arXiv:2602.20392v1 [math.SP] 23 Feb 2026

改进的分形Weyl界匹配双曲曲面和开放量子映射的改进谱隙

TRAVIS CUNNINGHAM

摘要。我们为凸余紧双曲曲面上共振的高能分布证明了一个新的分形韦尔上界，该上界与傅里叶衰减给出的改进谱隙相匹配。更准确地说，如果 δ 是该曲面极限集的维数， $\beta_{\mathrm{BD}} > \frac{1}{2} - \delta$是 Bourgain–Dyatlov 的分形不确定性指数，并且

$$m(\nu,\delta) := \min\Big(4\big(\nu - \beta_{\mathrm{BD}}\big),\, 2\big(\nu - (\tfrac{1}{2} - \delta)\big),\, \delta\Big),$$

那么，当 $R \to \infty$ 时，盒 $[R, R+1] + i[-\nu, 0]$ 中的共振数量为 $O\big(R^{m(\nu,\delta)+\varepsilon}\big)$。这改进了 Dyatlov 的分形Weyl界，该界与 Patterson–Sullivan 谱隙 $\frac{1}{2} - \delta$ 相匹配。我们还给出了一个新的预解算子估计，改进了 Dyatlov-Zahl 和 Dyatlov 给出的估计。对于量子开放贝克映射，我们也得到了类似结果，改进了 Dyatlov-Jin 的一项估计；此外，我们还给出了一个改进的分形 Weyl界，使其与由加性能量估计给出的谱隙相匹配。我们细化了用于证明分形Weyl界的已知方法，这些方法将问题归结为对某个行列式函数的估计；不过，我们采用了不同的行列式函数，从而能够在每种情形下应用分形不确定性原理的证明方法，得到更精确的估计。

1. 引言

1.1. 主要结果。 设 $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}$ 为一个无限面积的凸余紧双曲曲面；也就是说， M 是双曲空间 $\mathbb{H}$关于几何有限福克斯群 Γ的商，且该群不含抛物元素。关于此类对象谱理论的全面介绍，我们参考 [Bor16]；这些对象可作为数理物理中更复杂系统的模型，并在代数与数论中亦有应用（见 [BGS11]）。

本文给出了共振个数的改进分形韦尔上界，即预解式亚纯延拓的极点个数的上界， $R(\lambda) := \big(-\Delta_M - \frac{1}{4} - \lambda^2\big)^{-1}$ ——它 匹配 Bourgain–Dyatlov 给出的改进谱隙， [BD17]。所谓谱隙，是指形如 $\{\mathrm{Im}\,\lambda \geq -\beta\}$ （对某个 $\beta > 0$）的区域，其中至多包含有限多个共振。

为陈述这一结果，令 δ 表示极限集的豪斯多夫维数， Λ_Γ该极限集定义为所有轨道的极限点集合， Γz其中 $z \in \mathbb{H}$。Patterson 和 Sullivan 的经典结果 [Pat76、Sul79] 指出，在$\lambda = -i\left(\frac{1}{2} - \delta\right)$处存在一个简单共振，且在区域 $\{\lambda \geq -\frac{1}{2} - \delta\}$ [05] $\beta >$Im()内没有其 $\frac{1}{2} - \delta$ $\{\lambda \geq -\beta\}$ 他共振。Naud Nau通过证明：对于某个依赖于曲面的，区域Im内至多只有有限多个共振，改进了这一结果。借助分形不确定性原理这一强大的新工具（简介见 [Dya19b] ），Bourgain–Dyatlov [BD17] 进一步改进了 Naud 的这一谱隙，证明该结果对某个 $\beta_{BD} > \frac{1}{2} - \delta$ 成立，而该量仅取决于 δ ，与曲面的具体特征无关。

设 $R, \nu > 0$，以及

$$\mathcal{N}(R,\nu) := \#\{\lambda \text{ resonance}: \ \mathrm{Re}\,\lambda \in [R, R+1],\ \mathrm{Im}\,\lambda \geq -\nu\}, \tag{1.1}$$

其中，共振始终按重数计数。接下来我们将证明以下关于共振密度的改进分形韦尔上界：

定理 1.1。设 M 是一个凸余紧双曲曲面，且 $\delta \in (0,1)$，并设 β_{BD} 是 [*BD17* 中证明的谱隙大小 *1*]。那么，对每个 $\nu > 0, \varepsilon > 0$，存在$C > 0$ 使得

$$\mathcal{N}(R,\nu) \leq C R^{m(\nu,\delta)+\varepsilon}, \quad R \to \infty,$$
$$m(\nu,\delta) := \min\left(4\left(\nu - \beta_{BD}\right), 2\left(\nu - \left(\tfrac{1}{2} - \delta\right)\right), \delta\right).$$

该界与 [BD17], 的谱隙相匹配，因为当 $\nu < \beta_{BD}$ 时，指数 $m(\nu,\delta)$ 为负。由于 $\beta_{BD} > \frac{1}{2} - \delta$ 总是成立, 定理 1.1 改进了 [Dya19a] 的类似估计；该估计与帕特森–沙利文隙相匹配，见图 1。我们提到， [BD18] 给出了一个分形不确定性原理，从而得到谱隙，且 $\frac{1}{2} - \delta < 0$ 时仍有 $\beta > 0$。这意味着当 $\nu < \beta$ 时，有界 $\mathcal{N}(R,\nu) = O(1)$ $R \to \infty$。因此，尽管定理 1.1 总是优于 [Dya19a 的界，但当 $\frac{1}{2} - \delta < 0$ 时，定理 1], 未必总能带来新信息。不过, 当 $\frac{1}{2} - \delta \geq 0$ 时，定理 1.1 总能改进已知的共振密度估计。

我们还证明了 Bourgain–Dyatlov 谱隙内如下改进的预解式上界：

定理 1.2。假设 $\beta_{BD} > 0$。那么对于每个 $\nu \in (0, \beta_{BD})$， $\psi \in C_c^\infty(M)$，存在$C_0 > 0$，使得对任意 $\varepsilon > 0$,

$$\|\psi R(\lambda)\psi\|_{L^2 \to L^2} \leqslant C|\lambda|^{-1+c(\nu,\delta)+\varepsilon}, \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant C_0, \ \operatorname{Im}\lambda \in [-\nu, 1], \tag{1.2}$$

其中

$$c(\nu,\delta) = \left(1 + \frac{1-\delta-2\beta_{BD}}{1-\delta-2\nu}\right)\nu.$$

我们注意到，当 $\delta \leq \frac{1}{2}$ 时， $\beta_{BD} > 0$ 总是成立，但对于某些 $\delta > \frac{1}{2}$ 也可能成立。将 [DZ16，定理 3] 与 [BD17] 的分形不确定性原理结合，可得估计 (1.2)，其中 c 被 2ν 取代。由于我们的指数 $c(\nu,\delta) < 2\nu$ 在整个范围 $\nu \in (0, \beta_{BD})$ 内，我们改进了 [DZ16], [BD17] 给出的界。与定理 1.1 类似，本定理也改进了 [Dya19a] 关于双曲曲面的结果。事实上，将其应用于曲面时， [Dya19a，定理 2] 在范围 $\nu \in \left(0, \frac{1}{2} - \delta\right)$ 内给出界 (1.2)，其中 c 被 $\nu(1-2\nu)/(1-\delta-2\nu)$ 取代。除了在更大的范围 $(0, \beta_{BD})$ 内给出界之外，由于我们的指数 $c(\nu,\delta) < \nu(1-2\nu)/(1-\delta-2\nu)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2} - \delta\right)$ 上成立，我们的结果也改进了 [Dya19a，定理 2] 在其有效范围内给出的界。因此，定理 1.2 改进了整个范围 $(0, \beta_{BD})$ 内关于凸余紧双曲曲面的所有已知预解算子界，见图 1。最后，我们注意到， [DW16] 给出了一个预解式下界，该下界也适用于更一般的情形。

接下来，我们转向量子开放贝克映射这一相关情形。它们是研究开放量子混沌的重要模型，参见 [DJ17, §1。4] 了解更多相关联系。给定一个基数 $M \in \mathbb{N}$、一个字母表 $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}_M = \{0, 1, \ldots, M-1\}$以及一个截断函数 $\chi \in C_c^\infty((0,\ 1);\ [0,1])$，相应的量子开放贝克映射定义为作用在 $\ell^2_N := \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ 上的一个算子，其定义如下：

$$B_N := \mathcal{F}_N^* \begin{pmatrix} \chi_{N/M}\,\mathcal{F}_{N/M}\,\chi_{N/M} & & \\ & \ddots & \\ & & \chi_{N/M}\,\mathcal{F}_{N/M}\,\chi_{N/M} \end{pmatrix} I_{\mathcal{A},M}.$$

此处 $N = M^k$ 对于 $k \in \mathbb{N}$， $\mathcal{F}_N$ 是离散傅里叶变换，$\chi_{N/M}$ 是 χ的离散化，并且$I_{\mathcal{A},\ M}$ 是对角矩阵，其第 j项在$\left\lfloor \frac{Mj}{N} \right\rfloor \in \mathcal{A}$ 时为1，否则为0。被俘获集合 —

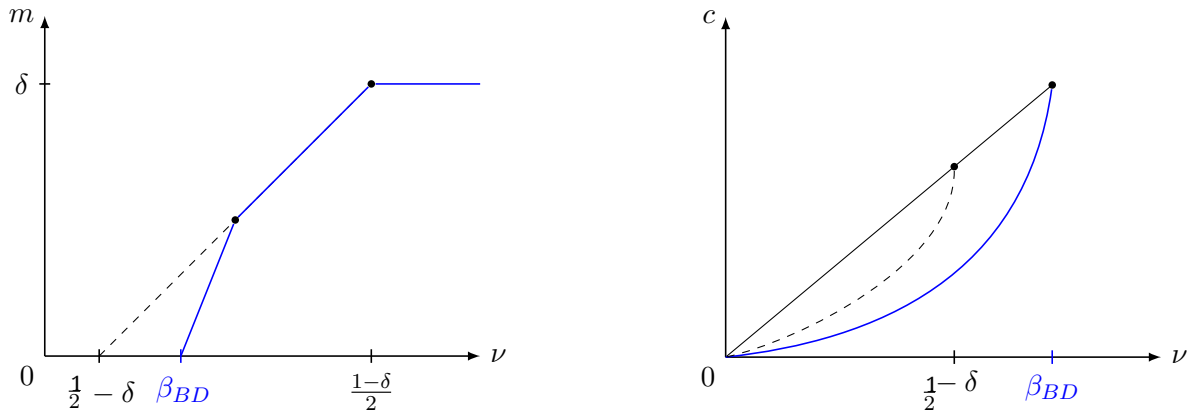


图 1：（a）定理 1.1 中 $m(\nu,\ \delta)$ 在某个 $\delta<\frac{1}{2}$ 中的图。虚线表示此前的上界 [Dya19a，定理 1]。（b）定理 1.2 中 $c(\nu,\ \delta)$ 的图，同样针对某个 $\delta<\frac{1}{2}$。实线表示 $c=2\nu$ 的预解上界 [DZ16], [BD17]。虚线表示此前的上界[Dya19a，定理 2]。

这些系统的轨道（对应于双曲曲面的极限集 Λ_Γ）构成康托尔集，其维数为 $\delta:=\log|\mathcal{A}|\log M\in(0,1)$。更多细节见第 4 节。

