arXiv:2602.20588v1 [math.DS] 24 Feb 2026

Julia 集与不变射线的连续性

XIAOGUANG WANG

Abstract. 对于有抛物周期的有理映射 f 的某些典型扰动 $(f_n)_n$，我们研究以下两者之间的关系：

- Julia 集的豪斯多夫收敛与不变射线，以及
- 周期点乘子的 horocyclic 收敛。

我们借助抛物爆裂理论建立了若干等价刻画。这项工作基于对扰动所诱导的门结构在树上的边动力学的分析。由 Oudkerk 算法驱动的边动力学，可用于追踪近抛物扰动下的轨道。

1. Introduction

令 Rat_d 为次数为 $d \geq 2$ 的有理映射空间，并赋予代数拓扑。也就是说，若 $\deg(f_n) = \deg(f)$，且可选择 f_n（作为多项式之比）的系数，使其收敛到 f 的系数，则称 $f_n \to f$ 代数收敛。Julia 集 $J(f)$ 是 $f \in \mathrm{Rat}_d$ 中所有排斥周期点的闭包。Julia 集 $J(f)$ 确定了一个映射

$$J : \mathrm{Rat}_d \to \mathcal{C}(\widehat{\mathbb{C}})$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$从 Rat_d 到球面 $\mathbb{C}$ 的非空紧子集空间 $\mathcal{C}(\mathbb{C})$，并赋予豪斯多夫拓扑。

Douady、Yin 和 Wu [Dou94, Y95, W99] 已证明，$J(f)$ 在 $f \in \mathrm{Rat}_d$ 处连续，当且仅当 f 既没有抛物周期，也没有旋转域（Siegel 圆盘和 Herman 环）。当 f 有抛物周期时，抛物 implosion 会导致不连续性 [Dou94]。然而，对于某些序列 $(f_n)_n$，即使 $f_n \to f$ 代数收敛，仍可能出现 $J(f_n) \to J(f)$。本文旨在确定此类序列在极限映射 f 有抛物点时所需满足的适当条件，并研究其连续性性质，包括不变射线的连续性。

为了介绍主要结果并指出其一项关键应用，我们先从一个启发性示例开始。

定理 1.1。设 $f_\lambda(z) = \lambda z + z^2$ 满足 $\lambda \in \mathbb{C}$。假设 $\lambda_n \to \lambda_0 = e^{2\pi ip/q}$ 是一个本原的 q 次单位根。那么我们有

$$J(f_{\lambda_n}) \to J(f_{\lambda_0}) \iff |\mathrm{Re}\big(1/(1-\lambda_n^q)\big)| \to +\infty.$$

Date: 2026年2月25日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 37F10；次要分类 37F44、37F46。*Key words and phrases.* 抛物 implosion、horocyclic 收敛、Julia 集。

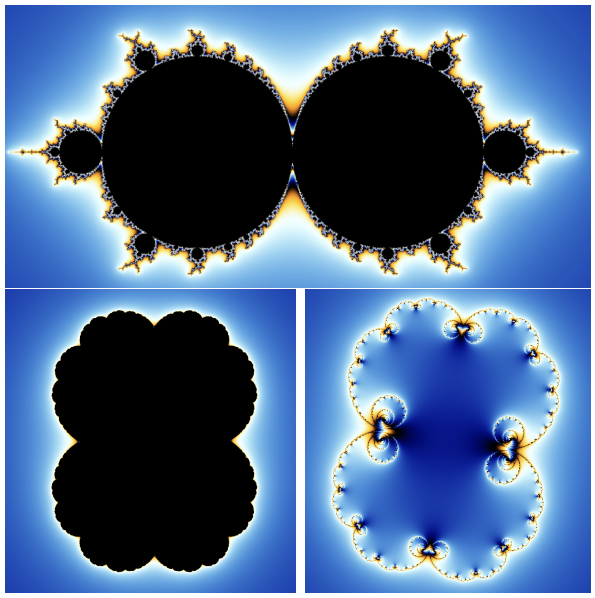


FIGURE 1. 双重曼德布罗集 $\{\lambda \in \mathbb{C};\ J(\lambda z+z^2)$ 是连通的$\}$(上图), 对于 $J(\lambda z+z^2)$，当 $\lambda=1-\varepsilon$和 $\lambda=1+\varepsilon i$ 较小时的 Julia 集 $\varepsilon>0$。根据定理 1.1，$J(\lambda_n z+z^2)\to J(z+z^2)\iff |\mathrm{Re}(1/(1-\lambda_n))|\to+\infty$。

情形 $\lambda_0=1$已隐含于许多作者的研究中，包括 Lavaurs [Lav89], Douady [Dou94], Bodart–Zinsmeister [BZ96], Shishikura[Sh98], Oudkerk [Ou99], McMullen [Mc00], 和 Buff–Tan [BT07]。最近, Simanjuntak [S25] 利用布拉施克乘积的抛物 implosion 证明了这一情形。对于一般的 $\lambda_0=e^{2\pi ip/q}$，McMullen [Mc00] 证明，在一个略强的条件下（即 $\lambda_n\to\lambda_0$ 径向地），豪斯多夫维数 H.dim($J(f_{\lambda_n})$) $\to$ H.dim($J(f_{\lambda_0})$) 连续。

设 $(\lambda_n)_n$ 是 $\mathbb{C}^*$ 中的一个序列，满足 $\lambda_n\to 1$。我们称 $\lambda_n\to 1$ 沿 ***horocycle*** 方向，如果 $\lambda_n=e^{L_n+i\theta_n}$ 满足 $\theta_n^2/L_n\to 0$ (见 [Mc00])，或者等价地

$$\left|\mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1-\lambda_n}\Big)\right|\to+\infty.$$

现在从代数角度考虑 $f_n\to f_0$。假设 f_0 有一个抛物周期点ζ。那么存在一个最小整数 $l\geq 1$，使得 $f_0^l(\zeta)=\zeta$且 $(f_0^l)'(\zeta)=1$（注意，ζ 的 f_0-周期是 l的一个因子）。假设

- 存在 ζ_n 的不动点 f_n^l 收敛到 ζ；并且
- 它们的乘子 $\lambda_n=(f_n^l)'(\zeta_n)$ 沿 horocycle 方向收敛到 1。

那么我们称其在 ζ 处沿 ***horocycle*** 方向 。如果这些条件对所有f_0-抛物点 ζ都成立，我们就称其沿 ***horocycle*** 方向。

如果 f_0 阶抛物点分裂为非抛物周期点（即，对于 f_n，不存在f_n附近的抛物周期点），则称 $(f_n)_n$ 为 ζ处的的一般扰动。

；如果它在所有 f_0 阶抛物点处都是 f_0 的一般扰动，则称其为 f_0 的一般扰动。

McMullen [Mc00] 证明了，如果 f_0 是几何有限的，并且 $f_n \to f_0$ 在 Julia 集上既沿 horocycle 方向又保持临界关系，则 $J(f_n) \to J(f_0)$（$\mathrm{H.dim}(J(f_n)) \not\to \mathrm{H.dim}(J(f_0))$）。我们证明一个逆命题：

定理 1.2。设 f_0 是一个具有抛物点的有理映射。设 $(f_n)_n$ 是 f_0的一般扰动。如果 $J(f_n) \to J(f_0)$，则 $f_n \to f_0$沿 *horocycle* 方向。

定理 1.2 的逆命题不成立。Oudkerk [Ou02] 给出了如下例子：

$$f_n(z) = z + z^4 + 1/n,\ n \geq 1;\ f_0(z) = z + z^4.$$

可以验证，$f_n \to f_0$ 沿 horocycle 方向，但 Julia 集 $J(f_n)$ 不收敛于 $J(f_0)$[1]。在此例中，f_0-抛物不动点 0 对于 f_n分裂成两个排斥不动点和两个吸引不动点。

设 $(f_n)_n$ 为 f_0 在 ζ处的一般扰动，其中 ζ是一个重数为[2] 的 f_0-抛物周期点，记为 $\nu + 1 \geq 2$。我们称 $(f_n)_n$ 为一个

- *leaned* 序列，即 f_0 在 ζ处的序列，若 ζ 对 f_n分裂为 $\nu+1$ 个非吸引点或 $\nu+1$ 个非排斥点；
- 平衡序列，即 f_0 在 ζ处的序列，若 ζ 对 f_n分裂为至少两个吸引点和至少两个排斥点；
- $*$-序列，即 f_0 在 ζ处的序列，若 ζ 对 f_n分裂为一个吸引点并伴随 ν 个非吸引点，或一个排斥点并伴随 ν 个非排斥点。

我们称 $(f_n)_n$ 一个 ω 序列，即 f_0 的序列，如果 $(f_n)_n$ 是 f_0 在所有 f_0-抛物点处的一个 ω 序列，其中 $\omega \in \{$取 leaned、平衡 $*$-$\}$。注意，f_0 的任一一般扰动 $(f_n)_n$ 都包含一个属于上述三种类型之一的子序列。

若（f_n）$_n$ 是一个 leaned 序列，可以证明 J（f_0）严格小于 J（f_n）的任意豪斯多夫极限，因此 J（f_n）$\not\to J$（f_0）（见注 6.2。）。对于平衡序列，根据上文 Oudkerk 的例子和定理1.2，horocyclic 收敛严格弱于 Julia 集的豪斯多夫收敛。

我们的下一个定理表明，对于 $*$-序列，这两种收敛概念是等价的。

定理 1.3。设 f_0 是一个具有抛物点且没有旋转域的有理映射。设（f_n）$_n$ 是一个 $*$的 f_0序列。那么

$$J(f_n) \to J(f_0) \iff f_n \to f_0 \quad \textit{horocyclically}.$$

我们证明定理1.3 的方法使我们能够研究乘子的（部分）horocyclic 收敛、Fatou 分支的核收敛以及不变

[1]该陈述的严格证明 $J(f_n) \not\to J(f_0)$ 可以从 §3.[2]中提取。设 $l \geq 1$ 是使得 $f_0^l(\zeta) = \zeta$ 且 $(f_0^l)'(\zeta) = 1$的最小整数，ζ的重数是 $f_0^l(z) - z$ 在 ζ处的零点阶数。

曲线之间的关系。后者的研究动机来自对多项式外射线的豪斯多夫极限的研究，正如 Petersen 和 Zakeri 最近的工作所展示的那样 [PZ24a、PZ24b]。

以下不失一般性地，设 f_0 在 ζ 处有一个乘子为 1、重数为 $\nu+1$ 的抛物不动点。设 $A_1,\cdots,A_\nu$ 是 f_0 在 ζ 处的所有直接抛物吸引盆，并按正向循环顺序标记。设 $f_n\to f_0$ 是 f_0 在 ζ 处的一般扰动。

对每个 $1\le k\le\nu$，设 $\gamma_k:[0,+\infty)\to A_k$ 是一条 f_0-不变曲线 $f_0(\gamma_k(t))=\gamma_k(t+1)$，使得当 $t\to+\infty$ 时，$\gamma_k(t)$ 沿第 k 个吸引方向收敛到 ζ。设 $\gamma_{n,k}:[0,+\infty)\to\mathbb{C}$ 是一条 f_n-不变曲线 $f_n(\gamma_{n,k}(t))=\gamma_{n,k}(t+1)$，使得当 $n\to+\infty$ 时，$\gamma_{n,k}$ 在 $[0,+\infty)$ 中局部一致收敛到 γ_k。我们用 $\gamma_{n,k}\rightrightarrows\gamma_k$ 表示 $\gamma_{n,k}$ 在 $[0,+\infty)$ 中一致收敛到 γ_k。注意，一致收敛 $\gamma_{n,k}\rightrightarrows\gamma_k$ 蕴含豪斯多夫收敛 $\gamma_{n,k}\to\overline{\gamma_k}$，且严格强于局部一致收敛。若 $\gamma_{n,k}$ 在 $[0,+\infty)$ 中不一致收敛到 γ_k，则 $(\gamma_{n,k})_n$ 的任何子序列都可能无法在 $[0,+\infty)$ 中一致收敛到 γ_k；我们用 $\gamma_{n,k}\not\rightrightarrows\gamma_k$ 表示这一极端情形。

对于紧集序列 $(X_n)_n$ in $\widehat{\mathbb{C}}$，令 $\mathcal{L}((X_n)_n)\subset\mathcal{C}(\mathbb{C})$ 为 $(X_n)_n$ 的所有收敛子序列的豪斯多夫极限所构成的集合。[3]

定理 1.4. 设 $f_0\in\mathrm{Rat}_d$ 在 ζ 处有一个重数为$\nu+1$的抛物不动点 $f_0'(\zeta)=1$。设 $(f_n)_n$ 是 f_0 在 ζ处的一般扰动。则以下三个陈述等价：

(1). 对每个 n，都存在一个 f_n-不动点 ζ_n，使得

$$\zeta_n\to\zeta,\ \textit{and}\ f_n'(\zeta_n)\to1\ \textit{horocyclically}.$$

(2). $(f_n)_n$ 的每个子序列都存在一个进一步的子序列 $(f_{n_j})_j$ 以及 f_0 在 ζ 处的一个直接抛物吸引盆 A，使得

$$X\cap A=\emptyset,\ \forall X\in\mathcal{L}((J(f_{n_j}))_j).$$

(3). $(f_n)_n$ 的每个子序列都存在一个进一步的子序列 $(f_{n_j})_j$ 以及某个 $k\in[1,\nu]\cap\mathbb{N}$，使得 $\gamma_{n_j,k}\rightrightarrows\gamma_k$。

我们指出，在陈述 (2) 中，当 $(f_{n_j})_j$ 和 A 被选定时，对于任何其他的直接抛物吸引盆 $B\neq A$ 属于 f_0 处的 ζ，我们可能有 $X\cap B\neq\emptyset,\ \forall X\in\mathcal{L}((J(f_{n_j}))_j)$。见下文定理 1.5。

Buff 和 Tan [BT07，命题 6。3] 在多项式向量场稳定性的条件下证明了定理 1.4的第 (2) 部分，而我们第 (1) 部分中的条件从动力系统的角度看既自然，又是根本上必需的。

定理1.4 的一个更强版本适用于 $*$序列，这需要引入部分 horocyclic 收敛的概念。设 $(f_n)_n$ 是一个 $*$序列，在f_0 处 ζ。我们称 $f_n\to f_0$ ℓ在 ζ 处沿 horocycle 方向收敛，其中 $\ell\in[0,\nu]$为某个整数，

[3]根据布拉施克选取定理，紧集的任意序列 $(X_n)_n$ 在 $\widehat{\mathbb{C}}$ 中都存在一个收敛到某个紧集的子序列，且收敛所依据的是豪斯多夫度量。因此 $\mathcal{L}((X_n)_n)\neq\emptyset$。

如果 ν f_n 附近的不吸引（或不排斥）不动点可以标记为 $\zeta_{n,\,1}$，$\cdots$，$\zeta_{n,\,\nu}$ 使得它们的乘子 $\lambda_{n,\,j}=f_n'(\zeta_{n,\,j})$ 满足

- 前 ℓ 个乘子序列沿 horocycle 方向收敛到 1：

$$\left|\mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1-\lambda_{n,j}}\Big)\right|\to+\infty,\ 1\le j\le\ell;$$

- 其余的 $\nu-\ell$ 个乘子序列满足

$$\sup_{n\ge1}\left|\mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1-\lambda_{n,j}}\Big)\right|<+\infty,\ \ell<j\le\nu.$$

注意，任意 $*$-序列 $(f_n)_n$ 中，f_0 在 ζ 处的序列都存在一个子序列 $(f_{n_j})_j$ 使得 $f_{n_j}\to f_0$ ℓ沿 horocycle 方向收敛于 ζ，其中 $\ell\in[0,\nu]$为某个整数。例子见图 2，展示了 1-horocyclic 收敛。

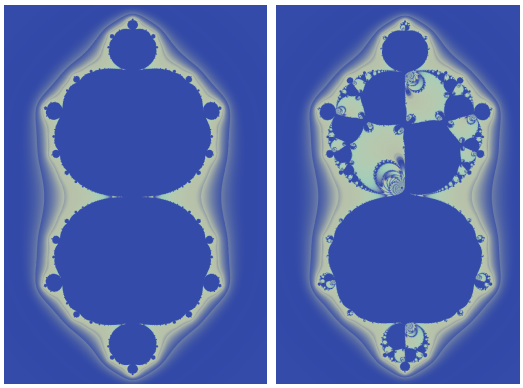


FIGURE 2. 由 $f_{a,b}(z)=z+z((z-a)^2+b)$ 的 Julia 集，其中 $(a,b)=(0,0)$（左图），而 $(0.2i,-0.0005539+0.00012975i)$（右图）。此例由 Jie Cao 提供，展示了 $f_{a,b}\to f_{0,0}$ 在 0 处沿 horocycle 方向 1- 收敛的情形。

