](\mathrm{C}_2)^{\mathrm{hC}_2},$$

也就是说， $[G\backslash X](\mathrm{pt})$ 等价于自然 复数域$_2$-作用于$[G\backslash X]$(复数域$_2$)所对应的不动点群胚。

(3) $[G\backslash X](\mathrm{pt})$ 的实现是 复数域$_2$-作用于 $[G\backslash X]$(复数域$_2$)的实现所得到的同伦不动点空间。

证明。 (1) 是定理 6.7 的直接推论，适用于 $S =$pt 的特殊情形。

(2) $[G\backslash X]$(C_2) 上的自然复数域$_2$作用，是由 C_2 上交换两个点的复数域$_2$作用诱导的。将不动点群胚与 $[G\backslash X]$(pt) 的识别，可通过粗下降得到，其论证与第 4 节中的论证类似。

(3) 如上所述，我们可以在粗模型结构中将 $\mathcal{X}_{\mathrm{h}G}$ （作为 C_2 $-\mathrm{T}lc$ 上的空间层）构造为同伦轨道，再进行拓扑变更推前。按构造，这意味着 $\mathcal{X}_{\mathrm{h}G}$ 在 pt 上的截面可识别为自然复数域$_2$作用于 $\mathcal{X}_{\mathrm{h}G}$($\mathrm{C}_2$) 所得的同伦不动点，另见我们在第 5.2 节中关于不动点函子的讨论。□

注 6.10。 这为计算 [GMM17]，中等变分类空间的不动点提供了另一种视角，尤其是定理 *4.18* 和 *4.23*。将不动点空间识别为拓扑群胚 $[G\backslash X](\mathrm{pt})$ 的实现后，用 $\mathrm{H}^1_{\mathrm{cs}}(\mathrm{pt}\ G)$ （作为伽罗瓦上同调的等变拓扑版本）描述其连通分支便显而易见。

注 6.11. 不动点群胚的实现计算同伦不动点，也是文献中许多地方都有记载的标准结果。对于离散群，*Thomason* 的同伦极限论文 [Tho83], 第 *3* 节中给出了这一结果，尤其是第 *410* 页的 *(3.3)*；另见 [Vir21，例 2.0.1 和命题 2.1。4]。对于紧群，这一结果也见于 [GMM17],第 *4* 节关于不动点群胚 $\mathscr{C}at(\mathcal{E}G, \Pi)^G$ 的讨论。

7. Equivariant and real realization for quotient stacks

本节将计算商栈的等变与实实现，从而证明引言中的定理 1.3。主要结果如下：对于 $\mathbb{R}$ 上的群作用$G \curvearrowright X$ ，相应商栈 $[G\backslash X]$ 的等变实现是该作用在（复数域 C_2-空间）中的等变实现 $G(\mathbb{C}) \curvearrowright X(\mathbb{C})$ 所对应的商栈。换言之， ´étale 同伦轨道的等变实现就是粗等变同伦轨道。特别地，线性群 G 的几何分类空间 $\mathrm{B}_{\acute{\mathrm{e}}\mathrm{t}}G$ 的等变实现是用于分类等变主 $(\mathrm{C}_2, G(\mathbb{C}))$-丛的复数域 C_2-空间，正如第 6 节所讨论的。取不动点后，这意味着实商栈 $[G\backslash X]$的实实现由复实现的同伦不动点给出。结合第 8 节的结果可知，（不稳定）实实现也可以通过商栈的实点所构成的拓扑群胚 $[G\backslash X](\mathbb{R})$ 的几何实现来计算；另见命题 8.8 中的显式公式。

为了证明等变结果，我们首先注意到，Nisnevich 同伦轨道会映射到细等变同伦轨道，因为 Nisnevich 到细实现是左 Kan 延拓。特别地，对于特殊群 G 的群作用 $G \curvearrowright X$ ，等变实现 $\mathrm{Re}_{\mathrm{C}_2}[G\backslash X]$

是 $G(\mathbb{C}) \curvearrowright X(\mathbb{C})$ 的作用胚（视为复数域 C_2-空间中的群作用）。对于一般情形，我们可以使用命题 2.8 的归纳等价 $[G\backslash X] \cong [\mathrm{GL}_n\backslash(\mathrm{GL}_n \times_{/G} X)]$，给出一个 GL_n-表示。这表明，商栈的等变实现一般都是粗同伦轨道空间。

我们想指出，在本文的研究中，对商栈实点的两种描述都很重要。一方面，将商栈的实点视为复点上复共轭作用的同伦不动点，可以非常直接地计算分类空间的实实现，参见命题 8.8 中的公式以及第 11 节讨论的各个例子。另一方面，代数 Borel 构造的概形逼近是我们在第 9 节定义等变实循环类映射的关键。

约定 7.1。 在本节中，为了明确区分商栈的实点与其实实现，我们将采用以下记号：$[G\backslash X](\mathbb{R})$ 表示商栈的实点群胚（如例 *3.11* 或第 *8* 节所述），而 实$_{\mathbb{R}}[G\backslash X]$表示实实现（如第 *5.5* 节所述）。在证明二者等价之后，后续各节中可能会在一定程度上模糊这一区别。

7.1. **复实现**。 我们先插叙讨论商栈的复实现如何描述。正如我们在第 2 节回顾的那样，将商栈视为动机同伦中的对象，有几种可能（但等价）的方式。因此，描述其复实现也有不同的方式：在较偏向单纯形的一侧，我们可以取作用群胚的实现；而在较偏向几何的一侧，则可以使用容许装置，取 Borel 构造的有限维逼近的复实现，采用 Totaro [Tot99] 和 Edidin–Graham [EG98]的做法。

我们首先考虑容许装置 $X_G(\rho)$ 的复实现，其中 $G \curvearrowright X$，参见第 3.3 节。由于复实现是左 Kan 延拓，其结果是 $G(\mathbb{C}) \curvearrowright X(\mathbb{C})$ 的 Borel 构造。

命题 7.2。 设 $G \curvearrowright X$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的光滑拟射影簇，带有作用；并设$\rho = (U_i, V_i)_{i\geq 1}$ 是 G 的一个容许装置。那么， $X_G(\rho)$ 的复实现是 $G(\mathbb{C}) \curvearrowright X(\mathbb{C})$ 的 ***Borel*** 构造。更准确地说，

$$\mathrm{Re}_{\mathbb{C}}\left(X_G(\rho)\right) \simeq \mathrm{colim}_{i\geq 1}\left(U_i(\mathbb{C}) \times_{/G(\mathbb{C})} X(\mathbb{C})\right) \simeq \mathrm{E}G(\mathbb{C}) \times_{/G(\mathbb{C})} X(\mathbb{C}).$$

特别地，复实现可以识别为概形逼近的复点的同伦余极限
（按照 *Totaro* 和 *Edidin–Graham* 的意义） $X_G(\rho)$。

证明。 回顾第 3.3 节，根据定义 $X_G(\rho) = \mathrm{colim}_i\left(U_i \times_{/G} X\right)$，由于该余极限取自一个滤过指标范畴，因此它确实是一个同伦余极限。由于复实现是一个左 Quillen 函子，$\mathrm{Re}_{\mathbb{C}}(X_G(\rho))$ 是 $\mathrm{Re}_{\mathbb{C}}(U_i \times_{/G} X)$ 的（同伦）余极限。

正如上文所回顾的，例如参见 [WW20，第 3.1]，节，复实现与乘积可交换，因此 $\mathrm{Re}_{\mathbb{C}}(U_i \times X) \cong U_i(\mathbb{C}) \times X(\mathbb{C})$。此外，对角作用 $G \curvearrowright U_i \times X$ 实现为复李群作用 $G(\mathbb{C}) \curvearrowright U_i(\mathbb{C}) \times X(\mathbb{C})$。最后，我们还可以利用复实现与余极限可交换这一性质（更具体地说，即作用群胚 $G \times U_i \times X \rightrightarrows U_i \times X$的余等化子），从而得到 $\mathrm{Re}_{\mathbb{C}}(U_i \times_{/G} X) \cong U_i(\mathbb{C}) \times_{/G(\mathbb{C})} X(\mathbb{C})$。这就证明了命题中的第一个等价。

第二个等价（也）是标准的。我们有：

$$\mathrm{colim}_{i\geq 1}\left(U_i(\mathbb{C}) \times_{/G(\mathbb{C})} X(\mathbb{C})\right) \simeq \left(\mathrm{colim}_{i\geq 1} U_i(\mathbb{C})\right) \times_{/G(\mathbb{C})} X(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Re}_{\mathbb{C}}(\mathrm{colim}_{i\geq 1} U_i) \times_{G(\mathbb{C})} X(\mathbb{C}$$

但此时，动机空间 $\mathrm{colim}_i U_i$ 是可缩的，参见 [MV99], 第 4.2 节中的命题 2.3，因此其实现也是可缩的。 $G(\mathbb{C})$ 在 $\mathrm{colim}_{i\geq 1} U_i(\mathbb{C})$ 上的作用是自由的，因为在取实现之前该作用就是自由的。因此我们得出结论，$\mathrm{Re}_{\mathbb{C}}(\mathrm{colim}_{i\geq 1} U_i)$ 是 $\mathrm{E}G(\mathbb{C})$ 的一个模型。□

接下来，我们从作用群胚的角度讨论复实现。我们用记号 $\mathrm{E}_G(X)$ 表示与带作用的簇 $G \curvearrowright X$ 相关联的巴构造；另见第 3.2 节中的讨论。

命题 7.3。 设 $G \curvearrowright X$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的带作用的光滑簇。那么，作用群胚 $\mathrm{E}_G(X)$ 的复实现 $\mathrm{Re}_{\mathbb{C}}(E_G(X))$ 是复李群作用 $G(\mathbb{C}) \curvearrowright X(\mathbb{C})$的巴构造。

证明。 回忆定义3.4，$\mathrm{E}_G(X)$ 是单纯概形

$$\cdots \equiv G \times G \times X \equiv G \times X \equiv X$$

其面映射由群乘法、群作用和投影给出。

我们可以用两种方式理解 $\mathrm{E}_G(X)$ 的复实现。一方面，可以将其视为单纯概形，并逐项应用函子 $\mathrm{Re}_{\mathbb{C}}$ ，得到一个单纯空间。另一方面，可以将 $\mathrm{E}_G(X)$ 视为动机同伦范畴中的对象，并应用 $\mathrm{Re}_{\mathbb{C}}$ 得到一个空间。后一个空间就是前一个单纯空间的几何实现。特别地，只需证明逐项实现是命题中所述的作用 $G(\mathbb{C}) \curvearrowright X(\mathbb{C})$ 的巴构造。

由于复实现与有限乘积相容，$\mathrm{Re}_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}_G(X))$ 是一个由 $G(\mathbb{C})$ 和 $X(\mathbb{C})$ 构成的单纯对象，其面映射由群乘法、群作用和投影的复实现给出。但这个单纯空间恰好是复李群作用 $G(\mathbb{C}) \curvearrowright X(\mathbb{C}) = \mathrm{Re}_{\mathbb{C}}(G \curvearrowright X)$ 的巴构造，另见 WW20 第 3 节中关于巴构造的实现的讨论。1]。□

结合上述结果，我们得到带作用的簇的复实现的如下描述：

推论7.4。 设 $G \curvearrowright X$ 是一个光滑拟射影带作用的簇。

(1) 命题 *3.8* 中的自然态射 $\mathrm{E}_G(X) \to [G\backslash X]$ 在复实现后诱导一个等价：*(2)* 命题 *3.17* 中的自然态射 $X_G(\rho) \to [G\backslash X]$ 在复实现后诱导一个等价：*(3)* 若 G 是特殊的，则 *(1)* 和 *(2)* 中的等价是 *Krishna* 等价 $\mathrm{E}_G(X) \cong X_G(\rho)$ 的实现，参见 [Kri12，命题 3。2] 或第 *3.2* 和 *3.3* 节。

$$\mathrm{Re}_{\mathbb{C}} \mathrm{E}_G(X) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Re}_{\mathbb{C}}[G\backslash X].$$

$$\mathrm{Re}_{\mathbb{C}} X_G(\rho) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Re}_{\mathbb{C}}[G\backslash X].$$

特别地，商栈的复实现既可以使用作用 $G(\mathbb{C}) \curvearrowright X(\mathbb{C})$ 的 *Borel* 构造来计算，也可以作为拓扑作用群胚 $(G \times X)(\mathbb{C}) \rightrightarrows X(\mathbb{C})$ 的神经来计算。[17]

注记 7.5。 注意，推论中的 *(1)* 不依赖于 G 是特殊群。动机侧的自然态射 $\mathrm{E}_G(X) \to [G\backslash X]$ 通常不是等价，但其复实现总是等价。

7.2. **Nisnevich 同伦轨道的等变与实实现**。 现在我们转而讨论实群作用下商栈的 C_2-等变与实实现。我们首先考虑特殊群的情形，此时可以使用 Krishna 等价 $\mathrm{E}_G(X) \cong [G\backslash X]$（参见命题 3.8）来确定商栈的实现。更一般地，我们还考虑 Nisnevich 同伦轨道空间的等变实现。下面的结果证明了引言中定理 1.3 的 Nisnevich 同伦轨道部分：

命题 7.6。 设 $G \curvearrowright X$ 是 $\mathbb{R}$ 上带作用的簇。那么，动机巴构造 $\mathrm{E}_G(X)$ 的等变实现 $\mathrm{Re}^{\mathrm{C}_2}(\mathrm{E}_G(X))$，就是 $G(\mathbb{C}) \curvearrowright X(\mathbb{C})$ 这一复数域等变群作用的（精细等变）巴构造 $\mathrm{E}^{G(\mathbb{C})}(X(\mathbb{C}))$ 。

[17]需要强调的是，对象 $G(\mathbb{C})$ 和 $X(\mathbb{C})$ 配备了解析拓扑。

证明。 证明与复数情形中的证明基本相同，参见命题 7.3：复数域等变实现是左 Kan 延拓，因此会将巴构造映为巴构造；或者，也可以说将（尼斯涅维奇—动机）同伦轨道映为（精细等变）同伦轨道。稍作展开，并依赖具体模型来说，单纯概形 $\mathrm{E}_G(X)$ 的等变实现由逐次应用等变实现后再取几何实现给出；单纯对象的几何实现是该单纯图表的同伦余极限，因此我们只需利用等变实现是左伴随这一事实。 □

注 7.7. 特别是，该结果表明，*Nisnevich* 分类空间 复数域$_2$-等变实现 $\mathrm{B}_{\mathrm{Nis}}G$ 是底层空间为复数域$_2$-空间 $\mathrm{B}G(\mathbb{C})$ 且不动点空间为$\mathrm{B}G(\mathbb{R})$。

推论 7.8. 现在假设 G 在 *Serre* 的意义下是特殊的，即 ´*étale* 局部平凡的G-扭子是 *Nisnevich* 局部平凡的。那么我们有一个精细的复数域$_2$-等变等价

$$\mathrm{Re}_{\mathrm{C}_2}(\mathrm{E}_G(X)) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Re}_{\mathrm{C}_2}([G\backslash X]).$$

证明. 这由 Krishna 等价 $\mathrm{E}_G(X) \xrightarrow{\simeq} [G\backslash X]$ 得出，参见命题 3.8，应用等变实现即可。□

命题 7.9。 设 $G \curvearrowright X$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的带作用的簇。那么（动机）巴构造 $\mathrm{E}_G(X)$ 的实实现是等变巴构造的不动点空间（在真正意义下）：

$$\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}_G(X)) \cong \left(\mathrm{E}_{G(\mathbb{C})}(X(\mathbb{C})\right)^{\mathrm{C}_2} \cong \mathrm{E}_{G(\mathbb{R})}\left(X(\mathbb{R})\right). \tag{9}$$

若 G 在 *Serre* 意义下是特殊的，则实实现可以识别为商栈 $[G\backslash X]$ 的实点群胚 $[G\backslash X](\mathbb{R})$ 的神经。特别地，实实现也可以通过单纯空间 $\mathrm{E}_G(X)(\mathbb{R}) \cong \mathcal{N}([G\backslash X](\mathbb{R}))$的几何实现来计算。

证明。 这可由命题 7.6 取（真正意义下的）不动点得到。或者，我们也可以仿照命题 7.6 的证明进行论证，利用实实现是一个左 Kan 延拓这一事实，参见第 5.2 节和第 5.5 节中的讨论。

对于 G 是特殊的情形，注意 Krishna 等价 $\mathrm{E}_G(X) \xrightarrow{\simeq} [G\backslash X]$（参见命题 3.8）意味着实点群胚 $[G\backslash X](\mathbb{R})$ 与实作用 $G(\mathbb{R}) \curvearrowright X(\mathbb{R})$ 的作用群胚等价（作为拓扑群胚）。对（拓扑群胚）取神经即可得到所述结论。□

特别地，对于特殊群 G，这已经给出了 G-作用下商栈实现的计算。在下一节中，我们将利用商栈的 GL_n-表示，从这个特殊情形推导出一般情形。

7.3. **商栈的等变与实实现**。 现在我们转向一般商栈的复数域$_2$-等变实现与实实现，并证明引言中的定理 1.3。我们将看到，描述这些实现的几种不同方式（通过容许装置、作为粗同伦轨道，或通过实点群胚的神经）都是等价的。

我们首先考虑使用容许装置实现商栈 $[G\backslash X]$，参见第 3.3 节中的讨论。与前面对复实现的讨论一样，容许装置的观点使我们能够将栈表示为一个（同伦）余极限 $[G\backslash X] \cong \mathrm{colim}_i(U_i \times_{/G} X)$，然后取其等变实现或实实现。

命题 7.10。 设 $G \curvearrowright X$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上带作用的光滑拟射影簇，且 $\rho = (U_i, V_i)_{i\geq 1}$ 是 G 的一个容许装置。那么， $X_G(\rho)$ 的 复数域$_2$-等变实现是命题 *7.2* 的复实现，并配备由复共轭诱导的对合。 $X_G(\rho)$ 的实实现可通过 *Borel* 构造 $\mathrm{E}G(\mathbb{C}) \times_{/G(\mathbb{C})} X(\mathbb{C})$ 的实点（即真正的 复数域$_2$-不动点）来计算：

$$\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}(X_G(\rho)) \simeq \mathrm{colim}_{i\geq 1}\left(U_i \times_{/G} X\right)(\mathbb{R}) \simeq \left(\mathrm{E}G(\mathbb{C}) \times_{/G(\mathbb{C})} X(\mathbb{C})\right)^{\mathrm{C}_2}.$$

特别地，实实现可识别为 $X_G(\rho)$ 的概形逼近（按照 *Totaro* 和 *Edidin–Graham* 的意义）的实点的同伦余极限。

证明。 我们再次使用第 3.3 节中的记号 $X_G(\rho) = \text{余极限}_u(U_i \times_{/G} X)$。与复实现一样，$C_2$-等变实现是一个左 Kan 延拓，参见 [WW20，第 3 节2], ，这意味着 $\mathrm{Re}_{C_2}(X_G(\rho))$ 是 $\mathrm{Re}_{C_2}(U_i \times_{/G} X)$ 的（同伦）余极限。此外，和之前一样，这里出现的余极限实际上都是同伦余极限。

关于 C_2-等变实现的断言很容易得到，证明类似于命题 7.2 的证明：对于光滑的 $\mathbb{R}$-概形 U_i 和 X，$\mathrm{Re}_{C_2}(U_i \times_{/G} X)$ 上的对合是 $U_i(\mathbb{C})\times_{/G(\mathbb{C})}X(\mathbb{C}) \cong (U_i\times_{/G}X)(\mathbb{C})$ 上自然的复共轭，它来自实结构。$U_i\times_{/G}X$之间的过渡映射也与复共轭相容。这在 $\mathrm{Re}_{\mathbb{C}}(X_G(\rho)) \cong \text{余极限}_{i\geq 1}\left(U_i(\mathbb{C}) \times_{/G(\mathbb{C})} X(\mathbb{C})\right)$上诱导出一个对合，而这就是 C_2-等变实现中的对合。

通过取 C_2-不动点，可以立即得到如下结论：实实现可识别为 Borel 构造上的 C_2-不动点。实实现还可描述为容许装置中概形逼近的实点之余极限，这是因为实实现是左 Kan 延拓；参见第 5.2 节和第 5.5 节的讨论。[18] □

注 7.11。 注意， $\left(U_i(\mathbb{C}) \times_{/G(\mathbb{C})} X(\mathbb{C})\right)^{\mathrm{C}_2}$ 在实点上不一定等价于商构造 $U_i(\mathbb{R}) \times_{/G(\mathbb{R})} X(\mathbb{R})$。最简单的例子是对 $\mu_2 = \{\pm 1\}$ 的标量乘法作用所取的商$(\mathbb{C}^n \setminus \{0\})/\mu_2$。该商有两个实点连通分支（分别来自 $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ 中坐标全为实数的点和坐标全为虚数的点）。实坐标点组成的商 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 仅是其中一个连通分支。归根结底，本讨论的全部目的，是借助同伦不动点更好地理解容许装置的实点。

注 7.12. 与复数情形一样，参见命题 *7.2* 证明的最后一段，C_2-等变实现$\mathrm{colim}_i U_i$ 是一个（粗略等变的）可缩C_2-空间。因此，$\mathrm{Re}_{\mathrm{C}_2}(\mathrm{colim}_i U_i)$ 是$\mathrm{E}G^{\mathrm{C}_2}$ 的一个模型（即作为万有主$(\mathrm{C}_2, G(\mathbb{C}))$-丛总空间的可缩$\mathrm{C}_2$-空间）。因此，等变实现$\mathrm{Re}_{\mathrm{C}_2}X_G(\rho)$ 是C_2-空间中作用 $G(\mathbb{C}) \curvearrowright X(\mathbb{C})$ 的等变 *Borel* 构造。

接下来，我们从更具单纯形观点的角度研究商栈 $[G\backslash X]$的等变与实实现。根据命题 7.6 和 7.9 中关于特殊群的情形，我们现在可以利用商栈 $[G\backslash X]$的 GL_n-表示，计算一般情形下的实实现。

