arXiv:2602.20533v1 [math.DG] 24 Feb 2026

CAT(0)空间的渐近几何正则性

KOICHI NAGANO

Abstract. 我们证明：若一个 n维测地完备的CAT(0)空间的Tits边界充分接近($n-1$)维标准单位球面，则它与 n维欧几里得空间双 Lipschitz 同胚。作为应用，我们得出：若一个($n-1$)维测地完备的CAT(1) 空间充分接近($n-1$)维标准单位球面，则它们彼此双 Lipschitz 同胚。

1. Introduction

本文从渐近几何的观点出发，研究一个CAT(0)空间何时与n维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$双 Lipschitz 同胚的问题。

如Gromov [14], 所表述，CAT(0)空间定义为在Alexandrov意义下整体非正曲率的完备测地度量空间。我们回顾：一个连通完备黎曼流形是CAT(0)的，当且仅当它是Hadamard流形，即具有非正截面曲率的单连通完备黎曼流形；此时，它微分同胚于 $\mathbb{R}^n$。

设 X 为一个 CAT(0)空间。 X 的理想边界 $\partial_\infty X$ 定义为 X中所有射线的渐近等价类所组成的集合。 X 的 Tits边界 $\partial_{\mathrm{T}} X$ 定义为赋予 Tits度量 d_{T} 的 X的理想边界 $\partial_\infty X$ （见第 2.6 小节）。我们注意到，只要 X 含有一条射线，$\partial_{\mathrm{T}} X$ 就是 CAT(1) 空间。若 X 是一个正则、测地完备 CAT(0) 空间，且X 的 Tits边界 $\partial_{\mathrm{T}} X$ 与（$n-1$）维标准单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$等距，则 X 与 $\mathbb{R}^n$等距。这一刚性结论源于 Leeb 的观察 [16, 命题 2.1], ， 该观察是对 Schroeder 关于 Hadamard流形的工作（见 [5, 附录 4] ）的推广。作为渐近几何正则性的结果，作者 [22, 定理 5.10 和 5.11]证明了：如果 X 是一个正则、测地完备 CAT(0) 空间，并且$\partial_{\mathrm{T}} X$ 关于 Gromov–Hausdorff 距离充分接近 $\mathbb{S}^{n-1}$ ，那么 X 与 $\mathbb{R}^n$双 Lipschitz 同胚。

日期：2026年2月24日。2020 数学主题分类。53C20, 53C23。关键词与短语。CAT(0)空间，CAT(κ)空间。部分获得日本学术振兴会科研补助金项目编号20K03603、25K06996的资助。

我们的主要目的是在不作正则性假设的情况下，推广上述提到的渐近几何正则性结果。

1.1. 主要定理。 本文中，我们用 dim 表示度量空间的覆盖（拓扑）维数。我们用 d_{GH}表示度量空间之间的 Gromov–Hausdorff 距离。

作为本文的主要结果，我们证明了以下关于 CAT(0) 空间渐近几何正则性的定理：

定理 1.1。 对于任意 $\epsilon \in (0,\infty)$，以及任意 $n \in \mathbb{N}$，存在$\delta \in (0,\infty)$，使得若一个可分、测地完备的 $\mathrm{CAT}(0)$ 空间X 的 维数 $X \leq n$ 满足 $d_{\mathrm{GH}}\left(\partial_{\mathrm{T}} X, \mathbb{S}^{n-1}\right) < \delta$，则 X 与 $\mathbb{R}^n$双利普希茨同胚，双利普希茨常数为$(1+\epsilon)$。

在定理 1.1 中，所需的双利普希茨同胚由一个定义在 X 上、具有布塞曼函数坐标的映射给出。当我们分析这样一个定义在 X 上、具有布塞曼函数坐标的正则映射时，会用到 Lytchak 和作者 [18] 在 GCBA 空间上发展起来的、采用距离函数坐标的撑架映射理论中的思想。事实上，我们需要将其推广到作者近期研究的测地完备 CBA 空间情形 [23]。

注1.1。作者 [22]根据体积增长研究了 CAT(0) 空间的渐近拓扑正则性，并证明：若一个纯 n维、正则且测地完备的 CAT(0) 空间具有较小的欧几里得体积增长，则它与 $\mathbb{R}^n$同胚。

注1.2。Gromov [13] 提出了这样一个问题：是否存在一个 Busemann凸测地度量空间，它是与 $\mathbb{R}^n$不同的拓扑 n维流形？我们注意到，每个 CAT(0) 空间都是 Busemann凸的。对于 $n \geq 5$的情形，Davis–Januszkiewicz [10, 定理 5b.1]给出了肯定的回答；事实上，他们证明，对每个满足$n \geq 5$的 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个分片平坦 CAT(0) 多面体，它是一个与 $\mathbb{R}^n$ 不同胚的拓扑 n维流形（另见 [3]）。对于 $n = 3$的情形，若一个 Busemann凸测地度量空间是拓扑 3 维流形，则它与 $\mathbb{R}^3$ 同胚（[7], [24], [26]）。对于$n = 4$的情形，Lytchak、Stadler 和作者 [20] 证明，每个 CAT(0) 拓扑 4 维流形都与 $\mathbb{R}^4$同胚。Fujioka–Gu [11] 最近证明，每个 Busemann凸拓扑 4 维流形都与 $\mathbb{R}^4$同胚。

作为定理 1.1 的应用，我们得出以下关于 CAT(1) 空间的几何正则性定理：

定理 1.2。 对于任意 $\epsilon \in (0,\infty)$，以及任意 $n \in \mathbb{N}$，存在$\delta \in (0,\infty)$，使得若一个可分、测地完备的 $\mathrm{CAT}(1)$ 空间Z 的 维数 $Z \leq n-1$ 满足 $d_{\mathrm{GH}}\left(Z, \mathbb{S}^{n-1}\right) < \delta$，则 Z 与 $\mathbb{S}^{n-1}$ 同胚，且存在 $(1+\epsilon)$-双利普希茨映射。

为了从定理 1.1 推导出定理 1.2，我们运用了 Burago–Gromov–Perelman [9, Section 9] 关于曲率下有界的 CBB 空间的几何正则性研究中的思路。在实际运用这些思路时，我们需要作者 [23]关于 CAT(1) 空间近似球面悬挂结构的研究。

注记 1.3. Lytchak与作者 [19, 定理 8.3] 证明了：若一个纯（$n-1$）维、紧且测地完备的 CAT(1) 空间具有小体积，则它与 $\mathbb{S}^{n-1}$同胚。作者[21] 研究了 CAT(1) 空间的体积挤压问题。

1.2. **结构安排**。 第 2 节介绍曲率上界度量空间几何中的基本概念，尤其是 CAT(0) 空间。第 3 节引用作者[23] 关于 CAT(1) 空间近似多重球面悬挂结构的研究，并给出证明主要定理所需的基本引理。第 4 节在测地完备 CAT(0) 空间上提出 Busemann strainer映射的概念，并研究其各种正则性。第 5 节证明定理 1.1 和 1.2。

致谢。 作者谨向 Alexander Lytchak 表示感谢，感谢他在私人通信中进行的富有价值的讨论。作者感谢 Takashi Shioya 和 Takao Yamaguchi 对本工作的关注。

2. Preliminaries

关于具有上曲率界的度量空间的几何学基础事实，参见 [1], [2], [4], [6], [8] 。

2.1. **度量空间**。 设 $r \in (0,\infty)$。对于度量空间中的点 p，分别用 $U_r(p)$、$B_r(p)$ 和 $S_r(p)$ 表示以 p 为中心、半径为 r 的开度量球、闭球和度量球面。

对于度量为 d_X 的度量空间 X，以及正数 λ，令 λX 表示定义为 $(X, \lambda d_X)$ 的缩放度量空间。

设 X 是度量为 d_X 的度量空间。令 $d_X \wedge \pi$ 为 X 上由 $d_X \wedge \pi := \min\{d_X, \pi\}$ 定义的 π-截断度量。欧几里得锥 $C_0(X)$ 在 X 上定义为锥 $[0,\infty) \times X/\{0\} \times X$，其上配备欧几里得度量 $d_{C_0(X)}$，该度量由下式给出

$$d_{C_0(X)}\left([(t_1,x_1)],[(t_2,x_2)]\right)^2 := t_1^2 + t_2^2 - 2t_1t_2\cos\left(d_X \wedge \pi\right)(x_1,x_2).$$

为简便起见，我们将 $[(t,x)]$ 中的元素 $C_0(X)$ 记作 tx，并用 0 表示 $C_0(X)$ 的顶点。

2.2. **度量空间之间的映射**。 设 $c \in (0,\infty)$。设 X 是度量为 d_X 的度量空间，Y 是度量为 d_Y 的度量空间。若映射$\varphi\colon X \to Y$满足对于所有 $x_1, x_2 \in X$，均有 $d_Y(\varphi(x_1)\ \varphi(x_2)) \le c\, d_X(x_1,x_2)$，则称其为 c-利普希茨 映射。若映射 $\varphi\colon X \to Y$满足 f

是 c-利普希茨映射，且对于所有 $x_1, x_2 \in X$，均有 $d_X(x_1, x_2) \leq c\, d_Y(\varphi(x_1)\ \varphi(x_2))$（因此，$c \in [1, \infty)$）。1-双利普希茨同胚不过就是等距映射，而 1-双利普希茨嵌入就是等距嵌入。若对于任意 $r \in (0, \infty)$ 以及任意满足 $B_{cr}(x)$ 完备的 $x \in X$，度量空间 Y 中的球 $U_r(\varphi(x))$ 包含于度量空间 X 中球 $U_{cr}(x)$ 的像 $\varphi(U_{cr}(x))$，则称映射 $\varphi\colon X \to Y$ 是 c-开映射。若 X 完备，且映射 $\varphi\colon X \to Y$ 是 c-开映射，则 φ 是满射。此外，若 X 完备，则 c-利普希茨映射 $\varphi\colon X \to Y$ 是某个 $c \in [1, \infty)$ 下的 c-双利普希茨同胚，当且仅当 φ 是单射的 c-开映射。

若映射 $\varphi\colon X \to Y$ 是 c-近似，则称其为 X 与Y之间的映射；如果 $\bigcup_{y \in \varphi(X)} U_r(y)$ 与 Y 重合，并且对所有 $x_1, x_2 \in X$，都有

$$|d_Y(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) - d_X(x_1, x_2)| < c.$$