定理 1.5。设 f_0 有一个重数为 $\nu+1$ 的抛物不动点 ζ $f_0'(\zeta)=1$。设 $f_n\to f_0$ 是 ζ 处的 f_0 的一个 $*$- 序列。设 $\ell\in[0,\nu]$ 为一个整数。以下三个陈述等价：

(1). 在 ζ 处沿 $f_n\to f_0$ ℓ-*horocycle* 方向。

(2). 对于 $(f_n)_n$ 的每个子序列，都存在一个进一步的子序列$(f_{n_j})_j$ 以及一个基数为 $\#\mathcal{I}=\ell$ 的子集 $\mathcal{I}\subset\{1,\dots,\nu\}$，使得

$$\begin{cases}X\cap A_k=\emptyset,\ \forall X\in\mathcal{L}((J(f_{n_j}))_j), & \text{if } k\in\mathcal{I};\\ X\cap A_k\neq\emptyset,\ \forall X\in\mathcal{L}((J(f_{n_j}))_j), & \text{if } k\notin\mathcal{I}.\end{cases}$$

(3). 对于 f_n 的每个子序列，都存在一个进一步的子序列 f_{n_j} 和一个子集 $\mathcal{I}\subset\{1,\dots,\nu\}$，其基数为 $\#\mathcal{I}=\ell$，使得

$$\begin{cases}\gamma_{n_j,k}\rightrightarrows\gamma_k, & \text{if } k\in\mathcal{I};\\ \gamma_{n_j,k}\not\rightrightarrows\gamma_k, & \text{if } k\notin\mathcal{I}.\end{cases}$$

我们指出，定理 1.5 的第 (2) 部分和第 (3) 部分中的子序列 f_{n_j} 与指标集 $\mathcal{I}$ 可以相同。将定理 1.5 应用于情形 $\ell = \nu$，我们得到

定理 1.6。设 f_0 在 ζ 处有一个重数为 $\nu+1$ 的抛物不动点，$f_0'(\zeta) = 1$。设 $f_n \to f_0$ 是 ζ 处的 $*$序列 f_0。那么以下三个陈述等价：

(1). $f_n \to f_0$ 沿 *horocycle* 方向趋于 ζ。*(2).* 对任意 $1 \le k \le \nu$，都有 $X \cap A_k = \emptyset, \forall X \in \mathcal{L}((J(f_n))_n)$。*(3).* 对任意 $1 \le k \le \nu$，都有 $\gamma_{n,k} \rightrightarrows \gamma_k$。

定理1.6(1)$\Longrightarrow$(3) 推广了 Petersen 和 Zakeri 的驯性定理 [PZ24b，定理 B]。值得注意的是，在 Petersen 和 Zakeri 的工作中，f_0-不变曲线 γ_k 被要求沿 ζ 排斥方向收敛，而在我们的工作中，γ_k 沿吸引方向收敛到 ζ。这一调整并未从根本上改变结论，因为陈述 (1) 和 (3) 及其论证同样适用于全纯芽的情形，而且对于逆芽 f_0^{-1}在 ζ处，排斥方向对应于吸引方向。

值得注意的是，horocyclic 收敛与多项式外射线的豪斯多夫收敛密切相关。为说明这种联系，令 $\mathcal{P}_d$ 表示次数为 $d \ge 2$的首一中心多项式空间。连通轨迹 $\mathcal{C}_d$ 由那些 Julia 集 $J(f)$ 连通的 $f \in \mathcal{P}_d$ 组成。对于每个 $f \in \mathcal{C}_d$，角为 $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$的外射线记作 $R_f(\theta)$。

令 $f_0 \in \mathcal{C}_d$，并设 $\zeta \in J(f_0)$ 是 f_0的一个抛物或排斥周期点。已知 [Mil06, §18]，ζ 是有限条外射线的落点。令 Θ 为所有满足外射线 $R_{f_0}(\theta)$ 落在 ζ的角 $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 所成的集合。若 ζ 是一个 f_0-排斥点，则经典结果 [DH85, Prop. 8.5] 指出，对于任意 $\theta \in \Theta$ 以及 $\mathcal{C}_d$中的任意序列 $f_n \to f_0$，我们有 $\overline{R_{f_n}(\theta)} \to \overline{R_{f_0}(\theta)}$ 在豪斯多夫拓扑中收敛。然而，当 ζ 是一个f_0-抛物点时，情况会更加微妙。最近，Petersen 和 Zakeri [PZ24a] 证明，任意豪斯多夫极限 $L \in \mathcal{L}((R_{f_n}(\theta))_n)$ 都满足以下三分法：

- 驯服情形：$L = \overline{R_{f_0}(\theta)}$。
- 半野情形：$L \supsetneq \overline{R_{f_0}(\theta)}$，且 L 是$\overline{R_{f_0}(\theta)}$与至多可数条同宿弧的并集。
- 野情形：$L \supsetneq \overline{R_{f_0}(\theta)}$，且 L 至少包含一条、至多包含有限条异宿弧。

驯服情形的动力学原因是一个自然的问题。我们将证明，这与horocyclic收敛密切相关。

定理 1.7。设 $f_n, f_0 \in \mathcal{C}_d$。设 ζ 是 f_0-抛物周期点，并假设 $(f_n)_n$ 是 f_0 在 ζ 处的一般扰动。如果对所有 $\theta \in \Theta$，$R_{f_n}(\theta) \to R_{f_0}(\theta)$ 在豪斯多夫拓扑下成立，那么 $f_n \to f_0$ 在 ζ 处沿 *horocycle* 方向。

如果 $(f_n)_n$ 是 ζ 在 f_0 处的 $*$-序列，那么当且仅当对所有 $\theta \in \Theta$，$R_{f_n}(\theta) \to R_{f_0}(\theta)$ 在豪斯多夫拓扑下成立时，$f_n \to f_0$ 才在 ζ 处沿 *horocycle* 方向。

定理 1.7 对 $*$-序列建立了 horocylic 收敛与外射线的豪斯多夫收敛之间的等价关系。对于部分 horocyclic 收敛，它有一个更精确的形式。为陈述这一结果，假设 $f_0^l(\zeta) = \zeta$、$(f_0^l)'(\zeta) = 1$，并且 f_0^l 在 ζ 处的重数为 $\nu + 1$。由 Mil06 定理 18.13] 可知 $\#\Theta \geq \nu$。设 $\Theta_\nu \subset \Theta$ 为一组 ν 角，具有如下性质：对每个 $1 \leq k \leq \nu$，都存在 $\theta \in \Theta_\nu$，使得外射线 $R_{f_0}(\theta)$ 落在 ζ 的第 k 个排斥方向上。

定理 1.8。设 $f_0 \in \mathcal{C}_d$ 有一个重数为 $\nu + 1$ 的抛物周期点 ζ。设 $(f_n)_n$ 是 ζ 处 f_0 的一个 $*$-序列，并令 $\ell \in [0, \nu]$ 为一个整数。那么以下两个陈述等价：

(1). 在 ζ 处 $f_n \to f_0$ ℓ-沿 *horocycle* 方向。

(2). 对$(f_n)_n$的每一个子序列，都存在进一步的子序列$(f_{n_j})_j$ 以及一个满足$\#\Theta_\ell = \ell$ 的子集 $\Theta_\ell \subset \Theta_\nu$，使得

$$\begin{cases} \overline{R_{f_{n_j}}(\theta)} \to \overline{R_{f_0}(\theta)} \text{ in Hausdorff topology}, & \text{if } \theta \in \Theta_\ell; \\ \overline{R_{f_{n_j}}(\theta)} \not\to \overline{R_{f_0}(\theta)} \text{ in Hausdorff topology}, & \text{if } \theta \in \Theta_\nu - \Theta_\ell. \end{cases}$$

证明思路。这些结果的证明基于 Oudkerk 发展的内爆理论。在一般扰动 $(f_n)_n$ 下，ζ 的f_0-抛物点分裂为 f_n的有限多个邻近的非抛物周期点，并且由这样的扰动产生有限多种可能的闸门结构（由 Oudkerk [Ou99], 引入，见 §2）。这些闸门结构给出了 f_n的“打蛋器动力学”的定性描述。通过取子序列，我们可以假定 $(f_n)_n$ 具有相同的门结构 G。f_n 的不动点之间的每一道门都将关联一个称为提升相位的复数。提升相位与门上方（或下方）的 f_n-不动点的全纯指标有关。由于这一关系，乘子的（部分）horocyclic 收敛便发挥作用。粗略地说，乘子的 horocyclic 收敛使我们能够控制穿过该门的点的 f_n-轨道。结合 Oudkerk 设计的算法，我们能够追踪在 f_0的抛物吸引盆中选取的初始点的整个 f_n-轨道，从而得到 Julia 集与不变射线的（部分）连续性性质。

论文结构。在§2中，我们回顾 Oudkerk 提出的抛物 implosion 理论。在§3中，我们介绍 Oudkerk 算法 [Ou02]，该算法在研究近抛物扰动时起着关键作用。文中还给出了一些相关性质。在§4中，我们将使用 Oudkerk 算法研究一般扰动，并证明定理1.2 和1.4。在§4中，我们将聚焦于 $*$-序列。我们将 ℓ-horocyclic 收敛与门结构所诱导的组合树上的边动力学联系起来。这一联系导出了 Julia 集和不变射线的部分连续性。在§6中，我们证明§1中剩余的定理。

致谢。作者谨向 Jie Cao、Carsten Petersen 和 Saeed Zakeri 致谢，感谢他们提供的有益讨论和启发性见解。

本研究得到国家重点研发计划（项目编号：2021YFA1003200）、国家自然科学基金（项目编号：12131016）以及中央高校基本科研业务费（2024FZZX02-01-01）的资助。

记号。本文采用以下记号：

- $\mathbb{C}$ 和 $\widehat{\mathbb{C}}$：复平面和黎曼球面
- $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{Z}$：自然数集合 1、2、$\cdots$ 以及整数集合
- $\mathbb{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z-a| < r\}$，$\mathbb{D} = \mathbb{D}(0, 1)$。

2. Parabolic implosion following Oudkerk

在本节中，我们回顾 Oudkerk 所发展出的抛物 implosion 理论 [Ou99], 以及相关著作 [Lav89、Dou94、Sh98]。我们遵循 [Ou02]的论述，整理本文中使用的一些结果；这些结果的证明见于 [Ou99]。

对于一个开子集 $W \subset \mathbb{C}$，令 $\mathcal{H}$ 表示全纯映射的族 $f: \mathcal{D}(f) \to \mathbb{C}$，其中 $\mathcal{D}(f) \subset W$ 是开集。我们如下为 $\mathcal{H}$ 赋予一种拓扑。若满足以下条件，我们称 $f_n \to f$ 在紧开拓扑中：若 $K \subset \mathcal{D}(f)$ 是紧的，则当 n 足够大时有 $K \subset \mathcal{D}(f_n)$，并且在 K 上一致成立 $f_n \to f$。

令 $\mathcal{F}$ 为在 0 的某个小邻域内定义的全纯芽族。假设 $f_0 \in \mathcal{F}$ 在 0 处具有乘子为 1、重数为 $\nu+1$ 的抛物不动点。经过保角坐标变换，$f_0(z) = z + z^{\nu+1} + O(z^{\nu+2})$。我们固定一个足够小的 $r_0 > 0$，使得每个 $f \in \mathcal{F}$ 都在 $K_0 = \{|z| \le 2r_0\}$ 的某个邻域内有定义。根据 Rouché 定理，若 $f \in \mathcal{F}$ 充分接近 f_0，则它在 K_0 中将有 $\nu+1$ 个按重数计的不动点。

令 $z_{k,-} := r_0 e^{2\pi i(k-1)/\nu}$ 且 $z_{k,+} := e^{\pi i/\nu} z_{k,-}$，其中 $k \in \mathbb{Z}_\nu = \mathbb{Z}/\nu\mathbb{Z}$。显然，每个 $z_{k,-}$ 都位于 f_0 的一个排斥方向上，而每个 $z_{k,+}$ 都位于 f_0 的一个吸引方向上。

对于 $\phi \in (-\pi/4, \pi/4)$ 和 $f \in \mathcal{F}$，考虑向量场

$$\dot{z} = e^{i\phi} \cdot i(f(z) - z). \tag{2.1}$$

令 $\gamma_{k,\pm,f,\phi} : I_{k,\pm,f,\phi} \to K_0$ 为方程 (2.1) 的解，其中 $\gamma_{k,\pm,f,\phi}(0) = z_{k,\pm}$，且 $I_{k,\pm,f,\phi} \ni 0$ 是 $\mathbb{R}$ 中的最大区间。令 $\ell_{k,\pm,f,\phi} = \gamma_{k,\pm,f,\phi}(I_{k,\pm,f,\phi})$。

对于 $f = f_0$，我们有如下

命题2.1。对于每个 $k \in \mathbb{Z}_\nu$，$s \in \{\pm\}$ 和 $\phi \in (-\pi/4, \pi/4)$，我们有

1. $I_{k,s,f_0,\phi} = \mathbb{R}$ 以及 $\gamma_{k,s,f_0,\phi}(\pm\infty) = 0$。此外，$\overline{\ell_{k,s,f_0,\phi}}$ 围出一个开若尔当圆盘，记为 $U_{k,s,f_0,\phi}$。
2. $f_0(U_{k,+,f_0,\phi}) \subset U_{k,+,f_0,\phi}$ 以及 $U_{k,-,f_0,\phi} \subset f_0(U_{k,-,f_0,\phi})$。
3. 存在一个单叶映射 $\Phi_{k,s,f_0,\phi} : U_{k,s,f_0,\phi} \to \mathbb{C}$ 满足

$$\Phi_{k,s,f_0,\phi}(f_0(z)) = \Phi_{k,s,f_0,\phi}(z) + 1,$$

每当 $z, f_0(z) \in U_{k,s,f_0,\phi}$时，此 $\Phi_{k,s,f_0,\phi}$ 在相差一个常数的意义下是唯一的。

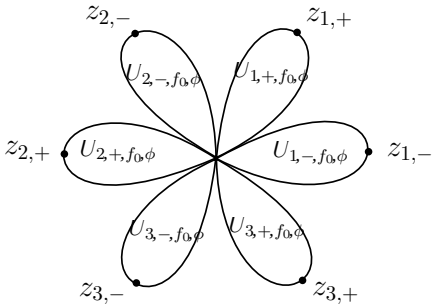


FIGURE 3. 情形 $\nu = 3$ 下的集合 $U_{k,s,f_0,\phi}$。

对每个 $k \in \mathbb{Z}_\nu$，集合 $U_{k,+,f_0,\phi}$ 与 $U_{k,-,f_0,\phi}$ 分别称为 f_0 的第 k 个吸引花瓣和第 k 个排斥花瓣。

设 $f \in \mathcal{F}$ 与 $\phi \in (-\pi/4, \pi/4)$。若对每个 $k \in \mathbb{Z}_\nu$ 与 $s \in \{\pm\}$，我们有 $I_{k,s,f,\phi} = \mathbb{R}$ 以及值 $t_\pm \in \mathbb{R}$，使得 $t_- < 0 < t_+$ 且

$$\gamma_{k,\pm,f,\phi}(t) \notin \mathbb{D}(0, r_0/2) \Longleftrightarrow t \in [t_-, t_+],$$

则我们称 f 是 ϕ-良态的，并令

$$\mathcal{WB}_\phi := \{f \in \mathcal{F}; f \text{ is } \phi\text{-well behaved}\}.$$

特别地，对每个 $\phi \in (-\pi/4, \pi/4)$，$f_0 \in \mathcal{WB}_\phi$。

命题 2.2. 若对某个 $\phi \in (-\pi/4, \pi/4)$ 有 $f \in \mathcal{WB}_\phi$，则对每个 $k \in \mathbb{Z}_\nu$ 与 $s \in \{\pm\}$，我们有