命题 7.13. 设 $G \curvearrowright X$ 是 $\mathbb{R}$ 上一个带作用的簇。那么，商栈 $[G\backslash X]$ 的C_2-等变实现是C_2-作用$G(\mathbb{C}) \curvearrowright X(\mathbb{C})$的（粗略等变）同伦轨道空间。

对于实实现，我们有如下等价：

$$\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}([G\backslash X]) \cong \left(\mathrm{E}_{G(\mathbb{C})}(X(\mathbb{C}))\right)^{\mathrm{hC}_2} \cong \mathcal{N}\left([G\backslash X](\mathbb{R})\right).$$

这意味着，商栈 $[G\backslash X]$ 的实实现可以计算为 $G(\mathbb{C}) \curvearrowright X(\mathbb{C})$ 的巴构造的同伦不动点；或者等价地，计算为实点构成的（拓扑）群胚 $[G\backslash X](\mathbb{R})$ 的神经的实现。

证明。 对于等变实现，首先假设 G是特殊的。考虑万有 $(\mathrm{C}_2, G(\mathbb{C}))$-空间 $\mathrm{E}G^{\mathrm{C}_2}$，参见第 6 节关于等变主丛的讨论。该空间是粗可缩的；在 G 为特殊的情况下，它甚至是细可缩的（即，其 C_2-不动点是可缩的）。由此可知，对于特殊的 G，细同伦轨道与粗同伦轨道是等价的（在

[18]如果我们采用 C_2-空间作为等变拓扑的模型，那么利用取 C_2-不动点与沿闭包含的推出以及沿闭包含的序列余极限相交换这一事实，该命题仍然成立，参见 [Sch18，命题 B.1]。请注意，映射 $U_i \times_{/G} X \to U_{i+1} \times_{/G} X$ 在代数侧是闭浸入，因此在 C_2-等变实现中会诱导闭包含。

细 C_2-等变同伦论中）。因此，我们的断言由命题 7.6 得出，该命题表明 $\mathrm{Re}^{C_2}(E_G(X))$ 是 C_2-作用 $G(\mathbb{C}) \curvearrowright X(\mathbb{C})$ 的（细）同伦轨道空间。

现在，等变实现的一般情形可由特殊 G的情形推出。选取一个忠实表示 $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$，并考察诱导作用 $\mathrm{GL}_n \curvearrowright \left(\mathrm{GL}_n \times_{/G} X\right)$。根据归纳等价，参见命题 2.8 (2)，

$$\mathrm{Re}_{C_2}\left(\left[\mathrm{GL}_n \backslash \left(\mathrm{GL}_n \times_{/G} X\right)\right]\right) \simeq \mathrm{Re}_{C_2}\left([G\backslash X]\right). \tag{10}$$

根据上一段中的论证，左侧是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \curvearrowright \left(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times_{/G(\mathbb{C})} X(\mathbb{C})\right)$ 的粗同伦轨道空间。最后，根据第 6 节讨论的 C_2-等变同伦的归纳等价版本，该粗同伦轨道空间等价于 $G(\mathbb{C}) \curvearrowright X(\mathbb{C})$ 的粗同伦轨道空间。

实实现的特殊群情形已在命题 7.9 中处理；由此可推出一般情形。与上文一样，对于忠实表示 $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$，我们考察诱导作用 $\mathrm{GL}_n \curvearrowright \left(\mathrm{GL}_n \times_{/G} X\right)$。由此得到一个由实现构成的诱导交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}\left([G\backslash X](\mathbb{R})\right) & \longrightarrow & \mathrm{Re}_{\mathbb{R}}\left([G\backslash X]\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{N}\left(\left[\mathrm{GL}_n \backslash \left(\mathrm{GL}_n \times_{/G} X\right)\right](\mathbb{R})\right) & \longrightarrow & \mathrm{Re}_{\mathbb{R}}\left(\left[\mathrm{GL}_n \backslash \left(\mathrm{GL}_n \times_{/G} X\right)\right]\right). \end{array}$$

水平态射由实点的自然包含诱导。左侧和右侧的垂直态射是由命题 2.8 (2) 的归纳等价及其等变版本诱导的等价。下方的水平态射来自命题 7.9，是一个等价。

最后，还需要联系同伦不动点和粗同伦轨道。根据第 4 节和第 6 节的结果，特别是推论 6.9 和推论 4.6，实点群胚的神经 $\mathcal{N}([G\backslash X](\mathbb{R}))$ 的几何实现也自然地识别为复点 $\mathcal{N}([G\backslash X](\mathbb{C}))$ 上复共轭的同伦不动点空间。这证明了其余结论。□

我们可以将上述结果结合起来，得到商栈的实实现的如下描述：

推论 7.14. 设 $G \curvearrowright X$ 是 $\mathbb{R}$ 上带作用的光滑拟射影簇。

(1) 命题 *3.8* 中的自然态射 $\mathrm{E}_G(X) \to [G\backslash X]$ 在经过实实现：

$$\mathcal{N}\left([G\backslash X](\mathbb{R})\right) \cong \mathrm{Re}_{\mathbb{R}}\mathrm{E}_G(X)^{\mathrm{hC}_2} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Re}_{\mathbb{R}}[G\backslash X].$$

(2) 命题 *3.17* 中的自然态射 $X_G(\rho) \to [G\backslash X]$ 在经过实实现后诱导一个等价：

$$\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}X_G(\rho) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Re}_{\mathbb{R}}[G\backslash X].$$

(3) 若 G 是特殊的，则 *(1)* 和 *(2)* 中的等价是 ***Krishna*** 等价 $\mathrm{E}_G(X) \cong X_G(\rho)$ 的实实现，参见 [Kri12, Proposition 3.2] 或第 *3.2* 和 *3.3* 节。

特别地，商栈的实实现既可以通过计算作用 $G \curvearrowright X$的代数 ***Borel*** 构造的实现得到，也可以作为拓扑群胚 $[G\backslash X](\mathbb{R})$ 的神经得到。[19]

注 7.15。 我们再次指出，***Krishna*** 等价 $\mathrm{E}_G(X) \cong X_G(\rho)$ 仅适用于 G 按照 ***Serre*** 的定义为特殊的群，即所有 ***´étale*** 局部平凡的扭子都是 ***Nisnevich*** 局部平凡的群。对于非特殊群，自然映射

$$\mathrm{E}_G(X) \to \mathrm{E}_{\mathrm{GL}_n}(\mathrm{GL}_n \times_{/G} X) \cong [\mathrm{GL}_n \backslash (\mathrm{GL}_n \times_{/G} X)] \cong [G\backslash X]$$

[19]与前文一样，我们强调这是一个拓扑群胚，它继承自 $G(\mathbb{C})$ 和 $X(\mathbb{C})$ 上的解析拓扑，并通过不动点的包含映射得到。

一般而言并非等价。例如，若 $X = \mathrm{pt}$ ，则有 $\mathrm{E}_G(\mathrm{pt}) \cong \mathrm{B}_{\mathrm{Nis}}G$ ，而$[G\backslash\mathrm{pt}] \cong \mathrm{B}_{\text{ét}}G$。类似地，作用群胚 $G(\mathbb{R}) \times X(\mathbb{R}) \rightrightarrows X(\mathbb{R})$ 通常不等价于商栈的实点所成的群胚 $[G\backslash X](\mathbb{R})$ 。

注 7.16. 我们借此机会指出，关于将实实现识别为同伦不动点的许多论述和思路，都受到 *Acosta* 的一篇论文启发 [Aco20], ，尽管该论文并未涉及同伦不动点。尽管如此，从某种意义上说，构造 [Aco20] 的背景中，似乎存在某个商栈实点的同伦不动点空间。特别是，将群 G 改为强实形式，会使几何不变量理论商与商栈实点不动点群胚的不同连通分支相关联 $[G\backslash X]$。本着这一思路，我们想知道，是否存在一种 *Kirwan* 型满射，从 $[G\backslash X](\mathbb{R})$ 的上同调（或从 $[G\backslash X]$的 *Witt* 层上同调）映到 *Richardson–Slodowy* 实 *GIT* 商的上同调。这个问题的部分内容可能与论文 [AdGF25a,AdGF25b] 有关，这些论文研究了 *Deligne–Mumford* 栈的实点。

8. Fixed-point groupoids, Galois cohomology and strong real forms

本节将概述一些结果，这些结果用伽罗瓦上同调和强实形式来描述分类空间的实点，并将用于第 11 节中的示例计算。本节所述内容均可在文献中找到。

我们将在第 8.1 节回顾不动点群胚与伽罗瓦上同调之间的关系，在第 8.2 节讨论强实形式的概念及其与实点的相关性，最后在第 8.3 节陈述描述分类空间实点的主要公式。

为明确讨论的背景，设 G 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的线性代数群；我们用 σ 表示群 $G(\mathbb{C})$ 上相应的复共轭。下文出现的每个伽罗瓦上同调集 $\mathrm{H}^1(\mathrm{C}_2, G(\mathbb{C}))$，均取相对于 G 上给定实结构所对应的复共轭。

8.1. 不动点群胚与伽罗瓦上同调。对于实群 G，我们想要考察商栈 $[G\backslash\mathrm{pt}]$。回顾例 3.10，复点群胚 $[G\backslash\mathrm{pt}](\mathbb{C})$只有一个对象，即点 $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ 上的平凡 $G_{\mathbb{C}}$扭子，而态射由 $G(\mathbb{C})$ 给出。复共轭 σ 在 $[G\backslash\mathrm{pt}](\mathbb{C})$ 上诱导一个 C_2-作用。

我们回顾一下，例如 Serre 的著作 [Ser02], 中给出的当前情形下伽罗瓦上同调的定义：对于群 $G(\mathbb{C})$，其 C_2-作用由复共轭 σ 给出（对应于我们最初采用的实结构）。1-上循环空间的定义可化简为

$$\mathrm{Z}^1(\mathrm{C}_2, G(\mathbb{C})) = \{g \in G(\mathbb{C}) \mid g\sigma(g) = 1\}\,, \tag{11}$$

而两个这样的 1-上循环 g， g' 若存在 $h \in G(\mathbb{C})$ 使得 $g' = \sigma(h)gh^{-1}$，则它们上同调等价。

由此，现在可以直接将不动点群胚的连通分支与伽罗瓦上同调集中的元素对应起来。

命题 8.1. 设 G是定义在 $\mathbb{R}$ 上的线性代数群，其对应的复共轭为 σ ，作用于 $G(\mathbb{C})$。那么，$[G\backslash\mathrm{pt}](\mathbb{C})^{\mathrm{hC}_2}$ 的连通分支与伽罗瓦上同调集 $\mathrm{H}^1(\mathrm{C}_2, G(\mathbb{C}))$之间存在自然对应。

证明。 回顾例 4.4 中对不动点群胚的描述。在分类栈 $[G\backslash\mathrm{pt}](\mathbb{C})$ 的复点情形下， $[G\backslash\mathrm{pt}](\mathbb{C})^{\mathrm{hC}_2}$ 中的一个同伦不动点是一个元素 $g \in G(\mathbb{C})$，满足 $g\sigma(g) = 1$，也就是说，按定义，同伦不动点就是 $\mathrm{Z}^1(\mathrm{C}_2, G(\mathbb{C}))$ 中的伽罗瓦 1-上循环。这些同伦不动点 $g, g' \in G(\mathbb{C})$ 之间的态射是满足 $\sigma(h)gh^{-1} = g'$ 的元素 $h \in G(\mathbb{C})$；根据定义，这类态射存在，当且仅当对应的伽罗瓦 1-上循环上同调等价。□

利用推论 4.6 中将不动点群胚与实点 $[G\backslash\mathrm{pt}](\mathbb{R})$ 识别起来的结果，我们得到了例 3.11 中已提及的实点连通分支的伽罗瓦上同调描述。

不动点群胚 $[G\backslash \mathrm{pt}](\mathbb{C})^{\mathrm{hC}_2}$ 中的另一项信息是各个连通分支的基本群，也就是对象的自同构群。根据例 4.4 中的描述，我们发现，对于元素 $g \in \mathrm{Z}^1(\mathrm{C}_2, G(\mathbb{C}))$，它在不动点群胚中的自同构群是扭曲复共轭 $\sigma_g = \mathrm{int}(g) \circ \sigma$ 的不动子群：

$$\mathrm{Aut}(g) = G(\mathbb{C})^{\sigma_g} = \{h \in G \mid \sigma(h)g = gh\}. \tag{12}$$

通过其在 $G(\mathbb{C})$中的嵌入，自同构群具有自然的拓扑，从而使不动点群胚（或等价地，实点群胚）成为拓扑群胚。

在下一小节中，我们将回顾如何将自同构群解释为 $G(\mathbb{R})$的强实形式。

注 8.2. 从上述讨论显然可知，伽罗瓦上同调也将在描述更一般的商栈 $[G\backslash X]$ 的不动点群胚时发挥作用。展开不动点群胚的定义，可得$\mathrm{H}^1(\mathrm{C}_2,\mathrm{Aut}(g))$ 与 $g \in [G\backslash X](\mathbb{C})$上的同伦不动点数据的同构类之间的对应。这与 [Aco20, 第 3.3 节。2] 中关于 *GIT* 商的实轨道的伽罗瓦上同调刻画有关。

8.2. **关于实形式与强实形式的回顾**。 我们回顾强实形式的概念及其与伽罗瓦上同调的关系，参见 [Ada13，例 4.16，第 6], [AT18]章。为强调伽罗瓦上同调群中出现的各种对合，我们采用同上中的记号 $\mathrm{H}^1(\sigma, G)$，其含义是考虑对合σ 作用于 G的伽罗瓦上同调集。我们首先回顾 [Ser02]中关于形式的术语。

定义 8.3. 给定域 F上的代数群 G， G 的形式 是域 F 上的代数群 G'，它在代数闭包F上与 G 同构。它们由伽罗瓦上同调集$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(F,\mathrm{Aut}(G))$分类，并且各种形式可由 G 通过取值于$\mathrm{Aut}(G)$的 *1*-余循环进行扭曲而得到。对应于*1*-余循环 $\gamma \in \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(F,\mathrm{Aut}(G))$的 G的一个形式，若该余循环落在自然映射的像中，则称为内

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(F, G_{\mathrm{ad}}) \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(F, \mathrm{Aut}(G)), \tag{13}$$

where $G_{\mathrm{ad}} = \mathrm{Inn}(G)$ 是伴随群，或者说，是 G 的内自同构群 .

据此，实线性代数群 G 的一个 实形式 是另一个实线性代数群 G'，使得 $G_{\mathbb{C}} \cong G'_{\mathbb{C}}$ （作为复线性代数群）。

实群 G 在其复化 $G(\mathbb{C})$ 上诱导一个反全纯对合 σ 。于是也可以把实形式视为反全纯对合的 $\mathrm{Aut}(G(\mathbb{C}))$-共轭类。这正是 [AT18]中所采取的观点：实形式 是一个反全纯对合$\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$, 而两个实形式 σ, σ' 是等价的，如果 $\sigma' = \mathrm{int}(g) \circ \sigma \circ \mathrm{int}(g^{-1})$；在这种情形下$G^{\sigma'} = gG^{\sigma}g^{-1}$。存在内自同构群与外自同构群的短正合列：

$$1 \longrightarrow \mathrm{Inn}(G) \longrightarrow \mathrm{Aut}(G) \xrightarrow{p} \mathrm{Out}(G) \longrightarrow 1 \tag{14}$$

其中 $\mathrm{Inn}(G) \cong G_{\mathrm{ad}} = G/\mathrm{Z}(G)$。称元素 $\sigma' \in \mathrm{Aut}(G)$ 与 $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ 属于同一内类（或者说，是 σ 的一个 内形式 ），如果 $p(\sigma) = p(\sigma')$，即如果对某个 $g \in G$ 有 $\sigma' = \mathrm{int}(g) \circ \sigma$。

σ 的内实形式的等价类集合由 $\mathrm{H}^1(\sigma, G_{\mathrm{ad}})$ 参数化。存在一个正合列

$$\mathrm{H}^1(\sigma, G) \xrightarrow{\rho} \mathrm{H}^1(\sigma, G_{\mathrm{ad}}) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^2(\sigma, \mathrm{Z}(G)), \tag{15}$$

其中 ρ 通常不是满射。实形式的中心不变量 τ （相对于 σ）是 $\delta(\tau) \in \mathrm{H}^2(\sigma, Z)$。为了描述 $\mathrm{H}^1(\sigma, G)$（这是我们研究不动点群胚的连通分支时所需要的），以及态射 ρ 及其像，Adams 和 Ta¨ıbi [AT18] 采用了强实形式这一概念。

注 8.4. 如果 G 有非平凡中心，那么尽管 σ 和 $\sigma' = \mathrm{int}(g) \circ \sigma$ 是同一内类中的对合，它们对应的伽罗瓦上同调可能不同，即不同

在 $\mathrm{H}^1(\sigma, G_{\mathrm{ad}})$ 中的元素在（由 ρ 在 (15)中给出的）原像的基数可能不同。例如，$(\sigma,\mathrm{SU}(2))$ 和 $(\sigma', \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 在同一内类中的两个（不等价的）实形式；根据希尔伯特第*90*定理，$\mathrm{H}^1(\sigma', G)$ 只有一个元素，而 $\mathrm{H}^1(\sigma, G)$ 有两个元素，参见 [AT18,Example4.9] 以及下文的例 *10.5*。

强实形式使我们能够在 σ 于其内类中变化时，同时讨论正合列 (15)：强实形式扩大了集合 $\mathrm{H}^1(\sigma, G)$，使得 ρ 在 (15) 中成为满射。下文的讨论中，与不动点群胚的关系应当显而易见。

引理8.5。设 $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ 是一个对合。那么，$\mathrm{int}(g)\circ\sigma$ 是一个对合，当且仅当 $g\sigma(g) \in Z(G)^\sigma$。与 σ 属于同一内类的所有对合均可由此方式得到，即映射

$$\begin{aligned} \{g \in G \mid g\sigma(g) \in \mathrm{Z}(G)\} &\xrightarrow{\quad\rho\quad} \mathcal{I}_\sigma(G) \\ g &\longmapsto \mathrm{int}(g)\circ\sigma = (h \mapsto g\sigma(h)g^{-1}) \end{aligned}$$

映射 $g \mapsto \mathrm{int}(g)\circ\sigma$ 是满射。

证明。首先，$\mathrm{int}(g)\circ\sigma$ 是一个对合，当且仅当 $g\sigma(g) \in Z(G)$：

$$\mathrm{int}(g)\circ\sigma\circ\mathrm{int}(g)\circ\sigma(x) = g\sigma(g)x(g\sigma(g))^{-1}.$$

若 $g\sigma(g) \in Z(G)$，则 $(g\sigma(g))g^{-1} = \sigma(g)$，因此 $g\sigma(g) \in Z(G)^\sigma$。短正合列 (14) 证明了关于内类的断言。□

对于固定的实形式 σ，满足 $g\sigma(g) \in \mathrm{Z}(G)^\sigma$ 的此类元素 $g \in G$ 称为 的强对合，属于 σ 的内类，且具有中心不变量 $z = \mathrm{inv}(g) = g\sigma(g) \in \mathrm{Z}(G)^\sigma$。若两个强对合在 $G \rtimes_\sigma \mathrm{C}_2$，下共轭，即 $g \sim hg\sigma(h^{-1})$，则称它们等价，且它们具有相同的中心不变量。

强实形式是强对合的一个共轭类；其集合记为 $\mathcal{S}_\sigma(G)$，其中中心不变量为 z 的强实形式记为 $\mathcal{S}_{\sigma,z}(G)$。强实形式细化了实形式的概念：由引理8.5，映射 $\mathcal{S}_\sigma(G) \to \mathcal{I}_\sigma(G) \cong \mathrm{H}^1(\sigma, G_{\mathrm{ad}})$ 将 σ 的内类中的强实形式满射到 σ 的内类中的实形式。集合 $\mathcal{S}_{\sigma,[z]}(G)$ 映到这样一组内形式：它们在映射 $\delta\colon \mathrm{H}^1(\sigma, G_{\mathrm{ad}}) \to \mathrm{H}^2(\sigma, \mathrm{Z}(G))$ 下的像，在泰特对偶同构 $\mathrm{H}^2(\sigma, \mathrm{Z}(G)) \cong \mathrm{Z}(G)^\sigma/(1+\sigma)\mathrm{Z}(G)$ 下对应于 z。由此可知，伽罗瓦上同调集 $\mathrm{H}^1(\sigma, G)$ 与中心不变量为 1 的强实形式集合 $\mathcal{S}_{\sigma,1}(G)$ 之间存在双射，而 ρ 的像由中心不变量平凡的内形式组成（自然地，这是由 (15) 的正合性得出的）。

总而言之，(12) 中的自同构群 $G(\mathbb{C})^{\sigma_g}$ 有多种解释：我们可以将它们视为 $G(\mathbb{C})$ 的强实形式，其中心不变量为 1（相对于 $G(\mathbb{C})$ 上给定的复共轭）——这是在 [AT18] 的语境下采用的解释；或者，它们也可以视为 $\mathrm{Spec}(\mathbb{R})$ 上 G-扭子的自同构群的实点——这是伽罗瓦上同调语境下的解释，在该语境中，$\mathrm{H}^1(\sigma, G) \cong \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(\mathbb{R}), G)$ 分类 G-扭子。

我们将在本节结尾讨论强内形式这一相关概念；Tits 在 [Tit90, p. 653] 中使用了这一术语。这与我们在第 10 节讨论分类栈的不变性相关。

定义 8.6。设 G 是域 F 上的一个代数群。与余循环 $\gamma \in \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(F, \mathrm{Aut}(G))$ 相对应的 G 的一个形式，若该余循环属于自然映射的像，则称为强内形式

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(F, G) \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(F, \mathrm{Aut}(G)). \tag{16}$$

注 8.7. 为了将其与具有给定中心不变量的强实形式这一概念进行比较[AT18], , 请注意，映射 $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(F, G) \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(F, \mathrm{Aut}(G))$ （它是 ρ 在(15) 中的复合与(14)中内自同构的包含映射的复合）不一定是单射。特别地，强实形式作为代数群可能彼此同构，但作为强实形式却彼此不同。无论如何，对于实代数群 G，与 G 具有相同不变量的 G 的强实形式（按