若存在一个 c-近似映射 $\varphi\colon X \to Y$，则存在一个 $2c$-近似映射 $\psi\colon Y \to X$，使得对所有 $x \in X$ 和 $y \in Y$，都有$d_X((\psi \circ \varphi)(x)\ x) < 2c$ 以及 $d_Y((\varphi \circ \psi)(y)\ y) < 2c$。

2.3. **测地度量空间**。设 X 是一个度量空间。一个测地线$\gamma\colon I \to X$ 指从区间 I到该空间的等距嵌入。对于 X中的一对点 p, q，从 p 到 q 的测地线 pq 位于 X，指从一个有界闭区间$[a, b]$ 到该空间的等距嵌入 $\gamma\colon [a, b] \to X$ 的像，其中 $\gamma(a) = p$ 且 $\gamma(b) = q$。若测地线 $\gamma\colon I \to X$ 满足 $I = [0, \infty)$，则称其为射线；若 $I = \mathbb{R}$，则称其为直线。

对于 $r \in (0, \infty]$，若度量空间 X 中的任意两点之间的距离小于 r，且这两点可由 X中的一条测地线连接，则称 X 为 r-测地的 。若一个度量空间是 ∞-测地的，则称其为测地的 。若一个度量空间的每个闭有界子集都是紧的，则称该空间为正则 。测地度量空间是正则的，当且仅当它完备且局部紧致。

对于 $r \in (0, \infty]$，若度量空间的子集 C 自身作为度量子空间是 r-测地的，并且连接 C 中任意两点的每条测地线都包含于 C中，则称 C 为 r-凸的。若度量空间的子集 C 是 ∞-凸的，则称其为凸的。

2.4. **Gromov–Hausdorff 拓扑**。如第 1 节所述，我们用 d_{GH} 表示度量空间之间的 Gromov–Hausdorff 距离。若对于 $c \in (0, \infty)$，两个度量空间 X 和 Y满足 $d_{\mathrm{GH}}(X, Y) < c$，则存在一个从 X 到 Y的 $2c$-近似。若度量空间序列 (X_k) 收敛到度量空间 X （在 *Gromov–Hausdorff* 拓扑下），则称该序列收敛于该空间，即 $\lim_{k\to\infty} d_{\mathrm{GH}}(X_k, X) = 0$。

带基点测地度量空间的序列 (X_k, p_k) 收敛到带基点度量空间 (X, p)，若对每个 $(0, \infty)$，都存在一个序列 (ϵ_k)，其中各项属于 $(0, \infty)$，且 $\lim_{k\to\infty} \epsilon_k = 0$，使得对每个 $k \in \mathbb{N}$，都存在一个 ϵ_k-逼近映射 $\varphi_k\colon B_r(p) \to B_r(p_k)$，满足 $\varphi_k(p) = p_k$；此时记作 $(X, p) = \lim_{k\to\infty}(X_k, p_k)$。如果带基点正则

测地度量空间的序列收敛到带基点度量空间 (X, p)，且收敛是相对于带基点的 Gromov–Hausdorff 拓扑而言，那么 X 是正则且为测地空间。

一个非主超滤子 ω 在 $\mathbb{N}$ 上是有限可加概率测度，满足对于 $\mathbb{N}$ 的每个子集 A， $\omega(A) \in \{0,1\}$，并且若 E 是有限子集，则$\omega(E) = 0$。对于满足 $\omega(A) = 1$的 $\mathbb{N}$ 的子集 A，其中的每个 $k \in A$ 都称为-大。若(x_k)是紧度量空间 B中的一个序列，则存在唯一的点 x属于 B，使得对于 x 的每个开邻域 U，都有 $\omega(\{\, k \in \mathbb{N} \mid x_k \in U \,\}) = 1$；这个唯一的点 x 称为(x_k)的 ω-极限，记作 $\lim_\omega x_k$。

本文中，我们固定一个关于 $\mathbb{N}$的非主超滤子 ω。设(X_k, p_k)是一个带基点度量空间序列，其度量为 d_{X_k}。我们将 X_ω^0 记为所有满足 $x_k \in X_k$ 且 $d_{X_k}(p_k, x_k)$一致有界的序列(x_k)所组成的集合。我们将 d_ω 记为定义在 $X_\omega^0 \times X_\omega^0$ 上的函数，其定义为 $d_\omega((x_k), (y_k)) := \lim_\omega d_{X_k}(x_k, y_k)$。我们将 $\lim_\omega(X_k, p_k)$定义为商度量空间$(X_\omega^0, d_\omega)/d_\omega = 0$，称其为$(X_k, p_k)$关于 ω的超极限。对于 $\xi \in \lim_\omega X_k$，若 $\xi = [(x_k)]$，则记作 $x_k \to \xi$。

设（X_k， p_k）为一列带基点度量空间。则 $\lim_\omega X_k$是完备的。如果 $\operatorname{diam} X_k$ 一致有界，则 $\lim_\omega X_k$ 不依赖于 p_k的选择。如果每个 X_k 都是 r-测地的，则 $\lim_\omega X_k$也是如此。如果每个 X_k 都是测地完备的，则 $\lim_\omega X_k$也是如此。如果一列（X_k）紧度量空间在 Gromov–Hausdorff 拓扑中收敛于某个紧度量空间X，则 $\lim_\omega X_k$ 与X等距。如果一列（X_k，p_k）带基点的正则测地度量空间在带基点的 Gromov– Hausdorff 拓扑中收敛于带基点度量空间（X， p），则 $\lim_\omega X_k$ 与 X 等距，且 $p_k \to p$。

设（φ_k）为一列从（X_k， p_k）到（Y_k， φ_k（p_k））的带基点 c-利普希茨映射，其中两者均为带基点度量空间。映射（φ_k）的 超极限 $\lim_\omega \varphi_k$为 （φ_k）定义为一个从 $\lim_\omega$（X_k， p_k）到 $\lim_\omega$（Y_k， φ_k（p_k））的映射，该映射由（$\lim_\omega \varphi_k$）（$[x_k]$）：=［（φ_k（x_k））］唯一确定。在此情况下，超极限 $\lim_\omega \varphi_k$ 是 c-利普希茨的。此外，如果每个 φ_k 都是 c-开映射，则 $\lim_\omega \varphi_k$ 也是 c-开映射。

2.5. CAT(κ) 空间。对于 $\kappa \in \mathbb{R}$，我们用 M_κ^n 表示常曲率为 κ 的单连通完备黎曼 n-流形，并用 D_κ 表示 M_κ^n 的直径。完备度量空间 X称为 CAT(κ)，如果 X 是 D_κ-测地的，并且 X中周长小于 $2D_\kappa$ 的每个测地三角形都不比 M_κ^2 中具有相同边长的比较三角形更厚。本文中，所有 CAT(κ) 空间均假定为完备的。度量空间称为 CBA，如果对某个 $\kappa \in \mathbb{R}$ 它是局部 CAT(κ) 的。

设 X 为一个 CAT(κ) 空间。 X 中距离小于 D_κ 的每一对点都可由一条测地线唯一连接。设 $p \in X$。对每个 $r \in (0, D_\kappa/2]$，球 $U_r(p)$ 与 $B_r(p)$ 都是凸的。对每个 $r \in (0, D_\kappa)$，球 $U_r(p)$ 与 $B_r(p)$ 在内部可缩

其自身。对 x、$y \in U_{D_\kappa}(p) - \{p\}$，我们用 $\angle_p(x,y)$ 表示 px 与 py 在 p 处的角。令 $\Sigma'_pX := \{\, px \mid x \in U_{D_\kappa}(p) - \{p\}\,\}$。$p$ 处的角 $\angle_p$ 是 Σ'_pX 上的伪度量。X 中 p 处的方向空间 Σ_pX 定义为商度量空间 $\Sigma'_pX/\angle_p = 0$ 的 $\angle_p$-完备化。对 $x \in U_{D_\kappa}(p) - \{p\}$，我们用 $x'_p \in \Sigma_pX$ 表示 px 在 p 处的起始方向。X 中 p 处的切空间 T_pX 定义为 $C_0(\Sigma_pX)$。空间 Σ_pX 是 CAT(1) 的，空间 T_pX 是 CAT(0) 的。事实上，对度量空间 Z，欧几里得锥 $C_0(Z)$ 是 CAT(0) 当且仅当 Z 是 CAT(1)。

2.6. CAT(0)空间的理想边界。 设 X 为度量空间，其度量为 d_X。若两条射线 $\gamma_1, \gamma_2\colon [0,\infty) \to X$ 满足 $\sup_{t\in[0,\infty)} d_X(\gamma_1(t)\ \gamma_2(t))$ 有限，则称它们为渐近的。渐近关系在 X中所有射线的集合上定义了一个等价关系。X 的理想边界$\partial_\infty X$ 定义为 X中所有射线的渐近等价类组成的集合。对于 X中的射线 γ，我们用 $\gamma(\infty)$表示 $\partial_\infty X$中 γ 的渐近等价类。

设 X 为CAT(0)空间。对于每个 $p \in X$和每个 $\xi \in \partial_\infty X$，都存在唯一的射线 $\gamma\colon [0,\infty) \to X$，满足 $\gamma(0) = p$ 且 $\gamma(\infty) = \xi$。对于 $p \in X$ 和 $\xi \in \partial_\infty X$，我们用 $\gamma_{p\xi}$ 表示从 p 出发并指向 ξ的唯一射线，用 $p\xi$ 表示 $\gamma_{p\xi}$的像，并用 $\xi'_p \in \Sigma_pX$ 表示 $p\xi$ 在 p处的起始方向。对于 $p \in X$和 ξ，$\eta \in \partial_\infty X$，我们用 $\angle_p(\xi,\eta)$表示 p 处 $p\xi$ 与 $p\eta$之间的角。$\partial_\infty X$ 上的角度度量 $\angle$ 定义为 $\angle(\xi,\eta) := \sup_{p\in X} \angle_p(\xi,\eta)$。$\partial_\infty X$ 上的Tits度量 d_{T} 定义为由 $\angle$诱导的长度度量。注意，$\angle = \min\{d_{\mathrm{T}}, \pi\}$，且 d_{T} 可能取值为 ∞。我们将赋予Tits度量 d_{T}的理想边界 $\partial_\infty X$ 记为$\partial_{\mathrm{T}}X$，并称其为 X 的Tits边界。于是 $\partial_{\mathrm{T}}X$ 是CAT(1)空间。欧几里得锥 $C_0(\partial_{\mathrm{T}}X)$与以带有角度度量 $\angle$的理想边界 $\partial_\infty X$ 为底的欧几里得锥 $C_0(\partial_\infty X)$等距。