1. $\gamma_{k,s,f,\phi}(+\infty)$ 以及 $\gamma_{k,s,f,\phi}(-\infty)$ 的极限存在。
2. $\gamma_{k,+,f,\phi}(+\infty) = \gamma_{k,-,f,\phi}(+\infty)$ *and* $\gamma_{k,+,f,\phi}(-\infty) = \gamma_{k-1,-,f,\phi}(-\infty)$.
3. *If* $\gamma_{k,s,f,\phi}(+\infty) \neq \gamma_{k,s,f,\phi}(-\infty)$, *then there* 存在某些 $j \in \mathbb{Z}$ 和 $s' \in \{\pm\} - \{s\}$，使得

$$\gamma_{k,s,f,\phi}(+\infty) = \gamma_{j,s',f,\phi}(+\infty),\ \gamma_{k,s,f,\phi}(-\infty) = \gamma_{j,s',f,\phi}(-\infty).$$

4. $\ell_{k,\pm,f,\phi} \cap f(\ell_{k,\pm,f,\phi}) = \emptyset$。

此外，对于每个 f-不动点 $\sigma \in K_0$，都存在 $k \in \mathbb{Z}_\nu$ 和 $s \in \{\pm\}$，使得 $\sigma = \gamma_{k,s,f,\phi}(+\infty)$ 或者 $\sigma = \gamma_{k,s,f,\phi}(-\infty)$。

若 $\gamma_{k,s,f,\phi}(+\infty) = \gamma_{k,s,f,\phi}(-\infty)$，令 $U_{k,s,f,\phi}$ 为由 $\ell_{k,s,f,\phi}$ 围成的开 Jordan 域，并称其为一个单花瓣。否则，若

$$\gamma_{k,+,f,\phi}(+\infty) = \gamma_{j,-,f,\phi}(+\infty) \text{ and } \gamma_{k,+,f,\phi}(-\infty) = \gamma_{j,-,f,\phi}(-\infty),$$

我们令 $U_{k,+,f,\phi} = U_{j,-,f,\phi}$ 表示由 $\ell_{k,+,f,\phi} \cup \ell_{j,-,f,\phi}$ 围成的开 Jordan 域，并将其称为一个双花瓣。

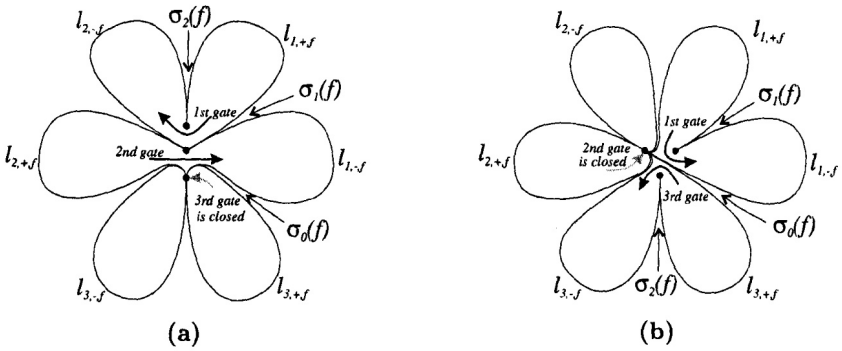


FIGURE 4. 两种性质良好的映射情形 f。在这两种情形中，$\nu = 3$和 σ_0 (f) $\sigma_1(f)$ $\sigma_2(f)$ 都是 f的不动点。此图出自 Oudkerk 的学位论文 [Ou99，图 2。4]。门结构$\mathbf{G} = (2, 1, *)$ 对应于 (a)，而$\mathbf{G} = (1, *, 3)$ 对应于 (b)。

命题2.3。如果 $f \in \mathcal{WB}_\phi$ 对于某个 $\phi \in (-\pi/4, \pi/4)$ 成立，那么对于每个$k \in \mathbb{Z}_\nu$ 和 $s \in \{\pm\}$，存在一个映射 $\Phi_{k,\ s,\ f,\ \phi}$： $U_{k,\ s,\ f,\ \phi} \to \mathbb{C}$ 满足

$$\Phi_{k,s,f,\phi}(f(z)) = \Phi_{k,s,f,\phi}(z) + 1,$$

每当 $z, f(z) \in U_{k,\ s,\ f,\ \phi}$。这个 $\Phi_{k,\ s,\ f,\ \phi}$在加上一个常数的意义下是唯一的，因此我们可以将其规范化，使得 $\Phi_{k,\ s,\ f,\ \phi}(z_{k,\ s}) = 0$。

对于 $f \in \mathcal{WB}_\phi$，令 $S_{k,\ \pm,\ f,\ \phi}$ 为 $U_{k,\ \pm,\ f,\ \phi} - \overline{f^{\pm 1}(U_{k,\ \pm,\ f,\ \phi})}$ 中包含$z_{k,\ \pm}$的连通分支。则

$$S'_{k,\pm,f,\phi} := S_{k,\pm,f,\phi} - \{\gamma_{k,\pm,f,\phi}(+\infty), \gamma_{k,\pm,f,\phi}(-\infty)\}$$

是基本域。Fatou坐标 $\Phi_{k,\ \pm,\ f,\ \phi}$ 在此集合上定义良好。

门结构与提升相位。对于每个映射 $f \in \mathcal{WB}_\phi$，f （相对于 ϕ）的门结构构造如下：

- 画一个圆，并沿其周界标记 2ν 个点。
- 按逆时针顺序将这些点标记为 $(1, -)$,$(1, +)$ $\cdots$, $(\nu, -)$,$(\nu, +)$。
- 对于每个满足 $U_{k,+,f,\phi} = U_{j,-,f,\phi}$ 构成双花瓣的 k，从 $(k, +)$ 向 $(j, -)$ 画一个箭头。

对于每个 $f \in \mathcal{WB}_\phi$，门结构图满足以下性质：

- 这些箭头（可以画成）彼此不相交。
- 箭头总是从“+”点指向“–”点。
- 没有任何标记点有多个箭头指向它或从它出发。

满足上述三个性质的任何图像都称为可容许的。显然，对于固定的 ν，可容许图像只有有限多个。

每个可容许的门结构都可以表示为门向量$\mathbf{G} = (\boldsymbol{g}(1) \cdots, \boldsymbol{g}(\nu)) \in (\mathbb{Z}_\nu \cup \{*\})^\nu$，使得

$$\boldsymbol{g}(k) = \begin{cases} j & \text{if there is an arrow from } (k,+) \text{ to } (j,-); \\ * & \text{if there is no arrow from } (k,+). \end{cases}$$

若 $\boldsymbol{g}(k) \neq *$，则称$\mathbf{G}$ 的第 k 个门是开放的。

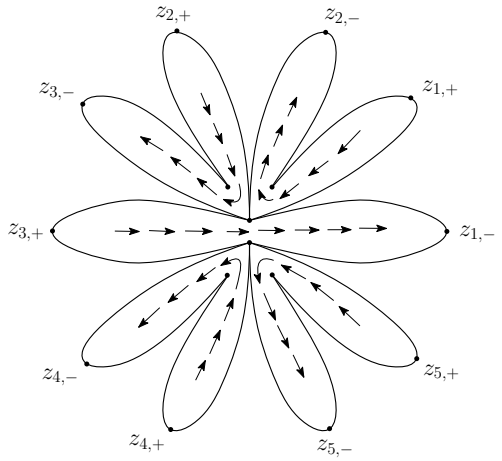


FIGURE 5. 门结构$\mathbf{G}$ =(2、3、1、4、5)的一个例子，在此情况下 $\nu = 5$。

对于 $f \in \mathcal{WB}_\phi$ 和 $k \in \mathbb{Z}_\nu$，我们定义

$$\tau_{k,\phi}(f) = \begin{cases} \Phi_{j,-,f,\phi} - \Phi_{k,+,f,\phi} & \text{if } U_{k,+,f,\phi} = U_{j,-,f,\phi} \text{ is a double petal;} \\ \infty & \text{if } U_{k,+,f,\phi} \text{ is a single petal.} \end{cases}$$

我们称 $\tau_{k,\ \phi}$ 为第 k 个门的提升相位。由于 $\Phi_{k,\ s,\ f,\ \phi}(z_{k,\ s}) = 0$ 对所有 $k \in \mathbb{Z}_\nu$ 和 $s \in \{\pm\}$ 均成立，因此我们看到，当 $\boldsymbol{g}(k) = j \neq *$ 时，

$$\tau_{k,\phi}(f) = \Phi_{j,-,f,\phi}(z_{k,+}) = -\Phi_{k,+,f,\phi}(z_{j,-}).$$

设 $f \in \mathcal{WB}_\phi$，且 G 的第 k 个门是开放的。假设 f 在 K_0 中的所有 $\nu+1$ 个不动点都位于 $\mathbb{D}(0, r_0/2)$，而 $U_{k,+,f,\phi}$ 中不含不动点。集合 $\mathbb{D}(0, r_0/2) - U_{k,+,f,\phi}$ 有两个连通分支。包含 $\gamma_{k,+,f,\phi}(+\infty)$ 的连通分支中的不动点集合（分别地，包含 $\gamma_{k,+,f,\phi}(-\infty)$ 的连通分支中的不动点集合）记为 $\mathrm{Fix}^u_{k,\phi}(f)$（分别记为 $\mathrm{Fix}^\ell_{k,\phi}(f)$）。本质上，$\mathrm{Fix}^u_{k,\phi}(f)$（分别地，$\mathrm{Fix}^\ell_{k,\phi}(f)$）由第 k 个门上方（分别地，下方）的不动点组成。

设$\mathbf{G}$ 是一个可容许门向量，并且

$$\mathcal{WB}_\phi(\mathbf{G}) := \{f \in \mathcal{WB}_\phi;\ f \text{ has gate structure } \mathbf{G} \text{ w.r.t. } \phi\}.$$

命题 2.4 ([Ou99]§2.4; [Ou02]§6)。**对于一个可容许门向量G**，存在常数 c_k, c'_k，使得若 $f \in \mathcal{WB}_\phi(\mathbf{G})$ 且 $\boldsymbol{g}(k) \neq *$，则

$$\begin{aligned}\tau_{k,\phi}(f) &= 2\pi i \sum_{\sigma\in \mathrm{Fix}^u_{k,\phi}(f)} \iota(f,\sigma) + c_k + o(1)\\ &= -2\pi i \sum_{\sigma\in \mathrm{Fix}^\ell_{k,\phi}(f)} \iota(f,\sigma) + c'_k + o(1),\end{aligned}$$

如 $f \to f_0$ 在 $\mathcal{WB}_\phi(\mathbf{G})$中，其中 $\iota(f,\sigma)$ 由 (2.2)定义。

命题 2.5 (选择原理)。 对于任意序列 $(f_n)_n$，若在 $\mathcal{F}$ 中 $f_n \to f_0$ 于 K_0一致成立，则存在一个子序列 $(f_{n_j})_j$、一个角$\phi \in (-\pi/4, \pi/4)$以及一个可容许门向量 $\mathbf{G}$，使得

$$f_{n_j} \in \mathcal{WB}_\phi(\mathbf{G}),\ \textit{for all } j \geq 1,$$

并且对于每个满足 $\boldsymbol{g}(k) \neq *$的 $k \in \mathbb{Z}_\nu$，

$$\mathrm{Re}(e^{-i\phi}\tau_{k,\phi}(f_{n_j})) \to -\infty \ \textit{as}\ j \to \infty.$$

引理 2.6 ([Ou02], 引理 13.1)。 存在两个常数 $0 < M \ll L$，使得若 $f \notin \mathcal{WB}_\phi$ 与 f_0接近，则存在一个子集 $E \neq \emptyset$，它由 f 中 K_0 的不动点组成，并且满足

$$\sum_{\sigma\in E} \iota(f,\sigma) \in S(\phi) := e^{i\phi}\{w \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(w) < -L, |\mathrm{Im}(w)| < M\},$$

其中 $\iota(f,\sigma)$ 是 f 在不动点 σ处的全纯指标，定义为

$$\iota(f,\sigma) := \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\sigma|=r} \frac{dz}{z - f(z)}, \tag{2.2}$$

当 $r > 0$ 足够小时。

命题 2.5 的证明。对于 f 接近 f_0 时，存在 $\nu+1$ 个 f在 K_0 中的不动点。令 Fix(f) 表示这些不动点组成的集合，并令

$$X(f) = \Big\{ \sum_{\sigma\in E} \iota(f,\sigma);\ \emptyset \neq E \subset \mathrm{Fix}(f) \Big\}.$$

显然，$\#X(f) < 2^{\nu+1}$。

令 $N = 2^{\nu+1} + \nu$。选取角 ϕ_1、$\cdots$、$\phi_N \in (-\pi/4, \pi/4)$，使得由引理 2.6 定义的 $S(\phi_k)$ 位于 $\{|y| = -x\}$ 的左侧，并且 $S(\phi_k) \cap S(\phi_j) = \emptyset$ 对于 $k \neq j$ 成立，见图 6。对于任意满足在 K_0 中一致地有 $f_n \to f_0$ 的序列 $(f_n)_n$，存在一个子集 $\Theta \subset \{\phi_1, \cdots, \phi_N\}$，其基数为 $\#\Theta = \nu + 1$，以及一个子序列 $(f_{n_j})_j$，使得

$$X(f_{n_j}) \cap S(\phi) = \emptyset,\ \forall j \geq 1,\ \forall \phi \in \Theta.$$

根据引理 2.6，$f_{n_j} \in \bigcap_{\phi\in\Theta} \mathcal{WB}_\phi$。设 $\mathbf{G}^{n_j}$是 f_{n_j}的门向量。由于对于固定的 ν，可容许门向量只有有限多个，因此我们可以从 $(f_{n_j})_j$ 中选取一个更细的子序列，使得 $\mathbf{G}^{n_j} \equiv \mathbf{G}$。由于 $\#\Theta = \nu + 1$,

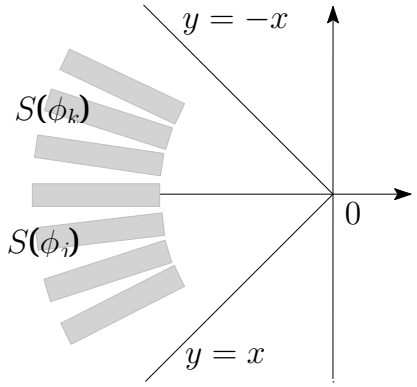


FIGURE 6.