照 [AT18]的意义）尤其会是强内形式（按 [Tit90], 或上文定义 *8.6* 的意义）。[20] 如上所述， [Tit90] 的强内形式这一概念是代数群的某个形式所具有的性质，而 [AT18] 的强实形式这一概念则包含额外数据。

8.3. **同伦不动点的描述**。本节终于给出了实线性群 G 的分类栈 $[G\backslash\mathrm{pt}]$ 的实点群胚的显式公式。该公式使我们能够轻松计算其 ´etale 分类空间 $\mathrm{B}_{\acute{\mathrm{e}}\mathrm{t}}G$ 的实实现；一些计算示例见第 11 节。

Pr命题 8.8。设 G 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的线性代数群，其对应的复共轭 *automorphism* σ *on* $G(\mathbb{C})$。则存在一个等价

$$\mathrm{B}G(\mathbb{C})^{\mathrm{hC}_2} \simeq \mathcal{N}([G\backslash\mathrm{pt}](\mathbb{R})) \simeq \coprod_{[g]\in \mathrm{H}^1(\mathrm{C}_2,G)} \mathrm{B}(G(\mathbb{C})^{\sigma_g}). \tag{17}$$

在右侧，$\sigma_g = \mathrm{int}(g)\circ\sigma$ 表示作用在$G(\mathbb{C})$ 上对应的扭曲复共轭，其中伽罗瓦上闭链为 $[g] \in \mathrm{H}^1(\mathrm{C}_2, G(\mathbb{C}))$，如上文第 *8.1* 节所述。

证明。 根据第 4 节的结果，特别是推论 4.6，我们可以将 $[G\backslash\mathrm{pt}](\mathbb{R})$ 识别为复共轭 σ 的不动点群胚 $[G\backslash\mathrm{pt}](\mathbb{C})^{\mathrm{hC}_2}$ 。第 6.3 节中的讨论进而表明，同伦不动点 $\mathrm{B}G(\mathbb{C})^{\mathrm{hC}_2}$ 可实现为 $[G\backslash\mathrm{pt}](\mathbb{R})$。另一个识别是本命题的要点，它由命题 8.1 中对不动点群胚 $[G\backslash\mathrm{pt}](\mathbb{R})$ 的显式描述得出：不动点群胚的连通分支与伽罗瓦上同调集 $\mathrm{H}^1(\mathrm{C}_2, G(\mathbb{C}))$ 构成双射，而各连通分支的自同构群由相应的强实形式给出，即 $G(\mathbb{C})$ 上扭曲复共轭的不动子群。(17) 中的描述可直接由此得出。 □

注记 8.9. 如前所述，这个公式当然早已以各种形式出现过。例如，它出现在 [Vir21]，中，不过其中的讨论侧重于离散的 G。它也出现在 [GMM17]，中，不过他们关注的是 G为离散群或紧李群的情形。[21] 对于有限群，该公式也出现在 [AdGF25a,AdGF25b] 中。此外，它可能还出现在许多其他地方。

注记 8.10. 在命题 *8.8* 中，集合 $\mathrm{H}^1(\mathrm{C}_2, G(\mathbb{C}))$ 表示 G在 $\mathbb{R}$上的扭子的同构类集合。对于表示 G-扭子 P （其定义在 $\mathbb{R}$上）的余循环 $[g]$ ，实点群胚中的自同构群 $G(\mathbb{C})^{\sigma_g}$ 实际上就是 G的 G等变自同构群$\mathrm{Aut}_G(P)$ ，这些都是 G的强内形式。特别地，我们可以将公式(17) 理解为：分类空间的实实现等价于实 G-扭子的自同构群的分类空间的不交并。

另一方面，我们将在定理 *10.2* 中看到，对于 G 的任意强内形式 H ，我们都可以构造一个（G， H）-双主齐性空间 P，从而得到 $H \cong \mathrm{Aut}_G（P）$。我们在第 *10* 节对强内形式的讨论，也将解释公式（17）在强内形式下表面上具有不变性的原因。于是，我们可以将公式（17）解读为：分类空间的实实现是不交并，由 G 的所有强实形式的分类空间组成；这些强实形式是“带重数”出现的，也就是说，不同的 G-扭子可能具有同构的自同构群（作为群同构，但作为扭子并不同构）。我们将在第 *11* 节讨论一些具体情形，例如正交群的情形。

[20] Bezrukavnikov 和 Vilonen [BV21] 将强实形式在态射 (16) 下的像称为 *underlying real form of a strong real form*。[21] 还应注意， [GMM17] 中出现的第一上同调集实际上是一个等变拓扑版本，与我们在第 6 节中使用的粗上同调集 $\mathrm{H}^1_{\mathrm{sc}}(\mathrm{pt}\ G)$ 更为接近。对于实约化群 G，它可以自然地与伽罗瓦上同调等同，原因基本上是 1-余循环的定义并未用到拓扑。

9. Equivariant real cycle class map

本节中，我们将利用群作用 $G \curvearrowright X$ 的 Borel 构造的逼近，定义等变实循环类映射。我们还将确立实循环类映射与拉回、推前及交乘积的相容性。

9.1. 同伦模的等变上同调。 我们先简要回顾由 di Lorenzo 和 Mantovani 在 [dLM23 第 2 节2]中定义并讨论的等变上同调。他们的理论框架涵盖了许多与本文相关的理论，例如等变 Witt-层上同调、等变 Chow–Witt 群和等变模 2 Milnor K 上同调。

回顾第 3.3 节，我们可以使用容许装置 $\rho = (V_i,\ U_i)_{i\geq 1}$，通过商空间 $X^i_G(\rho) = X \times_{/G} U_i$ 来构造商栈 $[G\backslash X]$ 的近似。利用这些空间，我们便可以按照[dLM23 定义 2.2.6、2.2.7]定义等变 Borel–Moore 同调和等变上同调。

定义 9.1。 设 $G \curvearrowright X$ 是域 F上的一个带作用的簇，满足约定 *2.5* 中的假设。设 M_* 是一个同伦模，且 $\mathscr{L} \in \mathrm{Ch}^1_G(X)$ 是一个 G-等变线丛。设 ρ是 G的一个容许装置，并设 (V, U) 是 ρ中的一个等变概形逼近。

那么，取系数的等变 Borel–Moore 同调定义为

$$A^G_i(X, M_*, \mathscr{L}) := A_{i+l-g}(X \times_{/G} U, M_*, \omega_{X\times_{/G}U} \otimes \mathscr{L})$$

其中 $l = \dim(V)$， $g = \dim\, G$，且 $\mathrm{codim}(V\backslash U) \leq \dim\, X - i + 1$。典范丛 $\omega_{X\times_{/G}U}$是 $X \times_{/G} U/[G\backslash X]$ 的相对余切复形的行列式（的对偶），由 $V^\vee$ 在 $X \times U$上的作用诱导，参见 [dLM23，注 2.2。8]。

Sim同样，如果 $G \curvearrowright X$ 是光滑的，那么 以 M_* 为系数的等变上同调定义为

$$A^i_G(X, M_*, \mathscr{L}) := A^i(X \times_{/G} U, M_*, \mathscr{L})$$

$\mathrm{codim}(V \setminus U) \leq \dim\, X - i + 1$。

注 9.2。 • 此外还有带支撑的版本，不过目前我们用不到。同样，扭曲也可以更一般地用于虚向量丛 $e \in K([G\backslash X])$，但目前线丛的情形已足以满足我们的需要。关于栈上的向量丛以及等变向量丛，参见第 *3.4* 节。

• 对于同伦模 $M_* = (\mathbf{I}^q)_{q\in\mathbb{Z}}$，我们将使用以下记号 $\mathrm{H}^G_p(X,\mathbf{I}^q(\mathscr{L}))$和 $\mathrm{H}^p_G(X,\mathbf{I}^q(\mathscr{L}))$，而不采用 [dLM23] 中的记号。

• 关于如何使用线丛扭曲，以及 G-等变线丛如何在光滑概形逼近上诱导出线丛的更详细信息，参见 [dLM23，第 2.2.3 节和注 2.2。8]。

下面我们将列出一些与我们最为相关的等变（上）同调性质。以下信息基本上包含在 [dLM23, 定理 2.2.12]中。其中一些性质专门针对与我们最相关的 **I**-上同调情形；部分结构也可以按照更一般的方式表述，适用于（商）栈之间的态射，如[dLM23, 定理 2.3.3]所述。

拉回： 等变 M_*-同调沿着 G-等变映射 f（ $X \to Y$其为局部完全交，即光滑态射与正则嵌入的复合）具有拉回映射。拉回映射的形式为

$$f^*\colon A^G_i(X, M_*, \mathscr{L}) \to A^G_{i+d}(Y, M_*, f^*\mathscr{L} \otimes \omega_f)$$

其中 d 是相对维数。注意，这意味着对于相对维数为 d 的光滑映射， d 为正；而对于余维为 $-d$的正则浸入， d 为负。当X 与 Y 均为光滑时，上同调也有一个版本，不涉及任何平移或由相对典范丛引起的扭曲：

$$f^*\colon A^i_G(X, M_*, \mathscr{L}) \to A^i_G(Y, M_*, f^*\mathscr{L})$$

这些等变（上）同调中的拉回态射是函子性的

- 在 f 中，即我们有一个从 G-簇到阿贝尔群的函子，
- 在系数方面 M_*，即拉回与（上）同调群之间的系数变换映射相容，

- 在线丛 $\mathscr{L}$ 方面，即拉回与由（分次）线丛的同构 $\mathscr{L} \cong \mathscr{L}'$ 所诱导的映射相容。

更一般地，沿商栈 $[H\backslash Y] \to [G\backslash X]$ 的可表示局部完全交态射存在拉回态射。它们具有如下形式

$$f^*\colon A^i_G(X, M_*, \mathscr{L}) \to A^i_H(Y, M_*, f^*\mathscr{L})$$

作为具体例子，这些态射给出了到子群的限制映射，以及从 G等变上同调到非等变上同调的遗忘态射。[22]

交积：对于带作用的光滑簇 $G \curvearrowright X$，等变$\mathbf{I}$-上同调具有交乘积

$$\mathrm{H}^{p_1}_G(X, \mathbf{I}^{q_1}(\mathscr{L}_1)) \otimes \mathrm{H}^{p_2}_G(X, \mathbf{I}^{q_2}(\mathscr{L}_2)) \to \mathrm{H}^{p_1+p_2}_G(X, \mathbf{I}^{q_1+q_2}(\mathscr{L}_1 \boxtimes \mathscr{L}_2)),$$

其中 $\mathscr{L}_1$，$\mathscr{L}_2 \in \mathsf{Ch}^1_G(X)$是 X上的 G-等变线丛。如 [dLM23], 中所述，这些交积可视为在基域 F上的分次线丛范畴上，为幺半函子$\mathbf{K}^{\mathrm{MW}}_*(F, -)$提供代数结构。这些交积与光滑概形之间沿等变映射的拉回相容。

推前：等变 M_*-同调沿真 G-等变映射f具有推前： $X \to Y$。等变 M_*-同调中的推前映射具有如下形式

$$f_*\colon A^G_i(X, M_*, f^*\mathscr{L}) \to A^G_i(Y, M_*, \mathscr{L}).$$

若 X 与 Y 光滑，则上同调中亦有相应版本，其中涉及由相对维数 d 给出的额外平移，以及由相对典范线丛 ω_f 给出的扭曲（或者更恰当地说，是叠态射的] 余切复形的 [行列式）

$$f_*\colon A^i_G(X, M_*, f^*\mathscr{L} \otimes \omega_f) \to A^{i+d}_G(Y, M_*, \mathscr{L}).$$

与拉回一样，推前关于 f、 M_*和 $\mathscr{L}$具有函子性，其含义与前文所述相同。

更一般地，沿商栈 $[H\backslash Y] \to [G\backslash X]$之间的可表示真态射存在推前映射，其形式为

$$f_*\colon A^i_H(Y, M_*, f^*\mathscr{L} \otimes \omega_f) \to A^{i+d}_G(X, M_*, \mathscr{L}).$$

局部化序列：设 X 是一个光滑概形，且 $\mathscr{L} \in \mathsf{Ch}^1(X)$ 是一个 G-等变线丛。对于光滑闭子概形的一个等变闭嵌入 $\iota\colon Z \hookrightarrow X$，其余维为 c，并设开补集为 $j\colon U = X \setminus Z \hookrightarrow X$，法丛为 $\mathscr{N} = \omega_\iota \in \mathsf{Ch}^1_G(Z)$，存在一个长正合列

$$\cdots \to \mathrm{H}^p_G(X, \mathbf{I}^q(\mathscr{L})) \xrightarrow{j^*} \mathrm{H}^p_G(U, \mathbf{I}^q(\mathscr{L})) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^{p-c+1}_G(Z, \mathbf{I}^{q-c}(\mathscr{L} \otimes \mathscr{N})) \xrightarrow{\iota_*} \cdots$$

许多其他性质，例如同伦不变性、基变换、投影公式等，可以在 [dLM23 的定理 2.2.12] 中找到。

我们列出另外两个广为人知且在计算中常常非常有用的等价；关于这些等价的动机版本，参见 [SVW18,第 I.7] 章。

[22]实际上，人们可能会期待这些结构对 *in cohomology* 任意带作用簇之间的态射都存在，基本上可以使用与 [BL94 第 6] 节中相同的相容解消；该方法也用于 [SVW18] 中，以定义等变动机的一般拉回。在同调中，由于所涉及的平移和扭曲，这仅对可表态射成立。

命题 9.3 (商等价)。 设 $G \curvearrowright X$ 是一个带作用的簇， $N \subset G$ 是一个闭正规子群，且限制作用 $N \curvearrowright X$ 是自由的。那么，命题 *2.8 (1)* 中的同构$[G\backslash X] \cong [(G/N) \setminus (N\backslash X)]$ 诱导出一个等变同调群的同构

$$\mathrm{H}_*^{G/N}(N\backslash X, M_*, \mathscr{L}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}_*^{G}(X, M_*, p^*\mathscr{L})$$

对于任意 G/N-等变线丛 $\mathscr{L} \in \mathrm{Ch}^1_{G/N}(N\backslash X)$。如果 X 光滑，则所涉及的栈也是光滑的，因此在等变上同调中还存在一个乘法同构：[23]

$$\mathrm{H}_{G/N}^*(N\backslash X, M_*, \mathscr{L}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}_{G}^*(X, M_*, p^*\mathscr{L})$$

这些同构具有函子性，并且与拉回相容。

命题 9.4 (归纳等价)。 设 $i\colon\ H \hookrightarrow G$ 是一个光滑闭子群到光滑仿射代数群 G 中的包含，并设 $H \curvearrowright X$ 是一个带作用的簇，使得 $G \times X$ 上的对角 H-作用的商 $G \times_{/H} X$ 存在且为光滑拟射影簇。那么，命题 *2.8 (2)* 中商栈 $[H\backslash X] \cong [G\backslash(G \times_{/H} X)]$ 的同构诱导出等变同调群的一个同构

$$\mathrm{H}_*^{G}(G \times_{/H} X, M_*, \mathscr{L}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}_*^{H}(X, M_*, p^*\mathscr{L})$$

对于任意 G-等变线丛 $\mathscr{L} \in \mathrm{Ch}^1_{G}(G \times_{/H} X)$。若 X 光滑，则所涉及的栈也都是光滑的，因此等变上同调中还存在一个乘法同构：

$$\mathrm{H}_{G}^*(G \times_{/H} X, M_*, \mathscr{L}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}_{H}^*(X, M_*, p^*\mathscr{L})$$

这些同构具有函子性，且与拉回相容。

9.2. **实循环类映射**。 将实概形 $X/\mathbb{R}$ 的 Witt 层上同调或$\mathbf{I}$-上同调与其实点空间 $X(\mathbb{R})$的奇异上同调联系起来的自然方法，是 Jacobson 的实循环类映射 [Jac17]。关键观察是，乘以 $\langle\!\langle -1 \rangle\!\rangle$ 所得的余极限可识别为 $a_{\text{rét}}\mathbb{Z}$，即实-´etale 常值层 $\mathbb{Z}$。我们可以将实循环类映射 $\mathrm{H}^p{}_{\mathrm{Zar}}(X, \mathbf{I}^q) \to \mathrm{H}^p{}_{\mathrm{sing}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z})$视为由符号映射 $\mathrm{sgn}\colon \mathbf{I}^q \to a_{\text{rét}}\mathbb{Z}$诱导而来。实循环类映射与拉回、推前（沿闭浸入）以及交积相容，参见 [HWXZ21]。

我们现在希望描述实循环类映射的一个等变版本。构造的基本思路是在商栈的光滑概形逼近上使用通常的实循环类映射，并验证由此得到的是一个良定义的态射。

定理 9.5。 设 $G \curvearrowright X$ 是一个光滑概形，其上有一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的线性代数群作用，并设 $\mathscr{L} \in \mathrm{CH}^1_G(X)$ 是 X 上的一个 G-等变线丛。那么，符号映射 $\mathrm{sgn}\colon \mathbf{I}^q \to a_{\text{rét}}\mathbb{Z}$ 诱导出一个良定义的等变实循环类映射

$$\mathrm{cyc}_{\mathbb{R}}\colon \mathrm{H}^p_G(X, \mathbf{I}^q(\mathscr{L})) = \mathrm{H}^p([G\backslash X], \mathbf{I}^q(\mathscr{L})) \to \mathrm{H}^p([G\backslash X](\mathbb{R}), \mathbb{Z}(\mathscr{L}))$$

它满足以下性质：

(1) 等变实循环类映射仅取决于栈 $[G\backslash X]$。*(2)* 平凡群 $G = \{1\}$ 的情形恢复了 *Jacobson* 的非等变实循环类映射 [Jac17]，，另见 [HWXZ21]。*(3)* 当 q足够大时，等变实循环类映射是一个同构。*(4)* 将 *2* 取逆后，等变实循环类映射是一个同构。

[23]乘法性有以下形式：在无扭曲上同调上，这将是一个环同构。带线丛扭曲的上同调是无扭曲上同调环上的一个模。我们还可以考虑包含所有可能扭曲的全上同调环，它按模 2 皮卡群分次。关于模 2 皮卡群中类的代表元选取，通常的注意事项详见 Balmer–Calm`es [BC12]。

证明。 固定一个用于 G的容许装置 $\rho=(V_j,U_j)_{j\geq 1}$，参见定义 3.15。回顾第 9.1 节， $G\curvearrowright X$ 的第 p 个等变上同调群可如下定义。设 (V,U) 是 ρ 中的一个近似对，其中 $\operatorname{codim}(V\setminus U)\geq p+2$。商 $U\times_{/G}X$ 是一个光滑概形，而等变线丛 $G\mathscr{L}$诱导出一个良定义的线丛 $\mathscr{L}=(\mathscr{L}\times U\times X)/G$ 于 $U\times_{/G}X$上。在这种情形下，$U\times_{/G}X$ 的 $\mathscr{L}$-扭曲上同调与 V和 S无关，并且我们有一个同构

$$\mathrm{H}^p_G(X,\mathbf{I}^q(\mathscr{L}))\cong \mathrm{H}^p(U\times_{/G}X,\mathbf{I}^q(\overline{\mathscr{L}}))$$

由态射 $f\colon U\times_{/G}X\to [G\backslash X]$ 诱导。

现在我们考虑实实现这一侧。回顾命题 7.10，对于容许装置 $\rho=(U_j,V_j)_{j\geq 1}$，$\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}([G\backslash X])\simeq \operatorname{colim}_{j\geq 1}(U_j\times_{/G}X)(\mathbb{R})$。我们在拓扑侧也有稳定化结果：若 $\operatorname{codim}(V_j\setminus U_j)\geq p+2$，则可得到一个同构

$$\mathrm{H}^p((U_j\times_{/G}X)(\mathbb{R}),\mathbb{Z}(\overline{\mathscr{L}}))\to \mathrm{H}^p([G\backslash X](\mathbb{R}),\mathbb{Z}(\mathscr{L}))$$

它是由 $f_{\mathbb{R}}\colon (U\times_{/G}X)(\mathbb{R})\to [G\backslash X](\mathbb{R})$ 诱导的映射的逆映射。特别地，只要 $\operatorname{codim}(V_j\setminus U_j)\geq p+2$，就可以用 $U_j\times_{/G}X$ 来计算等变上同调。

这可以完全仿照代数情形证明，例如参见 [Tot99] 或 [dLM23，命题 2.2.10]，只需作如下修改。我们利用 $\operatorname{codim}(V\setminus U)\geq p+2$ 蕴含 $(X\times(V\setminus U))(\mathbb{R})$ 在 $(X\times V)(\mathbb{R})$ 中的实余维也为 $\geq p+2$。此外，若有 G-稳定的 $U\subseteq U'\subseteq V$，且 U' 上的 G-作用是自由的，那么 $(X\times_{/G}U)(\mathbb{R})$ 在 $(X\times_{/G}U')(\mathbb{R})$ 中的补集也具有余维 $\geq p+2$。在这种情况下，包含映射 $(X\times_{/G}U)(\mathbb{R})\hookrightarrow(X\times_{/G}U')(\mathbb{R})$ 在次数 p 上诱导奇异上同调的同构。

从代数角度来看，可以将奇异上同调识别为 $\operatorname{colim}\mathbf{I}^n$ 的 Zariski 上同调，如 [Jac17] 中所示，并使用代数切除结果。从拓扑角度来看，对于带有闭子簇 Z 的拟射影实代数簇 X，存在一个有限维 CW 结构，使得 $Z(\mathbb{R})$ 是 $X(\mathbb{R})$ 的子复形；此外，该子复形的胞腔维数不超过 Z 的维数。特别地，若 X 是光滑且等维的（因而余维有意义），则 $Z(\mathbb{R})$ 中所有胞腔的余维都至少为 Z 在 X 中的余维。由此，通过与胞腔上同调比较，我们可以得到奇异上同调的切除结果。关于三角剖分，一个可能的参考文献是 [KW03] 中表述的实三角剖分定理（该文中也列有其他参考文献）。[24]