量子开放贝克映射的共振理论大体上与更复杂情形（包括双曲曲面）的理论相平行。在此背景下，我们研究环形区域中的共振，而（1.1）的相应类比是计数函数

$$\mathcal{N}_k(\nu):=\#\left\{\lambda\in \mathrm{Sp}(B_N):\ |\lambda|\geq M^{-\nu}\right\},\quad \nu\geq 0.$$

In [DJ17，定理 3], Dyatlov–Jin 证明了如下估计：对于 $\nu>0$ 以及每个 $\varepsilon>0$,

$$\mathcal{N}_k(\nu)\leq C\,N^{\min\left(2\left(\nu-\left(\frac{1}{2}-\delta\right)\right),\,\delta\right)+\varepsilon},\quad k\to\infty. \tag{1.3}$$

请注意，与 [Dya19a 的界一样，定理 1], 中的指数 $\min\left(2\left(\nu-\left(\frac{1}{2}-\delta\right)\right),\ \delta\right)$ 与 $\frac{1}{2}-\delta$ 相匹配。不过，文献 [DJ17] 还利用康托集的分形不确定性原理证明，存在超出 $\frac{1}{2}-\delta$ 的某些改进谱隙。这些包括一个谱隙 $\beta>\frac{1}{2}-\delta$ 和一个谱隙 $\beta_E=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}-\delta\right)+\frac{\gamma_{\mathcal{A}}}{8}$，其中 $\gamma_{\mathcal{A}}>0$ 可根据系统的加性能量显式计算。详情请参见 [DJ17 的第 3] 节。

现在我们可以陈述以下分形Weyl界，它改进了（1.3）。

定理 1.3。 对于每个 $\nu>0$ 和 $\varepsilon>0$，我们有

$$\mathcal{N}_k(\nu)\leq C\,N^{m(\nu,\delta)+\varepsilon}\quad as\ k\to\infty$$

其中

$$m(\nu,\delta):=\min\left(4(\nu-\beta),\,4\left(\nu-\beta_E\right),\,2\left(\nu-\left(\tfrac{1}{2}-\delta\right)\right),\,\delta\right)$$

对于某个 $\beta>\frac{1}{2}-\delta$，以及 $\beta_E=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}-\delta\right)+\frac{\gamma_{\mathcal{A}}}{8}$。

我们指出，对于给定的 $\delta \in (0,1)$，指数 $4(\nu-\beta)$ 或 $4(\nu-\beta_E)$ 中只有一个与之相关；一般而言，当 $\delta \approx \frac{1}{2}$ 时，$\beta_E > \beta$。与双曲曲面的情形一样，由于这里也存在一个谱隙，其大小为 $\beta > 0$（参见 [DJ17，定理 1]），当 $\delta > \frac{1}{2}$ 时，我们的估计可能提供也可能不提供新信息；但当 $\delta \leq \frac{1}{2}$ 时，总能改进已知估计。然而，与双曲曲面的情形不同，由于在此情形下我们也匹配了加性能量隙，因此可以确定定理 1.3 至少对某些 $\delta > \frac{1}{2}$ 确实提供了新信息。这是因为，通过加性能量估计得到的隙 β_E 的最佳已知下界，一般大于隙 $\beta > \max\left(0, \frac{1}{2}-\delta\right)$ 在 $\delta \approx \frac{1}{2}$ 时的最佳已知下界。参见图 2，并参见 [DJ17，第 3 节、4]，[Dya19b，第 5 节，2] 以了解更多讨论。

1.2. 进一步的背景与概述。 我们的定理1.1的一个推论是塞尔伯格 ζ 函数零点个数的上界，因为其零点与共振一致（定义及其性质见 [Bor16]）。利用塞尔伯格 ζ 函数的动力学性质，[GLZ04] 证明，对于任意凸余紧双曲曲面，

$$\mathcal{N}(R,\nu) \leq CR^{\delta} \quad \text{as } R \to \infty, \tag{1.4}$$

对于任意 ν；证明对高维凸余紧施托基流形也成立。随后，Naud 采用了类似的方法 [Nau14]，，在区域 $\nu < \frac{1-\delta}{2}$ 中改进了（1.4），证明存在一个函数 $\tau(\nu)$，在范围 $\nu \in \left(\frac{1}{2}-\delta\right.$内为正，$\left.\frac{1-\delta}{2}\right)$并且满足

$$\mathcal{N}(R,\nu) \leq CR^{\max(\delta-\tau(\nu),\delta)} \quad \text{as } R \to \infty. \tag{1.5}$$

Dyatlov [Dya19a]，随后将（1.5）改进为

$$\mathcal{N}(R,\nu) \leq CR^{\min\left(2\left(\nu-\left(\frac{1}{2}-\delta\right)\right),\delta\right)+\varepsilon} \quad \text{as } R \to \infty,$$

对任意 $\varepsilon > 0$，这与 Patterson–Sullivan 谱隙相符，并使 Naud 的界成为显式的；他还给出了更高维凸余紧双曲流形的类似界。Dyatlov 的方法与 [GLZ04、Nau14]，颇为不同，并涉及应用 Vasy 的方法，[Vas13a、Vas13b]，从而将问题归结为对一个由半经典缩放预解算子的近似逆所定义的行列式函数的估计；参见 [Dya19a第 1]节，以了解其证明概要。

我们的定理 1.1 延续了对 (1.4) 的这一系列改进，利用了 Bourgain–Dyatlov 所证明的改进谱隙 [BD17]，，并将其方法与[Dya19a] 的方法相结合，以进一步改进分形Weyl界。特别地，我们沿用了[Dya19a]，中的大部分分析，但采用了不同的行列式函数，从而使我们能够将定理 1.1 归结为一个振荡积分的估计（见 (2.16)、(2.17)）。该积分可通过傅里叶衰减加以估计，并且在引理 2.3 中，对 [BD17] 中论证的一个轻微修改使我们得以完成定理 1.1 的证明。

我们采用类似的方法来证明定理1.3；与 [DJ17]，中使用的行列式函数不同，我们将证明归结为估计一个量，并可对其应用 [DJ17定理 1]中的分形不确定性原理证明方法。在量子开放贝克映射的情形下，较为简单的结构也使得我们能够用系统的加性能量来进行估计。

最后，我们提及一些其他的分形魏尔界。利用 [DZ18]，的精细转移算子方法，论文 [Soa23] 给出了双曲曲面的改进的分形 Weyl 界，针对

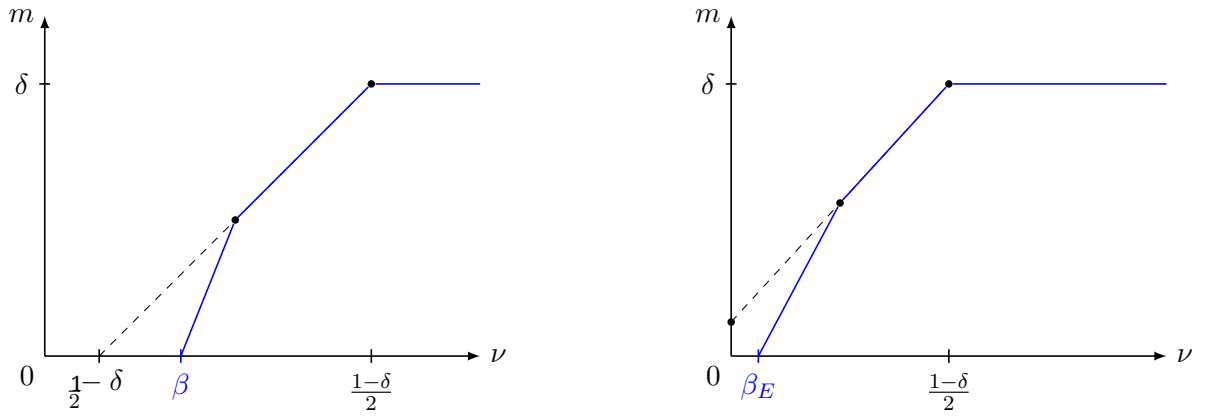


图 2：定理 1.3 中 $m(\nu,\ \delta)$的图，其中(a) $\delta < \frac{1}{2}$且 $\beta > \beta_E$，而 (b) $\delta > \frac{1}{2}$，$\left|\delta - \frac{1}{2}\right|$足够小，使得 $\beta_E > \beta$。两图中的虚线均表示 [DJ17中的先前界，定理 3]。

全局计数函数

$$\widetilde{\mathcal{N}}(R,\nu) := \#\left\{\lambda \text{ resonance}:\ \operatorname{Re}\lambda \in [0,R],\ \operatorname{Im}\lambda \geq -\nu\right\}.$$

表明

$$\widetilde{\mathcal{N}}(R,\nu) \leq CR^{1+\delta-\frac{3\delta+2}{2\delta+2}(1-\delta-2\nu)+\varepsilon} \quad \text{as } R\to\infty \tag{1.6}$$

对于 $m(\nu,\ \delta)$ 如定理 1.1中所示，我们可以通过积分得到 $\mathcal{N}(R,\ \nu)$ 的一个界：

$$\widetilde{\mathcal{N}}(R,\nu) \leq CR^{1+m(\nu,\delta)+\varepsilon} \quad \text{as } R\to\infty.$$

对于某些 ν，这可能改善也可能不改善 (1.6)，具体取决于改进的幅度$\beta_{BD} - \left(\frac{1}{2}-\delta\right)$。Vacossin，[Vac23], 给出了一个与 Naud 的界 (1.5) 类似的界，但适用于平面上多个严格凸障碍物的散射。他的证明更一般地适用于双曲量子单值算子，而论文 [Tao24] 表明，这也涵盖了某些渐近双曲曲面。值得注意的是，利用分形不确定性原理，在这些情形下也得到了改进的谱隙（见 [Vac24], [Tao24]）。如果能改进 Vacossin 的界，使其与改进的谱隙相匹配，就像我们的定理 1.1那样，将会很有意思。关于分形魏尔界的更多信息和历史，请参见 [Zwo17，§3。4]

本文结构安排如下：前半部分聚焦于双曲曲面。第 2 节汇集 [Dya19a], [BD17], 中的材料，并建立一些初步的技术结果。第 3 节给出定理 1.1 和 1.2 的证明。第 4 节转向量子开放贝克映射，我们在此运用与第 3 节类似的论证来证明定理1.3。

致谢。 我们感谢 Semyon Dyatlov 提供了许多有益的讨论，提出了这个项目，并在本文写作过程中始终给予鼓励。我们也感谢 Tanya Christiansen 提出改进行文表达的意见。最后，我们感谢 Dan Cunningham 提供后勤帮助，并感谢 Prison Mathematics Project——尤其是 Frank Connor、Ben Jeffers 和 Tian An Wong——负责打字录入原始手稿。

2. 预备知识

定理 1.1 和 1.2 的证明结合了 [Dya19a] 和 [BD17], 中的方法；本节将回顾相关定义，并汇集一些重要的技术材料。如第 1.1 节所述，凸余紧双曲曲面 M 上的预解式可亚纯延拓至$\mathbb{C}$ 作为一个算子

$$R(\lambda) := \left(-\Delta_M - \tfrac{1}{4} - \lambda^2\right)^{-1} : L^2_c(M) \to H^2_{\mathrm{loc}}(M), \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

参见 [MM87], [Gui05], 和 [GZ95] ，其中也讨论了更一般的渐近双曲流形。这里，我们遵循 [Dya19a，第 2 节2] 采用 Vasy 提出的另一种证明预解式亚纯延拓的方法， [Vas13a], [Vas13b]。本文的论述将尽可能精简，只汇集证明定理 1.1 和 1.2 所需的内容，更多细节请参见 [Dya19a] 。