通过进一步选取子序列，存在一个 $\phi \in \Theta$，使得对于每个满足 $\boldsymbol{g}(k) \neq *$ 的 $k \in \mathbb{Z}_\nu$,

$$\mathrm{Re}(e^{-i\phi}\tau_{k,\phi}(f_{n_j})) \to -\infty \text{ as } j \to \infty.$$

证明完成。 □

命题 2.7 ([或99] 命题 2.4.13； [或02]命题 6.4)。假设对于某个 $\phi \in (-\pi/4,\ \pi/4)$，我们有一个序列 $(f_n)_n$ 属于 $\mathcal{WB}_\phi(\mathbf{G})$ 收敛到 f_0，并且对于每个 $k \in \mathbb{Z}_\nu$ 满足 $\boldsymbol{g}(k) \neq *$,

$$\mathrm{Re}(e^{-i\phi}\tau_{k,\phi}(f_n)) \to -\infty \ \ as\ n \to \infty^{4}.$$

那么对于所有 $k \in \mathbb{Z}_\nu$ 和 $s \in \{\pm\}$，以下结论成立。

1. $S_{k,\ s,\ f_n,\ \phi} \to S_{k,\ s,\ f_0,\ \phi}$ 在豪斯多夫拓扑下。[5]
2. 我们有豪斯多夫收敛

$$\overline{U_{k,s,f_n,\phi}} \to \begin{cases} \overline{U_{k,+,f_0,\phi}} \cup \overline{U_{j,-,f_0,\phi}} & if\ \boldsymbol{g}(k) = j, s = +; \\ \overline{U_{k,-,f_0,\phi}} \cup \overline{U_{j,+,f_0,\phi}} & if\ \boldsymbol{g}(j) = k, s = -; \\ \overline{U_{k,s,f_0,\phi}} & if\ \boldsymbol{g}(k) = *. \end{cases}$$

3. $\Phi_{k,\ s,\ f_n,\ \phi}:\ U_{k,\ s,\ f_n,\ \phi} \to \mathbb{C}$ 在紧开拓扑下收敛到 $\Phi_{k,\ s,\ f_0,\ \phi}:\ U_{k,\ s,\ f_0,\ \phi} \to \mathbb{C}$ 。

---

[4]为了保证基本域的豪斯多夫收敛，此条件是必要的，参见 [Ou99]。[5]紧集序列 $(E_n)_n$ 在 E 中收敛到紧集 *Hausdorff topology*，当且仅当$d_H(E_n,\ E) \to 0$，其中 d_H 是由下式定义的豪斯多夫距离

$$d_H(A,B) = \max\left\{\max_{a\in A}\min_{b\in B} d(a,b),\ \max_{b\in B}\min_{a\in A} d(a,b)\right\},$$

且 $d(a,\ b)$ 根据具体情形表示欧氏距离或球面距离。

提升的埃卡尔映射。对于每个 $k \in \mathbb{Z}_\nu$， f_0 在 0 处的第 k 个直接抛物吸引盆 $\Omega_{f_0}^{(k)}$ 是 $\bigcup_{l\geq 0} f_0^{-l}(U_{k,+,f_0,\phi})$ 中包含 $U_{k,+,f_0,\phi}$ 的连通分支。映射 $\Phi_{k,+,f_0,\phi}$: $U_{k,+,f_0,\phi} \to \mathbb{C}$ 可通过等式 $\Phi_{k,+,f_0,\phi} \circ f_0 = \Phi_{k,+,f_0,\phi} + 1$ 全纯延拓至 $\Omega_{f_0}^{(k)}$。$\Phi_{k,-,f_0,\phi}$:$U_{k,-,f_0,\phi} \to \mathbb{C}$ 的逆映射具有最大解析延拓 $\Psi_{k,-,f_0,\phi}$，使得只要其中一侧有定义，就有 $\Psi_{k,-,f_0,\phi}(w+1) = f_0 \circ \Psi_{k,-,f_0,\phi}(w)$。对于 $r \in \mathbb{R}$，定义两个半平面:

$$\mathbb{H}^u(r) := \{w \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(w) > r\},\ \mathbb{H}^l(r) := \{w \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(w) < r\}.$$

注意，对于某个 $r_0 > 0$，有 $\mathbb{H}^u(r_0) \subset \Psi_{k-,,f_0,\phi}^{-1}(\Omega_{f_0}^{(k)})$，且 $\mathbb{H}^l(-r_0) \subset \Psi_{k-,,f_0,\phi}^{-1}(\Omega_{f_0}^{(k-1)})$。令 $\widetilde{B}_{f_0}^{(k,u)}$ 为包含$\mathbb{H}^u(r_0)$的 $\Psi_{k-,,f_0,\phi}^{-1}(\Omega_{f_0}^{(k)})$ 的连通分支，并令 $\widetilde{B}_{f_0}^{(k,l)}$ 为包含$\mathbb{H}^l(-r_0)$的 $\Psi_{k-,,f_0,\phi}^{-1}(\Omega_{f_0}^{(k-1)})$ 的连通分支。显然，$\widetilde{B}_{f_0}^{(k,u)}$ 和 $\widetilde{B}_{f_0}^{(k,l)}$ 都在平移$T_1(w) = w+1$下保持不变。

我们定义两个映射 $\widetilde{\mathcal{E}}_{f_0}^{(k,u)}$: $\widetilde{B}_{f_0}^{(k,u)} \to \mathbb{C}$ 和 $\widetilde{\mathcal{E}}_{f_0}^{(k,l)}$: $\widetilde{B}_{f_0}^{(k,l)} \to \mathbb{C}$，如下

$$\widetilde{\mathcal{E}}_{f_0}^{(k,u)} = \Phi_{k,+,f_0,\phi} \circ \Psi_{k,-,f_0,\phi},\ \widetilde{\mathcal{E}}_{f_0}^{(k,l)} = \Phi_{k-1,+,f_0,\phi} \circ \Psi_{k,-,f_0,\phi}.$$

当 $|\mathrm{Im}(w)|$ 较大时，它们满足 $\widetilde{\mathcal{E}}_{f_0}^{(k,*)}(w+1) = \widetilde{\mathcal{E}}_{f_0}^{(k,*)}(w)+1$ 以及 $\widetilde{\mathcal{E}}_{f_0}^{(k,*)}(w) = w+c_{k,\ *}+o(1)$，其中 $c_{k,\ *} \in \mathbb{C}$ 是一个常数，$* \in \{u,l\}$。

映射 $\widetilde{\mathcal{E}}_{f_0}^{(k,u)}$ 和 $\widetilde{\mathcal{E}}_{f_0}^{(k,l)}$ 称为提升的埃卡莱映射。

如果 $f \in \mathcal{WB}_\phi(\mathbf{G})$ 足够接近 f_0，我们可以用同样的方式定义 $\widetilde{\mathcal{E}}_f^{(k,u)}$ 和 $\widetilde{\mathcal{E}}_f^{(k,l)}$。令 $w = \Phi_{k,-,f,\phi}(z)$，其中 $z \in U_{k,-,f,\phi}$。若对于某个较大的 $\eta > 0$，$\mathrm{Im}(w) > \eta$（分别地，$\mathrm{Im}(w) < -\eta$），则我们可以找到一个最小整数$m \geq 0$，使得 $f^m(z) \in U_{k,+,f,\phi}$（分别地，$f^m(z) \in U_{k-1,+,f,\phi}$），定义

$$\widetilde{\mathcal{E}}_f^{(k,*)}(w) := \begin{cases} \Phi_{k,+,f,\phi}(f^m(z)) - m, & \text{if } * = u; \\ \Phi_{k-1,+,f,\phi}(f^m(z)) - m, & \text{if } * = l. \end{cases}$$

它满足 $\widetilde{\mathcal{E}}_f^{(k,*)}(w+1) = \widetilde{\mathcal{E}}_f^{(k,*)}(w) + 1$。因此 $\widetilde{\mathcal{E}}_f^{(k,u)}$ 可以延拓到整个半平面 $\mathbb{H}^u(\eta)$，并且 $\widetilde{\mathcal{E}}_f^{(k,l)}$ 可以延拓到整个半平面 $\mathbb{H}^l(-\eta)$。当 $|\mathrm{Im}(w)|$ 很大时，它们具有表达式 $\widetilde{\mathcal{E}}_f^{(k,*)}(w) = w+c_{k,*}(f)+o(1)$，其中 $c_{k,*}(f) \in \mathbb{C}$ 是一个常数。

根据命题2.7 并采用与 [Ou99引理 3.4 相同的论证。5], 我们得到

命题 2.8. 假设对某个 $\phi \in (-\pi/4, \pi/4)$，我们有一个序列$(f_n)_n$ 属于 $\mathcal{WB}_\phi(\mathbf{G})$ 并收敛到 f_0，且对每个满足 $\boldsymbol{g}(k) \neq *$ 的 $k \in \mathbb{Z}_\nu$，

$$\mathrm{Re}(e^{-i\phi}\tau_{k,\phi}(f_n)) \to -\infty \ as\ n \to \infty.$$

那么，当 $\eta > 0$ 足够大时，提升的埃卡尔映射 $\widetilde{\mathcal{E}}_f^{(k,*)}$ 在 $\mathbb{H}^u(\eta)$ 或 $\mathbb{H}^l(-\eta)$ 中一致收敛于 $\widetilde{\mathcal{E}}_{f_0}^{(k,*)}$。

3. CONTROLLING ORBITS FOR PERTURBATIONS

在本节中，设 f_0 是一个具有抛物周期点 ζ 的有理映射。设 $(f_n)_n$ 是 f_0 在 ζ 处的一般扰动。将 f_0 和 f_n 替换为某个迭代后，不妨设 $f_0(\zeta) = \zeta$、$f_0'(\zeta) = 1$，且 f_0 在 ζ 处的重数为 $\nu + 1 \geq 2$。于是，f_0-不动点 ζ 分裂为 f_n 的 $\nu + 1$ 个互异不动点，其中一个记为 ζ_n。通过改变坐标，不妨设在 0 附近，$\zeta_n = \zeta = 0$ 且 $f_0(z) = z + z^{\nu+1} + O(z^{\nu+2})$。

对于每个 $k \in \mathbb{Z}_\nu$，令 A_k 为 f_0 在 0 处与吸引方向 $\varepsilon_{k,+} = e^{\pi i(2k-1)/\nu}$ 相关的直接抛物吸引盆。

根据命题 2.5并取一个子序列后，我们假设 $f_n \in \mathcal{WB}_\phi(\mathbf{G})$ 对某个 ϕ,$\mathbf{G}$ 以及所有 $n \geq 1$均成立。

由于 $(f_n)_n$ 是在 0 处对 f_0 的一般扰动，因此不存在闭闸门。因此，门向量 $\mathbf{G} = (\boldsymbol{g}(k))_{k\in\mathbb{Z}_\nu}$ 可以视为一个双射自映射$\boldsymbol{g}$：$\mathbb{Z}_\nu \to \mathbb{Z}_\nu$。令 $\widehat{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{g} - 1$：$\mathbb{Z}_\nu \to \mathbb{Z}_\nu$。

门结构树。门结构 $\mathbf{G} = (\boldsymbol{g}(k))_{k\in\mathbb{Z}_\nu}$ 可以表示为 $\mathbb{D}$ 中有限个互不相交的有向双曲测地线，构造如下：对于每个 $k \in \mathbb{Z}_\nu$，存在一条有向双曲测地线ℓ_k，从 $\varepsilon_{k,+} = e^{\pi i(2k-1)/\nu}$ 到 $\varepsilon_{j,-} = e^{2\pi i(j-1)/\nu}$，其中 $j = \boldsymbol{g}(k)$。

与$\mathbf{G}$ 相关的树 $T = (V, E)$定义如下：

- 顶点集 V 对应于 $\mathbb{D} - \bigcup_{k\in\mathbb{Z}_\nu} \ell_k$ 的连通分支。对于 $v \in V$，令 X_v 表示相应的分支。
- 边集 E 对应于测地线 ℓ_k：当且仅当存在某个 k使得 $\partial X_v \cap \partial X_{v'} = \ell_k$ 时，边 $e = [v, v']$才存在。

注意，V由 $\nu+1$ 个顶点组成，而 E由 ν 条边组成。对于每个$e = [v, v'] \in E$，存在唯一的 $\boldsymbol{k}(e) \in \mathbb{Z}_\nu$，使得 $\partial X_v \cap \partial X_{v'} = \ell_{\boldsymbol{k}(e)}$。这给出了一个双射 $\boldsymbol{k}$：$E \to \mathbb{Z}_\nu$。$\boldsymbol{k}$ 的逆映射记为 $\boldsymbol{e}$：$\mathbb{Z}_\nu \to E$。

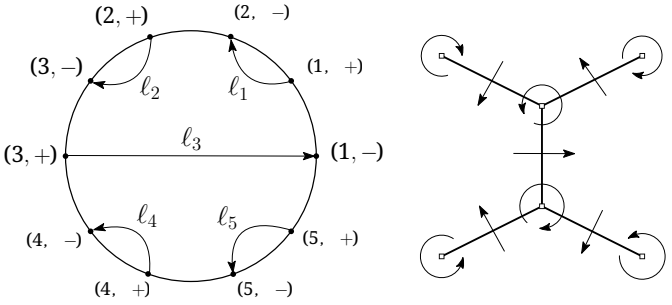


FIGURE 7. 图 T 5 中门结构 $\mathbf{G}$ 对应的树。左图：$\mathbf{G}$ 由互不相交的有向双曲测地线表示。右图：具有边和顶点定向的树 T。

对于每条边 $e \in E$，有向测地线 ℓ_k 在 e 上诱导出一个横向方向。对于每个顶点 $v \in V$，其相邻

边给出一个自然定向 $\mathcal{O}(v)$ 的 v，它要么是正向循环顺序，要么是负向循环顺序。参见图 7。

由于映射 f_n 具有相同的门结构，我们可以将 f_n 在 0 附近的 $\nu+1$ 不动点标记为 $v(f_n)$ $v \in V$。f_n 在 $v(f_n)$ 处的乘子记为 $\lambda_v(f_n) = f_n'(v(f_n))$。

引理 3.1。当 n,

$$\sum_{v\in V} \iota(f_n, v(f_n)) = \iota(f_0, 0) + o(1). \tag{3.1}$$

证明。由于 f_n 在 $\mathbb{D}(0, r_0)$ 中一致收敛于 f_0，我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r_0} \frac{dz}{z - f_n(z)} \to \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r_0} \frac{dz}{z - f_0(z)}.$$

由此可得 $\sum_{v\in V} \iota(f_n, v(f_n)) \to \iota(f_0, 0)$，这意味着 (3.1)。 □

下文中，为简便起见，我们省略记号中的下标 ϕ，并分别将 $\tau_{k,\phi}(f)$, $U_{k,\pm,f,\phi}$，以及 $\Phi_{k,\pm,f,\phi}$ 记为 $\tau_k(f)$, $U_{k,\pm,f}$，以及 $\Phi_{k,\pm,f}$。

Oudkerk 算法 [Ou02, §13]。取定 $k \in \mathbb{Z}_\nu$，并应用以下算法，生成一个（可能无限的）序列 a_1, a_2, $\cdots$ 属于 $\mathbb{Z}_\nu$。

(1). 设 $a_1 := k$，且 $r := 1$。(2). 将 $(f_n)_n$ 替换为一个满足下列条件之一的子序列：(a). 当 $n \to +\infty$ 时，$\operatorname{Im} \sum_{j=1}^r \tau_{a_j}(f_n)$ 有界；(b). 当 $n \to +\infty$ 时，$\operatorname{Im} \sum_{j=1}^r \tau_{a_j}(f_n) \to +\infty$；(c). 当 $n \to +\infty$ 时，$\operatorname{Im} \sum_{j=1}^r \tau_{a_j}(f_n) \to -\infty$。

(3). 若出现情形 (a)，则退出该算法。
(4). 若出现情形 (b) 或 (c)，则令

$$a_{r+1} := \begin{cases} \boldsymbol{g}(a_r) & \text{for case (b);} \\ \widehat{\boldsymbol{g}}(a_r) & \text{for case (c).} \end{cases}$$

(5). 返回步骤 (2)。

命题 3.2. 若该算法不在步骤 *(3)* 终止，则无限序列 $(a_j)_{j\geq 1}$ 是预周期的：存在整数 $m \geq 0$ 和 $p \geq 1$，使得对所有 $j \geq 1$ 都有 $a_{m+p+j} = a_{m+j}$。

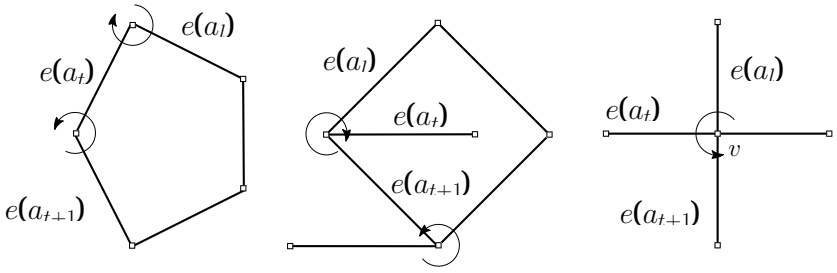
此外，若 m和 p 是极小的，则

- 边 $\boldsymbol{e}(a_{m+1}) \cdots$ 与 $\boldsymbol{e}(a_{m+p})$ 共有一个顶点，记作 v，且这些边按照 $\mathcal{O}(v)$的定向依次出现；
- 与 v 关联的边数恰为 p，并且
- $\operatorname{Re}\ \iota(f_n, v(f_n)) \to +\infty$ 作为 $n \to +\infty$ [6]。

证明。首先注意，对于任意 $j \geq 1$，边 $\boldsymbol{e}(a_j)$ 和 $\boldsymbol{e}(a_{j+1})$ 有一个公共顶点。由于序列 $(a_j)_{j\geq 1}$ 取值于有限集$\mathbb{Z}_\nu$，存在一个最小整数 $l \geq 1$ 使得 $a_{l+1} \in \{a_1, \cdots, a_l\}$。假设

