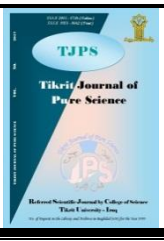
IASJ المجلات الاكاديمية العراقية

提克里特纯科学期刊ISSN：1813 – 1662



关于谐波单叶函数：由 Dziok-Srivastava 算子定义

Mays S. Abdul Ameer[1]，Abdul Rahman S. Juma[2]，Raheam A. Al-Saphory[1]

[1]数学系，纯科学教育学院，提克里特大学，提克里特，伊拉克 [2] 数学系，纯科学教育学院，安巴尔大学，拉马迪，伊拉克

https://doi.org/10.25130/tjps.v26i1.110

文献信息。

文章历史：-收稿日期：30 / 10 / 2020-录用日期： 9 / 12 / 2020-在线发表日期： / / 2020

关键词： 偏差定理, Dziok-Srivastava算子, Hadamard积，调和函数，单叶函数。

通讯作者：

姓名： Mays S. Abdul Ameer电子邮箱： mays33@st.tu.edu.iqeps.abdulrahman.juma@uoanbar.edu.iqsaphory@tu.edu.iq电话：

摘要

本he 文旨在介绍一类由 Dziok-Srivastava算子定义的调和单叶函数，并研究其若干几何性质，包括系数条件、偏差定理、卷积（Hadamard积）、凸组合以及极值点。

2000年数学学科分类：30C45，30C50。

1. 引言

令 A 表示函数类 $f(z)$，这些函数在解析 y算子中的谐函数 биздурди p开的单位圆盘 $U=\{z:|z|<1\}$. 每个 $f \in$ A 都可以表示为f = h + $\overline{g}$，其中 h 和 g 在 U 中均为解析型。我们称 h 为解析部分，而 g 为 f 相关的余解析部分（参见[2]）。因此，对于f = h + $\overline{g} \in$ A，我们可以写成 $h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$，$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$，$(0 \le |b_1| < 1)$ ..... (1) 设 f = h + $\overline{g}$ 由 (1) 给出，且 $F^{s\,a}_{(\lambda\rho)(\mu q)\,b\,,\,,\,,\lambda}$ 是 f 的 Dziok-Srivastava 算子，定义为 [8]$F^{s\,a}_{(\lambda\rho)(\mu q)\,b\,,\,,\,,\lambda}$ $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Pi_{j=1}^{p}(\lambda_j+1)_{n-1}}{\Pi_{j=1}^{q}(\mu_j+1)_{n-1}}\left(\frac{a+1}{a+n}\right)^s \frac{\Lambda(a+n,b,s,\lambda)}{\Lambda(a+1,b,s,\lambda)} a_n \frac{z^n}{n!}$ .... (2) 其中 $(p,q \in N_O;\ \lambda_j \in C,\ (j=1,2,\dots,p);\ a,\mu_j \in \frac{C}{Z_O^-},\ (j=1,2,\dots,q);\ Z_O^- = \{0,1,2\dots\};\ s,z \in C)$，但$\Phi_n(s,a;\ b,\lambda) = \frac{\Pi_{j=1}^{p}(\lambda_j+1)_{n-1}}{\Pi_{j=1}^{q}(\mu_j+1)_{n-1}n!}\left(\frac{a+1}{a+n}\right)^s \frac{\Lambda(a+n,b,s,\lambda)}{\Lambda(a+1,b,s,\lambda)}$ . ..... (3)

设 $B_H(\lambda,\alpha,k)$ 为一类具有如下形式的调和函数：1 b yp ( ) y $Re\left\{\frac{F^{s,a,\lambda}_{(\lambda\rho)(\mu q),b}f(z)}{Z(F^{s,a,\lambda}_{(\lambda\rho)(\mu q),b}f(z))'}\right\} > \alpha,\ 0 \le \alpha < 1$，其中 $F^{s\,a}_{(\lambda\rho)(\mu q)\,b\,,,,}{}^{\lambda}$ $f(z)$ 由式（2）定义。....（4）令 $\overline{B_H(\lambda,\alpha,k)}$ 表示 $B_H(\lambda,\alpha,k)$ 的子类，使得 h 和 g 均来自 $h(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$，$g(z) = (-1)^n \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n, |b_1| < 1$. ...（5）