2.7. 测地完备 CAT(κ) 空间。若每条定义在紧区间上的测地线都能延伸为一条超出端点的局部测地线，则称 CAT(κ) 空间局部测地完备（或具有测地线延拓性质）。若每条测地线都能延伸为定义在 $\mathbb{R}$ 上的局部测地线，则称 CAT(κ) 空间测地完备。每个局部测地完备的 CAT(κ) 空间都是测地完备的。CAT(κ) 空间的测地完备性在超极限下保持不变。

关于 GCBA 空间的基本性质，即具有曲率上界的局部紧致、可分、局部测地完备度量空间，请读者参阅 [18] 。设 X 是一个正则且测地完备的 CAT(κ) 空间。对于每个 $p \in X$，空间 Σ_pX 都是紧且测地完备的，而 T_pX 是正则且测地完备的。事实上，对于 CAT(1) 空间 Z，欧几里得锥 $C_0(Z)$ 是

测地完备的，当且仅当 Z 是测地完备的且不是单点空间。

2.8. **CAT(κ) 空间的维数**。 Kleiner [15]将 CBA空间的几何维数 $\dim_{\mathrm{G}}$ 定义为从 CBA空间类到 $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 的最小函数，满足：(1) $\dim_{\mathrm{G}} X=0$ 当且仅当 X 是离散的；(2) 对所有 $p\in X$，$\dim_{\mathrm{G}} X\geq 1+\dim_{\mathrm{G}}\Sigma_p X$。在这种情况下，我们有

$$\dim_{\mathrm{G}} X=1+\sup_{p\in X}\dim_{\mathrm{G}}\Sigma_p X.$$

我们将 Kleiner [15, 定理 A]表述如下：

定理2.1。 ([15]) 设 X 是一个完备的CBA 空间。那么，$\dim_{\mathrm{G}} X$等于 X的紧子集 C 的覆盖维数 $\dim C$ 的上确界；若进一步假设 X 可分，则 $\dim_{\mathrm{G}} X=\dim X$。

设 $\lim_\omega(X_k,\ p_k)$ 是一列带基点的 CAT(κ) 空间的超极限。那么有如下结果（[17,引理 11.1]）：

$$\dim_{\mathrm{G}}\left(\lim_\omega X_k\right)\leq\lim_\omega\dim_{\mathrm{G}} X_k. \tag{2.1}$$

设 X 为一个GCBA空间。 X的每一个相对紧开子集都具有有限覆盖维数（见 [18, 第5.3]小节）。覆盖维数$\dim X$ 等于 X的豪斯多夫维数，也等于所有使得 X 含有与 $\mathbb{R}^m$ 同胚的开子集 U 的那些 m 的上确界（[18,定理1.1]）。

3. Almost spherical suspension structure

3.1. **CAT(1) 空间中的多重悬挂点**。 设 Z 为一个具有度量 d_Z的CAT(1) 空间。我们称 Z 中的点 p_0 为 Z中的悬挂点，如果存在 Z 中的另一点 q_0，使得对每一个 $z\in Z$ 都有

$$d_Z(p_0,z)+d_Z(z,q_0)=\pi. \tag{3.1}$$

在这种情况下，我们称 p_0 与 q_0 互为对径。由(3.1)，若 p_0与 q_0是 Z中互为对置的悬挂体，则 $d_Z(p_0,q_0)=\pi$。

我们称 Z中点的一个 m元组$(p_1,\dots,p_m)$为 Z中的一个 m-悬挂点，如果存在 Z中点的另一个 m元组$(q_1,\dots,q_m)$满足下列性质：

(1) 对所有 $i\in\{1,\dots,m\}$，点 p_i 和 q_i 是 Z 中互为对置的悬挂体；(2) 对所有不同的 $i,j\in\{1,\dots,m\}$，有 $d_Z(p_i,p_j)=\pi/2$，$d_Z(p_i,q_j)=\pi/2$，且 $d_Z(q_i,q_j)=\pi/2$。

在这种情况下，我们称 $(p_1,\dots,p_m)$ 和 $(q_1,\dots,q_m)$ 互为对径。

对于 Z中的点 z，如果 $d_Z(z,\ \bar z)\geq\pi$，我们就称 Z 中的点 $\bar z$ 是 z 的对跖点。我们用Ant(z)表示所有对跖点

z的，并称其为 z的对跖集。如果 A 包含 $\bigcup_{p\in A}\mathrm{Ant}(p)$，我们就称 Z 的子集 A 是对称的。

我们称 A 中的对称子集 Z 为圆整的，如果A 中的每个点都是 Z 中的悬挂点。注意，如果 Z 含有圆整子集，则 $\operatorname{diam} Z=\pi$。子集 A 是 Z 的圆整子集，当且仅当对每个 $p\in A$，都存在唯一的点 q 属于 A，使得 p 和 q 是 Z中互为对置的悬挂点。

对于 Z的子集 A，我们将 Z中满足 $d_Z(z,\ A)\ \geq \pi/2$的所有点 z 组成的集合记为 $A^{\perp}$，并称其为 A的极集。

由 m-悬挂点的存在性，我们得到 CAT(1) 空间的 m重球面悬挂结构（命题 3.7]）[23,。

命题 3.1。设 Z 是一个CAT(1) 空间。假设 Z中存在互为相反的 m-悬挂点 $(p_1,\dots,p_m)$ 和$(q_1,\dots,q_m)$。那么存在一个圆整、闭的 π-凸子集 C_{m-1}，它包含$(p_1,\dots,p_m)$ 和$(q_1,\dots,q_m)$，且 C_{m-1}与 $\mathbb{S}^{m-1}$等距。此外，Z 可等距分解为球面连接 $C_{m-1}*C_{m-1}^{\perp}$，其中$C_{m-1}^{\perp}$ 是 C_{m-1}的极集。

3.2. **CAT(1) 空间中的松弛多重悬挂体**。设 Z 是一个度量为 d_Z的 CAT(1) 空间。若存在 Z 的一个稠密子集 Z_0，使得对每个 $p\in Z_0$ 都存在$q\in Z_0$，满足 $d_Z(p,q)\ \geq \pi$，则称 Z 是可穿透的 。若 Z可穿透，则 $\operatorname{diam}\ Z\geq\pi$。若 Z至少有两个路径连通分支，则它是可穿透的。CAT(1) 空间的可穿透性在超极限下保持不变。注意，若 Z 是测地完备的，且 Z至少包含两个点，则 Z 可穿透。

设 $\delta\in(0,1)$。若存在另一个点 q_0，属于 Z 且满足下述条件，则称 Z中的点 p_0为一个$(1,\delta)$-悬挂点：

$$\sup_{z\in Z}\{\,d_Z(p_0,z)+d_Z(z,q_0)\,\}<\pi+\delta. \tag{3.2}$$

在这种情况下，我们称 p_0 和 q_0 互为对径 点。

$(1,\delta)$-悬挂点的概念，是针对可穿透 CAT(1) 空间中刚性 1-悬挂点的一种扰动版本（[23,引理 4.1]）。

引理 3.2。设 Z 是一个带有度量 d_Z 的可穿透的 $\mathrm{CAT}(1)$ 空间。设 p_0 和 q_0 是 Z 中互为相反的$(1,\ \delta)$-悬挂点。则有

$$\inf_{z\in Z}\{\,d_Z(p_0,z)+d_Z(z,q_0)\,\}>\pi-\delta. \tag{3.3}$$

如果存在另一个 m-元组（q_1，.....，q_m），其元素为 Z 中的点，并满足以下条件，则称 Z 中的点的 m-元组（p_1，.....，p_m）是一个（m，δ）-悬挂点：

(1) 对于所有的 $i\in\{1,\dots,m\}$，点 p_i和 q_i在 Z 中互为相反的 $(1,\delta)$-悬挂点；(2) 对于所有不同的 $i,j\in\{1,\dots,m\}$，我们有

$$d_Z(p_i,p_j)<\frac{\pi}{2}+\delta,\quad d_Z(p_i,q_j)<\frac{\pi}{2}+\delta,\quad d_Z(q_i,q_j)<\frac{\pi}{2}+\delta. \tag{3.4}$$

在这种情况下，我们称 $(p_1, \ldots, p_m)$ 和 $(q_1, \ldots, q_m)$ 彼此对径。

由引理 3.2 可推出以下结论（[23,引理 3.3]）：

引理 3.3。设 Z 是一个带有度量 d_Z的可穿透的$\mathrm{CAT}(1)$ 空间。设$(p_1, \ldots, p_m)$和$(q_1, \ldots, q_m)$是Z中的互为相反的(m, δ)-悬挂点。则有以下结论：

(1) *for all* $i \in \{1, \ldots, m\}$ *we have*

$$\inf_{z \in Z} \{ d_Z(p_i, z) + d_Z(z, q_i) \} > \pi - \delta; \tag{3.5}$$

(2) 对所有互不相同的 $i, j \in \{1, \ldots, m\}$，有

$$d_Z(p_i, p_j) > \frac{\pi}{2} - 2\delta, \quad d_Z(p_i, q_j) > \frac{\pi}{2} - 2\delta, \quad d_Z(q_i, q_j) > \frac{\pi}{2} - 2\delta. \tag{3.6}$$

3.3. 维数与松弛多重悬挂体。我们已经知道，松弛多重悬挂体的存在性与维数之间存在一种关系（[23, 引理 4.9]）。

引理 3.4。对每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $\delta \in (0,1)$，使得若一个维数为$\dim_{\mathrm{G}} Z \leq n-1$ 的可穿透$\mathrm{CAT}(1)$ 空间 Z 含有一个(m, δ)-悬挂点，则 $m \leq n$。

结合超极限论证与命题 3.1 和引理 3.3，即可证明以下结论（[23,引理 4.10]）。

引理 3.5. 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，以及每个 $c \in [1, \infty)$，存在$\delta \in (0,1)$，使得若一个可穿透的 $\mathrm{CAT}(1)$ 空间 Z 的维数$\dim_{\mathrm{G}} Z \leq n-1$，且其上存在一个$(n, \delta)$-悬挂点组$(p_1, \ldots, p_n)$，那么 Z 中的任何点 z 都不满足

$$\max_{i \in \{1, \ldots, n\}} \left| d_Z(p_i, z) - \frac{\pi}{2} \right| < c\delta.$$