经过上述准备，现在我们可以将等变实循环类映射定义为以下复合

$$\mathrm{H}^p_G(X,\mathbf{I}^q(\mathscr{L}))\xrightarrow{\cong}\mathrm{H}^p(U\times_{/G}X,\mathbf{I}^q(\overline{\mathscr{L}}))\xrightarrow{\mathrm{cyc}_{\mathbb{R}}}\mathrm{H}^p((U\times_{/G}X)(\mathbb{R}),\mathbb{Z}(\overline{\mathscr{L}}))\xrightarrow{\cong}\mathrm{H}^p([G\backslash X](\mathbb{R}),\mathbb{Z}(\mathscr{L}))$$

其中中间的映射是Jacobson的实循环类映射，参见 [Jac17]。

下一步，我们需要验证这与选择无关。这一点由下一个图的交换性所涵盖，而该交换性源于实循环类映射与拉回的相容性，参见 [HWXZ21，命题4.1]:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}^p(U_{i+1}\times_{/G}X,\mathbf{I}^q(\overline{\mathscr{L}})) & \xrightarrow{\mathrm{cyc}_{\mathbb{R}}} & \mathrm{H}^p((U_{i+1}\times_{/G}X)(\mathbb{R}),\mathbb{Z}(\overline{\mathscr{L}})) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{H}^p(U_i\times_{/G}X,\mathbf{I}^q(\overline{\mathscr{L}})) & \xrightarrow[\mathrm{cyc}_{\mathbb{R}}]{} & \mathrm{H}^p((U_i\times_{/G}X)(\mathbb{R}),\mathbb{Z}(\overline{\mathscr{L}}))
\end{array}$$

本质上，这意味着我们得到极限图之间的一个态射$\mathrm{cyc}_{\mathbb{R}}$

$$\left(\mathrm{H}^p(U_i\times_{/G}X,\mathbf{I}^q(\overline{\mathscr{L}}))\right)_i \qquad \text{and} \qquad \left(\mathrm{H}^p((U_i\times_{/G}X)(\mathbb{R}),\mathbb{Z}(\overline{\mathscr{L}}))\right)_i$$

其极限分别为 $\mathrm{H}^p_G(X,\ \mathbf{I}^q(\mathscr{L}))$ 和 $\mathrm{H}^p([G\backslash X](\mathbb{R})\ \mathbb{Z}(\mathscr{L}))$。等变实循环类映射是这一图表态射的极限。

[24]很可能还有其他参考文献，特别是在半代数几何文献中，或在Goresky–MacPherson分层莫尔斯理论这一方向上。

既然我们已经确立了良定义的等变实循环类映射的存在性，现在便可以证明所有结论。对于结论 (1)，等变上同调的独立性已在 [dLM23, Proposition 2.2.10] 中得到证明。结合 [HWXZ21, Proposition 4.1] 中实循环类映射与拉回相容的结果，运用相同论证可知，等变实循环类映射也与逼近的选取无关，即它仅取决于商栈 $[G\backslash X]$。结论 (2) 也显然成立，因为对于平凡群，我们得到$U \times_{/G} X = X$，此时等变实循环类映射的定义便退化为非等变情形。最后，结论 (3) 和 (4) 可由 [Jac17] 的推论 8.9 和 8.11 得出。关于 Jacobson 循环类映射的扭曲版本及这些推论的讨论，参见 [HWXZ21]，尤其是定理 3.12。□

注 9.6. q 取多大才足够取决于群。如果群 G 有一个表示 V，使得 G 在某个 G-稳定闭子集 $S \subseteq V$之外自由作用，且该子集的余维为 $\geq p+2$，那么存在一个同构

$$\mathrm{H}^p((V\backslash S)/G, \mathbf{I}^q) \cong \mathrm{H}^p(\mathrm{B}_{\text{ét}}G, \mathbf{I}^q),$$

关于 **I**-上同调的稳定化结果，参见 [HW19, 命题 3。1] 或 [dLM23, 命题 2.2。10]以了解更一般的陈述。在这种情况下，当$q >$维数 $V -$维数 G时，实循环类映射将是同构。情形 $[G\backslash X]$ 需要在右侧额外加上一个项 维数 X。一个更大胆的猜想是，只需取 $q > p + d$，其中 d 是一个忠实 G-表示的维数。

注 9.7. • 我们注意到，等变实循环类映射也由定理 *9.5* 中的条件 *(1)* 和 *(2)* 唯一确定。本质上，我们可以借助第 *3.3* 节中的容许装置，将 $[G\backslash X]$写成光滑概形的余极限；随后，等变实循环类映射便是由非等变映射经左 *Kan* 延拓得到的。

- 此外，等变（*Borel–Moore*）同调也有一种等变实循环类映射，其形式如下

$$\mathrm{cyc}_{\mathbb{R}} \colon \mathrm{H}_p([G\backslash X], \mathbf{I}^q(\mathscr{L})) \to \mathrm{H}_p^{\mathrm{BM}}([G\backslash X](\mathbb{R}), \mathbb{Z}(\mathscr{L}))$$

这也更一般地适用于带有作用 $G \curvearrowright X$的奇异概形。论证与定理 *9.5* 的论证大致相同，但要利用实循环类映射与沿容许装置中的闭浸入 $X \times_{/G} U_i \hookrightarrow X \times_{/G} U_{i+1}$ 的适当推前的相容性。这需要对 [Jac17,HWXZ21]中的几个论证作出调整。

9.3. **相容性**。 本节简要阐述等变实循环类映射与第 9.1 节讨论的等变上同调中的自然结构之间的各种相容性：局部完全交拉回、适当推前（沿闭浸入）以及交乘积。我们还讨论局部化序列，以及商与归纳等价。因此，等变实循环类映射与使用分层方法进行计算所需的所有工具相容，例如分类空间 Chow 环的计算，参见 [RV06]。

命题 9.8。 设$(\varphi, f) \colon (H \curvearrowright Y) \to (G \curvearrowright X)$是定义在 $\mathbb{R}$ 上的带作用的光滑概形之间的态射，并设 $\mathscr{L} \in \mathrm{Ch}^1_G(X)$ 是 X 上的 G-等变线丛。那么，实循环类映射与等变上同调中的自然拉回态射相容，即下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^p_G(X, \mathbf{I}^q(\mathscr{L})) & \xrightarrow{\mathrm{cyc}_{\mathbb{R}}} & \mathrm{H}^p([G\backslash X](\mathbb{R}), \mathbb{Z}(\mathscr{L})) \\ \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*_{\mathbb{R}}} \\ \mathrm{H}^p_H(Y, \mathbf{I}^q(f^*\mathscr{L})) & \xrightarrow[\mathrm{cyc}_{\mathbb{R}}]{} & \mathrm{H}^p([H\backslash Y](\mathbb{R}), \mathbb{Z}(f^*\mathscr{L})) \end{array}$$

特别地，对于群同态 $\varphi\colon H \to G$，等变实循环类映射与限制函子 $\mathrm{Res}^H_G = (\varphi, \mathrm{id})^*$ 以及遗忘函子 Res^1_G相容。

注 9.9。为澄清记号 $f^*\mathscr{L}$，请注意，等变 *Chow* 群上也有拉回映射；特别地，我们有 $f^*:\mathrm{Ch}^1_G(X)\to\mathrm{Ch}^1_H(Y)$。命题中的 $f^*\mathscr{L}$表示 $\mathscr{L}$的类在此拉回映射下的像，即 $f^*\mathscr{L}\in\mathrm{Ch}^1_H(Y)$是 Y上的一个 H-等变线丛。

证明. 一方面，对于实实现存在一个相当形式化的论证（它确实适用于一般的 $\mathbb{A}^1$-可表上同调理论）。回想一下，我们有一个稳定实实现函子 $\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}\colon \mathbf{SH}(\mathbb{R})\to\mathbf{SH}$，它通过对复数域$_2$-等变实现取几何不动点而得到。对于动机谱 $E\in\mathbf{SH}(\mathbb{R})$ 与动机空间 X，这诱导出一个态射

$$E^{**}(X)=\mathrm{Hom}_{\mathbf{SH}(\mathbb{R})}(\Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1}X_+,E(*)[*])\to\mathrm{Hom}_{\mathbf{SH}}(\Sigma^\infty(\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}X_+),\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}(E)[*])=\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}(E)^*(\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}(X)).$$

$E^{**}(X)$ 的反变函子性是通过与态射$f\colon Y\to X$ 作前复合而得到的，从而得到态射 $E^{**}(X)\to E^{**}(Y)$。在实实现一侧同样如此，我们与态射 $\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}(f)\colon \mathrm{Re}_{\mathbb{R}}Y\to\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}X$ 作前复合。于是该断言实际上只是实实现的函子性，应用于商栈的态射 $(\varphi,f)\colon [H\backslash Y]\to[G\backslash X]$，这些商栈被视为动机空间，如第 3.2 节所讨论。线丛扭曲则通过将动机空间取为 $\mathrm{Th}(\mathscr{L})$ 而非 $[G\backslash X]$ 来计入，其中 $\mathscr{L}$ 是 X 上的一个 G-等变线丛，对 $[H\backslash Y]$ 亦然。

我们还可以给出一个更具体的论证，它适用于系数取为同伦模的等变上同调。只考虑商栈的态射 $[H\backslash Y]\to[G\backslash X]$ 可表的情形。在这种情况下，对给定的 p，存在一个光滑簇的态射 $g\colon U\to V$以及一个交换图

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{H}^p_G(X,\mathbf{I}^q(\mathscr{L}))&\xrightarrow{\cong}&\mathrm{H}^p(V,\mathbf{I}^q(\mathscr{L}))\\ \downarrow{\scriptstyle f^*}&&\downarrow{\scriptstyle g^*}\\ \mathrm{H}^p_H(Y,\mathbf{I}^q(\mathscr{L}))&\xrightarrow[\cong]{}&\mathrm{H}^p(U,\mathbf{I}^q(\mathscr{L}))\end{array}$$

在拓扑侧也有类似的图，这里使用了容许装置实现的奇异上同调的稳定化，如定理 9.5 的证明中所述：

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{H}^p(V(\mathbb{R}),\mathbb{Z}(\mathscr{L}))&\xrightarrow{\cong}&\mathrm{H}^p([G\backslash X](\mathbb{R}),\mathbb{Z}(\mathscr{L}))\\ \downarrow{\scriptstyle g^*_{\mathbb{R}}}&&\downarrow{\scriptstyle f^*_{\mathbb{R}}}\\ \mathrm{H}^p(U(\mathbb{R}),\mathbb{Z}(\mathscr{L}))&\xrightarrow[\cong]{}&\mathrm{H}^p([H\backslash Y](\mathbb{R}),\mathbb{Z}(\mathscr{L}))\end{array}$$

将这些图与 [HWXZ21 命题 4.1], 中非等变实循环类映射的拉回相容性图结合起来，即得所述结论。□

Remark9.10. • 证明中的形式论证表明，与限制函子的相容性确实适用于任何可表示上同调理论，尤其也适用于第 *5.6* 节中讨论的更一般情形。

- 等变同调也有一个拉回相容性版本。它更一般地适用于带有作用的奇异簇。不过，它仅适用于$[H\backslash Y]\to[G\backslash X]$ 可表且为局部完全交的态射。

命题 9.11. 设 $G\curvearrowright X$ 是 $\mathbb{R}$ 上带作用的光滑概形，并设 $\mathscr{L}_1$、$\mathscr{L}_2\in\mathrm{Ch}^1_G(X)$ 为 X 上的 G-等变线丛。则实循环类映射与等变交积相容，即下述图表交换：

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{H}^{p_1}_G(X,\mathbf{I}^{q_1}(\mathscr{L}_1))\otimes\mathrm{H}^{p_2}_G(X,\mathbf{I}^{q_2}(\mathscr{L}_2))&\xrightarrow{\mathrm{cyc}_{\mathbb{R}}}&\mathrm{H}^{p_1}_{\mathrm{sing}}([G\backslash X](\mathbb{R}),\mathbb{Z}(\mathscr{L}_1))\otimes\mathrm{H}^{p_2}_{\mathrm{sing}}([G\backslash X](\mathbb{R}),\mathbb{Z}(\mathscr{L}_2))\\ \downarrow{\scriptstyle\cup}&&\downarrow{\scriptstyle\cup}\\ \mathrm{H}^{p_1+p_2}_G(X,\mathbf{I}^{q_1+q_2}(\mathscr{L}_1\otimes\mathscr{L}_2))&\xrightarrow[\mathrm{cyc}_{\mathbb{R}}]{}&\mathrm{H}^{p_1+p_2}_{\mathrm{sing}}([G\backslash X](\mathbb{R}),\mathbb{Z}(\mathscr{L}_1\otimes\mathscr{L}_2))\end{array}$$

证明.同样，存在一个形式论证，适用于任何在$\mathbf{SH}(\mathbb{R})$ 中可由环谱表示的上同调。为此，回顾第 5.6 节可知，实实现函子 $\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}\colon \mathbf{SH}(\mathbb{R}) \to \mathbf{SH}$ 是对称幺半的，即与幺半结构相容。对于动机谱 $E \in \mathbf{SH}(\mathbb{R})$ 与动机空间 X，我们可以将上同调类 σ, τ表示为映射 $\Sigma^\infty X_+ \to E(*)[*]$，于是它们的乘积由该映射表示

$$\Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1} X_+ \xrightarrow{\Delta} \Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1} X_+ \wedge \Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1} X_+ \xrightarrow{\sigma\wedge\tau} E(p)[q] \wedge E(p')[q'] \xrightarrow{\mu} E(p+p')[q+q'].$$

由于 $\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}$ 是对称幺半的，该映射的实现即为该复合

$$X_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}(\Delta)} X_{\mathbb{R}} \wedge X_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}(\sigma)\wedge\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}(\tau)} E_{\mathbb{R}}[q] \wedge E_{\mathbb{R}}[q'] \xrightarrow{\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}(\mu)} E_{\mathbb{R}}[q+q'],$$

其中我们记 $X_{\mathbb{R}} = \Sigma^\infty \mathrm{Re}_{\mathbb{R}}(X)_+ \cong \mathrm{Re}_{\mathbb{R}}\left(\Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1} X_+\right)$ 以及 $E_{\mathbb{R}} = \mathrm{Re}_{\mathbb{R}}(E)$。[25] 所得复合表示 σ 与 τ 的实现之积，所用的是由 $\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}(\mu)$ 给出的 $\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}(E)$ 上的环谱结构。

至于命题 9.8，我们还有一个更具体的论证，即用光滑概形逼近商栈。如第 3.3 节所述，利用 G 的容许装置 ρ，存在光滑概形 $X^i_G(\rho)$ 以及态射 $X^i_G(\rho) \to [G\backslash X]$，它诱导同构

$$\mathrm{H}^r_G(X, \mathbf{I}^s(\mathscr{L}_i)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}^r(X^i_G(\rho), \mathbf{I}^s(\mathscr{L}_i))$$

在次数 $r \le p_1 + p_2$ 上，并且在这些次数上与交乘积相容。根据等变实循环类映射的定义，命题陈述中所断言的图的交换性等价于下列图的交换性：

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}^{p_1}(X^i_G(\rho), \mathbf{I}^{q_1}(\mathscr{L}_1)) \otimes \mathrm{H}^{p_2}(X^i_G(\rho), \mathbf{I}^{q_2}(\mathscr{L}_2)) & \xrightarrow{\cup} & \mathrm{H}^{p_1+p_2}(X^i_G(\rho), \mathbf{I}^{q_1+q_2}(\mathscr{L}_1 \otimes \mathscr{L}_2)) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{cyc}_{\mathbb{R}}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{cyc}_{\mathbb{R}}} \\
\mathrm{H}^{p_1}_{\mathrm{sing}}(X^i_G(\rho)(\mathbb{R}), \mathbb{Z}(\mathscr{L}_1)) \otimes \mathrm{H}^{p_2}_{\mathrm{sing}}(X^i_G(\rho)(\mathbb{R}), \mathbb{Z}(\mathscr{L}_2)) & \xrightarrow[\cup]{} & \mathrm{H}^{p_1+p_2}_{\mathrm{sing}}(X^i_G(\rho)(\mathbb{R}), \mathbb{Z}(\mathscr{L}_1 \otimes \mathscr{L}_2))
\end{array}$$

不过，这个图表的交换性由 [HWXZ21，命题 4.3] 得出。 □

注 9.12. • 同样，这个形式上的论证也适用于其他上同调理论，例如厄米 K 理论的变体，或像 MSL 和 MSp 这样的协边谱。

• 上同调类的外积／交叉积也有类似的版本：

$$\mathrm{H}^{p_1}_G(X, \mathbf{I}^{q_1}(\mathscr{L}_1)) \otimes \mathrm{H}^{p_2}_G(Y, \mathbf{I}^{q_2}(\mathscr{L}_2)) \to \mathrm{H}^{p_1+p_2}_G(X \times Y, \mathbf{I}^{q_1+q_2}(\mathscr{L}_1 \boxtimes \mathscr{L}_2))$$

众所周知，杯积是沿对角映射 $\Delta\colon\ X \to X \times X$ 对交叉积作拉回得到的。类似地，X 和 Y 上的上同调类的交叉积，可以定义为沿投影 $X \xleftarrow{\mathrm{pr}^X} X \times Y \xrightarrow{\mathrm{pr}^Y} Y$的拉回的杯积。特别地，利用命题 *9.8* 中与拉回的相容性，命题 *9.11* 的陈述等价于相应的交叉积陈述。

命题 9.13。 设 $(\varphi, f)\colon (H \curvearrowright Y) \to (G \curvearrowright X)$ 是 $\mathbb{R}$ 上带作用的光滑概形之间的一个态射，且其诱导的商栈态射 $f\colon [H\backslash Y] \to [G\backslash X]$ 是可表的闭浸入。设 $\mathscr{L} \in \mathrm{Ch}^1_G(X)$ 是 X 上的 G-等变线丛。那么，实循环类映射与适当推前相容，即下图交换：

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}^p_H(Y, \mathbf{I}^q(f^*\mathscr{L} \otimes \omega_f)) & \xrightarrow{\mathrm{cyc}_{\mathbb{R}}} & \mathrm{H}^p([H\backslash Y](\mathbb{R}), \mathbb{Z}(f^*\mathscr{L} \otimes \omega_f)) \\
\downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\
\mathrm{H}^{p+d}_G(X, \mathbf{I}^q(\mathscr{L})) & \xrightarrow[\mathrm{cyc}_{\mathbb{R}}]{} & \mathrm{H}^{p+d}([G\backslash X](\mathbb{R}), \mathbb{Z}(\mathscr{L}))
\end{array}$$

[25]与之前一样，这里我们不严格区分非稳定实实现和稳定实实现的记号。

证明。 与命题 9.8 的证明一样，我们利用 f 的态射的可表性，借助一个容许装置 $\rho=(U_j,\ V_j)_{j\geq 1}$ 来逼近 f。对于给定的 p，存在光滑簇之间的一个闭浸入 $g\colon (Y\times_{/H}U_j)\to(X\times_{/G}U_j)$ 以及一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^{p}_{H}(Y,\mathbf{I}^{q}(f^{*}(\mathscr{L}\otimes\omega_f))) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{H}^{p}(Y\times_{/H}U_j,\mathbf{I}^{q}(f^{*}(\mathscr{L}\otimes\omega_g))) \\ \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle g_*} \\ \mathrm{H}^{p+d}_{G}(X,\mathbf{I}^{q}(\mathscr{L})) & \xrightarrow[\cong]{} & \mathrm{H}^{p+d}(X\times_{/G}U_j,\mathbf{I}^{q}(\mathscr{L})) \end{array}$$

拓扑侧也有一个类似的图表，它采用了容许装置实现的奇异上同调的稳定化，正如定理 9.5 的证明中所讨论的那样。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^{p}((Y\times_{/H}U_j)(\mathbb{R}),\mathbb{Z}(f^{*}\mathscr{L}\otimes\omega_g)) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{H}^{p}([H\backslash Y](\mathbb{R}),\mathbb{Z}(f^{*}\mathscr{L}\otimes\omega_f)) \\ \downarrow{\scriptstyle g_*^{\mathbb{R}}} & & \downarrow{\scriptstyle f_*^{\mathbb{R}}} \\ \mathrm{H}^{p+d}((X\times_{/G}U_j)(\mathbb{R}),\mathbb{Z}(\mathscr{L})) & \xrightarrow[\cong]{} & \mathrm{H}^{p+d}([G\backslash X](\mathbb{R}),\mathbb{Z}(\mathscr{L})). \end{array}$$

将这些图表与 [HWXZ21, 定理 4.7], 中非等变实循环类映射的推前相容性图表结合起来，即得所述结论。□

注 9.14. 对于与适当推前的相容性，是否存在类似于拉回和交积情形的普遍形式论证，并不十分清楚。从本质上说，这是一个关于第 *5.5* 节的实实现函子是否与 ***Becker–Gottlieb*** 转移相容的问题。我们尚未在现有文献中发现这样的结果。

有了上述相容性结果，还可以推导出若干进一步的结论。我们列出与商等价和归纳等价的相容性。

推论 9.15. 设 $G\curvearrowright X$ 是一个带作用的光滑簇， $N\subset G$ 是一个闭正规子群，且限制作用 $N\curvearrowright X$ 是自由的。那么，等变循环类映射与商等价相容，即下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^{*}_{G/N}(N\backslash X,\mathbf{I}^{q}(\mathscr{L})) & \xrightarrow{\mathrm{cyc}_{\mathbb{R}}} & \mathrm{H}^{*}_{\mathrm{sing}}([(G/N)\backslash(N\backslash X)](\mathbb{R}),\mathbb{Z}(\mathscr{L})) \\ \downarrow{\scriptstyle\cong} & & \downarrow{\scriptstyle\cong} \\ \mathrm{H}^{*}_{G}(X,\mathbf{I}^{q}(p^{*}\mathscr{L})) & \xrightarrow[\mathrm{cyc}_{\mathbb{R}}]{} & \mathrm{H}^{*}_{\mathrm{sing}}([G\backslash X](\mathbb{R}),\mathbb{Z}(p^{*}\mathscr{L})) \end{array}$$

证明。 命题 9.3 的商等价中的栈同构由沿 $(\pi,p)\colon (G\curvearrowright X)\to(G/N\curvearrowright N\backslash X)$ 的拉回诱导。该断言随后由命题 9.8 中的拉回相容性得出。□