[6]这意味着，当 n 足够大时，$v(f_n)$是 f_n-吸引的，而 $\lambda_v(f_n)$沿 horocycle 方向 $\to 1$。

$a_{l+1} = a_t$ 对于某个 $1 \le t \le l$。我们断言，边 $\boldsymbol{e}(a_t)\ \cdots$、$\boldsymbol{e}(a_l)$ 有一个公共顶点，记为 v。否则，$l \ge t+2$。由于 $\boldsymbol{e}(a_t) = \boldsymbol{e}(a_{l+1})$ 和$e(a_l)$ 有一个公共顶点，边 $\boldsymbol{e}(a_t)\ \cdots$、$\boldsymbol{e}(a_l)$ 的并将在树 T 中形成一个环，产生矛盾。见图 8。



左侧两图：边 $\boldsymbol{e}(a_t)\ \cdots, \boldsymbol{e}(a_l)$至少形成一个环。右侧：边 $\boldsymbol{e}(a_t)\ \cdots, \boldsymbol{e}(a_l)$共享一个公共顶点 v。

对每个 $j \ge 1$，令

$$\Delta_j(f_n) := \mathrm{Im} \sum_{r=1}^{j} \tau_{a_r}(f_n) \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

and

$$s_j = \begin{cases} +1, & \text{if } \Delta_j(f_n) \to +\infty \text{ as } n \to +\infty; \\ -1, & \text{if } \Delta_j(f_n) \to -\infty \text{ as } n \to +\infty. \end{cases} \tag{3.3}$$

显然，对任意 $j \ge 1$，$s_j\Delta_j(f_n) \to +\infty$。$a_{l+1} = a_t$ 与$\boldsymbol{e}(a_t)\ \cdots, \boldsymbol{e}(a_l)$共享一个公共顶点这一性质蕴含 $s_t = s_{t+1} = \cdots = s_l$。

若 $t = 1$，注意到 $a_{l+1} = a_1$ 和 $s_1 = s_l$，我们得到

$$s_l\Delta_{l+1}(f_n) = s_1\Delta_1(f_n) + s_l\Delta_l(f_n) \to +\infty.$$

这意味着 $s_{l+1} = s_l$ 和 $a_{l+2} = a_2$。归纳地应用相同的论证，我们对所有 $j \ge 1$ 都有 $a_{l+j} = a_j$。

若 $t > 1$，我们首先注意到 $s_{t-1} \ne s_t$（否则，$a_l = a_{t-1}$，这与 l 的最小性矛盾），这意味着 $s_{t-1} = -s_t$。根据这些事实

$$\begin{aligned} s_{t-1}\Delta_{t-1}(f_n) &\to +\infty, \\ s_t\Delta_t(f_n) = s_t\mathrm{Im}\tau_{a_t}(f_n) - s_{t-1}\Delta_{t-1}(f_n) &\to +\infty, \end{aligned}$$

我们得到 $s_t\mathrm{Im}\tau_{a_t}(f_n) \to +\infty$。由于 $a_{l+1} = a_t$ 和 $s_t = s_l$，我们有

$$s_l\Delta_{l+1}(f_n) = s_l\Delta_l(f_n) + s_t\mathrm{Im}\tau_{a_t}(f_n) \to +\infty.$$

这意味着 $s_{l+1} = s_l$ 和 $a_{l+2} = a_{t+1}$。归纳地应用相同的论证，我们对所有 $j \ge 1$ 都有 $s_{l+j} = s_l$ 和 $a_{l+j} = a_{t-1+j}$。

注意，边 $\boldsymbol{e}(a_t)\ \cdots$，$\boldsymbol{e}(a_l)$ 在 v 的定向$\mathcal{O}(v)$ 中依次出现，并且它们都是与顶点 v相 incident 的边。

上述证明还意味着

$$s_l \mathrm{Im} \sum_{r=t}^{l} \tau_{a_r}(f_n) = \begin{cases} s_l \Delta_l(f_n) \to +\infty & \text{if } t = 1; \\ s_l \Delta_l(f_n) + s_{t-1}\Delta_{t-1}(f_n) \to +\infty & \text{if } t > 1. \end{cases}$$

由命题2.4 和引理 3.1,

$$\sum_{r=t}^{l} \tau_{a_r}(f_n) = 2\pi i s_l \cdot \iota(f_n, v(f_n)) + O(1). \tag{3.4}$$

由此可得 Re $\iota(f_n, v(f_n)) \to +\infty$ （当 $n \to +\infty$）。

取 $(m, p) = (t-1, l-t+1)$，即可完成证明。 □

命题 3.3。 设 $k \in \mathbb{Z}_\nu$，且 $E \subset U_{k,+,f_0}$ 是紧的。若算法在第 *(3)* 步终止，则 $f_n(n)_n$ 的任意子序列都存在一个进一步的子序列 $(f_{j_n})_n$，以及一个整数序列 $(N_n)^{n\geq 1}$，使得 $f_{j_n}^{N_n}$ 在 E 上一致收敛于 *Lavaurs* 映射

$$g_\sigma = \Phi_{l,-,f_0}^{-1} \circ T_\sigma \circ \Phi_{k,+,f_0} : A_k \to \mathbb{C},$$

对某个 $l \in \mathbb{Z}_\nu$，其中 $T_\sigma(w) = w + \sigma$。这意味着

$$X \cap A_k \neq \emptyset, \ \forall X \in \mathcal{L}((J(f_n))_n).$$

证明。 这里的论证源自 Oudkerk [Ou02, §13。2], 为方便读者，我们在此将其列出。由于算法在第 (3) 步终止，我们得到一个有限序列 $a_1, \cdots, a_\ell$，其中某个 $\ell \geq 1$。对于 $1 \leq j < \ell$，令 s_j 由 (3.3) 给出。注意 $U_{a_j,+,f_n} = U_{\boldsymbol{g}(a_j),-,f_n}$。固定 $R > 0$，对于 $1 \leq j < \ell$ 和 $f \in \{f_n, f_0\}$，令

$$W_{j,f}(R) = \{z \in U_{\boldsymbol{g}(a_j),-,f};\ s_j \mathrm{Im}\Phi_{\boldsymbol{g}(a_j),-,f}(z) > R\}. \tag{3.5}$$

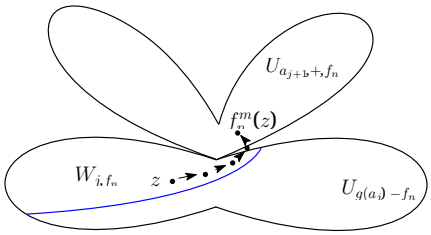


FIGURE 9. 一条穿过两个相邻双花瓣的轨道。

对于任意 $1 \leq j < \ell$ 和任意 $z \in W_{j,f_n}(R)$，当 R 足够大时（与 j 无关），存在一个整数 $r > 0$，使得 $f_n^r(z) \in U_{a_{j+1},+,f_n}$ 且 $f_n^l(z) \in K_0$ 对于 $0 \leq l \leq r$ 成立。见图 9。对于 $w = \Phi_{\boldsymbol{g}(a_j),-,f_n}(z)$，我们定义

$$\widetilde{\mathcal{E}}_{j,f_n}(w) := \Phi_{a_{j+1},+,f_n}(f_n^r(z)) - r. \tag{3.6}$$

它满足 $\widetilde{\mathcal{E}}_{j,f_n}(w+1) = \widetilde{\mathcal{E}}_{j,f_n}(w) + 1$ 因而延拓到整个半平面 $\{w \in \mathbb{C};\ s_j \mathrm{Im}(w) > R\}$。根据命题之前的讨论

~2.8, $\mathcal{E}_{j,f_n}(w) - T_{C_{j,n}}(w) \to 0$ 当$s_j\mathrm{Im}(w) \to +\infty$时一致地，其中$C_{j,n}$是一个常数。它满足$C_{j,n} \to C_j$ 当 $n \to +\infty$时。

同理，我们可以定义 $\widetilde{\mathcal{E}}_{j,f_0}$。

对于紧集$E \subset U_{k,+,f_0}$，由命题 2.7，当 n 足够大时，我们有 $E \subset U_{k,+,f_n}$。由于当 $n \to +\infty$ 趋于 s_1 时，$\tau_{a_1}(f_n)$ 的虚部为 $\to +\infty$，因此我们有

$$s_1\mathrm{Im}\ \Phi_{\boldsymbol{g}(a_1),-,f_n}(E) = s_1\mathrm{Im}\ \tau_{a_1}(f_n) + s_1\mathrm{Im}\ \Phi_{a_1,-,f_n}(E) \to +\infty.$$

这意味着，当 n 足够大时，$E \subset W_{1,f_n}(R)$。我们断言，对于任意足够大的 n，存在最小整数 $e_{1,n} \geq 1$，使得

$$f_n^{e_{1,n}}(E) \subset U_{a_2,+,f_n} \text{ and } f_n^j(E) \subset K_0,\ \forall\ 0 \leq j \leq e_{1,n}. \tag{3.7}$$

否则，对于任意足够大的 n，都存在一个整数 L_n，使得 $f_n^{L_n}(E)$ 同时与$\ell_{a_2,+,f,\phi}$ 以及 $\ell_{\boldsymbol{g}(a_2)-,f,\phi}$相交，它们构成边界 $\partial U_{a_2,+,f_n}$。注意

$$P_n := T_{-L_n} \circ \Phi_{a_2,+,f_n}(f_n^{L_n}(E) \cap U_{a_2,+,f_n}) \subset \widetilde{\mathcal{E}}_{1,f_n} \circ \Phi_{\boldsymbol{g}(a_1),-,f_n}(E).$$

~由命题 2.8，右侧趋于 $\mathcal{E}_{1,f_0} \circ \Phi_{\boldsymbol{g}(a_1)-,f_0}(E)$，当 $n \to +\infty$ 趋于 P_n 时，其宽度一致有界。然而，$\Phi_{a_2,+,f_n}(U_{a_2,+,f_n})$ 的宽度趋于 $+\infty$，因为当 $n \to \infty$ 趋于 $\to -\infty$ 时，$\mathrm{Re}\, e^{-i\phi}\tau_{a_2}(f_n)$ 为 $\to -\infty$ （由命题 2.5 保证）。矛盾。

这就证明了（3.7）。因此，我们得到等式

$$\begin{aligned}\Phi_{\boldsymbol{g}(a_2),-,f_n} \circ f_n^{e_{1,n}} &= T_{\tau_{a_2}(f_n)} \circ \Phi_{a_2,+,f_n} \circ f_n^{e_{1,n}} \\ &= T_{\tau_{a_2}(f_n)} \circ T_{e_{1,n}} \circ \widetilde{\mathcal{E}}_{1,f_n} \circ T_{\tau_{a_1}(f_n)} \circ \Phi_{a_1,+,f_n}.\end{aligned}$$

由此可得

$$s_2\mathrm{Im}\Phi_{\boldsymbol{g}(a_2),-,f_n} \circ f_n^{e_{1,n}}|_E = s_2\mathrm{Im}(\tau_{a_1}(f_n) + \tau_{a_2}(f_n)) + O(1) \to +\infty$$

在紧集 E 上一致成立，因此当 n 足够大时，$f^{e_{1,n}}(E) \subset W_{2,f_n}(R)$。

由归纳法可知，存在一个足够大的整数 $N_\ell > 0$，使得对任意 $n \geq N_\ell$，都存在整数 $0 < e_{1,n} < \cdots < e_{\ell-1,n}$，满足以下性质：

- for $1 \leq j < \ell$, $e_{j,n}$ is the least integer with $f_n^{e_{j,n}}(E) \subset U_{a_{j+1},+,f_n}$ (by choosing $n \geq N_\ell$, this implies that $f_n^{e_{j,n}}(E) \subset W_{j+1,f_n}(R)$);
- $f_n^j(E) \subset K_0,\ \forall\ 0 \leq j \leq e_{\ell-1,n}$.

对每个 $1 \leq j \leq \ell - 1$，令 $q_{j,n} > e_{j,n}$ 为满足条件的最大整数

$$f_n^l(E) \subset U_{a_{j+1},+,f_n},\ \forall\ e_{j,n} \leq l \leq q_{j,n}.$$

那么在 E 上，可以验证，对每个 $1 \leq j \leq \ell - 1$ 和 $e_{j,n} \leq l \leq q_{j,n}$，

$$\Phi_{\boldsymbol{g}(a_{j+1}),-,f_n} \circ f_n^l = T_l \circ T_{\tau_{a_{j+1}}(f_n)} \circ \widetilde{\mathcal{E}}_{j,f_n} \circ \cdots \circ T_{\tau_{a_2}(f_n)} \circ \widetilde{\mathcal{E}}_{1,f_n} \circ T_{\tau_{a_1}(f_n)} \circ \Phi_{a_1,+,f_n}. \tag{3.8}$$

根据对 $q_{\ell-1,n}$, $Y_n := \Phi_{\boldsymbol{g}(a_\ell)-,f_n} \circ f^{q_{\ell-1,n}}(E)$ 的选择，它包含在条带$\Phi_{\boldsymbol{g}(a_\ell)-,f_n}(U_{a_\ell,+,f_n})$ 中，并且 $Y_n + 1$ 与该条带的右边界相交。

根据命题 2.7，集合 $\Phi_{a_1,+,f_n}(E)$ 在 $n \to \infty$ 时有界。上述等式右侧的虚部为

$$\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{\ell}\tau_{a_j}(f_n)+O(1),$$

因此是有界的。注意，$e^{-i\phi}\Phi_{\boldsymbol{g}(a_\ell)-,f_n}(U_{a_\ell,+,f_n})$ 几乎是一个垂直条带，其右边界上有 0，我们得出结论：对于充分大的 n，Y_n 也是有界的。由此可知，当 $n\to\infty$ 时，$q_{\ell-1,n}+\sum_{j=1}^{\ell}\tau_{a_j}(f_n)$ 是有界的。通过选取一个子序列，我们假设

$$q_{\ell-1,n}+\sum_{j=1}^{\ell}\tau_{a_j}(f_n)+\sum_{j=1}^{\ell-1}C_{j,n}\to\sigma\in\mathbb{C}.$$

由此得到 $\Phi_{\boldsymbol{g}(a_\ell)-,f_n}\circ f^{q_{\ell-1},n\ n}\to T_\sigma\circ\Phi_{a_1,+,f_0}$ 在E上的一致收敛。因此 $f^{q_{\ell-1},n\ n}\to g_\sigma:=\Phi^{-1}_{\boldsymbol{g}(a_\ell)-,f_0}\circ T_\sigma\circ\Phi_{a_1,+,f_0}$ 在 E 上。显然，g_σ可由等式 $g_\sigma\circ f_0=f_0\circ g_\sigma$ 延拓到 A_k。

由排斥周期点在 Julia 集上的稠密性及其稳定性，对任意 $X\in\mathcal{L}((J(f_n))_n)$，我们得到 $X\supset J(f_0)$。由此可知

$$A_k\cap X\supsetneq g_\sigma^{-1}(J(f_0))\cap A_k\neq\emptyset.$$

证明完成。 □

命题 3.4。设 $k\in\mathbb{Z}_\nu$ 且设 E 是$U_{k,+,f_0}$的紧子集。如果算法永不终止，那么当 n 较大时，序列 $(f_n^j)_{j\geq1}$在 E 上一致收敛到 f_n-吸引点 $v(f_n)$，其中 v 由命题3.2给出。这意味着

$$A_k\cap X=\emptyset,\ \forall X\in\mathcal{L}((J(f_n))_n).$$

由于算法在步骤 (3) 永不终止，我们得到一个无限序列 $(a_j)_{j\geq1}$。由命题 3.2，存在最小整数 $m\geq0$ 和 $p\geq1$，使得 $a_{m+p+j}=a_{m+j}$ 对所有 $j\geq1$。设 $(s_j)_{j\geq1}$ 为由 (3.3) 给出的序列。由命题 3.2的证明，

$$s_m=-s_{m+1};\ s_l=s_{m+1}:=s_*,\forall l\geq m+1.$$

对于每个 $l\geq2$ 和每个 $R>0$，令

$$Y_{l,g}(R)=\{z\in U_{a_l,+,g};\ s_{l-1}\mathrm{Im}\Phi_{a_l,+,g}(z)>R\},\ g\in\{f_n,f_0\},$$

并令 $X_{l,f_n}(R):=Y_{l,f_n}(R)\cap W_{l,f_n}(R)$，其中 $W_{l,f_n}(R)$ 由 (3.5) 给出。

引理 3.5。对于任意 $l\geq2$ 和 $R>0$，$(X_{l,f_n}(R))_{n\geq1}$的任何收敛子序列的豪斯多夫极限都包含于 $\overline{Y}_{l,f_0}(R)\cup W_{l,f_0}(R)$。