在定理 1.2 的证明过程中，我们将用到以下结论：

引理 3.6. 对于每个 $\epsilon \in (0,1)$以及每个 $n \in \mathbb{N}$，存在一个充分小的 $\delta \in (0,1)$，使其满足以下性质：设 Z 是一个可穿透的 $\mathrm{CAT}(1)$ 空间，其度量为 d_Z，维数为 $\dim_{\mathrm{G}} Z \leq n-1$，且存在一个$(n, \delta)$-悬挂点组$(p_1, \ldots, p_n)$。若 $z_1, z_2 \in Z$满足

$$\left| d_Z(z_1, z_2) - \frac{\pi}{2} \right| < \delta,$$

于是我们有

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \cos d_Z(p_i, z_1) \cos d_Z(p_i, z_2) \right| < \epsilon.$$

证明。令 $\epsilon \in \in (0,1)$ 且 $n \in \mathbb{N}$。假设对于某个序列 (δ_k)，其取值于 $(0, \infty)$，且 $\delta_k \to 0$，存在一个由度量为 d_{Z_k}、维数为 $\dim_{\mathrm{G}} Z_k \leq n-1$ 的可穿透 CAT(1) 空间构成的序列 (Z_k)，使得每个 Z_k 都具有

一个 (n, δ_k)-悬挂点。此外，假设对于某个 $z_{1,k}, z_{2,k} \in Z_k$，满足

$$\left| d_{Z_k}(z_{1,k}, z_{2,k}) - \frac{\pi}{2} \right| < \delta_k$$

我们有

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \cos d_{Z_k}(p_{i,k}, z_{1,k}) \cos d_{Z_k}(p_{i,k}, z_{2,k}) \right| \geq \epsilon.$$

选取带基点度量空间序列 (Z_k, z_k) 的超极限 (Z_ω, z_ω)。对每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，取 $p_{i,\omega} \in Z_\omega$，使得 $p_{i,k} \to p_{i,\omega}$。对每个 $j \in \{1, 2\}$，取 $z_{j,\omega} \in Z_\omega$，使得 $z_{j,k} \to z_{j,\omega}$。由 (2.1) 我们推出 $\dim_{\mathrm{G}} Z_\omega \leq n - 1$。根据引理 3.3，$m$-元组 $(p_{1,\omega}, \ldots, p_{n,\omega})$ 是 Z_ω中的一个 n-悬挂点。由命题 3.1 可知，Z_ω 与 $\mathbb{S}^{n-1}$等距。因此我们有

$$\sum_{i=1}^{n} \cos d_{Z_\omega}(p_{i,\omega}, z_{1,\omega}) \cos d_{Z_\omega}(p_{i,\omega}, z_{2,\omega}) = 0.$$

这表明，对充分大的 ω k，我们有

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \cos d_{Z_k}(p_{i,k}, z_{1,k}) \cos d_{Z_k}(p_{i,k}, z_{2,k}) \right| < \epsilon.$$

这是一个矛盾，从而证明了该引理。 □

4. Asymptotic geometric regularity

4.1. CAT(0)空间上的布塞曼函数。 设 X 是一个度量为 d_X的CAT(0)空间。设 $\gamma\colon [0, \infty) \to X$ 是 X中的一条射线。沿着 γ 的布塞曼函数 $b_\gamma\colon X \to \mathbb{R}$ 定义为

$$b_\gamma(x) := \lim_{t \to \infty} \left(d_X(x, \gamma(t)) - t \right).$$

布塞曼函数 b_γ 是1-利普希茨且为凸函数。对于 $r \in \mathbb{R}$，我们用 $B_r(\gamma)$表示闭的（$-r$）hor球 $b_\gamma^{-1}((-\infty, -r])$。注意，对每个 $x \in X$以及每个满足 $b_\gamma(x) > -r$的 $r \in (0, \infty)$，都有

$$d_X(x, B_r(\gamma)) = b_\gamma(x) + r, \tag{4.1}$$

其中 $d_X(x, B_r(\gamma))$表示从 x 到 $B_r(\gamma)$的距离。设 $\xi := \gamma(\infty)$。取 $x \in X$。对每个 $y \in X - \{x\}$，都有一阶变分公式

$$(b_\gamma \circ \gamma_{xy})'_+(a) = -\cos \angle_x(\xi, y) \tag{4.2}$$

对于布塞曼函数，其中 $\gamma_{xy}\colon [a, b] \to X$是从 x到 y的测地线，而$(b_\gamma \circ \gamma_{xy})'_+(a)$是 $b_\gamma \circ \gamma_{xy}$ 在 a 处的右导数（例如参见引理3.3]）。设 $\gamma_{x\xi}\colon [0, \infty) \to X$ 是从 x 到 ξ的射线。对所有满足 $s < t$的s，$t \in [0, \infty)$，都有

$$b_\gamma(\gamma_{x\xi}(s)) - b_\gamma(\gamma_{x\xi}(t)) = s - t. \tag{4.3}$$

我们知道以下基本性质（例如，参见 [22, 引理 5.1]）：

引理 4.1. 设 X 是一个$\mathrm{CAT}(0)$ 空间。设 $\gamma\colon [0,\infty) \to X$ 是 X中的一条射线。设 $\xi := \gamma(\infty)$。若 X 中不同的点 x、y 满足$b_\gamma(x) = b_\gamma(y)$，则 $\angle_x(\xi, y) \le \pi/2$ 且 $\angle_y(\xi, x) \le \pi/2$。

4.2. **无穷远处的滤网**。与 [22, 第5.2], 小节类似，我们现在引入如下定义：

定义4.1。设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\delta \in$ (0,1)。设 X 为CAT(0)空间。我们称 $\partial_\infty X$中的一个由点组成的 m元组（ξ_1，……，ξ_m）为（m，δ）-无穷远处的撑架，如果它是 $\partial_{\mathrm{T}} X$中的（m，δ）-悬挂点。若 $\partial_\infty X$中的一个由点组成的m元组（ξ_1，……，ξ_m）是（m，δ）-无穷远处的撑架，则存在 $\partial_\infty X$中的另一个 m元组（η_1，……，η_m），使得（ξ_1，……，ξ_m）与（η_1，……，η_m）互为相反。

根据 $\partial_\infty X$上的角度度量 $\angle$ 的定义，我们有：

引理 *4.2.* 设 X 是一个*CAT(0)*空间，且*(ξ_1, . . . , ξ_m)*是 $\partial_{\mathrm{T}} X$中的一个*(m, δ)*-无穷远处的撑架。则对每个 $x \in X$， x 处方向的 m-元组*((ξ_1)$'_x$, . . . , (ξ_m)$'_x$)* 是 $\Sigma_x X$ 中的一个 *(m, δ)*- 悬挂点。此外，若 *(ξ_1, . . . , ξ_m)* 与 *(η_1, . . . , η_m)*是 $\partial_{\mathrm{T}} X$中互为相反的*(m, δ)*-无穷远处的滤网，则*((ξ_1)$'_x$, . . . , (ξ_m)$'_x$)*与*((η_1)$'_x$, . . . , (η_m)$'_x$)*是 $\Sigma_x X$中互为相反的*(m, δ)*-悬挂点。

类似于 [23, 引理 5.3], ，我们验证无穷远处的滤网的存在性保证了几乎平坦的理想三角形的存在性：

引理 4.3。 设 X 是一个$\mathrm{CAT}(0)$ 空间。假设 ξ 中的一个点 $\partial_{\mathrm{T}} X$是一个 $(1, \delta)$-*strainer at infinity*。则对于 X 中任意一对不同的点x、y，有：

(1) $\pi - 2\delta < \angle_x(\xi, y) + \angle_y(\xi, x) \le \pi$;
(2) *if* $b_\gamma(x) = b_\gamma(y)$ *for a ray* γ *in* X *with* $\xi = \gamma(\infty)$, *then*

$$\frac{\pi}{2} - 2\delta < \angle_x(\xi, y) \le \frac{\pi}{2}.$$

证明。 由于 X 是 CAT(0)，我们知道 $\angle_x(\xi, y) + \angle_y(\xi, x) \le \pi$ （例如参见[6, 命题 II.9.3]）。根据引理 4.1，如果对于X 中的一条射线 γ 有 $b_\gamma(x) = b_\gamma(y)$，且 $\xi = \gamma(\infty)$，那么 $\angle_x(\xi, y) \le \pi/2$ 且 $\angle_y(\xi, x) \le \pi/2$。

取 $\partial_{\mathrm{T}} X$ 中的一点 η，使得 ξ 和 η 是对径的 $(1, \delta)$-strainer at infinity。类似于 ξ的情形，我们知道 $\angle_x(\eta, y) + \angle_y(\eta, x) \le \pi$。由引理 3.2 和引理 4.2，我们有

$$\angle_x(\xi, y) + \angle_x(\eta, y) \ge \angle_x(\xi, \eta) > \pi - \delta,$$
$$\angle_y(\xi, x) + \angle_y(\eta, x) \ge \angle_y(\xi, \eta) > \pi - \delta.$$

因此 $\angle_x(\xi, y) + \angle_y(\xi, x) > \pi - 2\delta$。此外，若 $b_\gamma(x) = b_\gamma(y)$，则可得 $\angle_x(\xi, y) > \pi/2 - 2\delta$。这证明了该引理。□

4.3. 无穷远处的支撑映射。设 X 是度量为 d_X的 CAT(0) 空间。对于 X中的 m元组射线 $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$，定义映射$\varphi$: X上的 $X \to \mathbb{R}^m$ 为 $\varphi = (b_{\gamma_1}, \ldots, b_{\gamma_m})$，其中 $(b_{\gamma_1}, \ldots, b_{\gamma_m})$ 是由布塞曼函数组成的 m元组。对于 $i \in \{1, \ldots, m\}$，令 $\xi_i := \gamma_i(\infty)$。根据一阶变分公式 (4.2)，映射 φ 在所有$x \in X$ 处均可微，其微分 $D_x\varphi$: $T_xX \to \mathbb{R}^m$ 由下式确定

$$(D_x\varphi)(rv) = -r\left(\cos\angle_x\left((\xi_1)'_x, v\right), \ldots, \cos\angle_x\left((\xi_m)'_x, v\right)\right).$$