2. 主要结果

本节陈述并证明了调和单叶类型函数的一个充分系数条件。定理 2.1：设 f = h + $\overline{g}$ 由式 (1) 给出，若$\sum_{n=2}^{\infty}(1-\alpha n)|\Phi_n(s,a;\ b,\lambda)||a_n||z|^n + \sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha n)|\Phi_n(s,a;b,\lambda)||b_n||\overline{z}|^n \le (1-\alpha)$, ... (6)，其中 $a_1 = 1, 0 \le \alpha < 1$，则， f 是 U的保向调和 z z 。证明：由 z z h

p g yp $\Phi_n(s,a;b,\lambda)=\frac{\Pi_{j=1}^{p}(\lambda_j+1)_{n-1}}{\Pi_{j=1}^{q}(\mu_j+1)_{n-1}n!}\left(\frac{a+1}{a+n}\right)^s \frac{\Lambda(a+n,b,s,\lambda)}{\Lambda(a+1,b,s,\lambda)}$.

: o 1 ≠ 2 , we ave $\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{h(z_1)-h(z_2)}\right| \ge 1-\left|\frac{g(z_1)-g(z_2)}{h(z_1)-h(z_2)}\right|$

= 1- $\left|\frac{\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z_1^n - z_2^n)}{(z_1-z_2)\sum_{n=2}^{\infty} a_n(z_1^n - z_2^n)}\right| \geq 1 - \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|}{1-\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|}$

$\geq 1 - \frac{\frac{(1-\alpha n)|\varphi_n(s,a;b,\lambda)|}{1-\alpha}|b_n|}{\frac{(1-\alpha n)|\varphi_n(s,a;b,\lambda|}{1-\alpha}|a_n|} \geq 0$.

因此，已证明其为单叶函数，因为

$|h'(z)| \geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1}$

$> 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \geq$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1-\alpha n)|\varphi_n(s,a;b,\lambda)|}{1-\alpha}|a_n|$

$\geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\alpha n)|\varphi_n(s,a;b,\lambda)|}{1-\alpha}|b_n| \geq$

$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|$

$> \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n||z|^{n-1} \geq |g'(z)|$.

通过使用

$Re\ w \geq \alpha \Leftrightarrow |1-\alpha+w| \geq ()$ 的情形，对于$0 \leq \alpha < 1$，，它表明

$|A(z) + (1-\alpha)B(z)| - |A(z) - (1+\alpha)B(z)| \geq 0$, ...(7)

其中 $A(z) = F_{(\lambda\rho)(\mu q),}^{s\ a\ \ b,,\ \lambda} f(z)$, $B(z) = z(F_{(\lambda\rho)(\mu q),}^{s\ a\ \ b,,\lambda} f(z))'$.

考虑 $|A(z) + (1-\alpha)B(z)|$

$\leq \sum_{n=2}^{\infty} (1+n-\alpha n)|\Phi_n(s,\ a;\ b,\ \lambda)||a_n||z|^n +$

$\sum_{n=1}^{\infty} (1+n-\alpha n)|\Phi_n(s,a;\ b,\lambda)||b_n||\bar{z}|^n$

$+2-\alpha$ . .....(8)

And

$|A(z) - (1+\alpha)B(z)|$

=

$\left|z + \sum_{n=2}^{\infty} \Phi_n(s,a;b,\lambda)a_n z^n + (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(s,a;b,\lambda)b_n\bar{z}^n - (1+\alpha)[z + \sum_{n=2}^{\infty} n\Phi_n(s,a;\ b,\lambda)a_n z^n + (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} n\Phi_n\ s\ a\ b\ \lambda\ b_n\bar{z}^n|\ )(,;,)()(,$

$\leq \sum_{n=2}^{\infty} 1-n-\alpha n\ |\Phi_n\ s\ a\ b\ \lambda\ ||a_n||z|^n +;,)()(,;,)$

$\sum_{n=1}^{\infty} 1-n-\alpha n\ |\Phi_n\ s\ a\ b\ \lambda\ ||b_n||\bar{z}|^n$

$+\alpha$ 9 .....( ) 将 (8) 和

(9) 代入 (7)，得到

$2\sum_{n=2}^{\infty} 1-\alpha n\ |\Phi_n\ s\ a\ b\ \lambda\ ||a_n|\ |z|^n + ()(,;,)()(,;,)$

$2\sum_{n=1}^{\infty} 1-\alpha n\ |\Phi_n\ s\ a\ b\ \lambda\ ||b_n|\ |\bar{z}|^n$