证明。根据命题 2.7 以及等式 $\Phi_{\boldsymbol{g}(a_l)-,f_n}-\Phi_{a_l,+,f_n}=\tau_{a_l}(f_n)$，如有必要，取子序列后，共有 7 种情况：

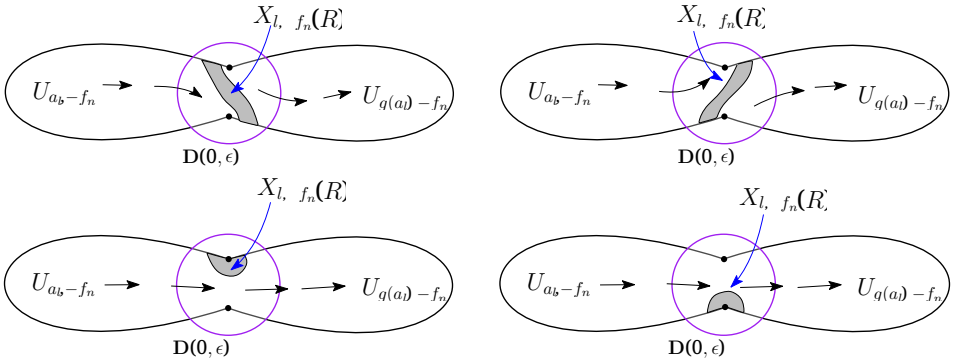


FIGURE 10. 集合 $X_{l,f_n}(R)$，其中 $(s_{l-1}, s_l) = (1,-1)$（左上）、$(-1,1)$（右上）、$(1,1)$（左下）以及 $(-1,-1)$（右下）。

- 若 $\mathrm{Im}\tau_{a_l}(f_n) \to +\infty$ 且 $(s_{l-1}, s_l) = (1,1)$，则 $Y_{l,f_n}(R) \to Y_{l,f_0}(R)$ $W_{l,f_n}(R) \to W_{l,f_0}(R) \cup U_{a_l,+,f_0}$ 由此可得 $X_{l,f_n}(R) \to Y_{l,f_0}(R)$。

- 若 $\mathrm{Im}\tau_{a_l}(f_n) \to +\infty$ 且 $(s_{l-1}, s_l) = (-1,1)$，则 $Y_{l,f_n}(R) \to Y_{l,f_0}(R) \cup U_{g(a_l)-,f_0}$，$W_{l,f_n}(R) \to W_{l,f_0}(R) \cup U_{a_l,+,f_0}$ 由此可得 $X_{l,f_n}(R) \to Y_{l,f_0}(R) \cup W_{l,f_0}(R)$。

- 若 $\mathrm{Im}\tau_{a_l}(f_n) \to +\infty$ 且 $(s_{l-1}, s_l) = (-1,-1)$，则 $Y_{l,\ f_n}(R) \to Y_{l,\ f_0}(R) \cup U_{g(a_l)-,\ f_0}$，$W_{l,\ f_n}(R) \to W_{l,\ f_0}(R)$。由此可得 $X_{l,\ f_n}(R) \to W_{l,\ f_0}(R)$。

- 若 $\mathrm{Im}\tau_{a_l}(f_n) \to -\infty$ 且 $(s_{l-1},\ s_l) = (-1,\ -1)$，则 $Y_{l,\ f_n}(R) \to Y_{l,\ f_0}(R)$ $W_{l,\ f_n}(R) \to W_{l,\ f_0}(R) \cup U_{a_l,\ +,\ f_0}$ 由此可得 $X_{l,\ f_n}(R) \to Y_{l,\ f_0}(R)$。

- 若 $\mathrm{Im}\tau_{a_l}(f_n) \to -\infty$ 且 $(s_{l-1}, s_l) = (1,-1)$，则 $Y_{l,\ f_n}(R) \supset Y_{l,\ f_0}(R) \cup U_{g(a_l)-,\ f_0}$，$W_{l,\ f_n}(R) \to W_{l,\ f_0}(R) \cup U_{a_l,\ +,\ f_0}$ 由此可得 $X_{l,\ f_n}(R) \to Y_{l,\ f_0}(R)$。

- 若 $\mathrm{Im}\tau_{a_l}(f_n) \to -\infty$ 且 $(s_{l-1}, s_l) = (1,1)$，则 $Y_{l,f_n}(R) \to Y_{l,f_0}(R) \cup U_{g(a_l)-,f_0}$，$W_{l,f_n}(R) \to W_{l,f_0}(R)$。因此，$X_{l,f_n}(R) \to W_{l,f_0}(R)$。

- 如果 $\mathrm{Im}\tau_{a_l}(f_n) \to c \in \mathbb{R}$，那么 $s_{l-1} = s_l$，由此可得

$$\begin{aligned} \overline{Y}_{l,f_n}(R) &\to \overline{Y}_{l,f_0}(R) \cup \overline{W}_{l,f_0}(R + s_l c), \\ \overline{W}_{l,f_n}(R) &\to \overline{Y}_{l,f_0}(R - s_l c) \cup \overline{W}_{l,f_0}(R). \end{aligned}$$

$$\overline{X}_{l,f_n}(R) \to \overline{Y}_{l,f_0}(\min\{R, R - s_l c\}) \cup \overline{W}_{l,f_0}(\min\{R, R + s_l c\}).$$

在上述任一情况下，$X_{l,\ f_n}(R)$ 的豪斯多夫极限正如断言所述。 □

命题 3.4 的证明。对于给定的紧集 $E \subset U_{k,\ +,\ f_0}$，根据命题 2.7，存在一个常数 $M > 0$，使得当 n 足够大时，

$$E \subset U_{k,+,f_n} \text{ and } -M \leq \mathrm{Im}\Phi_{k,+,f_n}|_E, \mathrm{Im}\Phi_{k,+,f_0}|_E \leq M.$$

对于 $g \in \{f_n, f_0\}$，注意到序列 $(Y_{l,\ g}(R) \cup W_{l,\ g}(R))_{l \geq 2}$ 是预周期的。因此，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个 $R > 0$，使得

- $Y_{l,\ f_0}(R) \cup W_{l,\ f_0}(R) \subset \mathbb{D}(0,\ \varepsilon)$ 对所有 $l \geq 2$ 均成立。根据引理 3.5，存在一个整数 N，使得 $X_{l,\ f_n}(R) \subset \mathbb{D}(0,\ \varepsilon)$ 对所有 $n \geq N$ 和 $l \geq 2$ 均成立。
- 对于任意 $l \geq 1$ 以及满足 $s_l\mathrm{Im}(w) \geq R$ 的任意 $w \in \mathbb{C}$，

$$|\widetilde{\mathcal{E}}_{l,f_n}(w) - T_{C_{l,n}}(w)| \leq 1/2,\ |\widetilde{\mathcal{E}}_{l,f_0}(w) - T_{C_l}(w)| \leq 1/2,$$

其中

$$C_{l,n} = \lim_{s_l\mathrm{Im}(w)\to+\infty}(\widetilde{\mathcal{E}}_{l,f_n}(w) - w), C_l = \lim_{s_l\mathrm{Im}(w)\to+\infty}(\widetilde{\mathcal{E}}_{l,f_0}(w) - w).$$

- 对于任意 $l \geq 1$ 和任意 $n \geq N$,

$$s_l\Delta_l(f_n) \geq R_1 := R + M + \sum_{j=1}^{m+p}(1 + |\mathrm{Im}C_j|).$$

根据等式 $s_1\Phi_{\boldsymbol{g}(a_1)\ -,f_n} = s_1\tau_{a_1}(f_n) + s_1\Phi_{a_1,+,f_n}$，并在必要时增大 N，我们有 $E \subset W_{1,f_n}(R_1)$，对所有 $n \geq N$ 均成立。令 $E_{t,n} := f_n^t(E)$，对所有 $n, t \geq 1$ 均成立。由命题 2.8，$\lim_{n\to+\infty} C_{j,n} = C_j$。因此，我们可以假设 $|C_{j,n} - C_j| < 1/2$ 对所有 $n \geq N$ 和 $j \geq 1$ 均成立。

由（3.6），对 $e_{1,n} \leq t \leq q_{1,n}$，我们有

$$\Phi_{a_2,+,f_n} \circ f_n^t|_E = T_t \circ \widetilde{\mathcal{E}}_{1,f_n} \circ T_{\tau_{a_1}(f_n)} \circ \Phi_{a_1,+,f_n}|_E,$$
$$\Phi_{\boldsymbol{g}(a_2),-,f_n} \circ f_n^t|_E = T_{\tau_{a_2}(f_n)} \circ T_t \circ \widetilde{\mathcal{E}}_{1,f_n} \circ T_{\tau_{a_1}(f_n)} \circ \Phi_{a_1,+,f_n}|_E.$$

由此可得

$$\begin{aligned} s_1\mathrm{Im}\Phi_{a_2,+,f_n} \circ f_n^t|_E &= s_1\mathrm{Im}\widetilde{\mathcal{E}}_{1,f_n} \circ T_{\tau_{a_1}(f_n)} \circ \Phi_{a_1,+,f_n}|_E \\ &\geq s_1\Delta_1(f_n) - s_1\mathrm{Im}C_{1,n} - s_1/2 - M \\ &\geq R_1 - |\mathrm{Im}C_1| - 1 - M > R, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_2\mathrm{Im}\Phi_{\boldsymbol{g}(a_2),-,f_n} \circ f_n^t|_E &= s_2\mathrm{Im}T_{\tau_{a_2}(f_n)} \circ \widetilde{\mathcal{E}}_{1,f_n} \circ T_{\tau_{a_1}(f_n)} \circ \Phi_{a_1,+,f_n}|_E \\ &\geq s_2\Delta_2(f_n) - s_1\mathrm{Im}C_{1,n} - s_1/2 - M \\ &\geq R_1 - |\mathrm{Im}C_1| - 1 - M > R. \end{aligned}$$

因此 $f_n^t(E) \subset Y_{2,f_n}(R) \cap W_{2,f_n}(R) = X_{2,f_n}(R)$。

根据（3.6）、（3.8）及归纳法，必要时扩大 N，我们得到（3.9）

$$E_{t,n} \subset X_{j+1,f_n}(R) \subset \mathbb{D}(0,\varepsilon), \text{ for } e_{j,n} \leq t \leq q_{j,n}, 1 \leq j \leq m+p,\ n \geq N.$$

我们假设 R 足够大，使得 $\{w\in\mathbb{C};\ ^{s_j}\mathrm{Im}(w)\geq R\}$ 位于 $\mathcal{E}_{j,\ f_0}$ 和 $\mathcal{E}_{j,\ f_n}$ 的公共定义域内，对所有 $n\geq N$ 都成立，并且 $\mathcal{E}_{j,\ f_n}$ 在此集合上当 $n\to+\infty$ 时一致收敛至 $\mathcal{E}_{j,\ f_0}$。这意味着

$$E_{t,n}\subset\mathbb{D}(0,\varepsilon),\quad \text{for } q_{j-1,n}\leq t\leq e_{j,n}, 1\leq j\leq m+p, n\geq N, \tag{3.10}$$

其中 $q_{0,\ n}=q_0$ 与 n 无关，因此对于 $n\geq N$，$f_n^{q_0}(E)\subset\mathbb{D}(0,\ \varepsilon)$。

注意 $a_{m+p+1}=a_{m+1}$。在 $E_{q_{m,\ n},\ n}\subset U_{a_{m+1},\ +,\ f_n}$，由式（3.6）可得，

$$\Phi_{a_{m+1},\ +,\ f_n}\circ f_n^t=T_t\circ\widetilde{\mathcal{E}}_{m+p,\ f_n}\circ T_{\tau_{a_{m+p}}(f_n)}\circ\cdots\circ\widetilde{\mathcal{E}}_{m+1,\ f_n}\circ T_{\tau_{a_{m+1}}(f_n)}\circ\Phi_{a_{m+1},\ +,\ f_n},$$

其中 $e_{m+p,\ n}\leq t+q_{m,\ n}\leq q_{m+p,\ n}$。由命题 2.4 和引理 3.1，

$$\begin{aligned}\Phi_{a_{m+1},+,f_n}\circ f_n^t &= \Phi_{a_{m+1},+,f_n}+\sum_{j=1}^{p}\tau_{a_{m+j}}(f_n)+\sum_{j=1}^{p}C_{m+j,n}+t+O(1)\\ &= \Phi_{a_{m+1},+,f_n}+2\pi i s_*\iota(f_n,v(f_n))+t+O(1).\end{aligned}$$

因此

$$s_*\mathrm{Im}\Phi_{a_{m+1},+,f_n}\circ f_n^t=s_*\mathrm{Im}\Phi_{a_{m+1},+,f_n}+2\pi\mathrm{Re}\ \iota(f_n,v(f_n))+O(1).$$

由命题 3.2，$\mathrm{Re}\ \iota(f_n,\ v(f_n))\to+\infty$ 如 $n\to+\infty$。因此，通过扩大 N，我们得到 $s_*\mathrm{Im}\Phi_{a_{m+1},\ +,\ f_n}\circ f_n^t\geq 2R$ 在 $E_{q_{m,\ n},\ n}$ 对于 $n\geq N$ 成立。由归纳法，对于任意给定的 $n\geq N$，存在一个整数序列 $(t_j)_{j\geq1}$，使得 $\lim_j t_j=+\infty$，$\sup_{j\geq1}(t_{j+1}-t_j)<+\infty$，并且

$$s_*\mathrm{Im}\Phi_{a_{m+1},+,f_n}\circ f_n^{t_j}|_{E_{q_{m,n},n}}\geq jR,\ \forall j\geq1.$$

注意，对于任意序列 $(z_j)_j$ 属于 $U_{a_{m+1},+,f_n}$，

$$\lim_{j\to+\infty}s_*\mathrm{Im}\Phi_{a_{m+1},+,f_n}(z_j)\to+\infty\Longrightarrow z_j\to v(f_n).$$

因此，子序列 $(f^{q_{m,\ n}+t_j})_{j\geq1}$ 在 E 上一致收敛到 f_n-吸引不动点 $v(f_n)$。由于 $\sup_{j\geq1}(t_{j+1}-t_j)<+\infty$，我们得出 $(f_n^j)_{j\geq1}$ 在 E 上一致收敛到 $v(f_n)$。

现在，对于任意开集 V，其闭包 V 是 A_k 中的紧集，存在一个 $m\geq1$ 使得 $f_0^m(V)\subset U_{k,+,f_0}$。对于所有充分大的 n，集合 $f_n^m(V)$ 包含于某个紧集 $\overline{E}\subset U_{k,+,f_0}$ 中。根据已证明的结论，序列 $(f_n^j)_{j\geq1}$ 在 V 上一致收敛到 f_n-吸引点 $v(f_n)$。因此，V 属于 Fatou 集 $F(f_n)$。由于 $V\subset\overline{A}_k$ 任意，我们得到 $A_k\cap X=\emptyset,\ \forall X\in\mathcal{L}((J(f_n))_n)$。□

对于 $k\in\mathbb{Z}_\nu$，设 $\gamma_k\colon\ [0,+\infty)\to\mathbb{D}(0,r_0)$ 为一条 f_0-不变曲线 $f_0(\gamma_k(t))=\gamma_k(t+1)$，使得 $\gamma_k(t)$ 沿第 k 个吸引方向收敛到 0，当 $t\to+\infty$。设 $\gamma_{n,k}:\ [0,+\infty)\to\mathbb{C}$ 为一条 f_n-不变曲线 $f_n(\gamma_{n,k}(t))=\gamma_{n,k}(t+1)$，使得 $\gamma_{n,k}$ 在 $[0,+\infty)$ 中局部一致收敛到 γ_k，当 $n\to+\infty$。

命题 3.6. 对 $k\in\mathbb{Z}_\nu$ 应用 *Oudkerk* 算法，我们得到

1. 如果该算法永不终止，则 $\gamma_{n,k}$ 在 $[0,+\infty)$ 中一致收敛于 γ_k。这意味着 $\gamma_{n,k}$ 在豪斯多夫拓扑中收敛于 $\overline{\gamma_k}$。

2. 如果该算法在第*(3)*步终止，则不存在$(\gamma_{n,k})_n$ 的子序列在 $[0,+\infty)$中一致收敛于 γ_k 。确切地说，

$$\overline{\gamma_k} \subsetneq X,\ \forall X \in \mathcal{L}((\overline{\gamma_{n,k}})_n).$$