定义4.2。设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\delta \in (0,1)$。设 X 为一个测地完备 CAT(0)空间。若存在 m元组 $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$，其元素为 X中的射线，且满足 $\varphi = (b_{\gamma_1}, \ldots, b_{\gamma_m})$，使得 m元组 $(\gamma_1(\infty) \ldots, \gamma_m(\infty))$ 是 $\partial_{\mathrm{T}}X$中的一个 (m, δ)-无穷远处的撑架，则称映射 φ: $X \to \mathbb{R}^m$ 是 X上的 $Busemann(m, \delta)$-***strainer*** 映射 。

对于 $u \in \mathbb{R}^m$，我们用 $\|u\|$ 表示 $\mathbb{R}^m$上 u 的欧几里得范数。

由引理 4.3，我们得到以下适用于 Busemann 标架映射的一阶变分不等式（参见 [18, 命题8.5]）。

引理4.4。设 φ: $X \to \mathbb{R}^m$ 是一个定义在测地完备 $\mathrm{CAT}(0)$ 空间 X上的 ***Busemann*** (m, δ)-***strainer*** 映射，且 $\varphi = (b_{\gamma_1}, \ldots, b_{\gamma_m})$。取一条测地线 γ: $[a, b] \to X$，连接 X中的两个不同点。那么对每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$，有

$$\left|\frac{(b_{\gamma_i} \circ \gamma)(b) - (b_{\gamma_i} \circ \gamma)(a)}{d_X(\gamma(b), \gamma(a))} - (b_{\gamma_i} \circ \gamma)^+(a)\right| < 2\delta.$$

特别地，我们有

$$\left|\frac{\|(\varphi \circ \gamma)(b) - (\varphi \circ \gamma)(a)\|}{d_X(\gamma(b), \gamma(a))} - \left\|(\varphi \circ \gamma)^+(a)\right\|\right| < 2\sqrt{m}\delta,$$

其中$(\varphi \circ \gamma)^+(a) \in \mathbb{R}^m$ 定义为

$$(\varphi \circ \gamma)^+(a) := \left((b_{\gamma_1} \circ \gamma)^+(a), \ldots, (b_{\gamma_m} \circ \gamma)^+(a)\right).$$

此外，若对于 $j \in \{1, \ldots, m\}$，我们有 $\left(b_{\gamma_j} \circ \gamma\right)(a) = \left(b_{\gamma_j} \circ \gamma\right)(b)$，则有

$$\left\|\left(b_{\gamma_j} \circ \gamma\right)^+(a)\right\| < 2\delta.$$

此外，若$(\varphi \circ \gamma)(a) = (\varphi \circ \gamma)(b)$，则

$$\left\|(\varphi \circ \gamma)^+(a)\right\| < 2\sqrt{m}\delta.$$

引理4.4导出以下几何性质：

命题4.5。设 φ: $X \to \mathbb{R}^m$ 是定义在测地完备的 $\mathrm{CAT}(0)$ 空间 X上的 ***Busemann*** (m, δ)-撑架映射。设 γ: $[a, b] \to X$ 是连接 X中两个不同点的一条测地线。那么对所有 $s, t \in [a, b)$，有

$$\left\|(\varphi \circ \gamma)^+(s) - (\varphi \circ \gamma)^+(t)\right\| \le 4\sqrt{m}\delta.$$

如果对于满足 $s_1 \neq s_2$ 的 $s_1, s_2 \in [a,b)$，有 $(\varphi\circ\gamma)(s_1) = (\varphi\circ\gamma)(s_2)$，那么对于所有 $t \in [a,b)$，有

$$\left\|(\varphi\circ\gamma)^+(t)\right\| \leq 6\sqrt{m}\delta.$$

命题4.5的证明留给读者。

4.4. 无穷远处的伪标架映射。由 (4.3) 可知，测地完备 CAT(0) 空间上的每个布塞曼函数都是 1-开映射。

我们将证明，每个布塞曼 (m,δ)-strainer 映射都是 c-开映射，其中常数 c 仅依赖于 m 和 δ。为此，我们考虑具有布塞曼函数坐标的更一般映射。

定义4.3。设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\delta \in (0,1)$。设 X 为测地完备 CAT(0) 空间。若存在一个由 X 中的射线构成的 m-元组 $(\gamma_1,\ldots,\gamma_m)$，且满足 $\varphi = (b_{\gamma_1},\ldots,b_{\gamma_m})$，使得对所有满足 $i \neq j$ 的 $i,j \in \{1,\ldots,m\}$，都有：则称映射 $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^m$ 是 X 上的 布塞曼(m,δ)-伪支撑映射。

$$\left|\angle_x(\gamma_i(\infty),\gamma_j(\infty)) - \frac{\pi}{2}\right| < 2\delta. \tag{4.4}$$

通过对 [23, 引理 6.3], 中某个开性所作的类似论证，我们推导出以下结论（参见 GCBA情形下的 [18, 引理 8.1] ）：

引理 4.6. 对于 $m \in \mathbb{N}$，令 $\delta \in (0,1)$ 满足 $2(m-1)\delta < 1$。令$\varphi\colon X \to \mathbb{R}^m$ 为测地完备 $\mathrm{CAT}(0)$ 空间 X上的 *Busemann* (m,δ)-伪撑架映射。则 φ 是 $1/(1-2(m-1)\delta)\sqrt{m}$-开映射。特别地，当$4(m-1)\delta < 1$时，它是 $2/\sqrt{m}$-开映射。

证明。对于 $m \in \mathbb{N}$，令 $\delta \in (0,1)$ 足够小。令 $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^m$为一个满足 $\varphi = (b_{\gamma_1},\ldots,b_{\gamma_m})$ 的 Busemann (m,δ)-伪撑架映射。对于 $i \in \{1,\ldots,m\}$，令 $\xi_i := \gamma_i(\infty)$。取 X 中一个固定点 x_0，选取$r \in (0,\infty)$。在 $\mathbb{R}^m$ 中取一个元素 $u_0 = (u_0^1,\ldots,u_0^m)$，使得 $\|u_0\| < r/2$。目标是找到 X 中一点 y_*，使得 $\varphi(y_*) = \varphi(x_0) + u_0$，且 $(1-2(m-1)\delta)d_X(x_0,y_*) \leq \|u_0\|_{\ell^1}$，其中 d_X 是 X 的度量，而$\|u_0\|_{\ell^1}$ 是 u_0的 ℓ^1-范数。为此，我们将构造 y_*，使其成为序列 $y_1, y_2, \ldots$ 的一个极限点。

首先，我们找到满足 $y_1 \in X$ with $d_X(x_0,y_1) \leq \|u_0\|_{\ell^1}$ 的

$$\|\varphi(y_1) - (\varphi(x_0)+u_0)\|_{\ell^1} \leq 2(m-1)\delta\|u_0\|_{\ell^1}. \tag{4.5}$$

令 $(e_1, \ldots\ldots, e_m)$ 表示 $\mathbb{R}^m$ 的标准正交基。对于$u_0^1 \in \mathbb{R}$，由性质 (4.3)，我们可以选取 $x_1 \in X$，使得 $x_1 \in x_0\xi_1$且$|b_{\gamma_1}(x_1) - b_{\gamma_1}(x_0)| = |u_0^1|$。注意，若 $u_0^1 = 0$，则 $x_1 = x_0$。根据我们的假设 (4.4) 以及 Busemann 函数的一阶变分公式 (4.2)，我们推得只要 $i \neq 1$，就有 $|b_{\gamma_i}(x_1) - b_{\gamma_i}(x_0)| < 2\delta|u_0^1|$。这意味着

$$\|\varphi(x_1) - (\varphi(x_0) + u_0^1 e_1)\|_{\ell^1} \leq 2(m-1)\delta|u_0^1|.$$

依次地，对于 $u_0^m \in \mathbb{R}$，我们可以选取 $x_m \in X$，使得 $x_m \in x_{m-1}\xi_m$ 且 $|d_{p_m}(x_m) - d_{p_m}(x_{m-1})| = |u_0^m|$；特别地，

$$\|\varphi(x_m) - (\varphi(x_{m-1}) + u_0^m e_m)\|_{\ell^1} \le 2(m-1)\delta|u_0^m|.$$

令 $y_1 := x_m$。那么我们有 $d_X(x_0, y_1) \le \|u_0\|_{\ell^1}$ 以及 (4.5)。

归纳地，对于 $y_k \in X$ 和 $u_k := \varphi(x_0)+u_0-\varphi(y_k)$，我们可以构造 $y_{k+1} \in X$，使得 $d_X(y_k, y_{k+1}) \le \|u_k\|_{\ell^1}$

$$\|\varphi(y_{k+1}) - (\varphi(y_k) + u_k)\|_{\ell^1} \le 2(m-1)\delta\|u_k\|_{\ell^1}.$$

对于每个 $k \in \mathbb{N}$，我们有

$$\|u_{k+1}\|_{\ell^1} \le 2(m-1)\delta\|u_k\|_{\ell^1} \le (2(m-1)\delta)^{k+1}\|u_0\|_{\ell^1} \tag{4.6}$$

$$d_X(x_0, y_{k+1}) \le \sum_{i=0}^{k} d_X(y_i, y_{i+1}) \le \frac{1-(2(m-1)\delta)^{k+1}}{1-2(m-1)\delta}\|u_0\|_{\ell^1}, \tag{4.7}$$

其中我们令 $y_0 := x_0$。因此，(y_k) 是 $B_r(x_0)$ 中的柯西序列。令 y_* 为 (y_k) 在 $B_r(x_0)$ 中的极限。那么 (4.6) 表明 $\varphi(y_*) = \varphi(x_0) + u_0$，而 (4.7) 则满足 $(1-2(m-1)\delta)d_X(x_0, y_*) \le \|u_0\|_{\ell^1}$。□

作为引理 4.6 的推论，我们得到：

引理 4.7. 对于 $m \in \mathbb{N}$，设 $\delta \in (0, 1)$ 满足 $2(m-1)\delta < 1$。那么，在测地完备的 $\mathrm{CAT}(0)$ 空间上，每个 *Busemann* (m, δ)-撑架映射都是 $1/(1-2(m-1)\delta)\sqrt{m}$-开映射。特别地，当 $4(m-1)\delta < 1$ 时，它是 $2/\sqrt{m}$-开映射。