$+2\ 1-\alpha$ ()，因此$\sum_{n=2}^{\infty}($

$1-\alpha n\ |\Phi_n\ s\ a\ b\ \lambda\ ||a_n||z|^n +)(,;,)()(,;,)$

$\sum_{n=1}^{\infty} 1-\alpha n\ |\Phi_n\ s\ a\ b\ \lambda\ ||b_n||z|^n$

$)\ \leq\ 1-\alpha$ ()。

定理 2.2：设 $f = h + \bar{g}$ 由式（5）定义。则 $f(z) \in B_H(\lambda,\alpha,k)$ 当且仅当

$\sum_{n=2}^{\infty}($

$1-\alpha n\ |\Phi_n\ s\ a\ b\ \lambda\ ||a_n||z|^n +)(,;,$

$\sum_{n=1}^{\infty} 1-\alpha n\ |\Phi_n\ s\ a\ b\ \lambda\ \ \ ||b_n||z|^n$

$)()(,;,) \leq\ 1-\alpha\ \ \ 10\ \ \ ()$, ...

( ) 其中 $\lambda_j \in C\ (j = 1,2,\ldots,p)$, $\varphi_n(s,a;b,\lambda) = \frac{\Pi_{j=1}^{p}(\lambda_j+1)_{n-1}}{\Pi_{j=1}^{q}(\mu_j+1)_{n-1}} \frac{(a+1)_s}{(a+1)_{n+s}} \frac{\Delta(a+n,b,s,\lambda)}{\Delta(a+1,b,s,\lambda)}$,

证明：由于 $\overline{B_H}(\lambda,\alpha,k) \subset B_H(\lambda,\alpha,k)$，我们只需证明定理的充分性部分。注意到条件 5 等价于

$Re\left\{\frac{F_{(\lambda\rho)(\mu q),b}^{s,a,\lambda} f(z)}{z(F_{(\lambda\rho)(\mu q),b}^{s,a,\lambda} f(z))'}\right\} > \alpha, \quad 0 \leq \alpha < 1$

$$Re\left[\frac{z - \sum_{n=2}^{\infty} |\Phi_n(s,a;b,\lambda)||a_n|z^n + (-1)^{2s+1}\sum_{n=1}^{\infty} |\Phi_n(s,a;b,\lambda)||b_n|\bar{z}^n}{z - \sum_{n=2}^{\infty} n|\Phi_n(s,a;b,\lambda)||a_n|z^n + (-1)^{2s}\sum_{n=1}^{\infty} n|\Phi_n(s,a;b,\lambda)||b_n|\bar{z}^n}\right] > \alpha.$$

$$Re\left[\frac{z-\sum_{n=2}^{\infty} |\Phi_n(s,a;b,\lambda)||a_n|z^n + (-1)^{2s+1}\sum_{n=1}^{\infty} |\Phi_n(s,a;b,\lambda)||b_n|\bar{z}^n}{-\alpha\{z-\sum_{n=2}^{\infty} n|\Phi_n(s,a;b,\lambda)||a_n|z^n + (-1)^{2s}\sum_{n=1}^{\infty} n|\Phi_n(s,a;b,\lambda)||b_n|\underline{z}^n\}}\right] \geq 0.$$

$$Re\left[\frac{(1-\alpha)-\sum_{n=2}^{\infty} (1-\alpha n)|\Phi_n(s,a;b,\lambda)||a_n|z^{n-1} - \frac{\bar{z}}{z}\sum_{n=1}^{\infty} (1-\alpha n)|\Phi_n(s,a;b,\lambda)||b_n|\bar{z}^{n-1}}{1-\sum_{n=2}^{\infty} |\Phi_n(s,a;b,\lambda)||a_n|z^{n-1} + \frac{\bar{z}}{z}\sum_{n=1}^{\infty} |\Phi_n(s,a;b,\lambda)||b_n|\bar{z}^{n-1}}\right] \geq 0. \quad \ldots(11)$$

条件（11）必须对正实轴上 z 的所有取值成立，其中$|z| \in (0,\ \mu)$，我们必须有

$$Re\left[\frac{(1-\alpha)-\sum_{n=2}^{\infty} (1-\alpha n)|\Phi_n(s,a;b,\lambda)||a_n|\mu^{n-1} - \frac{\bar{z}}{z}\sum_{n=1}^{\infty} (1-\alpha n)|\Phi_n(s,a;b,\lambda)||b_n|\bar{\mu}^{n-1}}{1-\sum_{n=2}^{\infty} |\Phi_n(s,a;\ b,\lambda)||a_n|\mu^{n-1} + \frac{\bar{z}}{z}\sum_{n=1}^{\infty} |\Phi_n(s,a;b,\lambda)||b_n|\bar{\mu}^{n-1}}\right] \geq 0. \quad \ldots(12)$$