我们首先定义半经典缩放预解算子

$$R_h(\omega) := h^{-2} R(\lambda), \quad \omega := h\lambda \in \Omega, \tag{2.1}$$

其中我们固定 $\nu_0 > 0$ 并令

$$\Omega := [1-2h,\, 1+2h] + ih\,[-\nu_0,\, 1].$$

我们还按照 [Vas13a], [Vas13b]中的定义，引入扩展的半经典微分算子:

$$P_h(\omega) \in \Psi^2_h\left(M_{\mathrm{ext}}\right), \quad P_h(\omega) = \psi_2 \left(-h^2\Delta_M - \frac{h^2}{4} - \omega^2\right) \psi_1 \ \text{ on } M. \tag{2.2}$$

这里， M_{ext} 是一个无边紧曲面，包含 M 作为开子集，而 ψ_1， $\psi_2 \in C^\infty(M)$ 是某些不消失函数。关于算子 [Vas13a], [Vas13b] 的构造细节，请参见 $P_h(\omega)$；关于 Vasy方法的简化处理，请参见 [Zwo16], [DZ19] 。

使用 $P_h(\omega)$ 的优势在于可以轻松应用微局部分析方法；就我们的目的而言，只需引用若干已确立的该算子的性质即可:

(i) 对任意固定的 $s > \frac{1}{2} + \nu_0$， $P_h(\omega) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 是一个 Fredholm 算子的全纯族，其中

$$\mathcal{X} := \left\{u \in H^s_h\left(M_{\mathrm{ext}}\right) :\ P_h(1)u \in H^{s-1}_h\left(M_{\mathrm{ext}}\right)\right\}, \qquad \mathcal{Y} := H^{s-1}_h\left(M_{\mathrm{ext}}\right),$$

with

$$\|u\|^2_{\mathcal{X}} := \|u\|^2_{H^s_h(M_{\mathrm{ext}})} + \|P_h(1)u\|^2_{H^{s-1}_h(M_{\mathrm{ext}})}.$$

特别注意

$$\|u\|_{\mathcal{X}} \leqslant C\,\|u\|_{H^{s+1}_h(M_{\mathrm{ext}})}. \tag{2.3}$$

(ii) 根据 (2.2)，若 $f \in C^\infty_c(M)$，则

$$R_h(\omega) f = \psi_1 \Big(P_h(\omega)^{-1}\,\psi_2 f\Big)\Big|_M. \tag{2.4}$$

特别地， $P_h(\omega)^{-1}$ 在区域 $\Omega' \subset\subset \Omega$ 中的极点数量上界，给出了同一区域内 $R_h(\omega)$ 极点数量的上界。

(iii) 我们描述如下关于 $P_h(\omega)$ 的近似逆恒等式，它对定理 1.1 和 1.2 的证明都至关重要。将 [Dya19a、命题 2.1、3.1 和引理 32]结合起来即可得到该恒等式。

固定 $\rho, \rho' \in (0,1)$ 和 $\varepsilon_0 > 0$ （在本文中，我们只需要考虑 ρ 接近 1 的情形，特别是我们将始终假设 $\rho > \frac{1}{2}$ ）。那么我们可以写成

$$I = Z(\omega)\, P_h(\omega) + A(\omega), \qquad \omega \in \Omega. \tag{2.5}$$

关于 h 的算子族，在 Ω 中全纯，并满足

$$Z(\omega) : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}, \qquad \|Z(\omega)\|_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}} \le C\, h^{-1-(\rho+\rho')\,(\nu_0+\varepsilon_0)}, \qquad \omega \in \Omega, \tag{2.6}$$

and

$$A(\omega) : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad A(\omega) = J(\omega)\, A_-\, \tilde{A}\, A_+ + \varepsilon(\omega), \qquad \omega \in \Omega. \tag{2.7}$$

其中，

- 对任意 $N > 0$， $J(\omega)$ $\varepsilon(\omega)$: $H_h^{-N}(M_{\text{ext}}) \to H_h^N(M_{\text{ext}})$ 满足

$$\|J(\omega)\|_{H_h^{-N}\to H_h^N} \le C_N\, h^{\rho'\left(h^{-1}\operatorname{Im}\omega - \varepsilon_0\right)}, \qquad \|\varepsilon(\omega)\|_{H_h^{-N}\to H_h^N} = O\left(h^N\right), \qquad \omega \in \Omega_\circ \tag{2.8}$$

- 算子 A_- : $L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}) \to L^2(M_{\text{ext}})$ 和 A_+ : $L^2(M_{\text{ext}}) \to L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S})$ 关于 h 一致有界。
- 若 (w, y) 表示 $\mathbb{R}^+_w \times \mathbb{S}_y$ 上的坐标，那么

$$\tilde{A} = \psi_-(y;h)\, \tilde{B}_\psi\, \psi_+(y;h)\, \psi_0(w;h)\, \tilde{\psi}\,(hD_w)\,. \tag{2.9}$$

这里 $\psi_\pm \in C^\infty(\mathbb{S};\, [0,1])$，其中

$$\operatorname{supp}\psi_+ \subset \Lambda_\Gamma(C_1 h^\rho), \qquad \operatorname{supp}\psi_- \subset \Lambda_\Gamma(C_1 h^{\rho'}). \tag{2.10}$$

对于某个 $C_1 > 0$ （其中 $\Lambda_\Gamma(\alpha) := \{\, y \in \mathbb{S} :\ |y - y'| \le \alpha$ 对于某个 $y' \in \Lambda_\Gamma \,\}$，且 $|y - y'|$表示 $\mathbb{R}^2$ 中的欧氏距离）， $\psi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+;\, [0,1])$，其中

$$\operatorname{supp}\psi_0 \subset \left[\, 1 - C_1 h^\rho,\ 1 + C_1 h^\rho \,\right],$$

$\widetilde{\psi} \in C_c^\infty(\mathbb{R};\, [0,1])$ 与 h 无关，且 $\widetilde{B}_\psi$ 是作用于 $L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S})$ 上的算子，由下式给出

$$\left(\widetilde{B}_\psi f\right)(w,y) = (2\pi h)^{-1/2} \int_{\mathbb{S}} \left|\frac{y - y'}{2}\right|^{2iw/h} \psi(y,y')\, f(w,y')\, dy', \qquad f \in L^2\left(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}\right),$$

其中 $\psi \in C^\infty(\mathbb{S} \times \mathbb{S})$ 是一个与 h 无关的函数，满足 $\operatorname{supp}\psi \cap \{\, y = y' \,\} = \varnothing$.
最后，我们提及 $A(\omega)$ 在 $\mathcal{X}$ [Dya19a，命题 3 中是希尔伯特–施密特算子。1]。

在下一节中，我们将使用 $A(\omega)$ 来定义一个行列式函数，并用它证明定理 1.1。随后，我们将结合以下两者的方法，对该行列式函数进行估计：[Dya19a] 和 [BD17], ，现在先介绍后者论文中用到的一些相关量。

首先需要指出，到目前为止，我们一直遵循 [Dya19a]，在双曲空间的单位圆盘模型中进行研究（在该模型中，极限集是圆 $\mathbb{S}\subset\mathbb{R}^2$ 的子集）；另一方面，[BD17]采用半平面模型（在该模型中，极限集是 $\mathbb{R}$ 的紧子集）。这两种模型是等价的，我们可以轻易地将 [BD17] 中的内容转换到圆盘模型中。不过，由于我们仅在下面的一个技术引理中使用 [BD17] 的方法，因此更方便的做法是在原有背景（即半平面模型）下介绍其结果，并只说明与我们需求相关的两种模型之间的关系（更多信息参见 [Bor16] ）。

假设 $\delta\in(0,\,1)$（所有有意义的情形都是如此）。那么，根据旋转对称性，不失一般性，我们可以假设 $(1,\,0)\notin\Lambda_\Gamma$（因为 Λ_Γ 是 $\mathbb{S}$的真子集）。接下来我们使用标准变换

$$\sigma(x_1,x_2):=\left(\frac{x_1^2+x_2^2-1}{x_1^2+(x_2+1)^2}\,,\;\frac{-2x_1}{x_1^2+(x_2+1)^2}\right),$$

该变换将 $\{(x_1,\;x_2)\in\mathbb{R}^2:\;x_2>0\}$ 连同其（双曲）度量 $ds^2=\frac{dx_1^2+dx_2^2}{x_2^2}$等距映射到 $\{(x_1,\;x_2)\in\mathbb{R}^2:\;x_1^2+x_2^2<1\}$ 连同其（双曲）度量 $ds^2=4\,\frac{dx_1^2+dx_2^2}{\left(1-\,x_1^2+x_2^2\right)^2}$，并将 $\Lambda_\Gamma\subset\mathbb{S}$ 与

$$\Lambda_\Gamma^{\mathbb{R}}:=\sigma^{-1}(\Lambda_\Gamma)$$

它是 $\mathbb{R}$的一个紧子集。正如符号所示，$\Lambda_\Gamma^{\mathbb{R}}$ 恰好是通过等距变换 σ得到的模型中曲面 $M=\Gamma\backslash\mathbb{H}$ 的极限集。

我们还指出若干事实以备后用。首先，对任意 $C_1>0$，存在 $C_2>0$ 使得

$$\Lambda_\Gamma\left(C_1\alpha\right)\;\subset\;\sigma\left(\Lambda_\Gamma^{\mathbb{R}}\left(C_2\alpha\right)\right). \tag{2.11}$$

对所有充分小的 $\alpha>0$（此处 $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{R}}(\alpha):=\{\,x\in\mathbb{R}:\;|x-x'|\le\alpha$，对某个 $x'\in\Lambda_\Gamma^{\mathbb{R}}\,\}$）。其次，存在 $C>0$ 使得对充分小的 $\alpha,\;\alpha'>0$ 以及 $x_0\in\Lambda_\Gamma^{\mathbb{R}}$，

$$C^{-1}\,\alpha^{1-\delta}\,(\alpha')^{\delta}\;\le\;\left|\Lambda_\Gamma^{\mathbb{R}}(\alpha)\cap\{\,|x-x_0|\le\alpha'\,\}\right|\;\le\;C\,\alpha^{1-\delta}\,(\alpha')^{\delta}. \tag{2.12}$$

这是Ahlfors–David正则性对于集合 $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{R}}$的一个版本，其证明方式与 [DZ16，（5.3）]完全相同；参见 [DZ16，§7.2]。

研究凸共紧双曲曲面时所用的一个基本工具是Patterson–Sullivan测度，它是 $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{R}}$ 上的一个概率测度，我们将其记为 μ。我们回顾该测度的如下关键性质；请参阅 [Bor16，§14.1] 以及 [BD17，§2.4] 以获取关于 μ的更多信息。

定理 2.1. *([BD17，定理 2])*。设 M 为一凸余紧双曲曲面，且$\delta\in(0,1)$ 为极限集的维数 $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{R}}$。假设

$$\varphi\in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R}),\qquad g\in C^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$$

是满足以下界的函数，其中某个常数为$C_{\varphi,\,g}$：

$$\|\varphi\|_{C^2}+\|g\|_{C^1}\le C_{\varphi,g},\qquad \inf_{\Lambda_\Gamma^{\mathbb{R}}}\left|\varphi'(x)\right|\;\ge\;C_{\varphi,g}^{-1}.$$