证明。根据引理 3.3，每个 Busemann (m, δ)-撑架映射都是 Busemann (m, δ)-伪撑架映射。由引理 4.6 可得该引理。□

4.5. **无穷远处撑架映射的正则性**。我们证明，每个 Busemann 撑架映射都几乎是一个次度量映射（参见 [18, 第 8.3] 小节）。

命题 4.8。对于每个 $\epsilon \in (0,1)$，以及每个 $m \in \mathbb{N}$，都存在满足以下条件的 $\delta \in (0,1)$：设 X 是一个测地完备$\mathrm{CAT}(0)$ 空间。设 $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^m$ 是定义在 X 上的 *Busemann*(m, δ)-撑架映射。那么 φ 是$(1+\epsilon)$-利普希茨且$(1+\epsilon)$-开映射。特别地，对于每个 $x \in X$，φ 在 x 处的方向导数 $D_x\varphi\colon T_xX \to \mathbb{R}^m$ 是$(1+\epsilon)$-利普希茨且$(1+\epsilon)$-开映射。

为证明命题 4.8，我们先准备以下引理。首先考察一个刚性情形。

引理 *4.9.* 设 Z 是一个 *CAT(1)* 空间。设 $(\xi_1, \dots, \xi_m)$ 是 Z 中的一个 m-悬挂点。对于 $i \in \{1, \dots, m\}$，设 $\gamma_i\colon [0, \infty) \to C_0(Z)$ 是欧几里得锥 $C_0(Z)$ 中从顶点 0 朝向 ξ_i 的射线，由 $\gamma_i(t) := t\xi_i$ 定义。那么，由 $\varphi := (b_{\gamma_1}, \dots, b_{\gamma_m})$ 定义的映射 $\varphi\colon C_0(Z) \to \mathbb{R}^m$ 是一个齐次次度量映射。

证明。 由命题 3.1，存在一个包含 $(\xi_1,\dots,\xi_m)$ 的 Z 的圆形闭 π-凸子集 C_{m-1}，使得 Z 等距分裂为 $C_{m-1}*C_{m-1}^{\perp}$，其中 C_{m-1} 与 $\mathbb{S}^{m-1}$ 等距，而 $C_{m-1}^{\perp}$ 是 C_{m-1} 的极集。欧几里得锥 $C_0(Z)$ 等距分裂为$\mathbb{R}^m\times C_0\left(Y_{m-1}^{\perp}\right)$。注意，对于每个 $s\xi\in C_0(Z)$，我们有

$$\varphi(s\xi)=-s\left(\cos d_Z(\xi_1,\xi),\dots,\cos d_Z(\xi_m,\xi)\right),$$

其中 d_Z 是 Z 上的度量。因此，由 $(-\varphi)(s\xi):=-\varphi(s\xi)$ 定义的映射 $-\varphi\colon C_0(Z)\to\mathbb{R}^m$ 与 $C_0(Z)$ 中投影到 m 维欧几里得平直因子 $\mathbb{R}^m$ 上的映射重合。因此，$-\varphi$ 是次度量映射，φ 也因此是次度量映射。齐次性由 φ 的定义可知。□

接下来我们证明以下结论：

引理 4.10。 对于每个 $\epsilon\in(0,1)$，以及每个 $m\in\mathbb{N}$，都存在 $\delta\in(0,1)$ 满足以下条件：设 X 是一个测地完备的$\mathrm{CAT}(0)$ 空间。设 $\varphi\colon X\to\mathbb{R}^m$ 是 X 上的 ***Busemann*** (m,δ)- 撑架映射。那么对于每个 $x\in X$ 以及每个 $\zeta_x\in\Sigma_xX$，都有 $\|(D_x\varphi)(\zeta_x)\|<1+\epsilon$。

证明。 假设对于某个取值于 $(0,\infty)$ 且满足 $\delta_k\to 0$ 的序列 (δ_k)，存在一列 (m,δ_k)-strainer 映射 $\varphi_k\colon X_k\to\mathbb{R}^m$，其定义在测地完备 CAT(0) 空间 X_k 上，使得对于某个 $\zeta_{x_k}\in\Sigma_{x_k}X_k$，我们有

$$\|\left(D_{x_k}\varphi_k\right)(\zeta_{x_k})\|\geq 1+\epsilon. \tag{4.8}$$

对于每个 $k\in\mathbb{N}$，取 X_k 中满足 $\varphi_k=\left(b_{\gamma_{1,k}},\dots,b_{\gamma_{m,k}}\right)$ 的射线所组成的 m-元组 $(\gamma_{1,k},\dots,\gamma_{m,k})$，并且对于每个 $i\in\{1,\dots,m\}$ 置 $\xi_{i,k}:=\gamma_{i,k}(\infty)$。由引理 4.2 可知，$m$-元组 $\left((\xi_{1,k})'_{x_k},\dots,(\xi_{m,k})'_{x_k}\right)$ 是 $\Sigma_{x_k}X_k$ 中的 (m,δ_k)-悬挂点。

设 $(\lim_\omega T_{x_k}X_k,0_\omega)$ 是带基点度量空间序列 $(T_{x_k}X_k,0_{x_k})$ 的超极限，$(\lim_\omega\Sigma_{x_k}X_k,\zeta_\omega)$ 是序列 $(\Sigma_{x_k}X_k,\zeta_{x_k})$ 的超极限。由于每个 $T_{x_k}X_k$ 都定义为 $C_0(\Sigma_{x_k}X_k)$，超极限 $(\lim_\omega T_{x_k}X_k,0_\omega)$ 与 $\left(C_0(\lim_\omega\Sigma_{x_k}X_k),0\right)$ 等距。根据当前假设和引理 3.3，我们可知 $\lim_\omega\Sigma_{x_k}X_k$ 存在一个 m 重悬挂点 $(\xi_{1,\omega},\dots,\xi_{m,\omega})$。

对定义在 $\lim_\omega T_{x_k}X_k$ 上的映射序列 $D_{x_k}\varphi_k$ 取超极限 $\lim_\omega D_{x_k}\varphi_k$。则 $\lim_\omega D_{x_k}\varphi_k$ 与 $(b_{\gamma_1},\dots,b_{\gamma_m})$ 一致，其中 b_{γ_i} 是 $C_0(\lim_\omega\Sigma_{x_k}X_k)$ 上沿着从 0 出发、指向 $\xi_{i,\omega}$ 的射线γ_i 的布塞曼函数。根据引理 4.9，映射 $\lim_\omega D_{x_k}\varphi_k$ 是次度量映射。对于 $\lim_\omega\Sigma_{x_k}X_k$ 中属于 $\lim_\omega T_{x_k}X_k$ 且满足 $\zeta_{x_k}\to\zeta_\omega$ 的点 ζ_ω。由于 $\lim_\omega D_{x_k}\varphi_k$ 是次度量映射，我们有

$$\left\|\left(\lim_\omega D_{x_k}\varphi_k\right)(\zeta_\omega)\right\|\leq 1.$$

因此，对 ω-充分大的 k，有 $\|(D_{x_k}\varphi_k)(\zeta_{x_k})\|<1+\epsilon$。这与 (4.8) 矛盾。 □

引理 4.10 导出如下结论：

引理 4.11。 对于每个 $\epsilon \in (0,1)$以及每个 $m \in \mathbb{N}$，都存在$\delta \in (0,1)$ 满足以下条件：设 X 是一个测地完备的$\mathrm{CAT}(0)$ 空间。设 $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^m$ 是 X 上的 ***Busemann*** (m,δ)***-strainer*** 映射。那么 φ 是$(1+\epsilon)$-利普希茨的。

证明。 取足够小的 $\delta \in (0,1)$。对于 X 中任意一对不同的点x, y，令 $\gamma\colon [a,b] \to X$ 为从 x 到 y 的一条（唯一的）极小测地线。对于 $\mathbb{R}^m$ 中的利普希茨曲线 $\varphi \circ \gamma$，以及每个 $t \in [a,b)$，我们有

$$\left\|(\varphi\circ\gamma)^{+}(t)\right\| = \left\| \left(D_{\gamma(t)}\varphi\right)\left(y'_{\gamma(t)}\right)\right\|.$$

由引理 4.10，我们推得

$$\|\varphi(x)-\varphi(y)\| \le \int_a^b \left\|(\varphi\circ\gamma)^{+}(t)\right\| dt < (1+\epsilon)\, d_X(x,y),$$

其中 d_X 是 X上的度量。因此， φ 是 $(1+\epsilon)$-利普希茨的。 □

接下来我们证明以下结论：

引理 4.12。 对于每个 $\epsilon \in (0,1)$以及每个 $m \in \mathbb{N}$，都存在满足以下条件的 $\delta \in (0,1)$ ：设 X 是一个测地完备$\mathrm{CAT}(0)$ 空间。设 $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^m$ 是 X上的 ***Busemann*** (m,δ)***-撑架映射***。那么对于每个 $u \in \mathbb{S}^{m-1}$以及每个 $x \in X$，我们都能找到满足$(D_x\varphi)(\eta_x) = u$ 的 $\eta_x \in T_xX$，使得 $|\eta_x| < 1+\epsilon$。

证明。 取足够小的 $\delta \in (0,1)$。如引理 4.7 所示，对于每个 $x \in X$，φ 在 x 处的方向导数 $D_x\varphi\colon T_xX \to \mathbb{R}^m$ 是 c-开映射，其中常数 $c \in (1,\infty)$ 仅依赖于 m 和 δ；特别地，对于每个 $u \in \mathbb{S}^{m-1}$，我们都能找到满足 $(D_x\varphi)(\eta_x) = u$ 的 $\eta_x \in T_xX$，使得 $|\eta_x| < c$。

为证明该引理，我们假设存在某个序列 (δ_k)，其取值于 $(0,\infty)$ 且满足 $\delta_k \to 0$；还存在一列 Busemann (m,δ_k)-撑架映射 $\varphi_k\colon X_k \to \mathbb{R}^m$，定义在测地完备 CAT(0) 空间上，以及一个满足 $x_k \in X_k$ 的序列 (x_k)，使得对于某个 $u_k \in \mathbb{S}^{m-1}$，且对于所有满足 $(D_{x_k}\varphi_k)(\eta_{x_k}) = u_k$ 的 $\eta_{x_k} \in T_{x_k}X_k$，我们有

$$|\eta_{x_k}| \ge 1+\epsilon. \tag{4.9}$$

与引理 4.10 的证明类似，设 $(\lim_\omega T_{x_k}X_k, 0_\omega)$ 是带基点度量空间序列 $(T_{x_k}X_k, 0_{x_k})$ 的超极限，$(\lim_\omega \Sigma_{x_k}X_k, \zeta_\omega)$ 是序列 $(\Sigma_{x_k}X_k, \zeta_{x_k})$ 的超极限。由于每个 $T_{x_k}X_k$ 都定义为 $C_0(\Sigma_{x_k}X_k)$，超极限 $(\lim_\omega T_{x_k}X_k, 0_\omega)$ 与 $\left(C_0\left(\lim_\omega \Sigma_{x_k}X_k\right), 0\right)$ 等距。由当前假设和引理 3.3 可知，$\lim_\omega \Sigma_{x_k}X_k$ 具有一个 m 重悬挂点 $(\xi_{1,\omega},\ldots,\xi_{m,\omega})$。