如果条件（6）不成立，则（8）中的分子在趋于1时为负。这与 $f \in B$的情形相矛盾。

$\overline{H}(\lambda,\alpha,k)$ 因此 p证明即告完成。

3. 畸变定理

定理 3.1：假设 $f \in \overline{B_H}(\alpha,\beta,\lambda)$。那么 $|z| = r < 1$，我们可以 get

$|f\ z\ | \leq\ 1+|b_1|\ r + \frac{1}{\Phi_2\ s\ a\ b\ \lambda}\left[\frac{1-2\alpha}{1-\alpha} - \frac{1+2\alpha}{1-\alpha}|b_1|\right]r^2$ ()()(,;,

$|z| = r < 1$

)，且$|f\ z\ | \geq\ 1+|b_1|\ r - \frac{1}{\Phi_2\ s\ a\ b\ \lambda}\left[\frac{1-2n}{1-\alpha} - \frac{1+2n}{1-\alpha}|b_1|\right]r^2$ ()()

$|z| = r < 1$

(,;,)，。

Proof: We have

$|f(z)| \leq (1+|b_1|)\ r + [(|a_n\ | + |b_n\ |)]r^n$

$\leq (1+|b_1|)r + [(|a_n| + |b_n|)]r^2$

$= (1+|b_1|)r + \frac{1-\alpha}{\Phi_2(s,a;b,\lambda)(1-2\alpha)}\left[\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}|a_n| + \frac{1-2\alpha}{1-\alpha}|b_n|\right]|\Phi_2(s,a;b,\lambda)|r^2 \leq (1+|b_1|)r + \frac{1}{|\Phi_2(s,a;b,\lambda)|(1-2\alpha)}\left(1 - \frac{1+2\alpha}{1-\alpha}|b_1|\right)r^2 \leq (1+|b_1|)r + \frac{1}{|\Phi_2(s,a;b,\lambda)|}\left[\frac{1-\alpha n}{1-\alpha} - \frac{1+2\alpha}{1-\alpha}|b_1|\right]r^2$.

4. 卷积（Hadamard积）

Let

$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|z^n + (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\bar{z}^n$

and

$g(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| z^n + (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} |d_n| \overline{z}^n$.

然后，对 $f(z)$ 和 $g(z)$ 进行卷积，可得

$(f * g)(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n||c_n| z^n + (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} |b_n||d_n| \overline{z}^n$。

定理 4.1：设 $f(z) \in B_H(\lambda, \alpha, \overline{k})$，且 $g(z) \in B_H(\lambda, \beta, \overline{k})$。则对于 $0 \le \beta \le \alpha < 1$，我们有 $(f * g)(z) \in B_H(\lambda, \alpha, k) \subset B_H(\lambda, \beta, k)$，则满足 (6)，且由于 $(|c_n| \le 1, |d_n| \le 1)$，

我们记作 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(1-\alpha n)}{1-\alpha} |a_n c_n| + \frac{(1-\alpha n)}{1-\alpha} |b_n d_n| \right) |\Phi_n(s,a;b,\lambda)|$

$\le \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(1-\alpha n)}{1-\alpha} |a_n| + \frac{(1-\alpha n)}{1-\alpha} |b_n| \right) |\Phi_n(s,a;b,\lambda)|$ 最后一个不等式的右端以 b 1 为上界，因此 y( ),

$f * g \in \overline{B_H}(\lambda, \alpha, k) \subset \overline{B_H}(\lambda, \beta, k)$.