那么存在仅依赖于 δ 的 $\beta_F>0$，以及仅依赖于 M 和 C_φ 的 $C>0$，g，使得

$$\left|\int_{\Lambda_\Gamma^{\mathbb{R}}}e^{i\xi\,\varphi(x)}\,g(x)\,d\mu(x)\right|\;\le\;C\,|\xi|^{-\beta_F/2}\qquad \textit{for all } |\xi|>1. \tag{2.13}$$

（与 [BD17], 中的表述相比，我们遵循了 [Dya19b，§5。1] 记作 $\varepsilon_1 = \beta_F/2$。）随后在 [BD17] 中使用该定理，得到了大小为

$$\beta_{\mathrm{BD}} = \tfrac{1}{2} - \delta + \tfrac{\beta_F}{8}.$$

正是这个量出现在我们的定理 1.1 和 1.2 中。

正如在 [BD17], (2.13) 的定理陈述之后立即指出的，傅里叶维数表明 $\Lambda_\Gamma^{\mathbb{R}}$ 的下界为 β_F。由于集合的豪斯多夫维数总是大于或等于其傅里叶维数，因此我们得到 β_F 必须满足 $\beta_F \le \delta$。

定理 2.1 的证明使用了以下技术引理，这也是我们证明定理 1.1 和 1.2 的重要工具。

引理 2.2。 *([BD17, 引理 4。2])*。对于 $0 < h < 1$，定义函数 $F_h(x)$ 为 *Patterson–Sullivan* 测度 μ 与经缩放的均匀测度的卷积，其中 $[-2h, 2h]$:

$$F_h(x) := \frac{1}{4\,h^\delta}\ \mu\big([x-2h,\, x+2h]\big). \tag{2.14}$$

那么存在一个只依赖于 Γ 的常数 $C_\Gamma > 0$，

$$F_h \ \ge\ C_\Gamma^{-1} \quad on\ \Lambda_\Gamma^{\mathbb{R}}(h). \tag{2.15}$$

现在我们证明一个供后续使用的重要估计。我们在此给出证明，因为这是本文中唯一实质性使用上述部分内容的地方。

固定常数 c_1, $c_2 > 0$，令 $G \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ 满足 $\operatorname{supp} G \cap \{x = y\} = \varnothing$，并定义

$$I(h) := \iint_{\Lambda_\Gamma^{\mathbb{R}}(c_1 h^\rho)^2} \big|K(x,w;h)\big|^2\, dx\, dw. \tag{2.16}$$

其中

$$K(x,w;h) := \int_{\mathbb{R}} F_{c_2 h^{\rho'}}(\eta)\ \exp\left(\frac{i}{h}\big(\Phi(x,\eta) - \Phi(w,\eta)\big)\right) G(x,\eta)\, G(w,\eta)\, d\eta, \tag{2.17}$$

and

$$\Phi(x,\eta) = 2\log|x-\eta|.$$

在第 3 节中，我们将定理 1.1 和 1.2 证明的主要部分归结为以下估计，该估计利用 Bourgain–Dyatlov 在定理 I（h）中的傅里叶衰减指数来界定相关量。证明结合了 [BD17中的若干思想，以及命题 4.1 和 4。3]。

引理 2.3。 按照 I（h）中对 （2.16）、（2.17）的定义，存在 $C > 0$ 使得

$$I(h) \le C\, h^{2\rho'(1-\delta)+2\rho(1-\delta)+\beta_F/2}$$

当 h 足够小时。

证明。Rec 回顾 F_h （2.14）中的定义，我们可以对适当的常数 C ，

$$\begin{aligned} K(x,w;h) &= C\,h^{-\rho'\delta}\int_{\mathbb{R}} \mu\left(\big[\eta - 2c_2h^{\rho'},\, \eta + 2c_2h^{\rho'}\big]\right) \exp\left(\frac{i}{h}\big(\Phi(x,\eta) - \Phi(w,\eta)\big)\right) G(x,\eta)\, G(w,\eta)\, d\eta \\ &= C\,h^{-\rho'\delta}\int_{-2c_2h^{\rho'}}^{2c_2h^{\rho'}} \int_{\Lambda_\Gamma^{\mathbb{R}}} \exp\left(\frac{i}{h}\big(\Phi(x,\eta-s) - \Phi(w,\eta-s)\big)\right) G(x,\eta-s)\, G(w,\eta-s)\, d\mu(\eta)\, ds. \end{aligned}$$

因此，利用施瓦茨不等式，我们得到

$$I(h) \le C\, h^{\rho'-2\rho'\delta} \int_{-2c_2h^{\rho'}}^{2c_2h^{\rho'}} \left(\iint_{\Lambda_\Gamma^{\mathbb{R}}(c_1h^\rho)^2} \left|\tilde K_s(x,w;h)\right|^2 dx\, dw \right) ds, \tag{2.18}$$

其中

$$\tilde K_s(x,w;h) = \int_{\Lambda_\Gamma^{\mathbb{R}}} \exp\left(\frac{i}{h}\big(\Phi(x,\eta-s) - \Phi(w,\eta-s)\big)\right) G(x,\eta-s)\, G(w,\eta-s)\, d\mu(\eta). \tag{2.19}$$

我们现在仿照 [BD17命题 4.1], 的证明结尾，并且如同该证明中那样，我们可以对 G 使用单位分解，从而归结到如下情形：$\operatorname{supp} G \subset J_1 \times J_2 \subset I_1 \times I_2 \Subset I_1' \times I_2'$ 对应于 J_1, J_2 这些闭区间，而 I_1, I_2, I_1', I_2' 为开区间，并满足 $I_1' \cap I_2' = \varnothing$。对 $x,w \in \Lambda_\Gamma^{\mathbb{R}}(c_1h^\rho) \cap J_1$ 与 $s \in [-2c_2h^{\rho'}, 2c_2h^{\rho'}]$，在 I_2 上定义函数 $\varphi_{x,w,s}$, $g_{x,w,s}$ 如下

$$\begin{aligned} \Phi(x,\eta-s) - \Phi(w,\eta-s) &= (x-w)\,\varphi_{x,w,s}(\eta), \\ g_{x,w,s}(\eta) &= G(x,\eta-s)\, G(w,\eta-s), \qquad \eta \in I_2. \end{aligned} \tag{2.20}$$

然后，利用 Φ 的形式以及 G 为 C^1 这一事实，我们容易得到

$$\|\varphi_{x,w,s}\|_{C^2(I_2)} + \|g_{x,w,s}\|_{C^1(I_2)} \le C, \qquad \inf_{I_2} \left|\partial_\eta \varphi_{x,w,s}\right| \ge C^{-1}$$

其中常数 C 与 x, w, s 无关。我们可以将 $\varphi_{x,w,s}, g_{x,w,s}$ 延拓为在 $\mathbb{R}$ 上紧支的函数，并且使得

$$\|\varphi_{x,w,s}\|_{C^2(\mathbb{R})} + \|g_{x,w,s}\|_{C^1(\mathbb{R})} \le C, \qquad \inf_{\Lambda_\Gamma^{\mathbb{R}}} \left|\partial_\eta \varphi_{x,w,s}\right| \ge C^{-1}$$

对于可能不同的 C，但仍独立于 x， w， s。但是 (2.19) 和 (2.20) 表明

$$\tilde K_s(x,w;h) = \int_{\Lambda_\Gamma^{\mathbb{R}}} \exp\big(i\,\xi\,\varphi_{x,w,s}(\eta)\big)\, g_{x,w,s}(\eta)\, d\mu(\eta), \qquad \xi := \frac{x-w}{h},$$

因此，我们可以应用定理 2.1 得到

$$\left|\tilde K_s(x,w;h)\right|^2 \le C \left|\frac{x-w}{h}\right|^{-\beta_F}, \quad x,w \in \Lambda_\Gamma^{\mathbb{R}}(c_1h^\rho) \cap J_1, \quad |x-w| > h, \tag{2.21}$$

关于 $s \in [-2c_2h^{\rho'}, 2c_2h^{\rho'}]$. 一致

现在，对于任意 $w \in \Lambda_\Gamma^{\mathbb{R}}(c_1h^\rho) \cap J_1$ 和 $s \in [-2c_2h^{\rho'}, 2c_2h^{\rho'}]$，我们有

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda_\Gamma^{\mathbb{R}}(c_1h^\rho)} \left|\tilde K_s(x,w;h)\right|^2 dx = &\int_{\Lambda_\Gamma^{\mathbb{R}}(c_1h^\rho)\cap\{|x-w|\le h^{1/2}\}} \left|\tilde K_s(x,w;h)\right|^2 dx \\ &+ \int_{\Lambda_\Gamma^{\mathbb{R}}(c_1h^\rho)\cap\{|x-w|> h^{1/2}\}} \left|\tilde K_s(x,w;h)\right|^2 dx. \end{aligned} \tag{2.22}$$

为了估计第一个积分，我们注意到，对于任意 $w \in \Lambda_\Gamma^{\mathbb{R}}(c_1h^\rho)$，都可以找到 $w_0 \in \Lambda_\Gamma^{\mathbb{R}}$，使得$\{x : |x-w| \le h^{1/2}\} \subset \{x : |x-w_0| < 2h^{1/2}\}$ 当 h 较小时（这里我们使用 $\rho > \frac{1}{2}$）。由（2.12），

$\Lambda_\Gamma^{\mathbb{R}}(c_1 h^\rho) \cap \{|x - w_0| < 2h^{1/2}\}$ 的勒贝格测度有界于 $Ch^{\rho(1-\delta)+\delta/2}$。对于第二个积分，我们利用（2.21）将其估计为不超过 $Ch^{\rho(1-\delta)+\beta_F/2}$。然后由（2.22）和（2.18），并回想 $\beta_F \le \delta$，可得

$$I(h) \le C\, h^{2\rho'(1-\delta)+2\rho(1-\delta)+\beta_F/2}.$$

如所断言。

□

3. 定理 1.1 和 1.2 的证明

3.1. 与改进的谱隙相匹配的改进的分形 Weyl 界。 在本小节中，我们将给出定理1.1的证明。在此过程中，我们还将证明一些界，这些界将用于定理 1.2 在下一小节中的证明。

我们首先定义行列式函数

$$F(\omega) := \det\left(I - A(\omega)^4\right), \quad \omega \in \Omega. \tag{3.1}$$

此处 ρ，$\rho' \in (0, 1)$，$\varepsilon_0 > 0$、$\nu_0 > 0$ 均为固定但任意的，$A(\omega)$如第 2 节所定义，并且我们回顾，

$$\Omega := [1 - 2h,\, 1 + 2h] + ih\,[-\nu_0,\, 1]. \tag{3.2}$$

该函数是良定义的，因为 $A(\omega)$是希尔伯特–施密特的（见第 2 节），因而 $A(\omega)^4$ 是迹类的。此外，由第 2 节 (iii) 不难看出，

$$\|A(\omega)\|_{\mathcal{X}\to\mathcal{X}} \le C\, h^{\rho'\left(h^{-1}\operatorname{Im}\omega - \varepsilon_0\right)}, \qquad \omega \in \Omega. \tag{3.3}$$

因此 $\left(I - A(\omega_0)^4\right)^{-1}$ 必然对某个 $\omega_0 \in \Omega$存在，前提是 ε_0 选取得足够小。根据解析 Fredholm 理论（例如参见 [DZ19，定理 C。8]），$\left(I - A(\omega)^4\right)^{-1}$ 在 Ω 中构成一个亚纯族，其极点为有限秩；因此 F 在 Ω 中是全纯的，并且其零点恰好是这些极点，且重数相同（参见 [DZ19，B 节。5]）。由（2.5）可见，

$$P_h(\omega)^{-1} = \left(I - A(\omega)^4\right)^{-1}\left(I + A(\omega) + A(\omega)^2 + A(\omega)^3\right) Z(\omega), \qquad \omega \in \Omega,$$