证明。 将 γ_k 替换为某个 $m \geq 0$ 对应的 $f_0^m(\gamma_k)$ 后，我们可以假设 $\gamma_k \subset U_{k,+,f_0}$。由于 $\gamma_{n,k}$ 在 $[0,1]$, 中一致收敛到 γ_k ，因此存在一个整数 $n_0 > 0$ ，使得 $E = \gamma_k[0,1] \bigcup \bigcup_{n \geq n_0} \gamma_{n,k}[0,1]$ 是 A_k的紧子集。

1. 假设算法永不终止。对于任意 $\varepsilon > 0$，由 (3.9) 和 (3.10) 以及命题 3.4的证明，可知存在两个整数 $N \geq n_0, q_0 > 0$，使得对所有 $n \geq N$，

$$\gamma_{n,k}[q_0,+\infty) \subset \mathbb{D}(0,\varepsilon).$$

由于 $\gamma_{n,k}$ 在 $[0,+\infty$中局部一致收敛到 γ_k ，我们可以增大N，使得 $|\gamma_{n,k}(t) - \gamma_k(t)| \leq \varepsilon$ 对 $t \in [0,q_0]$ 和 $n \geq N$成立。由此可得$|\gamma_{n,k}(t) - \gamma_k(t)| \leq 2\varepsilon$ 对所有 $t \geq 0$ 和所有 $n \geq N$均成立。这表明$\gamma_{n,k} \rightrightarrows \gamma_k$一致收敛。

2. 假设我们得到一个有限序列 $a_1 := k, \cdots, a_\ell$。由命题 3.3，并将 $(f_n)_n$ 替换为一个子序列，可得一个整数序列 $(N_n)_{n\geq 1}$，使得 $f_n^{N_n}$在 A_k 上局部一致收敛于 Lavaurs 映射$g_\sigma = \Phi_{\boldsymbol{g}}^{-1}{}_{(a_\ell)-,\ f_0} \circ T_\sigma \circ \Phi_{a_1,\ +,\ f_0}$： $A_k \to \mathbb{C}$。注意，对于 $n \geq n_0$，有 $\gamma_{n,\ k}[0,1] \subset E$。由豪斯多夫收敛 $f_n^{N_n}\gamma_{n,\ k}[0,1] = \gamma_{n,\ k}[N_n, N_n+1] \to g_\sigma(\gamma_k[0,1])$，可得

$$\liminf_{n\to+\infty} \operatorname{diam}\gamma_{n,k}[N_n,+\infty) \geq \operatorname{diam} g_\sigma(\gamma_k[0,1]) > 0.$$

因此，$(\gamma_{n,\ k})_n$ 的任何子序列都不会在 $[0,+\infty$ 上一致收敛到 γ_k 。 □

注 3.7。 本节的讨论同样适用于一般情形，即 f_0、f_n 是局部全纯芽。

4. CONTINUITY FOR GENERIC PERTURBATION

本节研究不变曲线和 Julia 集的沿 horocycle 方向收敛与豪斯多夫收敛之间的关系。我们将证明定理1.2 和1.4。

令 $(f_n)_n$ 是 f_0 的一般扰动。令 $\zeta = 0$ 为 f_0 的一个重数为 $\nu+1$ 的抛物不动点， $f_0'(0) = 1$。下文采用§3开头引入的记号。

定理 1.2 的证明。假设 $J(f_n) \to J(f_0)$。要证明 $f_n \to f_0$沿 horocycle 方向收敛，等价于证明对任意 $v \in V$，

$$|\operatorname{Re}\ \iota(f_n, v(f_n))| \to +\infty. \tag{4.1}$$

对每个 $k \in \mathbb{Z}_\nu$，令 $V^+(k)$（分别）表示 $\mathbb{D} - \ell_k$ 中相对于 ℓ_k 的方向，位于上（分别位于下）分支上的顶点 $v \in V$ 的集合。因此显然 $V = V^+(k) \sqcup V^-(k)$。

对任意 $k \in \mathbb{Z}_\nu$，回顾 A_k 是 f_0 在 0 处的第 k 个直接抛物吸引盆。假设 $J(f_n) \to J(f_0)$ 蕴含 $A_k \cap X = \emptyset,\ \forall X \in$

$\mathcal{L}((J(f_n))_n)$. 由命题 3.3，Oudkerk 算法不能在步骤 (3) 终止。由此可得

- 我们得到两个无限序列

$$\boldsymbol{a}(k) = (a_j(k))_{j\geq 1} \in (\mathbb{Z}_\nu)^{\mathbb{N}},\ \boldsymbol{s}(k) = (s_j(k))_{j\geq 1} \in \{\pm 1\}^{\mathbb{N}}$$

使得 $a_1(k) = k$ 且 $\boldsymbol{s}(k)$ 由 (3.3) 给出。
- 对于任意 $k \in \mathbb{Z}_\nu$ 和 $s \in \{\pm\}$,

$$\sum_{v\in V^s(k)} \text{Re } \iota(f_n, v(f_n)) \to +\infty \text{ or } -\infty. \tag{4.2}$$

要证明 (4.2)，只需注意到，由于 Oudkerk 对 k 的算法不可能在第 (3) 步终止，因此我们得到 Im $\tau_k(f_n) \to +\infty$ 或 $-\infty$，因为 $n \to \infty$。根据命题 2.4,

$$\begin{aligned} \text{Im } \tau_k(f_n) &= 2\pi \sum_{v\in V^+(k)} \text{Re } \iota(f_n, v(f_n)) + O(1) \\ &= -2\pi \sum_{v\in V^-(k)} \text{Re } \iota(f_n, v(f_n)) + O(1). \end{aligned}$$

于是 (4.2) 立即可得。

引理 4.1. 设 $k, k' \in \mathbb{Z}_\nu$。若

$$a_{r+1}(k) = a_1(k'),\quad s_r(k) = s_1(k') = \cdots = s_m(k')$$

对于某些整数 $r \geq 1$ 和 $m \geq 1$，则

$$a_{r+s}(k) = a_s(k'),\ \forall 1 \leq s \leq m+1;\ s_r(k) = s_{r+1}(k) = \cdots = s_{r+m}(k).$$

证明。 根据假设 $a_{r+1}(k) = a_1(k')$ 和 $s_r(k) = s_1(k')$，我们有

$$s_1(k') \cdot \text{Im}\tau_{a_1(k')}(f_n) = s_r(k) \cdot \text{Im}\tau_{a_{r+1}(k)}(f_n) \to +\infty.$$

将 $s_r(k)\text{Im}\sum_{j=1}^{r} \tau_{a_j(k)}(f_n) \to +\infty$ 加到两边，得到 $s_r(k)\text{Im}\sum_{j=1}^{r+1} \tau_{a_j(k)}(f_n) \to +\infty$, 这意味着 $s_{r+1}(k) = s_r(k) = s_2(k')$。结合假设 $a_{r+1}(k) = a_1(k')$，得到 $a_{r+2}(k) = a_2(k')$。

重复上述论证，即得结论。 □

以下，对于任意非空子集 $X \subset V$，定义其全纯指标 $\iota(f_n, X)$ 为 f_n，如下:

$$\iota(f_n, X) := \sum_{v\in X} \iota(f_n, v(f_n)).$$

我们称 X 是 *horocycle* 吸引的 当 Re $\iota(f_n, X) \to +\infty$; 若 Re $\iota(f_n, X) \to -\infty$，则称其 horocycle 排斥。

接下来，为了证明定理1.2，我们需要验证对于任意$v \in V$，都有（4.1）。若 v 是 T 的一个端点（也就是说，只有一条边与 v关联），那么存在 $k \in \mathbb{Z}_\nu$ 和 $s \in \{\pm\}$，使得 $V^s(k) = \{v\}$。在这种情况下，（4.2）蕴含（4.1）。

下文中，我们假设至少有两条边与 v关联。令 v_1、 $\cdots$、v_δ为与 v相邻的顶点，并按边 $[v, v_1]$、 $\cdots$、 $[v, v_\delta]$依照 v的定向 $\mathcal{O}(v)$所确定的循环次序出现的方式标记。集合 $T-\{v\}$由 δ 个连通分支组成。包含v_j 的连通分支 $T-\{v\}$中的顶点集可写作 $V^s(k_j)$，其中 $k_j \in \mathbb{Z}_\nu$唯一确定，且$s \in \{\pm\}$ 唯一确定而与 j无关。由（4.2）， $V^s(k_j)$要么沿 horocycle 方向吸引，要么沿 horocycle 方向排斥。注意，若定向 $\mathcal{O}(v)$为正向循环顺序，则 $s = -$；若 $\mathcal{O}(v)$为负向循环顺序，则 $s = +$。

由（3.1），可得

$$\sum_{j=1}^{\delta} \iota(f_n, V^s(k_j)) + \iota(f_n, v(f_n)) = O(1), \text{ for large } n. \tag{4.3}$$

如果 $V^s(k_j)$ 要么全都是 horocycle 吸引，要么全都是沿 horocycle 排斥，那么 v 满足（4.1），证明便完成了。因此，我们可以假设 $V^s(k_j)$ 中有些是 horocycle 吸引的，有些是沿 horocycle 排斥的。

引理 4.2。令 $j \in \mathbb{Z}_\delta$ 和 $1 \le m < \delta$。假设

$$V^s(k_j), V^s(k_j) \sqcup V^s(k_{j+1}), \cdots, V^s(k_j) \sqcup \cdots \sqcup V^s(k_{j+m-1})$$

全都是沿 *horocycle* 排斥的，这里 k_s 表示：若 $s > \delta$，则为 $k_{s-\delta}$。

1. 序列 $\boldsymbol{a}(k_j) = (a_l(k_j))^{l\ge 1}$ 满足

$$a_l(k_j) = k_{j+l-1}, 2 \le l \le m+1. \tag{4.4}$$

2. 集合 $V^s(k_j) \sqcup \cdots \sqcup V^s(k_{j+m})$ 要么沿 *horocycle* 排斥，要么 *horocycle* 吸引。[7]

证明。1. 如果定向 $\mathcal{O}(v)$ 是正向循环顺序，那么对每个 $j \in \mathbb{Z}_\delta$， $\boldsymbol{g}(k_j) = k_{j+1}$。假设 $V^s(k_j)$ 沿 horocycle 方向排斥，意味着 $\mathrm{Im}\tau_{a_1(k_j)}(f_n) \to +\infty$。因此， $s_1(k_j) = +1$ 且 $a_2(k_j) = \boldsymbol{g}(k_j) = k_{j+1}$。根据假设和归纳法，我们得出结论。

同样的推理也适用于 $\mathcal{O}(v)$ 为负向循环顺序的情况。2. 根据 (4.4) 和命题 2.4,

$$\mathrm{Im} \sum_{l=1}^{m+1} \tau_{a_l(k_j)}(f_n) = 2\pi \mathrm{Re}\ \iota(f_n, V^s(k_j) \sqcup \cdots \sqcup V^s(k_{j+m})) + O(1).$$

由于 Oudkerk 算法不可能在步骤 (3) 终止，上述量在 $n \to \infty$ 时趋于 $+\infty$ 或 $-\infty$。这意味着 $V^s(k_j) \sqcup \cdots \sqcup V^s(k_{j+m})$ 要么沿 horocycle 方向排斥，要么 horocycle 吸引。□

通过重新标记，我们假设 $V^s(k_1)$ 沿 horocycle 排斥。根据引理4.2，我们可以将 $V^s(k_1) \sqcup \cdots \sqcup V^s(k_\delta)$ 重写为不交并 $X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_\ell$，其中某个 $\ell \ge 1$ 满足

[7]相反，如果 $V^s(k_j)$ 是 horocycle 吸引，则 $V^s(k_j) \sqcup V^s(k_{j+1})$ 可能既不沿 horocycle 方向排斥，也不 horocycle 吸引。

• 对于每个 $1 \le l \le \ell$，集合 X_l 具有如下形式

$$X_l = V^s(k_{t_l}) \sqcup V^s(k_{t_l+1}) \sqcup \cdots \sqcup V^s(k_{t_l+m_l}),$$

对于某些 $1 \le t_l \le \delta$ 和 $m_l \ge 0$。

• $1 = t_1 < t_2 < \cdots < t_\ell \le t_\ell + m_\ell = \delta$。

• 对于每个 $1 \le l \le \ell$，要么– $m_l = 0$ 且 $V^s(k_{t_l})$ 沿 horocycle 方向吸引，要么– $m_l \ge 1$ 且

$$V^s(k_{t_l}), V^s(k_{t_l}) \sqcup V^s(k_{t_l+1}), \cdots, V^s(k_{t_l}) \sqcup \cdots \sqcup V^s(k_{t_l+m_l-1})$$

都沿 horocycle 方向排斥。

• X_1，$\cdots$，$X_{\ell-1}$ 都沿 horocycle 方向吸引（若 $\ell > 1$），X_ℓ 则可能沿 horocycle 方向排斥，也可能沿 horocycle 方向吸引。

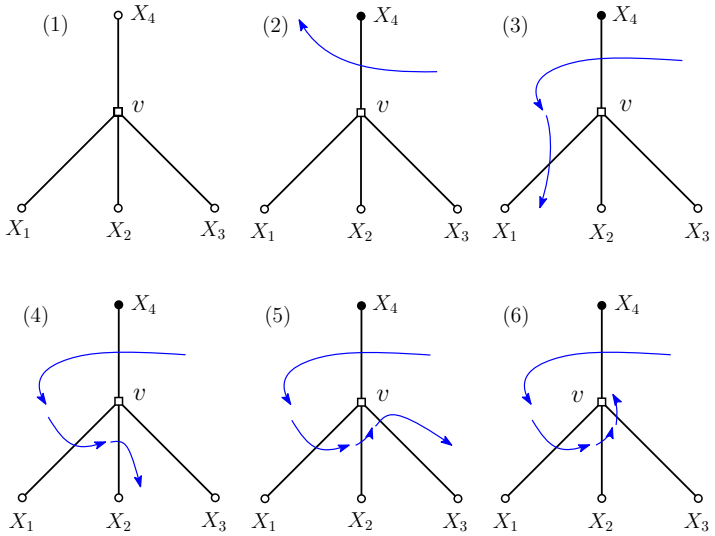


FIGURE 11. 情形 $\ell = 4$。沿 horocycle 方向排斥的集合标记为 •，沿 horocycle 方向吸引的集合标记为 ∘。

有三种情况：

(1). $\ell = 1$。在这种情况下，X_1 要么沿 horocycle 排斥，要么 horocycle 吸引。由（4.3）可知，v 满足（4.1）。

(2). $\ell > 1$ 和 X_1，$\cdots$，X_ℓ 均为 horocycle 吸引（见图11（1））。再次由（4.3）可知，v 沿 horocycle 排斥。

(3). $\ell > 1$ 和 X_1，$\cdots$，$X_{\ell-1}$ 均为 horocycle 吸引，而 X_ℓ 沿 horocycle 排斥。

现在我们考虑情况（3）。根据上述 X_ℓ 的性质以及引理4.2，

$$a_l(k_{t_\ell}) = k_{t_\ell+l-1},\ 1 \le l \le m_\ell + 1.$$

$a_{m_\ell+2}(k_{t_\ell})$有两种可能：

如果 $a_{m_\ell+2}(k_{t_\ell}) \neq k_{t_1}$（见图11 (2)），那么 $X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_{\ell-1} \sqcup \{v\}$ 沿 horocycle 方向排斥。由于 X_ℓ 沿 horocycle 方向排斥，整个顶点集 V 必然沿 horocycle 方向排斥。然而，这与（4.3）矛盾。

因此 $a_{m_\ell+2}(k_{t_\ell}) = k_{t_1} = a_1(k_{t_1})$。由此可得 $s_{m_\ell+1}(k_{t_\ell}) = s_1(k_{t_1})$。根据 X_1 的构造，集合 $V^s(k_{t_1})$ $V^s(k_{t_1}) \sqcup V^s(k_{t_1+1})$、$\cdots$、$V^s(k_{t_1}) \sqcup \cdots \sqcup V^s(k_{t_1+m_1-1})$ 都是沿 horocycle 排斥的。因此 $s_1(k_{t_1}) = \cdots = s_{m_1-1}(k_{t_1})$。由引理4.2,

$$a_{m_\ell+1+l}(k_{t_\ell}) = a_l(k_{t_1}) = k_{t_1+l-1},\ 1 \leq l \leq m_1+1.$$