5. 凸组合

本节旨在证明空间$B_H(\lambda, \alpha, k)$在凸组合下是封闭的。假设 $f_i(z)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, m)$的形式为

$f_i(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_{n,i}| z^n + (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} |b_{n,i}| \overline{z}^n$. ....(13) 定理 5.1：假设函数$f_i$ 由(13) $\overline{B_H}(\lambda, \alpha, k)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$给出，且属于类(, ,)，对每个 , , . . . , 均成立。则由$\tau_i(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_i f_{i(z)}$，$0 \le c_i \le 1$ 良好定义的函数$\tau_i( )$也属于类$B_H(\lambda, \alpha, k)$，其中$\sum_{n=1}^{\infty} C_i = 1$。证明。根据 $t_i(z)$的定义，我们可以将$\tau_i(z)$改写为$= z - \sum_{n=2}^{\infty} (\sum_{i=1}^{\infty} C_i |a_{n,i}|) z^n + (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^{\infty} C_i |b_{n,i}|) \overline{z}^n$ .... (14) 此外，由于 $f_i(z)$属于 $B_H(\lambda, \alpha, k)$，对每个$i = 1,2, \ldots, m$，因此有 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1-\alpha n)}{(1-\alpha)} \sum_{i=1}^{\infty} C_i |a_{n,i}| = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \sum_{n=2}^{\infty} 1 - \alpha n \, |\varphi_n \, s( ) (,) (( ) (,$

$a \; b \; \lambda \; ||a_{n\,i}| + ; ,) , ( ) \sum_{n=1}^{\infty} 1 - \alpha n \, |\varphi_n \; s \; a \; b \; \lambda \; ||b_{n\,i}| (, ; ,) ,) \le$

$\sum_{i=1}^{\infty} C_i (1 - \alpha) \le (1 - \alpha)$.

6. 极点

在本部分，我们求得类$\overline{B_H}(, \beta,)$ α λ的极值点。

Theorem 6.1: Suppose f be given by (5). Then $f \in \overline{B_H}(\alpha, \beta, \lambda), \Leftrightarrow$

$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (T_n h_n(z) + S_n g_n(z))$， …(15)

where

$h_1(z) = z$,

$h_n(z) = z - \left(\frac{(1-\alpha)}{(1-\alpha n)|\Phi_n(s,a;b,\lambda)|} \right) z^n$, $n = 2, 3, \ldots$

and

$g_n \; z = z + -1 \; \frac{}{1-\alpha n \, |\Phi_n \; s \; a \; b \; \lambda \; |} \; n = ( )$

$( )^{k-1} ((1-\alpha) ( ) (, ; ,)) \; \overline{z}^n , , , \ldots \sum_{i=1}^{\infty} (T_n + S_n) = 1$,

$T_n \ge 0 \; and \; S_n \ge 0$。特别地，$f \in \overline{B_H}(\alpha, \beta, \lambda)$的极值点为{ hn}和$\{g_n\}$。证明：形式15我们有$= \sum_{n=1}^{\infty} (T_n + S_n)$

$z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1-\alpha)}{(1-\alpha n)|\Phi_n(s,a;b,\lambda)|} T_n z^n + (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\alpha)}{(1-\alpha n)|\Phi_n(s,a;b,\lambda)|} S_n \overline{z}^n$

$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \{ (T_n h_n(z) + S_n g_n(z)) \} = z - \sum_{n=2}^{\infty} ((1-\alpha) (1-\alpha n)|\Phi_n(s,a;b,\lambda)|) T_n z^n + (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} ((1-\alpha) (1-\alpha n)|\Phi_n (s,a;b,\lambda)|) S_n \overline{z}^n$。因此 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1-\alpha n)}{1-\alpha} |\Phi_n \; s \; a \; b \; \lambda \; | \; |a_n| \; (, ; ,) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\alpha n)}{1-\alpha} |\Phi_n \; s \; a \; b \; \lambda \; | \; |b_n| \; (, ; ,) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-\alpha}{(1-\alpha) \; 1-\alpha n|\Phi_n(s,a;b,\lambda)|} \; a_n) + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1-\alpha}{1-\alpha n)|\Phi_n \; s \; a \; b \; \lambda \; |} (, ; ,) ((1-\alpha) \; 1-\alpha n|\Phi_n(s,a;b,\lambda)| \; b_n)$

$= \sum_{i=1}^{\infty} 1-\alpha \; T_n + \sum_{i=1}^{\infty} \; S_n = 1 - T_n \le 1$。因此$f \in \overline{B_H}(\alpha, \beta, \lambda)$。