因此 $\left(I - A(\omega)^4\right)^{-1}$ 的极点与 $P_h(\omega)^{-1}$的极点一致。由于（2.4）表明，$R_h(\omega)$ 的任何极点都是 $P_h(\omega)^{-1}$的极点，我们由（2.1）得出：对于任意 $\nu < \nu_0$，若令 $h := R^{-1}$，则 F 在区域

$$\Omega' := [1,\, 1 + h] + ih\left[-\nu,\, \tfrac{1}{2}\right] \subset \Omega \tag{3.4}$$

意味着.....的上界

$$\mathcal{N}(R, v) = \#\{\lambda \text{ resonance} : \operatorname{Re}\lambda \in [R, R+1],\ \operatorname{Im}\lambda \ge -\nu\}.$$

要证明定理1.1，只需证明以下估计

$$\mathcal{N}(R, v) \le C\, R^{4\,(\nu - \beta_{BD}) + \varepsilon} \qquad \text{as } R \to \infty,$$

由于将其与 [Dya19a，定理 1] 结合起来即可证明该定理，而我们通过估计 F 在Ω′ 中的零点个数来完成这一证明，所用方法是詹森不等式的一种变体。为此，我们需要

在更大的区域 $F(\omega)$ 中给出 Ω的上界，并首先回顾标准估计[DZ19，(B.5.19)]:

$$\log|F(\omega)| \le \left\|A(\omega)^4\right\|_{\mathrm{tr}(\mathcal{X})}, \qquad \omega \in \Omega. \tag{3.5}$$

我们分两步估计 $\left\|A(\omega)^4\right\|_{\mathrm{tr}(\mathcal{X})}$，第一步如下。

命题3.1. 固定 $\rho, \rho' \in (,1)$、 $\varepsilon_0 > 0$ 和 $\nu_0 > 0$ 后，算子 $A(\omega)$ 满足

$$\left\|A(\omega)^4\right\|_{\mathrm{tr}(\mathcal{X})} \le C\,\|J(\omega)\|^4_{L^2\to L^2}\ \mathrm{tr}\big((\tilde{A}^*\tilde{A})^2\big) + O\left(h^\infty\right), \qquad \omega \in \Omega, \tag{3.6}$$

˜其中 $J(\omega)$ 和 A 分别如 (2.8) 和 (2.9)所述。

证明。 利用 [Sim79，定理 1.13 和推论 1。10] ，可得

$$\left\|A(\omega)^4\right\|_{\mathrm{tr}(\mathcal{X})} \le \sum_{j=0}^{\infty} s_j\big(A(\omega)\big)^4,$$

其中 $s_j(A(\omega))$ 是 $A(\omega)$ 的奇异值（注意，当 B 为希尔伯特–施密特类时， $\sum_{j=0}^{\infty} s_j(B)^4 < \infty$ ，因为希尔伯特–施密特类的理想性质给出 $\sum_{j=0}^{\infty} s_j(B)^4 = \|B^*B\|^2_{HS} \le \|B\|^2\|B\|^2_{HS}$ ）。由 (2.8) 的第二部分， $\varepsilon(\omega)$ 属于希尔伯特–施密特类（因此 $J(\omega)A_-\tilde{A}A_+$ 也属于该类），并且根据 (2.3)，它满足

$$\|\varepsilon(\omega)\|_{HS(\mathcal{X})} \le C\,\|\varepsilon(\omega)\|_{HS\left(H^s_h(M_{\mathrm{ext}})\to H^{s+1}_h(M_{\mathrm{ext}})\right)} = O(h^\infty), \qquad \omega \in \Omega.$$

因此，回顾（2.7）并利用 [Sim79，定理 1.21], 我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} s_j\big(A(\omega)\big)^4 &\le C\sum_{j=0}^{\infty} s_j\big(J(\omega)A_-\tilde{A}A_+\big)^4 + O(h^\infty)\\ &\le C\,\|J(\omega)\|^4_{L^2\to L^2}\sum_{j=0}^{\infty} s_j(\tilde{A})^4 + O(h^\infty),\end{aligned} \tag{3.7}$$

其中，在最后一步中，我们利用了 $s_j(ABC) \le \|A\|\,\|C\|\,s_j(B)$ 在 B 紧且 A 和C 有界时成立（见 [DZ19，命题 B.15]）。由于 $\sum_{j=0}^{\infty} s_j(\tilde{A})^4 = \mathrm{tr}\left((\tilde{A}^*\tilde{A})^2\right)$，证明得证。□

因此，为了给 F一个上界，我们需要给 $\mathrm{tr}\left((\tilde{A}^*\tilde{A})^2\right)$一个上界；部分地，我们将通过把问题归约到引理 2.3中估计的量来实现这一点。具体如下:

命题 3.2。 存在 $C > 0$ 使得

$$\mathrm{tr}\left((\tilde{A}^*\tilde{A})^2\right) \le C\,h^{2\rho-4+2\rho(1-\delta)+2\rho'(1-\delta)+\beta_F/2}$$

当 h 足够小时。

证明。令 $C_2 > 0$ 满足 (2.11) 对 $\alpha = h^{\rho'}$成立，其中 C_1 与 (2.10) 中的定义相同。接下来，我们定义

$$\tilde{F}(y;h) := F_{C_2 h^{\rho'}}\left(\sigma^{-1}(y)\right)$$

其中 F_h 由（2.14）定义。利用（2.15），可写为

$$s_j(\tilde{A}) \le C\, s_j(\hat{A}) \tag{3.8}$$

其中

$$\hat{A} := \sqrt{\tilde{F}(y;h)}\,\tilde{B}_\psi\,\psi_+(y;h)\,\psi_0(w;h)\,\tilde{\psi}\,(hD_w) \tag{3.9}$$

（这只是将 $\tilde{A}$ 中的 ψ_- 替换为 $\sqrt{\tilde{F}}$；为证明（3.8），我们利用了对于 A 有界且 B 紧，$s_j(AB) \le \|A\|\, s_j(B)$，以及由引理 2.2）得到的估计 $|\psi_-| = |\psi_-|\,(C_\Gamma \tilde{F})^{-1/2}\,(C_\Gamma \tilde{F})^{1/2} \le C\tilde{F}^{1/2}$。因此，

$$\operatorname{tr}\left((\tilde{A}^*\tilde{A})^2\right) \le C\,\operatorname{tr}\left((\hat{A}^*\hat{A})^2\right), \tag{3.10}$$

因此我们必须估计

$$\operatorname{tr}\left((\hat{A}^*\hat{A})^2\right) = \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{S}}\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{S}} \left|\ker(\hat{A}^*\hat{A})(w,y,w',y')\right|^2 dw\,dy\,dw'\,dy'. \tag{3.11}$$

由（3.9），计算得

$$\ker(\hat{A}^*\hat{A})(w,y,w',y') = (2\pi h)^{-3}\,\psi_+(y;h)\,\psi_+(y';h)\int_{\mathbb{R}^+}\mathcal{F}(\tilde{\psi})\left(\frac{w'-\alpha}{h}\right)\mathcal{F}(\tilde{\psi})\left(\frac{\alpha-w}{h}\right)\psi_0^2(\alpha;h)$$
$$\cdot\left(\int_{\mathbb{S}}\tilde{F}(z;h)\left|\frac{z-y'}{z-y}\right|^{2i\alpha/h}\psi(z,y)\,\psi(z,y')\,dz\right)d\alpha,$$

其中 $\mathcal{F}(f)(\xi) := \int e^{-i\xi x} f(x)\,dx$。由于 $\operatorname{supp}\,\psi_0 \subset \left[1 - C_1 h^\rho,\, 1 + C_1 h^\rho\right]$，我们使用施瓦茨不等式来估计

$$\left|\ker(\hat{A}^*\hat{A})(w,y,w',y')\right|^2 \le C\,h^{\rho-6}\,\psi_+(y;h)\,\psi_+(y';h)\int_{\mathbb{R}}\left|\mathcal{F}(\tilde{\psi})\left(\frac{w'-\alpha}{h}\right)\right|^2\left|\mathcal{F}(\tilde{\psi})\left(\frac{\alpha-w}{h}\right)\right|^2$$
$$\cdot\,\psi_0^4(\alpha;h)\left|K(\alpha,y,y';h)\right|^2 d\alpha, \tag{3.12}$$

其中我们定义了

$$K(\alpha,y,y';h) := \int_{\mathbb{S}}\tilde{F}(z;h)\left|\frac{z-y'}{z-y}\right|^{2i\alpha/h}\psi(z,y)\,\psi(z,y')\,dz.$$

对（3.12）积分，并利用 $\int_{\mathbb{R}}\left|\mathcal{F}(\tilde{\psi})\left((\alpha-w)/h\right)\right|^2 dw \le h\,\|\tilde{\psi}\|_{L^2}^2$ 以及 $\int_{\mathbb{R}}\left|\mathcal{F}(\tilde{\psi})\left((w'-\alpha)/h\right)\right|^2 dw' \le h\,\|\tilde{\psi}\|_{L^2}^2$，由（3.11）可得（回顾上文所述关于 ψ_+ 的支撑条件）：

$$\operatorname{tr}\left((\hat{A}^*\hat{A})^2\right) \le Ch^{\rho-4}\int_{\mathbb{R}^+}\psi_0^4(\alpha;h)\left(\iint_{\Lambda_\Gamma(C_1h^\rho)^2}\left|K(\alpha,y,y';h)\right|^2 dy dy'\right)d\alpha. \tag{3.13}$$

利用（2.11），可得

$$\iint_{\Lambda_\Gamma(C_1h^\rho)^2}\big|K(\alpha,y,y';h)\big|^2\,dy\,dy' \;\le\; \iint_{\sigma\left(\Lambda_\Gamma^{\mathbb{R}}(C_2h^\rho)\right)^2}\big|K(\alpha,y,y';h)\big|^2\,dy\,dy'. \tag{3.14}$$

利用 σ 作变量代换，并注意到

$$\big|\sigma(x,0)-\sigma(\eta,0)\big|^2=\frac{4\,|x-\eta|^2}{\big(1+x^2\big)\big(1+\eta^2\big)},$$

我们很容易将 (3.14) 的右端估计为 $I(h/\alpha)$ (参见 (2.16))，其中常数取适当值，且将 G 替换为 ψ。应用引理 2.3 ，再利用 (3.10)、(3.13)，即可完成证明。

□

定理 *1.1* 的证明。取 $\nu>0$， $\varepsilon_0>0$，令 $\nu_0=\nu+\varepsilon_0$， $\rho=\rho'=1-\varepsilon_0$，并定义 Ω、Ω′，如 (3.2)、(3.4) 所示。由 (3.5)、(2.8) 中的第一个界（其中 $N=0$），以及命题 3.1 和 3.2，可得

$$\log|F(\omega)|\le\|A(\omega)^4\|_{\mathrm{tr}(\mathcal{X})}\le h^{-4\,(\nu-\beta_{BD})+O(\varepsilon_0)},\qquad \omega\in\Omega. \tag{3.15}$$

接下来，我们需要在 F 的某个点Ω′处得到一个下界。若 ε_0 足够小，则类似于[Dya19a，(4.7)]，，我们可以利用 (3.3) 得到

$$\big\|A(\omega_0)^4\big\|_{\mathcal{X}\to\mathcal{X}}\le\tfrac12,\qquad \omega_0:=1+\tfrac{ih}{3}\in\Omega'. \tag{3.16}$$