推论 9.16。 设 $i\colon H\hookrightarrow G$ 为光滑闭子群到光滑仿射代数群 G 的包含，并设 $H\curvearrowright X$ 为带作用的光滑簇，使得 $G\times X$ 上对角 H-作用的商 $G\times_H X$ 作为光滑拟射影簇存在。则等变实循环类映射与归纳等价相容，即下述图表交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^{*}_{G}(G\times_{/H}X,\mathbf{I}^{q}(\mathscr{L})) & \xrightarrow{\mathrm{cyc}_{\mathbb{R}}} & \mathrm{H}^{*}_{\mathrm{sing}}([G\backslash(G\times_{/H}X)](\mathbb{R}),\mathbb{Z}(\mathscr{L})) \\ \downarrow{\scriptstyle\cong} & & \downarrow{\scriptstyle\cong} \\ \mathrm{H}^{*}_{H}(X,\mathbf{I}^{q}(p^{*}\mathscr{L})) & \xrightarrow[\mathrm{cyc}_{\mathbb{R}}]{} & \mathrm{H}^{*}_{\mathrm{sing}}([H\backslash X](\mathbb{R}),\mathbb{Z}(p^{*}\mathscr{L})) \end{array}$$

证明。 命题 9.4 中归纳等价所涉及的栈同构由沿 $(H\curvearrowright X)\to(G\curvearrowright G\times_{/H}X)$ 的拉回诱导。由命题 9.8 中拉回的相容性即可得出该结论。□

等变实循环类映射也与局部化序列相容。其表述与 [HWXZ21 的命题 4.8 和推论 4.13]类似，读者不难将其具体写出。

9.4. **变体：实概形周群上的等变循环类映射**。 在本小节中，我们将陈述等变实循环类映射主要结果的一个模2版本。

定理 9.17。 设 $G \curvearrowright X$ 是带有 $\mathbb{R}$ 上光滑仿射代数群作用的光滑概形。由 *Voevodsky* 对米尔诺猜想的解答所给出的等同 $\mathbf{K}^{\mathrm{M}}_q/2 \cong \mathscr{H}^q_{\mathrm{et}}(\mu_2)$ 诱导一个等变模*2*循环类映射

$$\mathrm{H}^p_G(X, \mathbf{K}^{\mathrm{M}}_q/2) = \mathrm{H}^p([G\backslash X], \mathbf{K}^{\mathrm{M}}_q/2) \to \mathrm{H}^p(\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}[G\backslash X], \mathbb{F}_2)$$

它满足以下性质：

(1) 等变模*2*循环类映射仅依赖于栈 $[G\backslash X]$。*(2)* 平凡群 $G = \{1\}$ 的情形恢复了 *Borel–Haefliger* [BH61] 与 *Colliot-Th´el`ene–Parimala* [CTP90] 的非等变模*2*循环类映射。*(3)* 当 q 足够大时，等变模*2*循环类映射是一个同构。

注 9.18。

- 对于 $p = q$，这是

$$\mathrm{Ch}^p_G(X) \to \mathrm{H}^p(\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}[G\backslash X], \mathbb{F}_2) \tag{18}$$

  Borel–Haefliger 的模*2*循环类映射 [BH61]。更一般的情形以及对足够大的q 的同构，源于 *Colliot-Th´el`ene* 和 *Parimala* 的工作 [CTP90],；另见 [Jac17]。
- 关于何种 q 才算足够大，适用注 *9.6*。
- 同样，这个结果也有一个 *Borel–Moore* 同调版本。
- 定理 *9.5* 的证明只需稍作修改，即可用于证明定理 *9.17*。由于模*2*米尔诺*K*上同调是定向的，因此不存在由线丛带来的扭曲。
- 模 *2* 等变循环类映射具有与实循环类映射相同的相容性。和之前一样，只需稍作调整，命题 *9.8*、*9.11* 和 *9.13* 的证明即可沿用。
- 看来，实概形的周群上可能存在 *Benoist–Wittenberg* 循环类映射的等变版本 [BW20]，可仿照 [HWXZ21]，用来构造等变 *Chow–Witt* 群上的等变循环类映射。本文不再探讨这一方向。

10. Bitorsors and equivalences of quotient stacks

本节将讨论分类栈 $[G\backslash *]$的一些不变性性质。本文的结果表明，我们感兴趣的许多构造——例如等变实现或实实现、具有同伦模系数的上同调，以及实循环类映射——都只取决于商栈的等价类。在分类栈 $[G\backslash *]$这一特殊情形下，人们自然会问，能否在不改变栈等价类的情况下更换群 G 。

一个具体例子是命题 8.8 中关于实代数群 G 的分类栈的实实现 $\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}[G\backslash *]$ 的公式：$\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}[G\backslash *] \cong \mathrm{B}G(\mathbb{C})^{\mathrm{hC}_2}$ 的连通分支是 $G(\mathbb{R})$ 的强实形式的分类空间，且这些强实形式与 G 具有相同的中心不变量。因此，这些强实形式的实实现彼此等价。在本节中，我们将证明这并非巧合；事实上，具有相同中心不变量的不同强实形式实际上具有等价的分类栈，从而解释了命题 8.8 中公式所揭示的现象。这还意味着，具有相同中心不变量的不同强实形式对应的 $\mathrm{B}_{\text{ét}}G$ 的维特层上同调环彼此同构，参见推论 10.3 的陈述。

本节要证明的核心内容是，群 G，G' 的商栈彼此等价，当且仅当它们互为强内形式。关于强内形式的定义，见定义 8.6 以及注 8.7 中的讨论；关于证明中出现的双主齐性空间这一概念的背景，参见 [Bre90] 和 [Gir71]。

定理 *10.1*（*Giraud*）。设 G 和 H 是域 F 上的光滑仿射代数群。在由栈之间的可逆态射及其间的自然变换（自动为同构）构成的群胚 $\mathit{Fun}([G\backslash pt],[H\backslash pt])^{\simeq}$ 与域 F 上的 (H,G)-双挠子[26] 及其间的同构构成的群胚之间，存在自然等价。此自然等价在对象上的定义为：将等价 $\Phi\colon [G\backslash pt]\to[H\backslash pt]$ 映射到它在 $\mathit{Spec}\ F$ 上的平凡左 G-扭子 G_l 处的取值 $\Phi_F(G_l)$。其准逆在对象上的定义为：将 (H,G)-双主齐性空间 P 映射到函子 $\Phi_P := P\times_{/G}(-)$。

证明。回忆一下，分类栈 $[G\backslash\mathrm{pt}]$ 是 Sch_F 上的一个 gerbe，它由整体截面平凡化；该截面将概形 X 映射到平凡左 G- 扭子 $G_l = G\times X$。对于一般的栈 $\mathcal{X}$，Giraud 《 [Gir71] 》第三章中的定理 2.2.2 将群胚 $\mathrm{Fun}([G\backslash\mathrm{pt}],\mathcal{X})$（由 $[G\backslash\mathrm{pt}]$ 出发的所有栈态射，不一定是等价）与由 $\mathcal{X}(F)$ 中带有右G-作用的对象构成的群胚识别起来。

我们简要回顾这一识别。在对象上，它通过将态射 $\Phi\colon [G\backslash\mathrm{pt}]\to\mathcal{X}$映射到对象 $\Phi_F(G_l)\in\mathcal{X}(F)$ 来给出，其右 G-作用由以下两个群层映射的复合 $\gamma\circ\mu$给出

$$\mu\colon G\to \underline{\mathrm{Isom}}_G(G_l,G_l)\quad \gamma\colon \underline{\mathrm{Isom}}_G(G_l,G_l)\to \underline{\mathrm{Isom}}_{\mathcal{X}}(\Phi(G_l),\Phi(G_l)), \tag{19}$$

其中 $\mu(g) = (-)\cdot g$ 是 G 在平凡 G-扭子上的右作用，而 γ 是由函子 Φ诱导的映射。在态射上，Giraud 等价按显然的方式定义：将栈态射 Φ，$\Psi\colon [G\backslash\mathrm{pt}]\to\mathcal{X}$的自然变换 $f\colon \Phi\Rightarrow\Psi$ 映射为 $\mathcal{X}(F)$ 中带有 G-作用的对象之间的 G-等变映射 $f_F(G_l)\colon \Phi_F(G_l)\to\Psi_F(G_l)$。

当 $\mathcal{X}=[H\backslash\mathrm{pt}]$ 是一个分类栈时，态射 $\gamma\circ\mu$ 赋予左 H-扭子$\Phi_F(G_l)$（在 $\mathrm{Spec}\ F$ 上）一个右 G- 作用，该作用与 H 的作用可交换。因此，要证明定理中的第一个结论，只需证明分类栈之间的态射 $\Phi\colon [G\backslash\mathrm{pt}]\to[H\backslash\mathrm{pt}]$是等价，当且仅当上述描述的 G 和 H 在 $\Phi_F(G_l)$ 上的作用使其成为一个 (H,G)-双主齐性空间；或者等价地，证明上文 (19) 中的映射 γ 是同构。关于该识别具体形式的第二个结论由构造直接得出。

因此设 $\Phi\colon [G\backslash\mathrm{pt}]\to[H\backslash\mathrm{pt}]$ 为一个叠态射。显然，若Φ 是叠的等价，则 γ 是一个同构。反之，假设 γ 是一个同构，我们要证明 Φ是叠的等价。这本质上是每个扭子都局部平凡这一事实的推论。更确切地说，我们如下进行。借助 [Gir71], 第二章中的命题 1.4.5，为证明 Φ 是一个等价，只需选取一个劈并验证：

i) 对每个 F-概形 S 以及每一对对象 X，$Y\in[G\backslash\mathrm{pt}](S)$，如下自然映射（同构层的、由 Φ诱导）是一个同构：

$$\underline{\mathrm{Isom}}_G|_S(X,Y)\xrightarrow{\Phi_{X,Y}}\underline{\mathrm{Isom}}_H|_S(\Phi X,\Phi Y)$$

$$\big(\varphi\colon X_{|U}\to Y_{|U}\big)\mapsto\big(\Phi_{X,Y}(\varphi)\colon(\Phi X)_{|U}\to(\Phi Y)_{|U}\big)$$

其中 U 是一个 S概形，并且 $\Phi_{X,\,Y}(\varphi)$ 是H扭子在 U 上的如下同构复合：[27]

$$\Phi(X)_{|U}\simeq\Phi(X_{|U})\overset{\Phi(\varphi)}{\to}\Phi(Y_{|U})\simeq\Phi(Y)_{|U}.$$

[26]注意，一个(H,G)-双主齐性空间是一个左 H-扭子和一个右 G-扭子。[27]这里，我们对等同 $\Phi(X)_{|U}\simeq\Phi(X_{|U})$使用同构层的函子性，对 Y亦然。

ii) 对于每个 F概形 S 以及每个对象 $Z \in [H\backslash\mathrm{pt}](S)$，都存在一个覆盖 $S' \to S$，使得$Z_{|S'}$同构于某个左 G扭子 X的 $\Phi(X)$。

第二个要点显然成立（这是扭子局部平凡性的结果）。为了证明 Φ是一个等价（假设 γ 是一个同构），还需证明第一个要点。令 $p\colon S' \to S$为一个同时将 X 和 Y平凡化的覆盖。由于 $[G\backslash\mathrm{pt}]$ 和 $[H\backslash\mathrm{pt}]$ 是栈，映射$\Phi_{X,\,Y}$可由其限制映射 $(\Phi_{X,\,Y})_{|S'}$经下降得到。特别地，只需验证 $(\Phi_{X,\,Y})_{|S'}$ 是一个同构。

由同构层的函子性，映射 $(\Phi_{X,\,Y})_{|S'}$ 可识别为映射$\Phi_{X_{|S'},\,Y_{|S'}}$。由于 S' 同时平凡化 X 和 Y，后一个映射通过 X 和 Y的所选平凡化，可识别为 $(\Phi_{G_l,\,G_l})_{|S'} = \gamma_{|S'}$。更准确地说，此论证中所作的各种识别构成一个交换方块[28]

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\mathrm{Isom}}_S(X,Y)_{|S'} & \xrightarrow{(\Phi_{X,Y})_{|S'}} & \underline{\mathrm{Isom}}_S(\Phi(X),\Phi(Y))_{|S'} \\
\downarrow\simeq & & \downarrow\simeq \\
\underline{\mathrm{Isom}}_{S'}(X_{|S'},Y_{|S'}) & \xrightarrow{\Phi_{X_{S'},Y_{S'}}} & \underline{\mathrm{Isom}}_{S'}(\Phi(X_{|S'}),\Phi(Y_{|S'})) \\
\downarrow\simeq & & \downarrow\simeq \\
\underline{\mathrm{Isom}}_{S'}(G_{l|S'},G_{l|S'}) & \xrightarrow{\Phi_{G_{l|S'},G_{l|S'}}} & \underline{\mathrm{Isom}}_{S'}(\Phi(G_{l|S'}),\Phi(G_{l|S'})) \\
\uparrow\simeq & & \uparrow\simeq \\
\underline{\mathrm{Isom}}_F(G_l,G_l)_{|S'} & \xrightarrow{(\Phi_{G_l,G_l})_{|S'}} & \underline{\mathrm{Isom}}_F(\Phi(G_l),\Phi(G_l))_{|S'}
\end{array}$$

从上到下，左侧依次为以下映射：将同构层从 S 上的拉回典范地识别为 S'上的同构层；将扭子的同构与 X 和 Y的选定平凡化作前复合和后复合；最后，另一个同构层拉回的典范识别。右侧从上到下是相同的映射，结合由同构层的函子性给出的显然识别$\Phi(X_{|S'}) \simeq \Phi(X)_{|S'}$，对于 Y也同样如此。最后，根据定义，底部的态射只是$\gamma = \Phi_{G_l,G_l}$ 的基变换，因此上述图中的所有水平箭头都是同构。由此可得， Φ 是一个等价。

剩下要证明的是最后一条关于准逆的陈述。为此，现令 P 为任意一个（H, G）-双主齐性空间，并令 $\Phi_P := P \times_{/G} (-)\colon [G\backslash\mathrm{pt}] \to [H\backslash\mathrm{pt}]$ 为相应的叠态射。由于我们有一个同构

$$\chi\colon P \to P \times_{/G} G_l = \Phi_P(G_l)\colon p \mapsto (p,1)$$

由（H， G）-双挠子的结论，我们推得 Φ_P实际上是一个等价。此外，识别 $P \to \Phi_P(G_l)$ 关于 P 是自然的，因此 Φ_P是 Giraud 等价限制映射的准逆。 □

定理 10.2 (Giraud)。 设 G 和 H 是域 F上的光滑仿射代数群。则以下条件等价：

(1) 存在一个栈的等价 $[G\backslash\mathrm{pt}] \simeq [H\backslash\mathrm{pt}]$。*(2)* 存在一个$(H,G)$-双挠子。*(3)* 群 G 和 H 互为强内形式，定义见定义 *8.6*。

证明。 前两点的等价性是定理 10.1 的推论，因此只需证明后两点的等价性。这一等价性本质上同样是 Giraud 的一个结果，见 [Gir71]第三章第 2.5 节。为方便起见，我们明确说明强内形式的伽罗瓦上闭链与双主齐性空间之间的对应关系。

[28]这里的记号与之前的用法略有不同，因为下标 Isom$_S$ 表示我们考察相关同构层的概形。左侧的所有同构层都是 G-扭子在 $[G\backslash\mathrm{pt}]$, 中的同构，而右侧的所有同构层都涉及 H-扭子。

回顾一下，根据定义，代数群 H 的一个（´étale）形式是一个 ´étale-局部同构于 H的群层。存在一个典范双射

$$I\colon \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(F,\mathrm{Aut}(H))\simeq\{F\text{-forms of }H\}/F\text{-Isomorphism}$$

构造如下。给定一个 H' 的 H形式，选择局部同构 $\varphi_i\colon H'_{|S_i}\to H_{|S_i}$，定义在某个 ´étale 覆盖 $(S_i\to\mathrm{Spec}\ F)_{i\in I}$ 上，并将 $I(H')$ 定义为余循环 $(\varphi_{i,j})_{i,j\in I}$ 的类，其中 $\varphi_{i,j}:=\varphi_i\circ\varphi_j^{-1}\in\mathrm{Aut}(H)(S_i\times_F S_j)$，对所有 $i,j\in I$ 成立。

设 P 是一个右 H-扭子，并选择局部平凡化 $\sigma_i\colon P_{|S_i}\to H_{|S_i}$，定义在一个 étale 覆盖 $(S_i\to\mathrm{Spec}\ F)_{i\in I}$ 上。于是我们可以利用这些 σ_i 构造表示 P 的上同调类，即余循环 $\sigma_{i,j}:=\sigma_i\circ\sigma_j^{-1}\in\mathrm{Aut}_H(H_r)(S_{i,j})\simeq H(S_{i,j})$ 的类 $[\sigma]\in\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(F,H)$。另一方面，我们可以利用局部平凡化 σ_i 给出局部定义的群同构

$$\varphi_i\colon \mathrm{Aut}_{H_{|S}}(P_{|S})\simeq\mathrm{Aut}_{H_{|S_i}}(H_{|S_i r})\simeq H_{|S_i},\quad f\mapsto\sigma_i\circ f\circ\sigma_i^{-1}.$$

这表明 $\mathrm{Aut}_H(P)$ 是 H 的一种形式，其相应的上同调类 $[\varphi]\in\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(F,\mathrm{Aut}(H))$ 由 $\varphi_{i,j}=\varphi_i\circ\varphi_j^{-1}=c_{\sigma_{i,j}}\in\mathrm{Aut}(H)(S_{i,j})$ 给出，其中 $c\colon H\to\mathrm{Aut}(H)\ h\mapsto c_h=h(-)h^{-1}$ 是通常的共轭。特别地，如果 P 是一个（H，G）-双主齐性空间，那么定义右作用的同构 $G\to\mathrm{Aut}_H(P)$ G 表明，G 是 H 的一种形式，其分类上闭链位于该映射的像中

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(F,H)\to\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(F,\mathrm{Aut}(H))$$

该映射由共轭诱导。

现在假设 G 是 H 的强内形式，因此 G 由一个上同调类 $\gamma\in H^1_{\text{ét}}(F,\mathrm{Aut}(H))$ 分类，该类是一个类 $\beta\in H^1_{\text{ét}}(F,H)$ 的像。于是我们可以如下构造一个（H，G）-双主齐性空间 P。取一个覆盖（$S_i\to\mathrm{Spec}\ F$）$_{i\in I}$，其中 β 由一个余循环$\sigma_{i,j}\in H(S_{i,j})$ 表示，因此 γ 由余循环 $c_{\sigma_{i,j}}\in\mathrm{Aut}(H))(S_{i,j})$ 表示。我们定义 P 为通过按照余循环 $\sigma_{i,j}$ 在 S_i 上粘合平凡扭子 $H_{|S_i r}$ 所得到的左 H-扭子。随后我们注意到，有一个交换图：

$$\begin{array}{ccc} H_{|S_i}\times H_{|S_i r} & \longrightarrow & H_{|S_i r} \\ \downarrow{\scriptstyle (c_{\sigma_{i,j}},\sigma_{i,j}\cdot)} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_{i,j}\cdot} \\ H_{|S_i}\times H_{|S_i r} & \longrightarrow & H_{|S_i r} \end{array}.$$

其中，两条水平映射都是 H 的乘法映射。这说明，在局部定义的 H 上通过乘法给出的右作用，能够粘合为 G 在 P 上的右作用。该右作用诱导出同构 $G\to\mathrm{Aut}_H(P)$，因为根据构造，它在局部上确实如此。因此我们证明了 P 是一个 $(H,\ G)$-双主齐性空间。□

推论 10.3。设 G 是域 F 上的线性代数群，且 E 是可由 **SH**（F）表示的上同调理论。那么，*Borel* 等变 E-上同调 $E^*_G(\mathrm{pt})=E^*([G\backslash\mathrm{pt}])$ 在定义 *8.6* 所述意义下，在强内形式下保持不变。更确切地说，对于 G 的任意强内形式 G'，任意 （G，G'）-双主齐性空间都会诱导出一个同构

$$E^*([G\backslash\mathrm{pt}])\cong E^*([G'\backslash\mathrm{pt}]).$$

类似地，在 $F=\mathbb{R}$ 的情形下，等变实循环类映射在强内形式下保持不变，也就是说，任意 （G，G'）-双主齐性空间都会诱导出一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^p([G\backslash\mathrm{pt}],\mathbf{I}^q(\mathscr{L})) & \xrightarrow{\mathrm{cyc}_{\mathbb{R}}} & \mathrm{H}^p(\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}[G\backslash\mathrm{pt}],\mathbb{Z}(\mathscr{L})) \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ \mathrm{H}^p([G'\backslash\mathrm{pt}],\mathbf{I}^q(\mathscr{L})) & \xrightarrow[\mathrm{cyc}_{\mathbb{R}}]{} & \mathrm{H}^p(\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}[G'\backslash\mathrm{pt}],\mathbb{Z}(\mathscr{L})) \end{array}$$

证明。由定理 10.2 可知，强内形式的分类栈彼此等价，且任意双主齐性空间都会诱导叠的等价。对于由同伦模表示的上同调理论，我们可以使用 [dLM23, 命题 2.3.1]（或 [EG98, 命题 16]）得出

叠的等价会诱导上同调中的同构。更一般地，如第 3.2 节所述，将商栈视为动机同伦范畴中的对象时，等价的栈会产生等价的动机同伦型。对任意可表示上同调理论应用这一结论，即可得到第一个断言。[29] 等变实循环类映射的不变性断言可类似地由定理 9.5 得出。□

注 10.4. 强内形式具有等价的实实现这一事实可由命题 *8.8* 看出，因为右端是强实形式的分类空间的不交并。如注 *8.7* 所讨论的，从给定的群变为一个强内形式，本质上只改变右端连通分支的标号。推论 *10.3* 为这一观察到的不变性提供了更强的解释：强内形式具有等价的分类叠，从而蕴含实实现中的等价以及等变上同调中的同构。对于正交群的分类空间的乔环，这一点已在 [RV06，注 4。2]中被观察到。事实上，他们论文中的这一注记促使我们尝试为分类叠表述一个一般的不变性陈述。