取定义在 $\lim_\omega T_{x_k}X_k$ 上的映射序列 $D_{x_k}\varphi_k$ 的超极限 $\lim_\omega D_{x_k}\varphi_k$。则 $\lim_\omega D_{x_k}\varphi_k$ 与 $(b_{\gamma_1},\ldots,b_{\gamma_m})$ 重合，其中 b_{γ_i} 是 $C_0\left(\lim_\omega \Sigma_{x_k}X_k\right)$ 上沿从 0 出发朝向 $\xi_{i,\omega}$ 的射线 γ_i 的布塞曼函数。由引理 4.9，映射 $\lim_\omega D_{x_k}\varphi_k$ 是一个

齐次次度量。在 $\lim_\omega \mathbb{R}^m$ 中取满足 $u_k \to u$ 的 $u \in \mathbb{S}^{m-1}$，其中 $\lim_\omega(\mathbb{R}^m, 0)$ 是 $(\mathbb{R}^m, 0)$ 的超极限。由于映射 $\lim_\omega D_{x_k}\varphi_k$ 是 1-开且齐次的，我们找到满足 $|\zeta| = 1$ 的 $\zeta \in C_0(\lim_\omega \Sigma_{x_k}X_k)$，使得 $(\lim_\omega D_{x_k}\varphi_k)(\zeta) = u$。选取序列 (ζ_k)，使 $\zeta_k \in \Sigma_{x_k}X_k$ 包含于 $T_{x_k}X_k$ 且满足 $\zeta_k \to \zeta$。于是 $(D_{x_k}\varphi_k)(\zeta_k) \to u$。因此我们有 $\lim_\omega \|(D_{x_k}\varphi_k)(\zeta_k) - u_k\| = 0$，从而对所有 ω-充分大的 k，我们有 $\|(D_{x_k}\varphi_k)(\zeta_k) - u_k\| < \epsilon/2c$。由于每个 $D_{x_k}\varphi_k$ 都是 c-开的，对于$u_k \in \mathbb{S}^{m-1}$，我们找到满足 $d_{T_{x_k}X_k}(\eta_k, \zeta_k) < \epsilon/2$ 的 $\eta_k \in T_{x_k}X_k$，使得 $(D_{x_k}\varphi_k)(\eta_k) = u_k$，其中 $d_{T_{x_k}X_k}$ 是 $T_{x_k}X_k$ 上的度量。因此我们有 $|\eta_k| < 1 + \epsilon/2$。这与 (4.9) 矛盾。□

现在证明命题 4.8

命题 *4.8* 的证明。取 $\epsilon \in (0,1)$ 和 $m \in \mathbb{N}$。令 $\delta \in (0,1)$ 足够小。由引理 4.11，φ 是 $(1+\epsilon)$-利普希茨的。如引理 4.12 所示，对于每个 $u \in \mathbb{S}^{m-1}$以及每个 $x \in X$，我们都能找到$\eta_x \in T_xX$，使得 $(D_x\varphi)(\eta_x) = u$ 且 $|\eta_x| < 1 + \epsilon$。应用 Lytchak 开映射定理 [17, 定理 1.2]，我们得出 φ 是 $(1+\epsilon)$-开映射。因此命题得证。□

5. Proofs of the main theorems

5.1. 定理 1.1 的证明。 首先我们得出以下结论：

命题 5.1。 对于每个 $\epsilon \in (0, 1)$，以及每个 $n \in \mathbb{N}$，存在满足以下条件的 $\delta \in (0, 1)$：设 X 是一个测地线完备且完备的 $\mathrm{CAT}(0)$ 空间，其维数为 $\dim_{\mathrm{G}} X \le n$。如果 $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^n$ 是 X上的 ***Busemann*** (n, δ)-***strainer*** 映射，那么它是一个 $(1+\epsilon)$-双利普希茨同胚。

证明。令 $\delta \in (0, 1)$ 足够小。设 X 是一个维数为 $\dim_{\mathrm{G}} X \le n$的完备 CAT(0)空间。设 $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^n$ 是 X 上的 Busemann (n, δ)-strainer 映射，且 $\varphi = (b_{\gamma_1}, \dots, b_{\gamma_n})$。对于每个 $i \in \{1, \dots, m\}$，置$\xi_i := \gamma_i(\infty)$。

我们证明 φ的单射性。假设存在不同的点x、y，它们属于 X，且满足 $\varphi(x) = \varphi(y)$。根据引理 4.2，可穿透 CAT(1) 空间 $\Sigma_x X$存在一个 (n, δ)-悬挂点 $((\xi_1)'_x, \dots, (\xi_n)'_x)$。由于$\varphi(x) = \varphi(y)$，根据引理 4.3，对于所有$i \in \{1, \dots, m\}$，都有 $|\angle_x(\xi_i, y) - \pi/2| < 2\delta$。这与引理 3.5 矛盾。因此，$\varphi$是单射。

由命题 4.8 可知，φ是 $(1+\epsilon)$-利普希茨映射，且是 $(1+\epsilon)$-开映射。结合 φ 的单射性，可推出 φ 是 $(1+\epsilon)$-双利普希茨同胚。□

由命题 5.1 可得：

定理 5.2。 对于每个 $\epsilon \in (0,1)$，以及每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $\delta \in (0,1)$，使得若一个测地完备 $\mathrm{CAT}(0)$ 空间 X的维数$\dim_{\mathrm{G}} X \le n$ 满足 $d_{\mathrm{GH}}\left(\partial_{\mathrm{T}}X, \mathbb{S}^{n-1}\right) < \delta$，则 X 与 $\mathbb{R}^n$同胚，且该同胚为$(1+\epsilon)$-双利普希茨映射。

证明。对于 $\epsilon \in (0,\infty)$，以及 $n \in \mathbb{N}$，取充分小的 $\delta \in (0,1)$。设 X 为一个满足 $d_{\mathrm{GH}}\left(\partial_{\mathrm{T}} X, \mathbb{S}^{n-1}\right) < \delta$ 的测地完备 CAT(0) 空间，其维数为 $\dim_{\mathrm{G}} X = n$。

在这种情况下，由于我们有 $d_{\mathrm{GH}}\left(\partial_{\mathrm{T}} X,\ \mathbb{S}^{n-1}\right) < \delta$，因此存在一个无穷远处的 $(n,\ 10\delta)$-strainer $(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)$。对于每个 $i \in \{1,\ldots,n\}$，取一条射线 $\gamma_i\colon [0,\infty) \to X$，使得 $\xi_i = \gamma_i(\infty)$。那么，由 $\varphi = (b_{\gamma_1},\ \ldots,\ b_{\gamma_n})$ 定义的映射 $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^n$ 是一个 Busemann $(n,\ 10\delta)$-strainer 映射。由命题 5.1 可知，φ 是一个 $(1+\epsilon)$-双利普希茨同胚。这就完成了定理 1.1 的证明。□

定理 *1.1* 的证明。由定理 5.2 和 Kleiner 关于几何维数的定理2.1 [15]可得定理1.1。□

5.2. **定理 1.2 的证明**。我们用 $\vartheta_n\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ 表示一个仅依赖于 n 的正函数，满足 $\lim_{\delta\to 0} \vartheta_n(\delta) = 0$。

基于 Burago–Gromov–Perelman 关于曲率下界为正的 CBB 空间的定理 9.5] 中的相同思路，我们证明以下关于测地完备 CAT(1) 空间的结论：

定理 5.3。对于每个 $\epsilon \in (0,1)$，以及每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $\delta \in (0,1)$，使得若一个测地完备的 $\mathrm{CAT}(1)$ 空间 Z 的维数 $\dim_{\mathrm{G}} Z \le n-1$ 满足 $d_{\mathrm{GH}}\left(Z, \mathbb{S}^{n-1}\right) < \delta$，则 Z 与 $\mathbb{S}^{n-1}$ 双 ***Lipschitz*** 同胚，常数为 $(1+\epsilon)$。

证明。对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $\delta \in (0, 1)$ 足够小。设 Z 是一个度量为 d_Z、维数为 $\dim_{\mathrm{G}} Z \le n-1$、满足 $d_{\mathrm{GH}}\left(Z, \mathbb{S}^{n-1}\right) < \delta$ 的测地完备 CAT(1) 空间。那么，Z 上的欧几里得锥 $C_0(Z)$ 是一个满足 $\dim_{\mathrm{G}} C_0(Z) \le n$ 的测地完备 CAT(0) 空间。由于 Z 与 $\partial_{\mathrm{T}} C_0(Z)$ 等距，我们有 $d_{\mathrm{GH}}\left(\partial_{\mathrm{T}} C_0(Z)\ \mathbb{S}^{n-1}\right) < \delta$。此时，存在一个位于无穷远处的 $(n, 10\delta)$-撑架 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$。对于每个 $i \in \{1,\ldots,n\}$，取一条射线 $\gamma_i\colon [0,\infty) \to C_0(Z)$，满足 $\xi_i = \gamma_i(\infty)$。那么，由 $\varphi_0 = (b_{\gamma_1}, \ldots, b_{\gamma_n})$ 定义的映射 $\varphi_0\colon C_0(Z) \to \mathbb{R}^n$ 是一个 Busemann $(n, 10\delta)$-撑架映射。根据命题 5.1，映射 φ_0 是一个 $(1+\vartheta_n(\delta))$-双利普希茨同胚。

将以 $C_0(Z)$ 中的顶点为中心的单位度量球面与 Z 等同，并将以 $\mathbb{R}^n$ 中的原点为中心的单位度量球面与 $\mathbb{S}^{n-1}$ 等同。定义双射 $\varphi\colon Z \to \mathbb{S}^{n-1}$ 为

$$\varphi(z) := \frac{1}{\|\varphi_0(z)\|}.$$

取 Z 中互不相同的点 z_1，z_2。如果 z_1 和 z_2 满足 $d_Z(z_1,\ z_2) \ge \pi/100$，则有

$$\left|d_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\varphi(z_1), \varphi(z_2)\right) - d_Z\left(z_1, z_2\right)\right| < \left(1 + \vartheta_n(\delta)\right) d_Z\left(z_1, z_2\right),$$