此外，

$$\big(I-A(\omega_0)^4\big)^{-1}=I+A(\omega_0)^4\big(I-A(\omega_0)^4\big)^{-1},$$

并且，利用（3.16）和（3.15）中的第二个不等式，我们得到

$$\big\|A(\omega_0)^4\big(I-A(\omega_0)^4\big)^{-1}\big\|_{\mathrm{tr}(\mathcal{X})}\le C\,h^{-4\,(\nu-\beta_{BD})+O(\varepsilon_0)}.$$

因此，

$$-\log\big|F(\omega_0)\big|=\log\Big|\det\Big(I+A(\omega_0)^4\big(I-A(\omega_0)^4\big)^{-1}\Big)\Big|\le C\,h^{-4\,(\nu-\beta_{BD})+O(\varepsilon_0)},$$

从而得到我们的下界。

如 [Dya19a 中证明定理 1], 时一样，我们最后按照 [DD13 中证明定理 2] 时概述的方法应用詹森不等式，从而得出 F 在 Ω′ 中的零点数有界于 $C\,h^{-4\,(\nu-\beta_{BD})+O(\varepsilon_0)}$。正如本节开头所解释的，这意味着有界

$$\mathcal{N}(R,\nu)\le C\,R^{4\,(\nu-\beta_{BD})+O(\varepsilon_0)},$$

取足够小的 ε_0，即可完成证明。

□

3.2. 改进谱隙中的改进的预解式界。几乎所有工作都已完成，定理1.2 的证明现在很简单。

定理 *1.2*的证明。如 [Dya19a 所示，证明定理 2], 只需证明以下界

$$\big\|P_h(\omega)^{-1}\big\|_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}} \le C\,h^{-1-c(\nu,\delta)-\varepsilon}, \qquad \omega\in\Omega := [1-2h,1+2h]+ih[-\nu,1].$$

（注意，这里的 Ω 与 (3.2) 中的 Ω 不同。）事实上，由 (2.4)，这意味着在 $\psi R_h(\omega)\psi$ 上，对任意 $\psi\in C_c^\infty(M)$，都有一个 $H_h^{s-1}(M)\to H_h^s(M)$ 估计；再利用 $-h^2\Delta_M-\frac{h^2}{4}-\omega^2$ 的椭圆拟逆（例如参见 [DZ19, 命题 E.32]），可将其转化为一个 $L^2\to L^2$ 估计。结合 (2.1)，即可推出 (1.2)。

固定 $\varepsilon_0>0$，并令

$$\rho=1-\varepsilon_0, \qquad \rho'=\frac{2\big(1-\delta-2\beta_{BD}\big)+\sqrt{\varepsilon_0}}{2\big(1-\delta-2\nu\big)}.$$

注意，$\rho'<1$ 当 ε_0 足够小时（取决于 ν）。由于 $s_0(A)=\|A\|$ 对于任意紧算子，我们利用 (3.7) 得到

$$\|A(\omega)\|_{\mathcal{X}\to\mathcal{X}}^4 \le C\,\|J(\omega)\|_{L^2\to L^2}^4\ \mathrm{tr}\big((\tilde A^*\tilde A)^2\big)+O(h^\infty), \qquad \omega\in\Omega.$$

根据（2.8），命题 3.2以及我们对 ρ、ρ' 的上述选取，可得

$$\|A(\omega)\|_{\mathcal{X}\to\mathcal{X}}^4 \le C\,h^{\sqrt{\varepsilon_0}+O(\varepsilon_0)}\le\tfrac12, \qquad \omega\in\Omega,$$

当 ε_0 足够小且 h较小时。因此我们还有

$$\|(I-A(\omega))^{-1}\|_{\mathcal{X}\to\mathcal{X}}\le C, \qquad \omega\in\Omega,$$

当 h较小时。由于 $P_h(\omega)^{-1}=(I-A(\omega))^{-1}Z(\omega)\colon\ \mathcal{Y}\to\mathcal{X}$（见（2.5））, 并且

$$\|Z(\omega)\|_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}}\le C\,h^{-1-(\rho+\rho')(\nu+\varepsilon_0)}, \qquad \omega\in\Omega,$$

（见（2.6））可得

$$\|P_h(\omega)^{-1}\|_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}}\le C\,h^{-1-c(\nu,\delta)+O(\sqrt{\varepsilon_0})}, \qquad \omega\in\Omega.$$

由于 ε_0 是任意的，证明完毕。 □

4. 定理 1.3 的证明

在这里，我们将应用与第 3 节 3.1 中类似的论证，但将其置于量子开放贝克映射的背景下，以证明定理 1.3。在本节中，对于任意 $N\in\mathbb{N}$，我们考虑阿贝尔群

$$\mathbb{Z}_N=\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\simeq\{0,1,\dots,N-1\},$$

并将希尔伯特空间 ℓ^2_N 定义为函数 u 的空间：$\mathbb{Z}_N\to\mathbb{C}$，其范数为

$$\|u\|^2_{\ell^2_N}=\sum_{j=0}^{N-1}|u(j)|^2.$$

我们在引言中回顾过，量子开放烘焙映射 B_N由三元组（M， $\mathcal{A}$， χ）确定，其中 $M \in \mathbb{N}$ 是基数， $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}_M = \{0, 1, \ldots, M-1\}$ 是字母表，且$\chi \in C_c^\infty((0,\ 1);\ [0,1])$ 是一个截断函数。于是对于 $N = M^k$, $k \in \mathbb{N}$, $B_N \colon \ell^2_N \to \ell^2_N$是由下式给出的算子序列

$$B_N := \mathcal{F}_N^* \begin{pmatrix} \chi_{N/M}\, \mathcal{F}_{N/M}\, \chi_{N/M} & & \\ & \ddots & \\ & & \chi_{N/M}\, \mathcal{F}_{N/M}\, \chi_{N/M} \end{pmatrix} I_{\mathcal{A},M}. \tag{4.1}$$

其中 $\mathcal{F}_N \colon \ell^2_N \to \ell^2_N$ 是酉傅里叶变换,

$$(\mathcal{F}_N u)(j) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} \exp\left(-\frac{2\pi i\, jl}{N}\right) u(l),$$

我们令 $\chi_{N/M} \in \ell^2_{N/M}$ 为离散化,

$$\chi_{N/M}(j) = \chi\left(\frac{Mj}{N}\right), \qquad j \in \left\{0, 1, \ldots, \frac{N}{M} - 1\right\},$$

（因此，在（4.1）中，$\chi_{N/M}$ 被视为 $\ell^2_{N/M}$上的乘法算子），并且$I_{\mathcal{A},\ M}$ 是对角矩阵，其第 j项为 1，若$\lfloor \frac{Mj}{N} \rfloor \in \mathcal{A}$，否则为0。注意$\mathrm{Sp}(B_N) \subset \{\, |\lambda| \leq 1 \,\}$，因为$\|B_N\|_{\ell^2_N \to \ell^2_N} \leq 1$，这直接由（4.1）得出。

接下来我们回顾

$$\delta := \frac{\log |\mathcal{A}|}{\log M} \in (0, 1) \tag{4.2}$$

是极限康托集的维数

$$C_\infty := \bigcap_k \bigcup_{j \in C_k} \left[\frac{j}{M^k}, \frac{j+1}{M^k}\right],$$

其中

$$C_k = C_k(M, \mathcal{A}) := \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} a_j M^j \ :\ a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathcal{A} \right\} \subset \mathbb{Z}_N. \tag{4.3}$$

康托集 C_∞ 在此背景下扮演极限集 Λ_Γ 的角色。

如上所述，定理1.3 的证明沿用第 3.1 节的方法（另见[DJ17，第 4 节。2]），我们从算子 $B_N - \lambda$的一个近似逆恒等式开始，它与（2.5）类似。

固定 $\nu_0 > 0$ 并令

$$\Omega := \left\{\, M^{-\nu_0} < |\lambda| < 3 \,\right\} \subset \mathbb{C}. \tag{4.4}$$

令 $\rho \in$ 属于（0，1），并定义

$$X = X_\rho := \bigcup \left\{\, C_k + m \ :\ m \in \mathbb{Z},\ |m| \leq 2\, N^{1-\rho} \,\right\} \subset \mathbb{Z}_N, \tag{4.5}$$

其中加法在群 $\mathbb{Z}_N$ 中进行。

Dyatlov–Jin, [DJ17，引理 4。1],证明如下近似逆恒等式：

$$I \;=\; Z(\lambda)\,\big(B_N-\lambda\big) \;+\; B(\lambda), \qquad \lambda\in\Omega, \tag{4.6}$$

对于ℓ^2_N上的算子族，它们在Ω中全纯，并满足

$$\|Z(\lambda)\|_{\ell^2_N\to\ell^2_N} \;\le\; C\,N^{2\rho\nu_0}, \qquad \lambda\in\Omega,$$

and

$$B(\lambda) \;:=\; J(\lambda)\,\mathbf{1}_X\,\mathcal{F}_N^*\,\mathbf{1}_X\,\mathcal{F}_N \;+\; \varepsilon(\lambda), \qquad \lambda\in\Omega, \tag{4.7}$$

¯其中（此处 $k:=\lceil\rho k\rceil$）

$$\|J(\lambda)\|_{\ell^2_N\to\ell^2_N}\le|\lambda|^{-\bar k}, \qquad \|\varepsilon(\lambda)\|_{\ell^2_N\to\ell^2_N}=O\big(N^{-\infty}\big), \qquad \lambda\in\Omega. \tag{4.8}$$

类似于（3.1），我们现在定义

$$F(\lambda):=\det\big(I-B(\lambda)^4\big), \qquad \lambda\in\Omega.$$

利用（4.6），容易看出

$$F(\lambda)=\det\big(I+B(\lambda)+B(\lambda)^2+B(\lambda)^3\big)\;\det Z(\lambda)\;\det\big(B_N-\lambda\big), \qquad \lambda\in\Omega.$$

从而

$$\mathrm{Sp}(B_N)\cap\Omega\;\subset\;\{\lambda\in\Omega: F(\lambda)=0\},$$

两个集合均按重数重复其元素。因此，为证明定理1.3 只需对 F的零点个数给出同样的界。我们将再次应用詹森不等式，为此需要从上界估计 F 在Ω中的值，并在某一点从下方估计。为得到上界，我们应用 [DZ19，（B.5.19）],

$$\log|F(\lambda)|\le\big\|B(\lambda)^4\big\|_{\mathrm{tr}} \tag{4.9}$$

然后，完全按照命题 3.1 证明中的方法，我们得到

$$\big\|B(\lambda)^4\big\|_{\mathrm{tr}}\le\sum_{j=0}^{N-1}s_j\big(B(\lambda)\big)^4\le C\,\|J(\lambda)\|^4_{\ell^2_N\to\ell^2_N}\;\mathrm{tr}\big((T^*T)^2\big), \tag{4.10}$$

其中

$$T:=\mathbf{1}_X\,\mathcal{F}_N\,\mathbf{1}_X. \tag{4.11}$$

我们有

$$\mathrm{tr}\big((T^*T)^2\big)=\frac{1}{N}\sum_{j,\ell=0}^{N-1}\mathbf{1}_X(j)\,\mathbf{1}_X(\ell)\,\big|\mathcal{F}_N(\mathbf{1}_X)(\ell-j)\big|^2, \tag{4.12}$$