例 10.5. 强内形式条件确实是必要的。[AT18, 例 4.9] 中有一个例子：$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 和 SU(2) 是内形式，但它们的第一伽罗瓦上同调 $\mathrm{H}^1(\mathrm{C}_2,\ G)$ 不同。由命题 8.8 可知，$\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}\mathrm{BSL}_2$ 将是连通的，而 $\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}$ BSU(2) 将有两个连通分支。特别是，它们的实实现不可能等价。

在正交群、特殊正交群和自旋群的情形下，也有类似的例子。对于域 F 上的正交群，任意两个秩相同的正交群都是强内形式，这意味着 $\mathrm{B}_{\text{ét}}\mathrm{O}(\varphi)$ 的上同调或实实现与定义 $\mathrm{O}(\varphi)$ 时所用的 F 上的二次型 φ 无关。对于特殊正交群或自旋群而言，情况则不再如此。对于特殊正交群，强内形式的秩和判别式相同；对于自旋群，强内形式还具有相同的哈斯不变量（或者说，正克利福德代数的布劳尔类，如 [Tit90] 第 655 页的例子所述）。这意味着 $\mathrm{B}_{\text{ét}}\mathrm{SO}(\varphi)$ 的上同调和实实现取决于秩和判别式；类似地，$\mathrm{B}_{\text{ét}}\mathrm{Spin}(\varphi)$ 的上同调和实实现取决于秩、判别式和哈斯不变量，参见例如 [AT18, 例 8.21] 中的讨论。[AT18, 第 10] 节中的表格展示了 $\mathrm{B}_{\text{ét}}\mathrm{Spin}(\varphi)$ 的实实现的连通分支数量如何随秩、判别式和哈斯不变量而变化。□

注 10.6。 在第 *1.4* 节的猜想性讨论背景下，似乎对称表示环以及增广态射 (4)也可能只取决于强内形式。遗憾的是，上述论证并不能直接应用于（真正的）等变 *Witt* 群，不过这或许是未来研究中一个值得探讨的问题。

11. Examples

本节将给出几个群的分类空间的实实现计算示例，以展示同伦不动点描述所揭示的一些现象。

回顾命题 8.8：对于带有对合 $\sigma\colon g \mapsto \sigma(g)$ 的群 G，存在自然双射 $\pi_0(\mathrm{B}G^{\mathrm{hC}_2}) \cong \mathrm{H}^1(\text{复数域}_2,\ G(\mathbb{C}))$，且其几何实现具有如下形式

$$\mathrm{B}G^{\mathrm{hC}_2} \simeq \coprod_{[g]\in \mathrm{H}^1(\mathrm{C}_2, G(\mathbb{C}))} \mathrm{B}(G(\mathbb{C})^{\sigma_g}) \tag{20}$$

稳定子群 $G(\mathbb{C})^{\sigma_g} = \{h \in G \mid \sigma(h)g = gh\}$。

[29]但需要指出的是，这意味着我们采用的是 Borel 等变上同调理论，即 $E^*([G\backslash\mathrm{pt}])$ 的定义方式是：将可表示上同调理论应用于第 3.2 节中定义的对象 $[G\backslash\mathrm{pt}]$，该对象属于 $\mathbf{H}(F)$。

11.1. 特殊群。 作为初步的合理性检查，我们考虑 Serre 意义下的特殊群，即域 F 上的线性代数群 G ′，对于这类群，étale 局部平凡的扭子已经是扎里斯基局部平凡的；特别地，对于任意域 k/F，我们有 $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}\ k, G) = \{*\}$ [30]。对于这样的群 G 在 $\mathbb{R}$ 上，命题 8.8 化简为

$$\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}(\mathrm{B}_{\text{ét}}G) \simeq [G\backslash *](\mathbb{C})^{\mathrm{hC}_2} \simeq \mathrm{B}(G(\mathbb{R})),$$

也就是说，分类空间的实点只有一个连通分支，即实点群 $G(\mathbb{R})$ 的分类空间。$G = \mathrm{GL}_n$、SL_n、Sp_{2n} 都属于这种情况；对于这些群，Witt 层上同调和 Chow–Witt 群均已为人所知，参见 [HW19] 和 [Wen24]。因此，本文的所有讨论都归结为关于 $\mathrm{B}G$ 的$\mathbf{I}$-上同调与 $G(\mathbb{R})$ 分类空间的奇异上同调之间紧密关系的观察，例如，参见 [HWXZ21, 第 6] 节中关于代数特征类与拓扑特征类相容性的讨论。

我们简要讨论第 1.4 节中提出的猜想图景（涉及 Borel 特征及其与对称表示的关系）。我们聚焦于 SL_n 的情形；Witt 层上同调可描述如下，参见 [Ana15] 或 [HW19]：$\mathrm{H}^*(\mathrm{BSL}_n, \mathbf{W})$ 是一个 $\mathrm{W}(F)$-代数，其生成元为庞特里亚金类 $\mathrm{p}_{2i} \in \mathrm{H}^{4i}(\mathrm{BSL}_n, \mathbf{W})$，其中 $i = 1, \ldots\ldots, \lfloor (n-1)/2 \rfloor$；若 n 为偶数，还包括欧拉类 $\mathrm{e}_n \in \mathrm{H}^n(\mathrm{BSL}_n, \mathbf{W})$。受 [BW02],[31] 的 Gersten–Witt 谱序列启发，我们预期存在如下形式的某个谱序列

$$E_2^{p,q} = \mathrm{H}^p(\mathrm{BSL}_n, \mathbf{W}) \Rightarrow \mathrm{W}(\mathrm{BSL}_n),$$

集中在满足 $q \equiv 0$ 模 4 的行中。只有满足 $q \equiv 0$ 模 4 的行之间的微分可能非平凡，其形式为 $d_{4r+1}\colon \mathrm{H}^p(\mathrm{BSL}_n, \mathbf{W}) \to \mathrm{H}^{p+4r+1}(\mathrm{BSL}_n, \mathbf{W})$。由于 $\mathrm{H}^*(\mathrm{BSL}_n, \mathbf{W})$ 集中在偶数次上，同调谱序列必然退化；因此，除去完备化方面的问题，我们预期对称表示环 $\mathrm{W}(\mathrm{SL}_n)$ 与 Witt 层上同调之间存在紧密联系。下面简要说明这种联系的大致形式。

对于 SL_2，，基本（即定义）表示 ρ 是自对偶表示，这意味着它保持一个双线性型。该型是辛形式（基本上是按定义如此），而基本表示上不存在与之相容的对称双线性型。所有不可约表示都由基本表示的对称幂得到。这尤其意味着，对称平方 $\rho^{\otimes 2}$ 保持一个对称双线性型。更具体地说，对称平方 $\rho^{\otimes 2}$ 是一个平凡的一维表示与伴随表示的直和；$\rho^{\otimes 2}$ 上的对称型也可以看作 $\rho \otimes \rho^\vee$ 上的求值型，而限制到伴随表示上的型本质上就是 Killing 型。就表示的 Witt 环而言，我们得到 $\mathrm{W}^*(\mathrm{SL}_2) \cong \mathrm{W}(F)[\rho]$，其中多项式生成元 $\rho \in \mathrm{W}^2(\mathrm{SL}_2)$ 是基本表示。此外，$\mathrm{W}^0(\mathrm{SL}_2) \cong \mathrm{W}(F)[\rho^{\otimes 2}]$ 是由带有 Killing 型的伴随表示生成的多项式环，而 $\mathrm{W}^2(\mathrm{SL}_2)$ 是 $\mathrm{W}^0(\mathrm{SL}_2)$ 上的自由秩 1 模。我们发现，这种模式与 SL_2，的 Witt 层上同调非常相似，其中基本表示对应欧拉类，伴随表示则对应它的平方。

对于 SL_3，，我们得到类似的图景。首先，更一般地说，我们注意到，群 G 的表示中，只有自对偶表示才可能出现在 $\mathrm{W}^*(G)$ 中；这已经排除了基本表示及其对偶表示。[32] 然而，对于任意半单群，伴随表示连同 Killing 型构成一个对称表示。在 SL_3，的情形下，Killing 型实际上是 $\mathrm{W}^*(\mathrm{SL}_3)$ 的一个多项式生成元（也就是说，SL_3 的每个不可约对称表示都是伴随表示的对称幂）。这恰好对应于 BSL_3 的 Witt 层上同调是一个由庞特里亚金类 $\mathrm{p}_2 \in \mathrm{H}^4(\mathrm{BSL}_3, \mathbf{W})$ 生成的多项式 $\mathrm{W}(F)$-代数。

---

[30]在这种情况下，我们有等价关系 $\mathrm{B}_{\mathrm{Zar}}G \simeq \mathrm{B}_{\mathrm{Nis}}G \simeq \mathrm{B}_{\text{ét}}G$，因此可以不再区分不同的分类空间的记号。[31]我们再次指出，[BW02] 中谱序列存在的条件对于分类空间并不成立。[32]一个简单的检验方法是：自对偶表示的权图关于原点呈点对称。

更一般地，对于 SL$_n$ ，我们应当期待如下对应关系：在上同调一侧，庞特里亚金类以及可能存在的欧拉类是 Witt 层上同调的生成元。在表示论一侧，它们应当对应于 W^0(SL$_n$) 的对称表示环的生成元，这些生成元由 $\bigwedge^k \rho \oplus \bigwedge^k \rho^\vee$ 的不可约直和项给出；对于偶数 $n = 2k$ ，W$^{n \bmod 4}$(SL$_n$) 中还有一个额外生成元，对应于中间外幂$\bigwedge^k \rho$。[33]

对于辛群 Sp$_{2n}$，Witt 层上同调与对称表示环之间也存在密切对应关系。在辛情形下，所有表示都是自对偶的。基本表示 ρ 按定义保持辛形式，因此，当 k 为奇数时，外幂 $\bigwedge^k \rho$ 保持辛形式；当 k 为偶数时，则保持对称形式。特别地，表示的 Witt 环 W*(Sp$_{2n}$) 是一个 W(F)-多项式代数，其生成元为 $\bigwedge^k \rho$ ，对应的次数分别为 0 和 2，其中 k 分别为偶数和奇数。这与 Witt 层上同调环的结构完全对应；后者是一个 W(F)-多项式代数，由 Borel 类 b$_i \in$ H^{2i}(BSp$_{2n}$, **W**) 生成，其中 $i = 1, \ldots\ldots, n$。

我们省略对 GL$_n$ 情形的讨论，因为这需要引入扭曲自对偶表示，以说明欧拉类为何是扭曲 Witt 层上同调中的一个元素。

11.2. **有限群**。我们简要说明有限群概形 G 在 $\mathbb{R}$ 上的分类空间，即配备对合 ι 的有限群 G 。对于平凡对合的情形，命题 8.8 给出了如下的一般描述。Linda Carnevale 也独立得到了这一描述。

命题 11.1。设 G 是一个分裂有限实群概形，即带有平凡对合 ι 的有限群 G 。那么，分类空间 B$_{\text{ét}}G$ 的实点描述如下：

$$(\mathrm{B}_{\text{ét}}G)(\mathbb{R}) \simeq \coprod_{\sigma \in \mathcal{I}} \mathrm{B}G^\sigma,$$

其中， $\mathcal{I}$ 表示满足 $\sigma^2 = 1$ 的元素 $\sigma \in G$ 的共轭类集合，而 $G^\sigma = \{g \in G \mid g\sigma = \sigma g\}$ 是对合 σ 的不动子群。

例 11.2。 在循环群 $G =$ 复数域$_{2n}$ 且具有平凡对合的特殊情形下，我们发现有两个 2 阶元共轭类，分别为 $\{1\}$ 和 $\{\gamma^n\}$，其中 $\gamma \in$复数域$_{2n}$ 的生成元。由于 G 是阿贝尔群，不动子群就是 G 。特别地，

$$(\mathrm{B}_{\text{ét}}G)(\mathbb{R}) = \mathrm{BC}_{2n} \sqcup \mathrm{BC}_{2n} \tag{21}$$

有两个连通分支。对于奇数阶群 n，只有一个共轭类，并且 (B$_{\text{ét}}G$)($\mathbb{R}$) =BC$_n$。□

例 11.3。 我们考虑一个具有非平凡对合的情形：带有复共轭作用的 $G = \mu_n$ 阶单位根群 n。其底层有限群为 C$_n$ ，对合为$g \mapsto g^{-1}$。在这种情况下，任意元素 $g \in$ C$_n$ 都是一个循环，因为 $gg^{-1} = 1$。由$h \in$C$_n$ 诱导的扭曲共轭作用将 $g \mapsto \iota(h)gh^{-1} = gh^{-2}$ 映到其平方陪集 $g\{h^2 \mid h \in$ C$_n\}$，即一个元素的扭曲共轭类就是其平方陪集。 n 为偶数时有两个类， n 为奇数时有一个类。循环 $g \in$ C$_n$ 的不动子群$K_g = \{h \in G \mid \iota(h)g = gh\}$ 由满足 $\iota(h)g = gh$ 的 h 构成；该集合与 g 无关，就是 2 阶元的集合。特别地，我们得到

$$(\mathrm{B}_{\text{ét}}\mu_n)(\mathbb{R}) = \begin{cases} * & n \text{ odd} \\ \mathrm{BC}_2 \sqcup \mathrm{BC}_2 & n \text{ even} \end{cases} \tag{22}$$

这与对 [dLM23] (n even) 的 B$_{\text{ét}}\mu_n$ 的 Chow–Witt 环所做的计算相符，也与 AndreaLachmann 的学位论文 [Lac25] (n odd) 相符。□

[33]注意，对于 SL$_4$， $\bigwedge^2 \rho$ 保持一个对称双线性型，这与例外同构 SL$_4 \cong$Spin(6) 有关。

例 11.4. 如果 G 是一个带有平凡对合的奇数阶群，那么 $(\mathrm{B}_{\text{ét}}G)(\mathbb{R}) = \mathrm{B}G$。在这种情况下，实循环类映射

$$\mathrm{H}^p(\mathrm{B}_{\text{ét}}G, \mathbf{I}^q) \otimes \mathbb{Z}[1/2] \to \mathrm{H}^p(\mathrm{B}G, \mathbb{Z})$$

这是一个同构，因为在奇异上同调中 2 可逆。很可能可以使用转移论证证明在$\mathbf{I}$-上同调中 2 也可逆。更一般地，有限群的分类空间（定义在实数域上）的$\mathbf{I}^q$-上同调中的奇挠，可以从其实点的奇异上同调中读出。□

注 11.5. 有限群为博雷尔特征型陈述提供了一个有趣的检验案例，参见 [DF23] 以及我们在第 *1.4* 节对猜想图景的讨论。一方面，我们可以考虑$\mathrm{B}_{\text{ét}}G$的 *Witt* 环，它应当与实表示环$\mathrm{RO}(G)$相关。另一方面，我们可以考虑$\mathrm{B}_{\text{ét}}G$的非分歧维特群，它将通过实循环类映射（在 *2* 可逆之后）与由群 G 中对合（即 *2* 阶元）的共轭类生成的自由阿贝尔群相关。在这种情况下，理解从实表示环到对合环的层化映射会很有意思。目前我们仅指出，*2* 阶元的共轭类数与不可约实表示的同构类数一般并不相同。例如，阶为 *8* 的二面体群D_8 有 *4* 个对合共轭类和 *5* 个不可约实表示，而四元数群Q_8 有 *2* 个对合共轭类和 *4* 个不可约实表示。[34]

11.3. **极大环面在 SL_2 中的正规化子**。现在我们要讨论 SL_2 中极大环面 $T \cong \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 的正规化子 $N = \mathrm{N}_{\mathrm{SL}_2}(T)$ 的实循环类映射与实实现；在此情形下，Witt 层上同调由 Levine 在 [Lev19] 中算出。

作为群，该正规化子位于一个（非分裂）正合列中

$$1 \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to \mathrm{N}_{\mathrm{SL}_2}(T) \to \mu_2 \to 1.$$

采用 T 的标准选取，即对角矩阵，正规化子的具体矩阵实现如下：

$$\mathrm{N}_{\mathrm{SL}_2}(T)(K) = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t^{-1} & 0 \end{pmatrix} \mid t \in K \right\}$$

正规化子的复点是 $\mathbb{C}^\times$ 经由 μ_2 的扩张，复共轭作用在 $\mathbb{C}^\times$ 上。

我们计算复共轭在 $N(\mathbb{C})$ 上的同伦不动点。出于趣味，我们进行显式的矩阵计算。$[N(\mathbb{C})\backslash *]^{\mathrm{hC}_2}$ 的对象是满足 $gg = 1$ 的元素 $g \in N(\mathbb{C})$。任一元素 $g \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 具有形式 $g = \mathrm{diag}(z, z^{-1})$，同伦不动点条件归结为 $zz = \|z\|^2 = 1$。因此同伦不动点的一个分支是单位圆 $\mathrm{S}^1 \subseteq \mathbb{C}^\times$。另一陪集中的元素具有如下形式

$$\begin{pmatrix} 0 & z \\ -z^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

具有 $z \in \mathbb{C}^\times$，对于这些元素，同伦不动点条件可简化为 $z = -z$。因此，同伦不动点的另一个分量由上述矩阵给出，其中 $z = b\mathrm{i}$、 $b \in \mathbb{R}$，它们在 $N(\mathbb{C})$ 内构成 $\mathbb{R}^\times$ 的一个副本。

接下来，我们计算 $[N(\mathbb{C})\backslash *]^{\mathrm{hC}_2}$ 中形如 $g \to hgh^{-1}$ 的态射，其中 $g, h \in N(\mathbb{C})$。我们进行逐案计算。若 $g = \mathrm{diag}(z, z^{-1})$ 与 $h = \mathrm{diag}(w, w^{-1})$ 属于 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$，则态射 $g \to hgh^{-1}$ 的目标将是如下对角矩阵：

$$\overline{w} z w^{-1} = \frac{\overline{w}^2}{\|w\|^2} z.$$

[34]这里的整体图景可能类似于 K 理论情形：对于群 C_2, , 表示环作为阿贝尔群的底层结构是秩为 2 的自由群，而 Chow 环在 0 次有一个 $\mathbb{Z}$ 直和项，并且在每个正次数中都有一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的副本。

特别地，该目标被一个范数为1的元素相乘；通过取平方根并取共轭，每个范数为1的元素都具有所规定的形式。这意味着这些态射连接来自分支 S^1 的任意同伦不动点。对于 $h \notin \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$，该态射的目标将是 $ww^{-1}z^{-1}$ 的对角矩阵。这又贡献了若干自同构，但并不扩大连通分支 S^1。

对于同伦不动点的另一个连通分支，令 g 为右上角元素是 z 的反对角矩阵，并令 $h = \mathrm{diag}(w, \overline{w^{-1}})$。于是 hgh^{-1} 是右上角元素为 $ww\overline{z}$ 的反对角矩阵。这意味着态射按复数的范数相乘；也就是说，一个态射将 $z = b\mathrm{i}$ 的同伦不动点与它的任意正倍数连接起来。若现在 h是右上角元素为 w 的反对角矩阵，则 hgh^{-1} 是右上角元素为 $-ww\overline{z}^{-1}$ 的反对角矩阵。特别是，除正倍数之外，这还交换了 $\mathbb{R}^\times$ 的两个连通分支，因为 $z = b\mathrm{i}$。

我们得出结论：同伦不动点的群胚有两个连通分支，其中一个由单位圆中的矩阵构成（即 S^1 的一个副本），另一个由右上角元素为纯虚数的反对角矩阵构成（即 $\mathbb{R}^\times$ 的一个副本）。

接下来需要计算这两个同伦不动点连通分支的自同构群。最简单的做法是考察单位矩阵（位于连通分支 S^1 中）以及矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

对于单位矩阵，其稳定子群为

$$\left\{ \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & w \\ -w^{-1} & 0 \end{pmatrix} \mid w \in \mathbb{R}^\times \right\}.$$

这个群本质上是正规化子的分裂 $\mathbb{R}$-形式，它可实现为 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 中环面的正规化子。它包含由一个外尔群代表元生成的 4 阶循环群 C_4，且后者是其形变收缩。对于虚矩阵，我们得到稳定子群

$$\left\{ \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w^{-1} \end{pmatrix} \mid w\overline{w} = 1 \right\} \cong \mathrm{S}^1.$$

在这种情况下，对角线外的矩阵不起作用，因为稳定子条件是 $ww = -1$，因此不可能满足。

综上所述，我们由此得到以下对应：

$$\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}(\mathrm{B}_{\text{ét}}\mathrm{N}_{\mathrm{SL}_2}(T)) \simeq \mathrm{BN}_{\mathrm{SL}_2}(T)(\mathbb{C})^{\mathrm{hC}_2} \simeq \mathrm{BS}^1 \sqcup \mathrm{BC}_4. \tag{23}$$

现在我们简要讨论正规化子情形下的实循环类映射，并将上述同伦不动点计算与 Marc Levine 在 [Lev19] 中对 Witt 层的计算联系起来。

要理解带扭曲系数的实循环类映射，我们需要理解皮卡群上的循环类映射。等变皮卡群由特征标给出，因此我们有

$$\mathrm{CH}^1(\mathrm{B}_{\text{ét}}\mathrm{N}_{\mathrm{SL}_2}(T)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

由符号表示 $\mathrm{N}^{\mathrm{SL}_2}(T) \twoheadrightarrow \mu_2 \hookrightarrow \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$生成。特别地，只有一种可能的非平凡扭曲。我们也可以轻松计算非平凡线丛的实现。在分支 BS^1 上，我们得到平凡线丛，因为诱导同态 $\mathrm{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^\times \hookrightarrow \mathrm{N}^{\mathrm{SL}_2}(T)(\mathbb{C}) \to \mu_2$ 是平凡同态。在分支 BC_4 上，我们得到一个对应于（非平凡）同态 $\mathrm{C}_4 \hookrightarrow \mathrm{N}^{\mathrm{SL}_2}(T) \to \mu_2$的非平凡线丛。

对于平凡扭曲，实循环类映射是一个态射

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{B}_{\text{ét}}\mathrm{N}_{\mathrm{SL}_2}(T), \mathbf{W}) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{BS}^1, \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{H}^*(\mathrm{BC}_4, \mathbb{Z})$$