其中 $d_{\mathbb{S}^{n-1}}$ 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的度量。

假设 z_1 和 z_2 满足 $d_Z(z_1,\ z_2) < \pi/100$。令 $l := d_Z(z_1,\ z_2)$。设 $\gamma\colon [0,l] \to Z$ 为 Z 中从 z_1 到 z_2 的测地线。取 $t \in [0,l]$。根据

引理 4.2， n元组 $\left((\xi_1)'_{\gamma(t)},\ \ldots\ldots,\ (\xi_n)'_{\gamma(t)}\right)$ 是$\Sigma_{\gamma(t)}C_0(Z)$中的一个 $(n,\ 10\delta)$-strainer。令 $\xi_{\gamma(t)}$ 为 $\Sigma_{\gamma(t)}C_0(Z)$中的方向 $(D_t\gamma)$ (1)。由于 φ_0 具有布塞曼函数坐标，我们有

$$\begin{aligned}\left(D_{\gamma(t)}\varphi_0\right)\left(\xi_{\gamma(t)}\right) &= -\left(\cos\angle_{\gamma(t)}\left(\xi_1,\xi_{\gamma(t)}\right),\ldots,\cos\angle_{\gamma(t)}\left(\xi_n,\xi_{\gamma(t)}\right)\right),\\ \left(D_{\gamma(t)}\varphi_0\right)\left(0'_{\gamma(t)}\right) &= -\left(\cos\angle_{\gamma(t)}\left(\xi_1,0'_{\gamma(t)}\right),\ldots,\cos\angle_{\gamma(t)}\left(\xi_n,0'_{\gamma(t)}\right)\right).\end{aligned}$$

由于 φ_0 是一个$(1+\vartheta_n(\delta))$-双利普希茨同胚，我们有

$$\left|\left\|\left(D_{\gamma(t)}\varphi_0\right)\left(\xi_{\gamma(t)}\right)\right\|-1\right|<\vartheta_n(\delta),\quad \left|\left\|\left(D_{\gamma(t)}\varphi_0\right)\left(0'_{\gamma(t)}\right)\right\|-1\right|<\vartheta_n(\delta).$$

对 $\Sigma_{\gamma(t)}C_0(Z)$应用引理 3.6，可见

$$\left|\angle_{\gamma(t)}\left(\left(D_{\gamma(t)}\varphi_0\right)\left(\xi_{\gamma(t)}\right),\left(D_{\gamma(t)}\varphi_0\right)\left(0'_{\gamma(t)}\right)\right)-\frac{\pi}{2}\right|<\vartheta_n(\delta);$$

换言之， $\varphi_0\circ\gamma$ 在 t 处的切向量 $\left(D_{\gamma(t)}\varphi_0\right)\left(\xi_{\gamma(t)}\right)$ 与从$(\varphi_0\circ\gamma)(t)$到原点0的向量几乎垂直。因此我们看到

$$\left|\frac{\left\|\left(D_{\gamma(t)}\varphi\right)\left(\xi_{\gamma(t)}\right)\right\|}{\left\|\left(D_{\gamma(t)}\varphi_0\right)\left(\xi_{\gamma(t)}\right)\right\|}-1\right|<\vartheta_n(\delta).$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}d_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\varphi(z_1),\varphi(z_2)\right) &\le \int_0^l\left\|\left(D_{\gamma(t)}\varphi\right)\left(\xi_{\gamma(t)}\right)\right\|dt\\ &< \left(1+\vartheta_n(\delta)\right)\int_0^l\left\|\left(D_{\gamma(t)}\varphi_0\right)\left(\xi_{\gamma(t)}\right)\right\|dt<\left(1+\vartheta_n(\delta)\right)d_Z(z_1,z_2).\end{aligned}$$

令 $\bar{l}:=d_{\mathbb{S}^{n-1}}(\varphi(z_1)\ \varphi(z_2))$。设 $\bar{\gamma}\colon\ [0,\bar{l}]\to\mathbb{S}^{n-1}$ 为 $\mathbb{S}^{n-1}$ 中从 $\varphi(z_1)$到 $\varphi(z_2)$的测地线， $\tilde{\gamma}\colon\ [0,l]\to\mathbb{S}^{n-1}$ 为 $\bar{\gamma}$ 的常速重参数化，由 $\tilde{\gamma}(t):=\bar{\gamma}\left((\bar{l}/l)t\right)$定义。由于切向量 $\left(D_{\gamma(t)}\varphi_0\right)\left(\xi_{\gamma(t)}\right)$ 与从 $(\varphi_0\circ\gamma)(t)$ 到原点0的向量几乎垂直，我们看到

$$\left|\frac{\left\|\left(D_{\gamma(t)}\varphi_0\right)\left(\xi_{\gamma(t)}\right)\right\|}{\left\|\left(D_t\tilde{\gamma}\right)(1)\right\|}-1\right|<\vartheta_n(\delta).$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}d_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\varphi(z_1),\varphi(z_2)\right) &= \int_0^l\left\|\left(D_t\tilde{\gamma}\right)(1)\right\|dt\\ &> \left(1-\vartheta_n(\delta)\right)\int_0^l\left\|\left(D_{\gamma(t)}\varphi_0\right)\left(\xi_{\gamma(t)}\right)\right\|dt=\left(1-\vartheta_n(\delta)\right)d_Z(z_1,z_2).\end{aligned}$$

因此， φ 是一个（$1+\vartheta_n$（δ））-双利普希茨同胚。

至此，我们完成了定理 5.3 的证明。 □

定理 *1.2* 的证明。结合 Kleiner 关于几何维数的定理 5.3 和定理2.1，我们得出定理 1.2。□

References

[1] S. Alexander、V. Kapovitch 和 A. Petrunin，《亚历山德罗夫几何导论：CAT(0)空间》，Springer 数学简明丛书，Springer，2019年。[2] S. Alexander、V. Kapovitch 和 A. Petrunin，《亚历山德罗夫几何：基础》，数学研究生丛书，第236卷，美国数学学会，2024年。[3] F. D. Ancel、M. W. Davis 和 C. R. Guilbault，《CAT(0)反射流形》，《几何拓扑》第一部分（W. H. Kazez 编），AMS/IP 高等数学研究丛书，第2卷，美国数学学会，1997年，第441–445页。[4] W. Ballmann，《非正曲率空间讲义》，德国数学家协会研讨会丛书，第25卷，Birkh¨auser，1995年。[5] W. Ballmann、M. Gromov 和 V. Schroeder，《非正曲率流形》，数学进展丛书，第61卷，Birkh¨auser，1985年。[6]M. R. Bridson 和 A. Haefliger，《非正曲率度量空间》，数学科学基础丛书，第319卷，Springer-Verlag，1999年。[7] M. Brown，《开胞腔的单调并是一个开球》，《美国数学会会刊》12（1961年），812–814。[8] D. Burago、Yu. D. Burago 和 S. Ivanov，《度量几何教程》，数学研究生丛书，第33卷，美国数学学会，2001年。[9] Yu. D. Burago、M. Gromov 和 G. Perelman，《曲率下有界的 A. D. Alexandrov 空间》 [俄文]，《数学科学进展》47（1992年），第2期（284），3–51、222；俄译本见《俄罗斯数学调查》47（1992年），第2期，1–58。[10] M. W. Davis 和 T. Januszkiewicz，《多面体双曲化》，《微分几何杂志》34（1991年），347–388。[11] T. Fujioka 和 S. Gu，《非正曲率布塞曼空间的拓扑正则性》，预印本，2025年：arXiv:2504.14455。[12] K. Fujiwara、K. Nagano 和 T. Shioya，《CAT(0)空间中抛物等距变换的不动点集》，《瑞士数学评论》81（2006年），305–335。[13] M. Gromov，《双曲流形、群与作用》，载于《黎曼曲面及相关主题：1978年石溪会议论文集》（I. Kra 和 B. Maskit 编），数学年鉴研究丛书，第97卷，普林斯顿大学出版社，1981年，第183–213页。[14] M. Gromov，《双曲群》，载于《群论论文集》（S. M. Gersten 编），数学科学研究所出版物，第8卷，Springer，1987年，第75–263页。[15] B. Kleiner，《曲率上界长度空间的局部结构》，《数学杂志》231（1999年），409–456。[16] B. Leeb，《通过渐近几何刻画不可约对称空间和高秩欧几里得建筑》，波恩数学论文集326，波恩大学数学研究所，2000年。[17] A. Lytchak，《度量空间中的开映射定理》，《代数与分析》17（2005年），第3期，139–159；《圣彼得堡数学杂志》17（2006年），第3期，477–491。[18] A. Lytchak 和 K. Nagano，《测地完备且曲率上界的空间》，《几何与泛函分析》29（2019年），第1期，295–342。[19] A. Lytchak 和 K. Nagano，《曲率上界空间的拓扑正则性》，《欧洲数学会杂志》（JEMS）24（2022年），第1期，137–165。[20] A. Lytchak、K. Nagano 和 S. Stadler，《CAT(0)四维流形是欧几里得空间》，《几何与拓扑》28（2024年），第7期，3285–3308。[21] K. Nagano，《CAT(1) 空间的体积挤压定理》，《美国数学杂志》144（2022年），第1期，267–285。

[22] K. Nagano, 渐近拓扑正则性CAT(0) 空间《全球分析与几何年刊》**61** （2022年），第2期，427–457。[23] K. Nagano, 具有曲率上界的空间的墙奇点预印本，2026年：arXiv:2601.22673。[24] D. Rolfsen, 胞腔中的强凸度量，《美国数学会通报》**78**（1968年），171–175。[25] J. Stallings, 欧几里得空间的分片线性结构，《剑桥哲学学会会刊》**58**（1962年），481–488。[26] P.Thurston, CAT(0) 4-流形具有单个驯点时是欧几里得的，《几何分析杂志》**6**（1996年），第3期，475–494。

(KOICHI NAGANO)Department of Mathematics,
University of TsukubaTennodai 1-1-1, Tsukuba, Ibaraki,
305-8571, Japan电子邮箱地址: nagano@math.tsukuba.ac.jp