这可以通过对矩阵 $(T^*T)^2$ 的对角元求和看出。值得将这一数量与双曲曲面情形下的类似量（2.16）进行比较。

接下来，我们将 $\mathrm{tr}((T^*T)^2)$ 化简为一个更容易估计的量：

引理 4.1。 设 C_k 如 (4.3)中所定义，令

$$t_k := \frac{1}{N}\sum_{j,\ell=0}^{N-1} \mathbf{1}_{C_k}(j)\, \mathbf{1}_{C_k}(\ell)\, \left|\mathcal{F}_N(\mathbf{1}_{C_k})\,(\ell-j)\right|^2 . \tag{4.13}$$

于是，取 T 如 (4.11)所示，可得

$$\operatorname{tr}\left((T^*T)^2\right) \le 16 N^{4(1-\rho)} t_k.$$

证明。 利用 $0 \le \mathbf{1}_X \le \sum_{|r|\le 2N^{1-\rho}} \mathbf{1}_{C_k+r}$，由 (4.12) 和 (4.5)可得

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}\big((T^*T)^2\big) &\le \sum_{|r|,|s|\le 2N^{1-\rho}} \frac{1}{N}\sum_{j,\ell=0}^{N-1} \mathbf{1}_{C_k+r}(j)\, \mathbf{1}_{C_k+s}(\ell)\, \big|\mathcal{F}_N\big(\mathbf{1}_X\big)(\ell-j)\big|^2 \\
&= \sum_{|r|,|s|\le 2N^{1-\rho}} \frac{1}{N}\sum_{j,\ell=0}^{N-1} \mathbf{1}_{C_k}(j)\, \mathbf{1}_{C_k}(\ell)\, \big|\mathcal{F}_N\big(\mathbf{1}_X\big)(\ell-j+s-r)\big|^2. \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

Now,

$$\begin{aligned}
\big|\mathcal{F}_N\big(\mathbf{1}_X\big)(\ell-j+s-r)\big|^2 &= \frac{1}{N}\sum_{n,m=0}^{N-1} \exp\Big(-\tfrac{2\pi i(\ell-j+s-r)n}{N}\Big)\, \mathbf{1}_X(n)\, \exp\Big(\tfrac{2\pi i(\ell-j+s-r)m}{N}\Big)\, \mathbf{1}_X(m) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n,m=0}^{N-1} \exp\Big(\tfrac{2\pi i(s-r)(m-n)}{N}\Big)\, \exp\Big(\tfrac{2\pi i(m-n)\ell}{N}\Big)\, \exp\Big(-\tfrac{2\pi i(m-n)j}{N}\Big)\, \mathbf{1}_X(n)\, \mathbf{1}_X(m).
\end{aligned}$$

重新整理各项求和，利用（4.14），并重复同样的估计，可得

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}\big((T^*T)^2\big) &\le \sum_{|r|,|s|\le 2N^{1-\rho}} \frac{1}{N}\sum_{n,m=0}^{N-1} \exp\Big(\tfrac{2\pi i(s-r)(m-n)}{N}\Big)\, \mathbf{1}_X(n)\, \mathbf{1}_X(m)\, \big|\mathcal{F}_N\big(\mathbf{1}_{C_k}\big)(m-n)\big|^2 \\
&\le 4\, N^{2(1-\rho)} \cdot \frac{1}{N}\sum_{n,m=0}^{N-1} \mathbf{1}_X(n)\, \mathbf{1}_X(m)\, \big|\mathcal{F}_N\big(\mathbf{1}_{C_k}\big)(m-n)\big|^2 \\
&\le 4\, N^{2(1-\rho)} \sum_{|t|,|s|\le 2N^{1-\rho}} \frac{1}{N}\sum_{n,m=0}^{N-1} \mathbf{1}_{C_k+t}(n)\, \mathbf{1}_{C_k+s}(m)\, \big|\mathcal{F}_N\big(\mathbf{1}_{C_k}\big)(m-n)\big|^2 \\
&\le 4\, N^{2(1-\rho)} \sum_{|t|,|s|\le 2N^{1-\rho}} \frac{1}{N}\sum_{n,m=0}^{N-1} \mathbf{1}_{C_k}(n)\, \mathbf{1}_{C_k}(m)\, \big|\mathcal{F}_N\big(\mathbf{1}_{C_k}\big)(m-n+s-t)\big|^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4\, N^{2(1-\rho)} \sum_{|t|,|s|\le 2N^{1-\rho}} \frac{1}{N}\sum_{j,\ell=0}^{N-1} \exp\Big(\tfrac{2\pi i\,(s-t)\,(\ell-j)}{N}\Big)\, \mathbf{1}_{C_k}(j)\, \mathbf{1}_{C_k}(\ell)\, \big|\mathcal{F}_N\big(\mathbf{1}_{C_k}\big)(\ell-j)\big|^2 \\
&\le 16\, N^{4(1-\rho)}\, t_k.
\end{aligned}$$

□

我们将证明关于 t_k 的两个上界，即命题 4.3 和命题 4.4，分别对应于改进的谱隙优于 $\frac{1}{2}-\delta$（[DJ17，定理 1]），以及用加性能量表示的情形（[DJ17，§3.4]）。在 [DJ17]，中，谱隙是通过分形不确定性原理证明的；在此背景下，该原理是对量 $r_k := \| \mathbf{1}_{C_k} \mathcal{F}_N \mathbf{1}_{C_k} \|_{\ell^2_N \to \ell^2_N}$ 的一个估计（另见 [Dya19b，§4.1]）。[DJ17，§3.1] 中一个关键的初步观察是，r_k 具有次乘性；同样，我们接下来将证明 t_k 也具有次乘性。

我们先作一个观察，证明中会用到。设 $k = k_1 + k_2$ 和 $N_i = M^{k_i}$ for$i = 1, 2$。若 $\ell \in \{0, \dots, N-1\}$，则可将 $\ell = N_2 a + e$ 写成某个唯一的 $a \in \{0, \dots, N_1 - 1\}$ and$e \in \{0, \dots, N_2 - 1\}$。此外，由于 $C_k = N_2 C_{k_1} + C_{k_2}$，我们有 $\mathbf{1}_{C_k}(\ell) = \mathbf{1}_{C_{k_1}}(a)\, \mathbf{1}_{C_{k_2}}(e)$。因此，对于任意 $f = \{f_\ell\}_{\ell=0}^{N-1}$，我们有

$$\sum_{\ell=0}^{N-1} \mathbf{1}_{C_k}(\ell)\, f_\ell = \sum_{a=0}^{N_1-1} \sum_{e=0}^{N_2-1} \mathbf{1}_{C_{k_1}}(a)\, \mathbf{1}_{C_{k_2}}(e)\, f_{N_2 a + e}. \tag{4.15}$$

现在我们证明 t_k 的次乘性：

引理 4.2. 对于 $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$，有：

$$t_{k_1+k_2} \le t_{k_1} t_{k_2}$$

证明。 我们可以写成

$$t_k = \frac{1}{N^2} \sum_{j,\ell,m,n=0}^{N-1} \exp\Big(\tfrac{2\pi i\,(\ell-j)(m-n)}{N}\Big)\, \mathbf{1}_{C_k}(j)\, \mathbf{1}_{C_k}(\ell)\, \mathbf{1}_{C_k}(n)\, \mathbf{1}_{C_k}(m). \tag{4.16}$$

现在我们按照证明前的讨论作变量替换，写成

$$\begin{aligned} &\ell = N_2 a + e, && j = N_2 b + f, && a, b, c, d \in C_{k_1}, \\ &m = N_1 g + c, && n = N_1 h + d, && e, f, g, h \in C_{k_2}. \end{aligned}$$

注意到指数项变为

$$\exp\Big(\tfrac{2\pi i\,(\ell-j)(m-n)}{N}\Big) = \exp\Big(\tfrac{2\pi i\,(a-b)(c-d)}{N_1}\Big)\, \exp\Big(\tfrac{2\pi i\,(e-f)(g-h)}{N_2}\Big)\, \exp\Big(\tfrac{2\pi i\,(e-f)(c-d)}{N}\Big),$$

然后使用（4.15）（反复使用），我们计算得

$$\begin{aligned} t_k = \frac{1}{N^2} \sum_{a,b,c,d=0}^{N_1-1} \sum_{e,f,g,h=0}^{N_2-1} &\exp\Big(\tfrac{2\pi i\,(a-b)(c-d)}{N_1}\Big)\, \exp\Big(\tfrac{2\pi i\,(e-f)(g-h)}{N_2}\Big)\, \exp\Big(\tfrac{2\pi i\,(e-f)(c-d)}{N}\Big) \\ &\cdot \mathbf{1}_{C_{k_1}}(a)\, \mathbf{1}_{C_{k_1}}(b)\, \mathbf{1}_{C_{k_1}}(c)\, \mathbf{1}_{C_{k_1}}(d)\, \mathbf{1}_{C_{k_2}}(e)\, \mathbf{1}_{C_{k_2}}(f)\, \mathbf{1}_{C_{k_2}}(g)\, \mathbf{1}_{C_{k_2}}(h). \end{aligned}$$

But

$$\big|\mathcal{F}_{N_1}(\mathbf{1}_{C_{k_1}})(c-d)\big|^2 = \frac{1}{N_1} \sum_{a,b=0}^{N_1-1} \exp\Big(\tfrac{2\pi i\,(a-b)(c-d)}{N_1}\Big)\, \mathbf{1}_{C_{k_1}}(a)\, \mathbf{1}_{C_{k_1}}(b),$$

and

$$\big|\mathcal{F}_{N_2}(\mathbf{1}_{C_{k_2}})(e-f)\big|^2 = \frac{1}{N_2} \sum_{g,h=0}^{N_2-1} \exp\Big(\tfrac{2\pi i\,(e-f)(g-h)}{N_2}\Big)\, \mathbf{1}_{C_{k_2}}(g)\, \mathbf{1}_{C_{k_2}}(h),$$

因此我们有，

$$\begin{aligned} t_k &= \frac{1}{N}\sum_{c,d=0}^{N_1-1}\sum_{e,f=0}^{N_2-1} \exp\Big(\tfrac{2\pi i\,(e-f)(c-d)}{N}\Big)\,\big|\mathcal{F}_{N_1}(\mathbf{1}_{C_{k_1}})(c-d)\big|^2\,\big|\mathcal{F}_{N_2}(\mathbf{1}_{C_{k_2}})(e-f)\big|^2 \\ &\qquad \cdot \mathbf{1}_{C_{k_1}}(c)\,\mathbf{1}_{C_{k_1}}(d)\,\mathbf{1}_{C_{k_2}}(e)\,\mathbf{1}_{C_{k_2}}(f) \\ &\leq \frac{1}{N}\sum_{c,d=0}^{N_1-1}\sum_{e,f=0}^{N_2-1} \big|\mathcal{F}_{N_1}(\mathbf{1}_{C_{k_1}})(c-d)\big|^2\,\big|\mathcal{F}_{N_2}(\mathbf{1}_{C_{k_2}})(e-f)\big|^2\,\mathbf{1}_{C_{k_1}}(c)\,\mathbf{1}_{C_{k_1}}(d)\,\mathbf{1}_{C_{k_2}}(e)\,\mathbf{1}_{C_{k_2}}(f) \\ &= t_{k_1}\,t_{k_2}. \end{aligned}$$