根据定理 9.5，它在对 2 取逆后是一个同构。特别地，在 0 次，同伦不动点的两个连通分支由两个生成元 1 和 q（采用 [Lev19] 的记号）所对应。在 2 次，存在一个多项式生成元，由从 BSL_2，拉回的欧拉类给出；在实循环类映射下，它被检测于连通分支 BS^1 上。

对于非平凡扭曲 $\mathscr{L}$，我们得到一个态射

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{B}_{\text{ét}}\mathrm{N}_{\mathrm{SL}_2}(T), \mathbf{W}(\mathscr{L})) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{BS}^1, \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{H}^*(\mathrm{BC}_4, \mathbb{Z}(\mathscr{L})),$$

这在将 2 取逆后仍然是一个同构。由于线丛 $\mathscr{L}$ 在分支 BS^1，上的限制是平凡的，我们仍能在 $\mathrm{B}_{\text{ét}}$ $\mathrm{N}^{\mathrm{SL}_2}(T)$ 的扭曲 Witt 层上同调中看到 BS^1 的非扭曲上同调。在 ≥ 2 次时，这就是 $\mathrm{H}^*(\mathrm{BSL}_2,$ $\mathbf{W})$ 上由欧拉类 $j^*\mathrm{e}(\mathcal{T})$ 生成的自由秩一模，如 [Lev19] 所述。在 0 次时，BS^1 上平凡局部系统的整体截面对右侧的奇异上同调有所贡献。在实循环类映射下，这对应于 Witt 层上同调中的一个 0 次类；该类在 [Lev19]，的原始描述中缺失，但在 [DAn24，命题 3.16] 和 [Lev22，定理 5.1] 中有所描述。总而言之，我们发现，等变实循环类映射充分解释了 [Lev19] 中的 Witt 层上同调计算与实实现中的同伦不动点图景之间的关系。

最后，我们讨论特征类与对称表示环之间的联系。正如 [Lev19，第 6]，节所述，正规化子 $N = \mathrm{N}^{\mathrm{SL}_2}(T)$ 的不可约表示如下：平凡表示和符号表示；此外还有二维“二面体”表示，其中环面 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 以权重 n，$-n$ 作用，而 μ_2 则交换两个一维$\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$表示。平凡表示和符号表示显然是对称的。二面体表示本质上是 SL_2，表示的限制，这意味着定义表示的奇次幂（即环面以奇数权重作用的那些幂）是辛的，而偶次幂是对称的。

同样，这一模式与 [Lev19] 的 Witt 层上同调描述相吻合。两个一维表示对应于检测两个实分支的两个 0 次上同调类。二面体表示对应于正次数非扭曲同调类，而“扭曲二面体”表示（即二面体表示与符号表示的张量积）则对应于正次数扭曲上同调类。有趣的关系 $(1+\langle q\rangle)e = 0$ 似乎表明，μ_2 的正则表示与二面体表示的张量积带有双曲型。

11.4. 正交群O(1,1)。我们描述分裂正交群 $\mathrm{O}(1,1)^{\mathrm{hC}_2}$的同伦不动点空间 B O(1,1)。在这个简单情形下，我们再次进行显式矩阵计算。下一小节中，我们将使用命题 8.8 中的公式处理一般的（特殊）正交群情形。

命题11.6。令 $G = \mathrm{O}(1,1)$ 为 $\mathbb{R}$上的分裂正交群，并考虑带有相应反全纯对合的 $\mathrm{O}(1,1;\mathbb{C})$。则有如下等价：

$$\mathrm{BO}(1,1;\mathbb{C})^{\mathrm{hC}_2} \simeq \mathrm{BO}(1,1) \sqcup \mathrm{BO}(2) \sqcup \mathrm{BO}(2).$$

右侧的正交群是实数域上的正交群。

证明。为证明这一点，我们考虑 $\mathrm{O}(1,1;\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^\times \rtimes \mu_2$，并根据 $\mathbb{C}^\times$-陪集分解进行分类讨论。[35] 属于 $-1 \in \mu_2$ 所对应陪集的一个元素可写成 Jg，其中 g 属于 $1 \in \mu_2$ 所对应的陪集，且 $J = \mathrm{diag}(1,-1)$。

我们首先确定可能的对象。对于 $z \in \mathbb{C}^\times$，条件 $\mathrm{N}(z)^2 = zz = 1$ 意味着$z \in \mathrm{S}^1$。在另一个陪集中，我们有 $g = Jz$ 与 $z \in \mathbb{C}^\times$，并且 $JzJz = 1$ 蕴含 $z = z$，即 $z \in \mathbb{R}^\times$。

现在我们要确定态射。我们首先注意到，因为态射具有形式 $g \to hgh^{-1}$，所以不同陪集中的同伦不动点之间不可能存在态射。

因此，令 $g \in \mathrm{S}^1$，并令 $h \in \mathbb{C}^\times$。则 $hgh^{-1} = hh^{-1}g = h^2\,\mathrm{N}(h)^2\,g$。因此，我们可以将范围限制为 $h \in \mathrm{S}^1$，此时态射具有如下形式：$g \to \frac{g}{h^2}$。因此，任意两个 g，g' 都可以通过一个态射相连，利用 $h = \sqrt{\frac{g}{g'}}$。由此，我们得到一个连通分支。（我们也可以看到

[35] 注意，O(1，1) 与 $\mathrm{N}^{\mathrm{SL}_2}(T)$ 都是形如 $1 \to \mathbb{C}^\times \to G \to \mu_2 \to 1$ 的扩张，但前者是分裂的，而后者是非分裂的。

对于 $h = Jh'$， $h' \in \mathbb{C}^\times$，不存在其他额外的等同。）为了确定稳定子群，我们可以选择一个形式特别简单的代表元 $g \in \mathsf{S}^1$ ——单位矩阵。我们看到

$$K_{\mathrm{id}} = \{h \in \mathrm{O}(2;\mathbb{C}) \mid \overline{h} = h\} = \mathrm{O}(1,1;\mathbb{R}).$$

现在令 $g = J\tau$ for $\tau \in \mathbb{R}^\times$。对于 $h \in \mathbb{C}^\times$，我们有

$$\overline{h}J\tau h^{-1} = J\overline{h}^{-1}\tau h^{-1} = J\tau\overline{h}^{-1}h^{-1} = J\tau \mathrm{N}(h)^{-1}.$$

这意味着，在 $\mathbb{R}^\times$ 的同一个连通分支中，任意两个 τ, τ' 都可以通过一个态射连接（因为 $\mathsf{N}(h) > 0$）。另一方面，我们也可以考虑 $h = Jh'$ for $h' \in \mathbb{C}^\times$ 并计算

$$\overline{h}J\tau h^{-1} = J\overline{h'}J\tau(h')^{-1}J = \overline{h'}^{-1}\tau(h')^{-1}J = \overline{h'}^{-1}(h')^{-1}J\tau^{-1} = \mathrm{N}(h')^{-1}J\tau^{-1}.$$

同样，这使得同一连通分支中的同伦不动点可以连接起来。然而， $\mathbb{R}^\times$ 不同连通分支中的同伦不动点无法通过态射连接。特别地，我们得到两个连通分支。对于相应的稳定子群，我们同样可以选取特别简单的代表元，即 $\mathsf{diag}(1,-1)$ 和 $\mathsf{diag}(-1,1)$。在第一种情况下，我们得到 $h\,\mathsf{diag}(1,-1) = \mathsf{diag}(1,-1)h$ 化简为 $h = h^{-1}$，因此

$$K_{\mathrm{diag}(1,-1)} = \left\{h \in \mathrm{O}(2;\mathbb{C}) \mid \overline{h} = h^{-1}\right\} = \mathrm{O}(2;\mathbb{R}),$$

另一种情形 $\mathsf{diag}(-1,1)$ 亦类似。 □

11.5. 正交群与二次型的特征类。 我们现在考虑正交群 $\mathsf{O}(p,q)$ 与特殊正交群 $\mathsf{SO}(p,q)$ 的一般情形。在此一般性下，我们将运用命题 8.8 中的描述来理解其几何分类空间的实实现。我们首先回顾：同伦不动点空间的连通分支对应于不同的二次型，而一个同伦不动点的稳定子群是相应二次型的自同构群。综合以上，我们发现同伦不动点空间是不定（特殊）正交群的不交并，这为 Witt 层上同调提供了初步信息。

下述命题描述了 $\mathsf{SO}(p,q;\mathbb{C})$ 上复共轭的同伦不动点空间的连通分支。当然，所有特殊正交群在复数上彼此同构，但该记号意在表明：$\mathsf{SO}(p,q;\mathbb{C})$ 上的复共轭是由该群作为 $\mathsf{SO}(p,q;\mathbb{R})$ 的复化所诱导的。

命题 11.7。 $\mathrm{BSO}(p,q;\mathbb{C})^{\mathrm{hC}_2}$ 的连通分支与 $\mathbb{R}$ 上维数为 n且判别式与符号差为(p,q)的二次型具有相同判别式的二次型的等价类一一对应。更确切地说，假设 $q \equiv pq$ 模*2*，则自然包含

$$\begin{aligned}\{\mathrm{diag}(1_r,-1_s) \mid r+s = p+q \ \textit{and}\ s \equiv pq \bmod 2\} &\hookrightarrow \mathrm{BSO}(p,q;\mathbb{C})^{\mathrm{hC}_2}\\ \mathrm{diag}(1_r,-1_s) &\mapsto \mathrm{diag}(1_r,-1_s)\cdot\mathrm{diag}(1_p,-1_q)\end{aligned}$$

诱导出到 $\pi_0\mathrm{BSO}(p,q;\mathbb{C})^{\mathrm{hC}_2}$上的一个双射。

证明。 由命题 8.8 中的公式可知，同伦不动点空间的连通分支与第一伽罗瓦上同调集 $\mathrm{H}^1(\mathsf{C}_2, \mathsf{SO}(p,\ q))$一一对应。这些就是实群 $\mathsf{SO}(p,\ q)$ 的强内形式。用满足判别式条件的二次型等价类来刻画它们是经典结果，参见例如 [Ser02，第 III.3 节2], 或 [AT18，例 8.20]。

关于给出同伦不动点代表元的更精确表述，我们首先注意到，这些矩阵显然是同伦不动点，因为它们满足 $g\sigma(g) = 1$。这个映射的描述可能看起来有些奇怪，但它会将一个描述具有相同判别式的二次型 φ 的对角矩阵映射为我们需要用来扭转给定二次型（$1_p,\ -1_q$）的矩阵，从而得到 φ。例如，矩阵 $\mathsf{diag}(1_p,\ -1_q)$ 会映射为单位矩阵；在同伦不动点空间中，它恰好对应于符号差为（$p,\ q$）的给定二次型。

我们简要回顾如何利用同伦不动点中的矩阵来改变 $\mathbb{R}$上的二次型。复共轭 σ 与该二次型／正交

群的符号差 $(p,\ q)$相关。对于实向量 x，即在 σ作用下不变的向量，我们由此得到实二次型的值：$x^{\mathrm{t}}\cdot\mathbf{diag}(1_p,\ -1_q)\cdot x$。给定陈述中的对角矩阵 J，通过扭曲／共轭，我们得到另一个对合 $g\mapsto J\sigma(g)J$。此对合下的“实”向量，是指在 J 有 -1项的位置具有纯虚连通分支的向量。对于这样的向量 x，我们可以将其视为 $\sqrt{J}y$，其中 y 是实向量，由此得到 $x^{\mathrm{t}}\cdot\mathbf{diag}(1_p,\ -1_q)\cdot x = y^{\mathrm{t}}\cdot J\,\mathbf{diag}(1_p,\ -1_q)\cdot y$。类似地，此对合下不变的矩阵，在与 J的 -1项对应的行和列中会有纯虚项；去掉这些虚数倍数后，我们得到保持由 $J\,\mathbf{diag}(1_p,\ -1_q)$给出的形式的实矩阵。这说明，二次型与同伦不动点之间的对应关系正如所述。□

同样的论证也可用于描述正交群情形下同伦不动点空间的代表元。

命题 11.8. $\mathrm{BO}(p,q;\mathbb{C})^{\mathrm{hC}_2}$ 的连通分支与 $\mathbb{R}$ 上维数为 n的二次型等价类一一对应。更准确地说，对于$\mathrm{O}(p,q;\mathbb{C})$，自然包含

$$\{\mathrm{diag}(1_r,-1_s)\mid r+s=n\}\hookrightarrow \mathrm{BO}(p,q;\mathbb{C})^{\mathrm{hC}_2}$$

诱导出到 $\pi_0\mathrm{BO}(p,q;\mathbb{C})^{\mathrm{hC}_2}$上的一个双射。

现在我们已经得到了连通分支的具体代表元，可以据此明确描述这些代表元的稳定子群。

命题 11.9. 对于 $J=\mathrm{diag}(1_r,-1_s)\in\mathrm{BO}(p,q;\mathbb{C})^{\mathrm{hC}_2}$，其稳定子群为

$$K_J=\{g\in G\mid \sigma(g)J=Jg\}.$$

这是一个正交群，是与$\mathrm{diag}(1_p,-1_q)\cdot\mathrm{diag}(1_r,-1_s)$对应的二次型的自同构群。特殊正交群也有类似的结论。

证明。 K_J 的定义方程表明，它是关于新对合$g\mapsto J\sigma(g)J$的不动子群。□

现在，我们可以结合前面关于连通分支和稳定子的信息，更精确地表述命题 8.8 中关于（特殊）正交群的同伦不动点的描述。

定理 11.10。 </style}设 (S)O(p,q) 为符号差为(p,q)的实（特殊）正交群。假设 $q\equiv pq$ 模2。那么以下陈述描述了 G的复化的同伦不动点空间：

$$\mathrm{BO}(n;\mathbb{C})^{\mathrm{hC}_2}\simeq\coprod_{p+q=n}\mathrm{BO}(p,q)$$

$$\mathrm{BSO}(p,q;\mathbb{C})^{\mathrm{hC}_2}\simeq\coprod_{r+s=p+q;\ s\equiv pq\bmod 2}\mathrm{BSO}(r,s).$$

由于迄今尚未计算正交群的 Witt 层上同调，上述结果让我们得以窥见预期的情况。利用等变实循环类映射，我们得到关于 $\mathbb{R}$上具有半整数系数的正交群分类空间的 Witt 层上同调的初步计算：

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{Zar}}(\mathrm{B}_{\text{ét}}\mathrm{O}(n),\mathbf{W}[1/2])\cong\bigoplus_{p+q=n}\mathrm{H}^*_{\mathrm{sing}}(\mathrm{BO}(p,q),\mathbb{Z}[1/2]).\tag{24}$$

作为一项特殊推论，Witt 层上同调包含给定正交群的所有实形式的信息，以及不定正交丛的相应特征类。

我们可以这样理解：假设有一个实概形 $X/\mathbb{R}$ 以及一个 O(n)-扭子 E/X。对于 $X(\mathbb{R})$ 的每个连通分支， E 的实点构成一个不定正交群 O($p,\ q$) 的扭子，但各个 p 和 q 在 $X(\mathbb{R})$ 的不同连通分支上可能有所不同。此外，相关的特征类及其次数也随 $(p,\ q)$ 而变化。它们

始终是庞特里亚金类和欧拉类，但具体出现哪些类取决于 $(p,\ q)$。在这一图景中，我们可以将 $\mathrm{H}^0(\mathrm{B}_{\text{ét}}\mathrm{O}(n),\ \mathbf{W}[1/2]) \cong \mathbb{Z}[1/2]^{n+1}$ 这一事实理解为：具有不同 $(p,\ q)$ 的连通分支可以由 0 次上同调类区分。考虑扭曲上同调，或 $\mathrm{B}_{\text{ét}}\mathrm{SO}(p,\ q)$ 的 Witt 层上同调，我们还发现，当 p 或 q 为偶数时，存在与 $(\mathrm{S})\mathrm{O}(p,\ q)$-丛的欧拉类相对应的高次代数类。这些类并非秩为 n 的二次型的代数欧拉类，但它们通过稳定化与较小秩二次型的代数欧拉类相关联。

可以证明，这确实是特征为 $\neq 2$ 的一般基域上正交群的 Witt 层上同调公式（几乎如此）。事实上，本文主要源于试图理解 $\mathrm{O}(n)$ 在 $n \leq 4$ 上的小秩计算。借助上述同伦不动点描述得到的 Witt 层上同调环候选描述，可以按照 [RV06] 中的论证，利用 Vistoli 分层方法对正交群的 Witt 层上同调进行归纳计算。在这一论证中，某些边界映射会在一般域上产生 Witt 层上同调中的 2-挠元，而这在实数域上并不可见。

最后，我们简要谈谈对称表示和 0 次 Witt 层上同调。对于特殊正交群，定义表示按定义保持一个对称形式。因此，定义表示的所有外幂也都保持对称形式。此外，$\mathrm{SO}(2n)$ 还有半自旋表示；当 n 为偶数时，这些表示是自对偶的。特别地，对称表示环与通常的表示环非常接近，这与李群情形下 $\mathrm{R}(\mathrm{SO}(n))$ 和 $\mathrm{RO}(\mathrm{SO}(n))$ 之间众所周知的密切关系十分相似。

0 次维特层上同调已在 [GMS03 的定理 27 中计算。16],正交群的结果为

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{B}_{\text{ét}}\mathrm{O}(n), \mathbf{W}) \cong \mathrm{W}(F)^{\oplus(n+1)},$$

右侧的生成元对应于基本表示的外幂，并将其视为分类空间上的非分歧二次型。增广映射 $\mathrm{W}^*(G) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{B}_{\text{ét}}\mathrm{O}(n),\ \mathbf{W})$ 是将基本表示的外幂映射到 Witt 层上同调中相应类的环同态。

类似地，对于 $\mathrm{SO}(n)$，0 次维特层上同调是一个自由的 $\mathrm{W}(F)$-模，其秩取决于 n。对于 $n = 2m+1$，秩为 $m+1$，生成元是基本表示外幂的前一半。对于 $n = 4m$ 和 $n = 4m+2$，秩为$2m+1$。前一种情形下，生成元是外幂的前一半以及一个半自旋表示。后一种情形下，半自旋表示并不对称，因此我们只有基本表示的前 $2m+1$ 个外幂。

11.6.关于自旋群和例外群的上同调不变量的注记。利用命题 8.8 中的公式，我们还可以借助 [AT18] 中对伽罗瓦上同调集的计算，轻松推导出许多其他实群的 Witt 层上同调不变量的信息。基本上，利用定理 9.5 中关于等变实循环类映射的结果，同构

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{B}_{\text{ét}}G, \mathbf{W}) \otimes \mathbb{Z}[1/2] \to \mathrm{H}^0((\mathrm{B}_{\text{ét}}G)(\mathbb{R}), \mathbb{Z}[1/2]) \cong \mathbb{Z}[1/2]\left(\pi_0\left((\mathrm{B}_{\text{ét}}G)(\mathbb{R})\right)\right)$$

意味着 $\mathrm{H}^0(\mathrm{B}_{\text{ét}}G,\ \mathbf{W})$ 的秩（作为 $\mathrm{W}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}$ 上的模）可以等同于其实实现 $\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}(\mathrm{B}_{\text{ét}}G)$ 的连通分支数。特别地，$(\mathrm{B}_{\text{ét}}G)(\mathbb{R})$ 的连通分支数等于 G 的 $\mathbb{Z}[1/2]$-线性无关 Witt 层上同调不变量的数量，关于群的 Witt 不变量的讨论参见 [GMS03] 。我们首先表述这一观察：

命题 11.11。 设 G 是 $\mathbb{R}$ 上的分裂约化群。则存在一个同构

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{B}_{\text{ét}}G, \mathbf{W}[1/2]) \cong \mathrm{H}^0(\mathrm{B}G(\mathbb{C})^{\mathrm{hC}_2}, \mathbb{Z}[1/2]) \cong \mathbb{Z}\langle \mathrm{H}^1(\mathrm{C}_2, G(\mathbb{C}))\rangle.$$

因此，除去挠元后， G-扭子在 $\mathbb{R}$ 上的 *Witt* 层上同调不变量的数量，等于中心不变量平凡的 $G(\mathbb{R})$ 的强实形式的数量$\#\mathrm{H}^1(\mathrm{C}_2,\ G(\mathbb{C}))$ 。

因此，对于任意定义在 $\mathbb{R}$上的单连通几乎单群 G ，相关的连通分支数目（$\mathrm{B}_{\text{ét}}G)(\mathbb{R})$，或者说强实形式，可以从 [AT18], 中的第 1093/1094 页表格中读出。对于自旋群，我们得到以下结果（这里只详细说明自旋群的分裂形式）：

推论 11.12。 对于定义在 $\mathbb{R}$上的分裂自旋群，我们可以从 [AT18]中的表格得到以下 *Witt* 层上调不变量（模去挠元）的公式:

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}\,\mathrm{H}^0(\mathrm{B}_{\text{ét}}\,\mathrm{Spin}(n,n+1),\mathbf{W}) \cong \left\lfloor \frac{2n+1}{4} \right\rfloor + \begin{cases} 2 & n \equiv 0,3 \bmod 4 \\ 1 & n \equiv 1 \bmod 4 \\ 0 & n \equiv 2 \bmod 4 \end{cases} \tag{25}$$

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}\,\mathrm{H}^0(\mathrm{B}_{\text{ét}}\,\mathrm{Spin}(n,n),\mathbf{W}) \cong \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \begin{cases} 3 & n \equiv 0 \bmod 4 \\ 1 & n \equiv 1 \bmod 4 \\ 0 & n \equiv 2,3 \bmod 4 \end{cases} \tag{26}$$