反之，假设 $f \in \overline{B_H}(\alpha, \beta, \lambda)$。

令 $T_1 = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} T_n + \sum_{n=1}^{\infty} S_n$。代入$T_n = (1-\alpha n)|\Phi_n \; s \; a \; b \; \lambda \; | \; |a_n| \; (, ; ,) , \; n = 2,3, \ldots S_n = (1-\alpha n) |\Phi_n \; s \; a \; b \; \lambda \; | \; |b_n| \; (, ; ,) , \; n = 1,2, \ldots,$ 得到$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-\alpha}{a_n z^n + (-1)^n \sum_{n=1}^{\infty} b_n \; \overline{z}^n} = z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-\alpha}{(1-\alpha n)|\Phi_n \; s \; a \; b \; \lambda \; |} T_n z^n + (, ; ,) (-1)^n \sum_{n=1}^{\infty} (1-\alpha n)|\Phi_n \; s \; a \; b \; \lambda \; | \; S_n \overline{z}^n(, ; ,)$。

$= z - \sum_{n=2}^{\infty} [z - \; n \; z \;] T_n - \sum_{n=1}^{\infty} [z - \mathrm{h}( ) \; g_n \; z \; ( ) \;] S_n$

$= 1 - [\sum_{n=2}^{\infty} T_n - \sum_{n=1}^{\infty} S_n] z + \sum_{n=2}^{\infty} T_n \; _n \; z + \sum_{n=1}^{\infty} S_n g_n \; z$

$\mathrm{h}( ) ( ) = \sum_{i=1}^{\infty} (T_n \mathrm{h}_n(z) + S_n g_n(z))$。证毕。

结论

我们展示了一类新的调和单叶型函数，并得到了关于由 Dziok-Srivastava算子定义的调和单叶函数的一些有趣结果。因此，我们研究并考察了若干几何性质，例如系数条件、偏差定理、卷积（Hadamard积）、极值点和凸组合。此外，还有许多问题尚待解决，例如将这些结果推广到各种线性算子的子类情形 [9-11]。

参考文献
[1] Clunie J., Sheil T.（1984）。调和单叶函数，芬兰科学院学报 A辑 I 数学，第 9 卷，第 3-25 页。[2] Cotirla L. I.（2009）。 由积分算子定义的调和单叶函数， 阿普利亚大学年刊，第 95-105 页。[3] Gregorczyk M., Widomski（2010）。单位圆盘外部的调和映射，《玛丽亚·居里-斯克沃多夫斯卡大学学报》，第 LXIV 卷，第 1 期，第 63-73 页。[4] Janangiri J.M.（1999）。单位圆盘内的星形调和函数，数学分析与应用杂志，第 235 卷，第 470–447 页。[5] Juma A. R. S.（2010）。关于由广义萨拉吉安导数定义的调和单叶函数， Acta，第 2、3 期，第 179-188 页。 [6] Juma A. R. S. 和 Kulkarni S. R.（2007）。利用广义萨拉吉安算子研究具有负系数的单叶函数，Filomat，第 21 卷，第 173-184 页。[7] Srivastava H. M. 和 Gaboury S.（2015）。一类新的借助某种方式定义的解析函数 Srivastava-Attiya算子的推广，《不等式与应用杂志》2015年，第39篇，页1–15。[8] Srivastava H. M.、Juma A. R. S. 和 Zayed H. M.（2018）。关于由Srivastava-Attiya算子推广定义的积分算子的单叶性条件。Filomat，第32卷，第6期，页 2101–2114。[9] Mahmoud M.、Juma A. R. 和 Al-Saphory R.，涉及Srivastava-Attiya算子的双单叶函数，《意大利纯数学与应用数学杂志》，2020年录用。[10] Abdul Ameer M.、Juma A. R. 和 Al-Saphory R.，多叶函数高阶导数的微分从属关系，《物理学杂志：会议系列》，2020年录用。[11] Abdul Ameer M.、Juma A. R. 和 Al-Saphory R.，由广义积分算子定义的调和多叶函数，《卡迪西亚纯科学杂志》，第26卷，第1期，数学版页1-12，2021年。

Dziok-Srivastava 算子定义的调和单叶函数

Sims Salih Abdul Amir [1] Abdul Rahman Salman Jumaa, [2] Rahim Ahmed Mansour, [1] [1] 数学系，理学院教育学院，提克里特大学，提克里特，伊拉克 [2]数学系，理学院教育学院，安巴尔大学，拉马迪，伊拉克

摘要

本文旨在介绍一类由 Dziok-Srivastava 算子的作用确定的调和单叶函数，并研究其若干几何性质，如系数条件、卷绕性、星形性、凸性（Hadamard 乘积）以及极值点。

.