□

现在我们使用引理 4.2 来证明关于 t_k的如下估计，这将使我们能够证明分形Weyl界中与谱隙胜过 $\frac{1}{2}-\delta$相匹配的部分：

命题 4.3。 存在 $\beta > \frac{1}{2}-\delta$，使得对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在 $C_\varepsilon > 0$，从而

$$t_k \leqslant C_\varepsilon N^{-4\beta+\varepsilon}. \tag{4.17}$$

证明。 由于 $\log t_k$ 根据引理 4.2具有次可加性，费克特引理表明存在 β 使得

$$4\beta = -\lim_{k\to\infty}\frac{\log t_k}{k\log M} = -\inf_k \frac{\log t_k}{k\log M}. \tag{4.18}$$

这蕴含了（4.17），因此还需证明 $\beta > \frac{1}{2}-\delta$；根据（4.18），只需证明对于 $t_k < N^{4\delta-2}$ 某个 k，我们将遵循 [Dya19b，引理 4。8]（另见 [DJ17，引理 3。4]）来证明这实际上对所有 $k \geq 2$均成立。

事实上，我们首先注意到，根据（4.16），可以容易地得到

$$t_k \leqslant \frac{|C_k|^4}{N^2} = N^{4\left(\delta-\frac{1}{2}\right)}, \tag{4.19}$$

由 $|C_k| = |\mathcal{A}|^k = N^\delta$（根据 (4.3)、(4.2)）。再次由 (4.16) 可知，只有当指数因子对所有 j、ℓ、m、$n \in C_k$ 都为 $\equiv 1$ 时，(4.19) 中才可能取等号；也就是说，只有当 $(\ell-j)(m-n)$ 对所有 j、ℓ、m、$n \in C_k$ 都 $\in N\mathbb{Z}$ 时才可能取等号。但当 $k \geq 2$ 时，我们可以找到 ℓ、$j \in C_k$ 使得

$$0 < |\ell - j| < M \leqslant \sqrt{N}$$

（这里使用了 $\delta > 0$），因此 $(\ell-j)^2 \notin N\mathbb{Z}$ 且 (4.19) 在 $k \geq 2$ 时必须为严格不等式。 □

接下来我们证明关于 t_k 的另一个界，这次使用由[DJ17 第 3 节给出的加性能量估计。4] 为了陈述该结果，回顾一下，集合 $X \subset \mathbb{Z}_N$ 的加性能量定义为

$$E_{\mathcal{A}}(X) := \big|\big\{(a,b,c,d) \in X^4 : a+b \equiv c+d \pmod N\big\}\big|.$$

在 [DJ17中，推论 3.9 与引理 3。10], Dyatlov–Jin 证明存在 $\gamma_{\mathcal{A}} > 0$ 使得对任意 $\varepsilon > 0$，我们有某个 $C_\varepsilon > 0$ 以及所有 k,

$$E_{\mathcal{A}}(C_k) \leq C_\varepsilon\, N^{3\delta-\gamma_{\mathcal{A}}+\varepsilon}. \tag{4.20}$$

此外， $\gamma_{\mathcal{A}}$ 可以显式计算。通过首先证明分形不确定性原理，该估计被用于 [DJ17] 中，以证明大小为

$$\beta_E := \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} - \delta\right) + \frac{\gamma_{\mathcal{A}}}{8}.$$

现在我们证明关于 t_k 的第二个界：

命题 4.4。 对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $C_\varepsilon > 0$ 使得

$$t_k \leq C_\varepsilon \, N^{-4\beta_E + \varepsilon}.$$

证明。 由施瓦茨不等式可得

$$\sum_{\ell=0}^{N-1} \mathbf{1}_{C_k}(\ell) \left|\mathcal{F}_N\big(\mathbf{1}_{C_k}\big)(\ell - j)\right|^2 \;\leq\; |C_k|^{1/2} \left\|\mathcal{F}_N\big(\mathbf{1}_{C_k}\big)\right\|_{\ell^4_N}^2. \tag{4.21}$$

但我们计算得

$$\left\|\mathcal{F}_N\big(\mathbf{1}_{C_k}\big)\right\|_{\ell^4_N}^4 = \frac{1}{N^2} \sum_{\ell=0}^{N-1} \sum_{a,b,c,d \in C_k} \exp\left(\frac{2\pi i \, (a+b-c-d)\, \ell}{N}\right) = \frac{E_{\mathcal{A}}(C_k)}{N}.$$

因此，由（4.21）以及 t_k 在（4.13）中的定义，可得

$$t_k \leqslant N^{-3/2} \, |C_k|^{3/2} \, E_{\mathcal{A}}(C_k)^{1/2}.$$

由于 $|C_k| = N^\delta$，结论由（4.20）得出。 □

现在我们可以开始证明定理1.3。

定理 *1.3* 的证明。固定 $\nu > 0$， $\varepsilon_0 > 0$，令 $\nu_0 = \nu + \varepsilon_0$， $\rho = 1 - \varepsilon_0$，并将 Ω 定义为（4.4）中所示。利用（4.10）、（4.8）中的第一个界以及引理4.1，我们得到

$$\big\|B(\lambda)^4\big\|_{\mathrm{tr}} \leq C \, N^{4\nu + O(\varepsilon_0)} \, t_k, \qquad \lambda \in \Omega.$$

现在利用（4.9）和命题 4.3，取 ε_0 ，可得

$$\log|F(\lambda)| \;\leq\; \big\|B(\lambda)^4\big\|_{\mathrm{tr}} \;\leq\; C \, N^{4(\nu-\beta) + O(\varepsilon_0)}, \qquad \lambda \in \Omega. \tag{4.22}$$

接下来利用（4.7）和（4.8），可知

$$\big\|B(2)^4\big\|_{\ell^2_N \to \ell^2_N} \;\leq\; \tfrac{1}{2} \tag{4.23}$$

当 k 足够大时。此外，

$$\big(I - B(2)^4\big)^{-1} \;=\; I \;+\; B(2)^4 \big(I - B(2)^4\big)^{-1},$$

并利用（4.23）以及（4.22）中的第二个不等式，我们有

$$\big\|B(2)^4 \big(I - B(2)^4\big)^{-1}\big\|_{\mathrm{tr}} \;\leq\; C \, N^{4(\nu-\beta) + O(\varepsilon_0)}.$$

因此，

$$-\log|F(2)| \;=\; \log\Big|\det\Big(I+B(2)^4\big(I-B(2)^4\big)^{-1}\Big)\Big| \;\le\; C\,N^{4(\nu-\beta)+O(\varepsilon_0)}. \tag{4.24}$$

如 [DJ17，引理 44]中所述，应用詹森不等式，结合（4.22）和（4.24），我们得到如下界

$$\mathcal{N}_k(\nu) \;\le\; C\,N^{4(\nu-\beta)+O(\varepsilon_0)} \qquad \text{as } k\to\infty.$$

使用命题 4.4 的类似证明可得此估计，其中 β 替换为 β_E。将这两个界与 [DJ17，定理 3] 结合，1.3可证明定理 □

参考文献

[BD17] J. Bourgain 和 S. Dyatlov。《双曲曲面的傅里叶维数与谱隙》。《几何与泛函分析》，27:744–771，2017年。[BD18] J. Bourgain 和 S. Dyatlov。《无压力条件下的谱隙》。《数学年刊》（第2辑），187:825–867，2018年。[BGS11] J. Bourgain、A. Gamburd 和 P. Sarnak。《塞尔伯格 3/16 定理的推广与仿射筛法》。《数学学报》，207(2):255–290，2011年。[Bor16] D. Borthwick。《无限面积双曲曲面的谱理论》，《数学进展》第318卷。Birkhäuser/Springer，第二版，2016年。[DD13] K. Datchev 和 S. Dyatlov。《渐近双曲流形的分形韦尔定律》。《几何与泛函分析》，23:1145–1206，2013年。[DJ17] S. Dyatlov 和 L. Jin。《开放量子映射的共振与分形不确定性原理》。《数学物理通讯》，354(1):269–316，2017年。[DW16] S. Dyatlov 和 A. Waters。《预解式下界与李雅普诺夫指数》。《应用数学研究快报》，2016(1):68–97，2016年。[Dya19a] S. Dyatlov。《双曲流形改进的分形韦尔界》。《欧洲数学会杂志》，21(6):1595–1639，2019年。[Dya19b] S. Dyatlov。《分形不确定性原理导论》。《数学物理杂志》，60(8):081505，2019年。[DZ16] S. Dyatlov 和 J. Zahl。《谱隙、加性能量与分形不确定性原理》。《几何与泛函分析》，26(4):1011–1094，2016年。[DZ18] S. Dyatlov 和 M. Zworski。《转移算子的分形不确定性》。《国际数学研究通知》，2020(3):781–812，2018年。[DZ19] S. Dyatlov 和 M. Zworski。《散射共振的数学理论》，《数学调查与专著》第200卷。美国数学会，2019年。[GLZ04] L. Guillopé、K. K. Lin 和 M. Zworski。《凸共紧肖特基群的塞尔伯格 ζ 函数》。《数学物理通讯》，245(1):149–176，2004年。

[Gui05] C. Guillarmou。《渐近双曲流形上预解算子的亚纯性质》。《杜克数学杂志》，129(1):1–37，2005年。[GZ95] L. Guillopé 和 M. Zworski。《无穷远处常负曲率的某些完备空间中共振数量的多项式界》。《渐近分析》，11(1):1– 22，1995年。[MM87] R. R. Mazzeo 和 R. B. Melrose。《渐近常负曲率完备空间上预解算子的亚纯延拓》。《泛函分析杂志》，75(2):260–310，1987年。[Nau05] F. Naud。《康托集上的扩张映射与 ζ 函数的解析延拓》。《高等师范学校科学年刊》，38(1):116–153，2005年。[Nau14] F. Naud。《凸共紧双曲曲面上共振的密度与位置》。《数学发明》，195(3):723–750，2014年。[Pat76] S. J. Patterson。《福克斯群的极限集》。《数学学报》，136(3-4):241–273，1976年。[Sim79] B. Simon。《迹理想及其应用》，《伦敦数学会讲义系列》第35卷。剑桥大学出版社，1979年。[Soa23] L. Soares。《凸共紧双曲曲面的改进分形韦尔界与大型无共振区域》。arXiv，abs/2301.03023，2023年。[Sul79] D. Sullivan。《福克斯群在无穷远处的密度》。《高等科学研究所数学出版物》，50:171–202，1979年。[Tao24] Z. Tao。《无限体积负曲率曲面的谱隙》。arXiv，abs/2403.19550，2024年。[Vac23] L. Vacossin。《障碍物散射中的改进分形韦尔上界》。arXiv，abs/2301.11077，2023年。[Vac24] L. Vacossin。《二维障碍物散射的谱隙》。《偏微分方程分析》，17(3):1019– 1126，2024年。[Vas13a] A. Vasy。《渐近双曲空间与 Kerr-de Sitter空间的微局部分析》（附 S. Dyatlov 撰写的附录）。《数学发明》，194(2):381–513，2013年。[Vas13b] A. Vasy。《渐近双曲空间的微局部分析与高能预解算子估计》。载于《逆问题与应用：由内而外 II》，《数学科学研究所出版物》第60卷，第487–528页。剑桥大学出版社，2013年。[Zwo16] M. Zworski。《渐近双曲流形的共振：重新审视 Vasy方法》。《谱理论杂志》，6(4):1087–1114，2016年。[Zwo17] M. Zworski。《散射共振的数学研究》。《数学科学通报》，7(1):1–85，2017年。E

$mail\ add^{ress}$: 旅行 isdcunningham@gmail.com