由于自旋群的 Witt 层上同调不变量尚未在一般情形下得到确定，实循环类映射似乎至少为这些上同调不变量提供了一些初步信息。

备注 11.13. 我们将由[AT18] 中的表格推断出的连通分支数目，与已知情形中自旋群$\mathrm{Spin}(n)$ 在 $n \leq 12$时的模 *2* 上同调不变量数目作了比较，见 [Gar09，表21B第62], 页；亦见 *Weinzierl* 的学位论文[Wei23]中的讨论。这些数目对所有 $n \leq 11$似乎都相符，但有两点需要注意。首先，常值形式$\langle 1\rangle$ 作为 $\mathrm{H}^0(\mathrm{B}_{\text{ét}}G,\mathbf{W})$ 的生成元，在我们上述公式中会被计为上同调不变量，但在 [Gar09], 中并未计入，从而导致数目始终相差*1*。其次，模 *2* 上同调不变量更应与由 *Witt* 层上同调不变量上的基本理想过滤所产生的 *Milnor K*理论层的整体截面相关，这可能会导致差异。这种情况出现在$\mathrm{Spin}(12)$，其中强实形式的数目与模 *2* 上同调不变量的数目并不一致。不过请注意， [Gar09]中的计算假定$\sqrt{-1}$ 包含在基域中。特别地，上述文献中的结果实际上并不适用于实数，而这一差异也可能是由于$\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{C}$ 的上同调不变量数目不同所致。

最后补充一点，利用 [AT18] 第 1093/1094 页的表格，也可以将推论 11.12 这类结果推广到所有单连通例外群。对于 $\mathrm{B}_{\text{ét}}\mathrm{G}_2$ ，全局 Witt 层截面的秩为 2；对于 $\mathrm{B}_{\text{ét}}\mathrm{F}_4$ ，秩为 3，这与 Serre 在 [GMS03, Example 27.20] 中的计算一致。对于 G_2, ，额外的生成元是范数形式；对于 F_4, ，除 $\langle 1\rangle$ 外的两个生成元是通常称作 f_3 和 f_5 的 Pfister 形式。

作为一项新结果，我们从 Adams–Taïbi 表格推得，分裂群 E_6 型在 $\mathbb{R}$ 上的内形式与外形式分别满足 $\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}\,\mathrm{H}^0(\mathrm{B}_{\text{ét}}\mathrm{E}_6,\mathbf{W})$ 为 2 和 3。内形式与外形式之间的这一差异，或许与 Kameko–Tezuka–Yagita [KTY12] 对 Milnor模2上同调不变量的一个观察有关。或许还可以进一步探究，能否将 $\mathrm{H}^0(\mathrm{B}_{\text{ét}}\mathrm{E}_6,\mathbf{W})$ 中的未分歧二次型明确写出；它们很可能源自适当的对称表示。

无论如何，强实形式与上同调不变量（无论是针对 Witt 层还是模2 Milnor K理论层）之间可能存在的联系，似乎是一个值得进一步探讨的有趣问题。

11.7. 商栈上向量丛的实现。 我们简要讨论商栈上（对称）向量丛的实现，并概述如何利用命题 8.8 对其进行更明确的描述。在最简单的等变线丛情形中，这描述了与扭曲系数相关的循环类映射 $\mathrm{CH}^1_G(X) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}[G\backslash X],\ \mathbb{F}_2)$。在

等变对称向量丛的情形中，这将有助于把 $[G\backslash X]$ 的上同调中的特征类与其在 $\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}[G\backslash X]$ 上的拓扑对应物联系起来。

我们先讨论向量丛。将向量丛视为商栈 $[G\backslash X]\to[\mathrm{GL}_n\backslash *]$ 之间的态射后，我们只需将实实现函子应用于这个态射。正如下面第 11 节所讨论的，$\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}([\mathrm{GL}_n\backslash *])\cong \mathrm{BGL}_n(\mathbb{R})$。因此，栈上向量丛的实实现是一个态射

$$\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}([G\backslash X])\to \mathrm{BGL}_n(\mathbb{R}),$$

也就是说，它是商栈的实实现上的实向量丛。

下面我们更详细地说明，在代数群 G 的分类栈 $[G\backslash *]$ 情形下，如何计算这一实现。在这种情况下，任意等变向量丛都是由万有 G-扭子和表示 $\rho\colon G\to \mathrm{GL}_n$ 关联得到的向量丛。我们将 $[G\backslash *]$ 上的代数向量丛记作 V_ρ。根据命题 8.8，$[G\backslash *](\mathbb{R})$ 的每个连通分支都对应于 G 的一个强实形式。或者说，实现的连通分支由 $G(\mathbb{C})$ 上反全纯对合 σ 的（共轭类）参数化，而对应于 σ 的连通分支是 $\mathrm{B}G(\mathbb{C})^\sigma$。现在，对于 $G(\mathbb{C})$ 上反全纯对合 σ 的每个共轭类，都存在一个代表元，使得 $G(\mathbb{C})\to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 与对合（G 上的 σ 以及 GL_n 上的复共轭）相容。这诱导出一个表示 $\rho_\sigma\colon G(\mathbb{C})^\sigma\to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$（在共轭意义下良定义），而诱导的态射 $\mathrm{B}G(\mathbb{C})^\sigma\to \mathrm{BGL}_n(\mathbb{R})$ 将连通分支 $\mathrm{B}G(\mathbb{C})^\sigma$ 上的实实现 $\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}(V_\rho)$ 分类，其中该连通分支是 $\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}[G\backslash *]$.[36]

例 11.14。这一情形的一个有趣例子，是对 SL_2 中极大环面的正规化子 N 的分类空间 $\mathrm{B}_{\text{ét}}N$ 上等变线丛的实现。第 11.3 节对此有更详细的讨论。此处的皮卡群为 $\mathrm{CH}^1_N(*)\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，而非平凡线丛由符号表示 $N\to\mu_2\hookrightarrow\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 诱导。第 11.3 节对同伦不动点的显式计算表明，这里有两个连通分支：BS^1 和 BC_4。群 S^1 嵌入为由复数模为 1 的元素组成的对角矩阵，而群 C_4 由外尔群元素生成。因此显然，该线丛的实实现是 BS^1 上的平凡线丛，以及 BC_4 上对应于 C_4 的符号表示的线丛。这个线丛在 BC_4 上（因而在整个空间上）非平凡，却在连通分支 BS^1 上平凡；这意味着来自 BS^1 的非扭曲欧拉类也与扭曲的 Witt 层上同调相关。更多详情请参见第 11.3 节。□

现在我们可以对对称向量丛考虑一个类似的问题，将其视为商栈的态射 $[G\backslash X]\to[\mathrm{O}(n)\backslash *]$。注意，由于商栈的 ´平展局部性质，在我们的正交群 $\mathrm{O}(n)$ 的定义中选择哪一个具体的二次型（秩为 n，定义在基域 F 上）并不重要。如第 11 节所讨论的，$\mathrm{B}_{\text{ét}}\mathrm{O}(n)$ 的实现是不定正交群在 $\mathbb{R}$上的分类空间的不交并。这意味着，对秩为 n 的等变对称向量丛应用实实现会产生一个态射

$$\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}([G\backslash X])\to \coprod_{p+q=n}\mathrm{BO}(p,q), \tag{27}$$

这意味着商栈的实现的每个分支上都有一个 $\mathrm{O}(p,q)$-丛，其符号差 (p,q) 取决于该分支。

同样，在分类空间的情形下，等变对称向量丛就是群 G 的对称表示 $\rho\colon G\to\mathrm{O}(n)$。表示 ρ 诱导出伽罗瓦上同调群之间的态射 $\mathrm{H}^1(\mathrm{C}_2;G)\to\mathrm{H}^1(\mathrm{C}_2;\mathrm{O}(n))$。这个态射决定了态射 (27) 在 π_0 上诱导的映射，也就是说，它决定了 $\mathrm{Re}_{\mathbb{R}}(\mathrm{B}_{\text{ét}}G)$ 的给定分支将映到 $\mathrm{BO}(p,\ q)$ 的哪个分支。和之前一样，如果 σ 是与某个

[36]注意，这样一来，代数向量丛的实实现将 G的不同强实形式上的实向量丛联系起来。我们想知道，这一观察对于实李群的表示的朗兰兹分类以及Langlands参数空间有何意义。

G 的强实形式相对应的反全纯对合，那么相关分支上的正交丛将由态射 $\mathrm{B}G(\mathbb{C})^\sigma \to \mathrm{BO}(p,\ q)$ 分类。这个态射由表示 $G(\mathbb{C})^\sigma \to \mathrm{O}(p,\ q)$ 诱导，该表示由 $\rho \otimes \mathbb{C}$ 经相关反全纯对合的不动子群所得到。

上述描述仍未能充分说明给定的 $\mathrm{O}(n)$ 对称表示在每个连通分支上的实现具体是什么样的。简而言之，代数群 $\mathrm{O}(n)$ 的基本表示将实现为李群 $\mathrm{O}(p,\ q)$ 在连通分支 $\mathrm{BO}(p,\ q)$ 上的基本表示。特别地，$\mathrm{BO}(p,\ q)$ 上的二次丛的符号差为 $p-q$，这使我们能够根据对称表示的符号差来区分 $\mathrm{B}_{\text{ét}}\mathrm{O}(n)$ 的实实现的连通分支。由于 $\mathrm{O}(n)$ 的所有对称表示都是由基本表示通过外幂和对称幂构造而成，这就说明了如何计算 $\mathrm{B}_{\text{ét}}\mathrm{O}(n)$ 上对称向量丛的实现。关于对称表示实现的更详细说明或许会在别处给出；目前，我们讨论一个基本例子，即群 $\mathrm{O}(1) = \mu_2$。

例 11.15。 考虑 μ_2上的符号表示，将其配备二次型 $\langle 1\rangle$，视为 $\mathbb{R}$上的线性群 μ_2 的对称表示。现在我们可以进行复化，考虑 $(\mathbb{C}^n \setminus \{0\})/\mu_2$上的关联向量丛，并计算其在复共轭下不动点轨迹上的限制映射。

为了计算该向量丛的限制映射，我们希望取商 $((\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{C})/\mu_2$上复共轭的不动轨迹；当然， μ_2 通过符号表示作用于所有连通分支。在其中，当且仅当所有坐标均为实数或所有坐标均为纯虚数时，一个点才是不动点。

我们首先考虑不动轨迹中所有坐标均为实数的连通分支。该实现是 $\mathbb{RP}^{n-1}$上的一个实线丛；由于 μ_2 通过符号表示作用于 $(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}$中的 $\mathbb{C}$分量，因此该线丛是非平凡的。该线丛还带有一个二次型，它由 $\mathbb{C}$分量上的型 $x \mapsto x^2$ 诱导而来。由于实线丛上的型是通过限制到实轴 $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ 得到的，因此，带有型 $\langle 1\rangle$ 的符号表示的实实现，在所有坐标均为实数的连通分支上再次是带有型 $\langle 1\rangle$的符号表示。

现在我们考虑另一个连通分支上的丛，其中所有坐标都是虚数。在这种情况下， $\mathbb{RP}^{n-1}$ 上的实线丛的总空间由 $((\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{C})/\mu_2$ 中所有坐标均为虚数的那些点组成。同样，由于 μ_2 在 $\mathbb{C}$ 上通过符号表示作用，这是 $\mathbb{RP}^{n-1}$ 上的非平凡丛。此实丛上的二次型现在是将形式 $x \mapsto x^2$ 限制到虚轴 $\mathrm{i}\mathbb{R}$ 上所得的限制映射。这意味着，代数对称线丛的实实现现在对应于带有形式 $\langle -1\rangle$ 的符号表示。

我们看到，带有对称型的代数丛的实实现，在实实现的不同连通分支上可能具有不同的符号差。□

References

[Aco20] M. Acosta. 关于 GIT 商与实形式。预印本，arXiv:2005.10512。[Ada13] J. Adams. 实群的伽罗瓦上同调。arXiv:1310.7917。[AdGF25a] E. Ambrosi 和 O. de Gaay Fortman. 关于实代数栈的拓扑。预印本，arXiv:2504.02720。[AdGF25b] E. Ambrosi 和 O. de Gaay Fortman. 带对合的拓扑群胚与实代数栈。预印本，arXiv:2504.02760。[AF15] A. Asok 和 J. Fasel. 次特征类与欧拉类。《数学文献》2015年特别卷：Alexander S. Merkurjev 六十寿辰纪念，7–29。[AHW17] A. Asok、M. Hoyois 和 M. Wendt. $\mathbb{A}^1$同伦论中的仿射可表示性结果 I：向量丛。《杜克数学杂志》166（2017年），第10期，1923–1953。[Ana15] A. Ananyevskiy. 射影丛定理的特殊线性版本。《组合数学》151（2015年），461–501。[AT18] J. Adams 和 O. Ta¨ıbi. 实群的伽罗瓦上同调与嘉当上同调。《杜克数学杂志》167（2018年），第6期，1057–1097。[Bac18] T. Bachmann. 动机与实 ´etale 稳定同伦论。《组合数学》154（2018年），第5期，883–917。

[BC12] P. Balmer 和 B. Calm`es. 总 Witt 群的基与宽松相似。《代数与应用杂志》11，第3期（2012年），1250045。[BG10] R.R. Bruner 和 J.P.C. Greenlees. 有限群的连通实 K 理论。《数学调查专著》169，美国数学会，2010年，vi+318 页。[BH61] A. Borel 和 A. Haefliger. 解析空间的基本同调类。《法国数学会公报》89（1961年），461–513。[BH20] T. Bachmann 和 M.J. Hopkins. 域上的 η-周期动机稳定同伦论。预印本，arXiv:2005.06778。[BL94] J. Bernstein 和 V. Lunts. 等变层与函子。《数学讲义》1578，施普林格出版社，1994年。[BN13] D. Ben-Zvi 和 D. Nadler. 环空间与表示。《杜克数学杂志》162（2013年），第9期，1587–1619。[Bre90] L. Breen. 双扭子与非阿贝尔上同调。载于：《格罗滕迪克纪念文集》第一卷，401–476。《数学进展》86，Birkh¨auser，1990年。[BV21] R. Bezrukavnikov 和 K. Vilonen. 准分裂实群的 Koszul 对偶。《数学发明》226（2021年），第1期，139–193。[BW02] P. Balmer 和 C. Walter. 正则概形的 Gersten–Witt 谱序列。《高等师范学校科学年刊》35（2002年），第4辑，第1期，127–152。[BW20] O. Benoist 和 O. Wittenberg. 关于实代数簇的整 Hodge 猜想 I。《数学发明》222（2020年），第1期，1–77。[BW23] T. Bachmann 和 K. Wickelgren. 欧拉类：六函子形式体系、对偶、整性与完全交的线性子空间。《朱西厄数学研究所杂志》22（2023年），第2期，681–746。[Car91] G. Carlsson. 等变稳定同伦与 Sullivan 猜想。《数学发明》103 3, 497 1991 525 ( ), no. – .[CDH20] U. Choudhury、N. Deshmukh 和 A. Hogadi. 代数栈的 Nisnevich 动机。《K 理论年刊》8:2（2023年），245–273，arXiv:2012.13304。[CTP90] J.-L. Colliot-Th´el`ene 和 R. Parimala. 代数簇的实分支与 ´etale 上同调。《数学发明》101（1990年），第1期，81–99。[DAn24] A. D'Angelo. SLn-定向理论的虚局部化公式。预印本，arXiv:2411.06570。[DF23] F. D´eglise 和 J. Fasel. Borel 特征。《朱西厄数学研究所杂志》22（2023年），第2期，747–797。[DI04] D. Dugger 和 D. C. Isaksen. 拓扑超覆盖与 $\mathbb{A}^1$-实现。《数学杂志》246（2004年），第4期，667–689。[dLM23] A. di Lorenzo 和 L. Mantovani. 椭圆曲线模栈的等变 Chow–Witt 群。《数学文献》28（2023年），第2期，315–368，arXiv:2107.02305。[EG98] D. Edidin 和 W. Graham. 等变交理论。《数学发明》131（1998年），第3期，595–634。[Fok18] C.-K. Fok. 紧李群的等变扭曲 Real K 理论。《几何与物理杂志》124（2018年），325–349。[Gar09] S. Garibaldi. 上同调不变量：例外群与自旋群。附录由 Detlev W. Hoffmann 撰写。《美国数学会回忆录》200（2009年），第937期，xii+81 页。[Gir71] J. Giraud. 非阿贝尔上同调。《数学科学基础丛书》第179卷。施普林格出版社，柏林—纽约，1971年。ix+467 页。[GMM17] Bertrand J. Guillou、J. Peter May 和 Mona Merling. 等变分类空间的范畴模型。 *Algebr. Geom. Topol.*，17(5):2565–2602，2017年。[GMS03] S. Garibaldi、A. Merkurjev 和 J.-P. Serre. 伽罗瓦上同调中的上同调不变量。《大学讲义丛书》28，美国数学会，2003年。[HO16] J. Heller 和 K. Ormsby. 伽罗瓦等变性与稳定动机同伦论。《美国数学会汇刊》368（2016年），第11期，8047–8077。[HPL21] V. Hoskins 和 S. Pepin Lehalleur. 关于曲线上向量丛模栈的 Voevodsky 动机。《数学季刊》72:1-2（2021年），71–114。[HRZ23] J. Hornbostel、H. Rohrbach 和 M. Zibrowius. 辛群厄米 K 理论的 Atiyah–Segal 完备化。《代数与几何拓扑》25，第7期，4037–4072（2025年）。[HW19] J. Hornbostel 和 M. Wendt. 辛群与特殊线性群分类空间的 Chow–Witt 环。《拓扑学杂志》12（3），2019年，915–965，arXiv:1703.05362v4。

[HWXZ21] J. Hornbostel、M. Wendt、H. Xie 和 M. Zibrowius。实循环类映射。《Ann. K-Theory》6，第2期（2021年），239–317。arXiv:1911.04150。[Jac17] J.A. Jacobson。Witt 环中的实上同调与基本理想的幂。《Ann. K-Theory》2（2017年），第3期，357–385。[Jon97] O. Jones。关于可逆对称矩阵与斜对称矩阵簇的几何。《Pacific J. Math》180（1997年），第1期，89–100。[KM21] N.A. Karpenko 和 A.S. Merkurjev。代数群表示环上的 Chow 过滤。《Int. Math. Res. Not. IMRN》2021年，第9期，6691–6716。[Kri12] A. Krishna。群作用的动机配边。预印本，arXiv:1206.5952。

[KTY12] M. Kameko、M. Tezuka 和 N. Yagita。例外群与 Spin 群分类空间的层次谱序列。《Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.》152（2012年），第2期，251–278。[KW03] M. Karoubi 和 C. Weibel。实代数簇的代数K理论与实K理论。《Topology》42（4），2003年，715–742。[Lac25] A. Lachmann。乘法群与循环群的积之分类空间的 Chow–Witt 环。伍珀塔尔 Bergische 大学博士学位论文，2025年。arXiv:2508.13605。[Lev19] M. Levine。动机欧拉示性数与 Witt值特征类。《Nagoya Math. J.》236（2019年），251–310。[Lev20] M. Levine。二次型枚举几何的若干方面。《Doc. Math.》25（2020年），2179–2239。[Lev22] M. Levine。等变Witt上同调中的 Atiyah–Bott局部化。预印本，arXiv:2203.13882。[MV99] F. Morel 和 V. Voevodsky。 $\mathbb{A}^1$-概形同伦论。《Inst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math.》（1999年），第90期，45–143。[NSS15] T. Nikolaus、U. Schreiber 和 D. Stevenson。主 ∞丛：一般理论。《J. Homotopy Relat. Struct.》10（2015年），第4期，749–801。[PPR09] I. Panin、K. Pimenov 和 O. R¨ondigs。关于 Voevodsky代数K理论谱。载于：《代数拓扑》，279–330，Abel Symp.，第4卷，施普林格，2009年。[Rom05] M. Romagny。栈上的群作用及其应用。《Michigan Math. J.》53（2005年），第1期，209–236。[RV06] L.A.M. Rojas 和 A. Vistoli。经典群分类空间的 Chow 环。《Rend. Sem. Mat. Univ. Padova》116（2006年），271–298。[Sch18] S. Schwede。整体同伦理论。《New Math. Monogr.》，第34卷。剑桥大学出版社，2018年。[Ser02] J.-P. Serre。伽罗瓦上同调。《Springer Monographs in Mathematics》，施普林格，2002年。[Sta24] Stacks项目作者。Stacks项目。 `https://stacks.math.columbia.edu`，2024年。[SVW18]W. Soergel、R. Virk 和 M. Wendt。等变动机与几何表示论。arXiv:1809.05480。[Tho83] R.W. Thomason。同伦极限问题。载于：西北同伦理论会议论文集（埃文斯顿，1982），407–419。《Contemp. Math.》，第19卷，美国数学会，1983年。[tD87] Tammo tom Dieck。*Transformation groups*，第8卷。Walter de Gruyter，1987年。[Tit90] J. Tits。简单代数群的强内各向异性形式。《J. Algebra》131（1990年），第2期，648–677。[Tot99] B. Totaro。分类空间的 Chow 环。载于：代数K理论。《Proc. Symp. Pure Math.》67，美国数学会（1999年），249–281。[Vis05] A. Vistoli。Grothendieck拓扑、纤维范畴与下降理论。《基础代数几何》，1–104。《数学调查专著》，第123卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2005年。[Vir21] R. Virk。实群的不动点与 Langlands参数空间。预印本，arXiv:2111.09984v3。[Wei23] S.M. Weinzierl。代数群分类空间的 $\mathrm{H}_0^{\mathbb{A}^1}$ 。慕尼黑大学博士学位论文，2023年。[Wen11] M. Wendt。单纯层的分类空间与纤维化。《J. Homotopy Relat. Struct.》6（2011年），第1期，1–38。[Wen24]M. Wendt。Grassmann流形的 Chow–Witt 环。《代数与几何拓扑》24（1），2024年，1–48。doi:10.2140/agt.2024.24.1，arXiv:1805.06142v2。[WW20] K. Wickelgren 和 B. Williams。不稳定动机同伦论。载于：《同伦论手册》，931–972页。CRC出版社，2020年。[Zib15] M. Zibrowius。对称表示环是 λ-环。《New York J. Math.》21（2015年），1055–1092。

Ákos K. Matszangosz, HUN-REN Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Reáltanoda utca 13-15,1053 Budapest, Hungary*Email address*: matszangosz.akos@gmail.com

Matthias Wendt, Fachgruppe Mathematik und Informatik, Bergische Universität Wuppertal, Gauss-strasse 20, 42119 Wuppertal, Germany*Email address*: m.wendt.c@gmail.com