由命题2.4,

$$\operatorname{Im} \sum_{l=1}^{m_\ell+m_1+2} \tau_{a_l(k_{t_\ell})}(f_n) = 2\pi \cdot \operatorname{Re}\, \iota(f_n, X_2 \sqcup \cdots \sqcup X_{\ell-1} \sqcup \{v\}) + O(1).$$

如果 $a_{(m_\ell+1)+(m_1+1)+1}(k_{t_\ell}) \neq k_{t_2}$ (见图 11 (3))，那么上述等式的左侧趋于 $-\infty$，当 $n \to -\infty$。这意味着 $X_2 \sqcup \cdots \sqcup X_{\ell-1} \sqcup \{v\}$ 是沿 horocycle 排斥的。由于 $X_2 \sqcup \cdots \sqcup X_{\ell-1}$ 是 horocycle 吸引的，我们得出 v 是沿 horocycle 排斥的。

如果 $a_{(m_\ell+1)+(m_1+1)+1}(k_{t_\ell}) = k_{t_2}$（见图 11 (4)），我们可以继续这一过程。由同样的推理可知，v 要么是 horocycle 排斥（见图 11 (4)(5)），要么是 horocycle 吸引（见图 11 (6)）。

定理 1.2 的证明已完成。

定理 1.4的证明。设 $\zeta = 0$ 是 f_0 的抛物不动点，重数为 $\nu+1$，$f_0'(0) = 1$。设 $(f_n)_n$ 是 f_0 在 ζ处的一般扰动。

假设对每个 n，都存在一个 f_n-不动点 ζ_n，使得

$$\zeta_n \to \zeta,\ \text{and}\ f_n'(\zeta_n) \to 1\ \text{horocyclically}.$$

由命题 2.5 和引理 3.1，$(f_n)_n$ 的任一子序列都有进一步的子序列 $(f_{n_j})_j$，满足 $f_{n_j} \in \mathcal{WB}_\phi(\mathbf{G})$ 对所有 j成立，以及一个顶点 $v_0 \in V$（其中 V 由 $\mathbf{G}$ 诱导，参见 §3），使得

$$\operatorname{Re}\, \iota(f_{n_j}, v_0(f_{n_j})) \to +\infty \text{ as } j \to +\infty.$$

如有必要，再取 $(n_j)_j$ 的一个子序列，我们假定对每个非空子集 $X \subset V$，下列情形之一成立

- $\operatorname{Re}\ \iota(f_{n_j}, X) \to +\infty$，当 $j \to +\infty$;
- $\operatorname{Re}\ \iota(f_{n_j}, X) \to -\infty$，当 $j \to +\infty$;
- $\sup_{j\geq 1} |\operatorname{Re}\ \iota(f_{n_j}, X)| < +\infty$。

令 v_1、$\cdots$、v_δ为与 v_0相邻的顶点，并按如下方式标记：边$[v_0, v_1]$、$\cdots$、$[v_0, v_\delta]$ 按照 v_0的定向 $\mathcal{O}(v_0)$所诱导的循环次序排列。集合 $T - \{v_0\}$ 由 δ 个连通分支组成。包含 v_s 的连通分支中的顶点集记为 Y_s。对于任意$0 \leq l \leq \delta-1$，令 $Y_{(l)s} = Y_s \sqcup Y_{s+1} \sqcup \cdots \sqcup Y_{s+l}$，这里 Y_m 在 $m > \delta$时表示 $Y_{m-\delta}$。断言：存在一个整数 $1 \leq s \leq \delta$ 使得

$$\operatorname{Re}\, \iota(f_{n_j}, Y_s^{(l)}) \to -\infty,\ \forall\ 0 \leq l \leq \delta-1.$$

为证明该断言，首先注意到，根据引理 3.1 以及 v_0的选取，

$$\sum_{s=1}^{\delta} \mathrm{Re}\ \iota(f_{n_j}, Y_s) = -\mathrm{Re}\ \iota(f_{n_j}, v_0(f_{n_j})) + O(1) \to -\infty. \tag{4.5}$$

通过取一个子序列，该集合

$$Z := \{1 \le s \le \delta;\ \mathrm{Re}\ \iota(f_{n_j}, Y_s) \to -\infty \text{ as } j \to +\infty\} \neq \emptyset.$$

通过重新编号下标，我们可以假设 $1 \in Z$。令 $s_1 = 1$，并设 $0 \le m_1 \le \delta - 1$ 为使得 $Y_{(0)s_1}, Y_{(1)s_1}, \cdots, Y_{(m_1)s_1}$ 对于序列 $(f_{n_j})_j$ 均为沿 horocycle 排斥的最大整数。

若 $s_1 + m_1 = \delta$，则证明完成。若 $s_1 + m_1 < \delta$，则由 m_1 的选取，我们得到 $\inf_{j\ge1} \mathrm{Re}\ \iota(f_{n_j}, Y_{(m_1+1)s_1}) > -\infty$。这与 (4.5) 相结合，蕴含 $s_1 + m_1 + 1 < \delta$ 且 $[s_1 + m_1 + 2, \delta] \cap Z \neq \emptyset$。

取最小的 $s_2 \in [s_1 + m_1 + 2, \delta] \cap Z$。设 $0 \le m_2 \le \delta - s_2$ 为最大者，使得 $Y_{(0)s_2}, Y_{(1)s_2}, \cdots, Y_{(m_2)s_2}$ 对于序列 $(f_{n_j})_j$ 均为沿 horocycle 排斥的。若 $m_2 = \delta - s_2$，则此步骤完成。否则，我们有 $\inf_{j\ge1} \mathrm{Re}\ \iota(f_{n_j}, Y_{(m_2+1)s_2}) > -\infty$ 且 $s_2 + m_2 + 1 < \delta$。

重复这一过程，我们得到有限多个对 (s_l, m_l) $1 \le l \le N$，使得 $Y_1 \sqcup Y_2 \sqcup \cdots \sqcup Y_\delta$ 可以分解为互不相交的子集

$$Y_{s_1}^{(m_1+1)}, Y_{s_1+m_1+2}, \cdots, Y_{s_2-1}, Y_{s_2}^{(m_2+1)}, Y_{s_2+m_2+2}, \cdots, Y_{s_N-1}, Y_{s_N}^{(m_N)},$$

其中 $s_N + m_N = \delta$。注意，对于列表中的每个集合 A，除最后一个外，我们都有 $\inf_j \mathrm{Re}\ \iota(f_{n_j}, A) > -\infty$。由 (4.5) 以及对各对 (s_l, m_l) $1 \le l \le N$的选取，可得

$$\mathrm{Re}\ \iota(f_{n_j}, Y_{s_N}^{(m_N+l)}) \to -\infty,\ \forall\ 0 \le l \le s_N - 1.$$

将 $s = s_N$ 设为……，即可完成该断言的证明。

令 $k = \boldsymbol{k}([v_0, v_s])$，其中 s 由断言给出。s 的选取意味着，对 k应用 Oudkerk 算法时，我们会得到一个无限序列。该序列是周期的，可写为 $(\boldsymbol{k}([v_0, v_{s-1+l \bmod \delta}]))_{l\ge1}$。由命题 3.4，有 $A_k \cap X = \emptyset,\ \forall X \in \mathcal{L}((J(f_{n_j}))_j)$。这就完成了 (1)⟹(2) 的证明。由命题3.6，有一致收敛$\gamma_{n_j,k} \rightrightarrows \gamma_k$，这表明 (1)⟹(3)。

为证明 (2)⟹(1) 或 (3)⟹(1)，反设 (1) 不成立，则存在一个子序列 $(n_j)_j$，使得对所有 $v \in V$，$\sup_{j\ge1} |\mathrm{Re}\ \iota(f_{n_j}, v(f_{n_j}))| < +\infty$。对于任意 $k \in \mathbb{Z}_\nu$，将 Oudkerk 算法应用于 k，可得到一个有限序列（事实上，算法在第一步就会终止）。由命题 3.3，有 $A_k \cap X \neq \emptyset,\ \ \forall X \in \mathcal{L}((J(f_{n_j}))_j)$，这与 (2) 矛盾。由命题 3.6，不存在收敛到 γ_k 且在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛的 $(\gamma_{n_j,\ k})_j$ 的子序列，这与 (3) 矛盾。 □

5. ∗-SEQUENCE

在本节中，我们分析 ∗-序列的（部分）horocyclic 收敛。

与前文一样，设 $\zeta=0$ 是 f_0 的一个重数为 $\nu+1$、$f_0'(0)=1$ 的抛物不动点。假设 $(f_n)_n$ 是 f_0 在 ζ 处的一个 $*$-序列，且 $f_n\in\mathcal{WB}_\phi(G)$。我们沿用 §3 中的记号。取一个子序列后，不妨设 f_0-不动点 ζ 分裂为一个吸引不动点（仍假定为 0）和 f_n 的 ν 个互异非吸引不动点（关于 f_0-不动点 ζ 分裂为一个排斥不动点和 f_n 的 ν 个互异非排斥不动点的情形，将在注 5.2 中讨论）。

回忆一下，$T=(V,E)$ 是与 G 相关联的树，已在 §3 中引入。对 $(f_n)_n$ 取一个子序列后，我们不妨假设 v_0 是 V 中的指定顶点，使得 $v_0(f_n)=0$（因此 $v_0(f_n)$ 是 f_n-吸引的）。每个 $v\in V-\{v_0\}$ 都可以通过一条最短路径与 v_0 相连，该路径是边$[u_0,u_1]\cup[u_1,u_2]\cup\cdots\cup[u_{l-1},u_l]$的并，其中 $u_0=v$、$u_l=v_0$ 和 $l\geq 1$ 均为最短。V 上存在一个偏序 $\prec$（相对于 v_0）：如果 $v'=v$ 或 v' 位于连接 v_0 与 v 的最短路径上，我们就称$v'\prec v$。直观来说，v 比 v' 离 v_0 更远。显然，对所有 $v\in V$，都有 $v_0\prec v$。

对于任意 $v\in V$，令 $V(v)=\{v'\in V;\ v\prec v'\}$。显然，$V(v_0)=V$ 和$v\in V(v)$。令 $T_v\subset T$为顶点集是 $V(v)$ 的子树。

命题 5.1. 对于每个满足以下条件的非空子集 $V_*\subset V\backslash\{v_0\}$:

$$\mathrm{Re}\ \iota(f_n,v(f_n))\to-\infty,\ \forall v\in V_*,$$

存在边的子集 $E_*\subset E$，使得 $\#E_*=\#V_*$，且对于每个 $e\in E_*$，*Oudkerk* 算法对 $\boldsymbol{k}(e)$都会生成一个无限序列。

若进一步要求

$$\sup_n|\mathrm{Re}\ \iota(f_n,v(f_n))|<+\infty,\ \forall v\in V\backslash(\{v_0\}\cup V_*),$$

则对于每个 $e\in E\backslash E_*$，*Oudkerk* 算法对 $\boldsymbol{k}(e)$ 都会生成一个有限序列。

证明。证明分为四个步骤。

1. 集合 E_* 的构造。

设 v_1、$\cdots$、v_δ 为与 v_0 相邻的顶点，并按由 v_0 的定向 $\mathcal{O}(v_0)$ 所诱导的循环次序，对边$[v_0,v_1]$、$\cdots$、$[v_0,v_\delta]$ 进行标记。设 $T^j\subset T$ 为顶点集为 $V(v_j)\sqcup\{v_0\}$ 的子树。

对每个满足 $V(v_j)\cap V_*\neq\emptyset$ 的 $1\leq j\leq\delta$，标记边 $[v_0,v_j]$。从根点 v_0 沿树 T^j 向下移动，直到遇到第一个满足以下条件之一的顶点 v：分叉的（即至少有三条边在该顶点相交），或者 $v\in V_*$。设 u_1、$\cdots$、u_ℓ 为 v 在 $V(v)$ 中的相邻顶点，并按由 v 的定向 $\mathcal{O}(v)$ 所诱导的循环次序进行标记。对每个$1\leq s\leq\ell$，设 $T_v^s\subset T$ 为顶点集为 $V(u_s)\sqcup\{v\}$ 的子树。

情况 1： v **是分叉的，且** $v\notin V_*$。

由于 $V(v)\cap V_*\neq\emptyset$ 且 $v\notin V_*$，我们得到$(V(u_1)\sqcup\cdots\sqcup V(u_\ell))\cap V_*\neq\emptyset$。令 $1\leq j_1<\cdots<j_m\leq\ell$为所有满足 $V(u_{j_k})\cap V_*\neq\emptyset$的指标，其中$1\leq m\leq\ell$。如果 $m=1$，则无需处理。如果 $m\geq 2$，我们标记以下边

$$[u_{j_2},v],[u_{j_3},v],\cdots,[u_{j_m},v].$$

情况 2： $v\in V_*$。

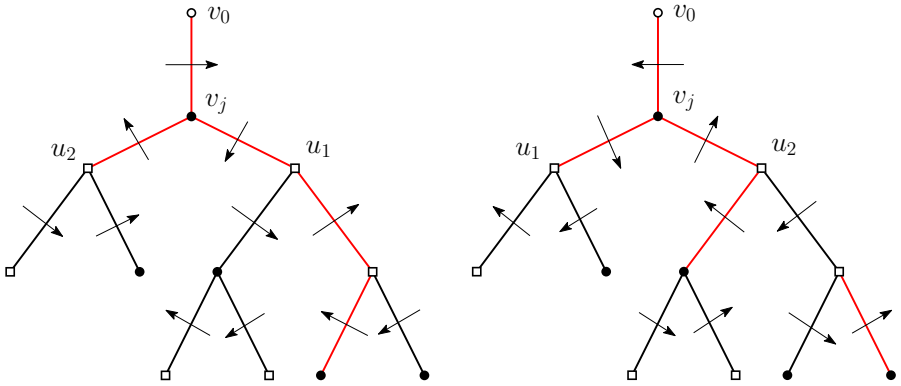


FIGURE 12. 子树 T^j 中的标记边（红色），箭头表示边的定向。 v_0 被标记 $\circ$， V（v_j）中沿 horocycle 排斥的顶点 $\cap V_*$ 被标记 $\bullet$，其余所有顶点均标记为小方块。

如果 $V(v) = \{v\}$ 或 $(V(u_1) \sqcup \cdots \sqcup V(u_\ell)) \cap V_* = \emptyset$，则无需进行任何操作。否则，令 $1 \le j_1 < \cdots < j_m \le \ell$ 为满足 $V(u_{j_k}) \cap V_* \neq \emptyset$ 的所有指标，其中 $1 \le m \le \ell$。然后我们标记以下边

$$[u_{j_1}, v], [u_{j_2}, v], \cdots, [u_{j_m}, v].$$

现在我们在这一步得到一些额外的标记边。沿带有标记边的子树 T_v^s 从根点 v 向下移动，直到遇到第一个分叉的或位于 V_* 中的顶点。重复上述标记过程，该过程在有限步后终止。

设 E_* 为所有标记边的集合。对每个 $e = [v, v'] \in E_*$，令 $\widehat{e} = e - \{v, v'\}$ 为 e的内部。由 E_*的构造，集合 $T - \bigcup_{e \in E_*} \widehat{e}$ 由 $\#E_* + 1$ 个连通分支组成。注意每个连通分支要么是包含 v_0 且避开集合 V_*的那个，要么是恰好包含 V_*中一个顶点的那个，因此 $\#E_* + 1 = \#V_* + 1$。等价地 $\#E_* = \#V_*$。见图 12。

2. 边序列。

对每个 $e \in E$，设 $v(e)$ 与 $u(e)$ 为 e 的两个端点，使得 $v(e) \prec u(e)$。我们可以关联一个边序列

$$\boldsymbol{b}(e) = (b_j(e))_{j \ge 1} = (e_j)_{j \ge 1} \in E^{\mathbb{N}}$$

使得 $e_1 = e$，并且对每个 $j \ge 1$，

- e_j 与e_{j+1} 有一个公共端点 $v(e_j)$;
- e_j 与e_{j+1} 相邻，并在 $v(e_j)$处按由定向 $\mathcal{O}(v(e_j))$ 诱导的循环次序相接;
- $v(e_{j+1}) \prec v(e_j)$。

见图 13。

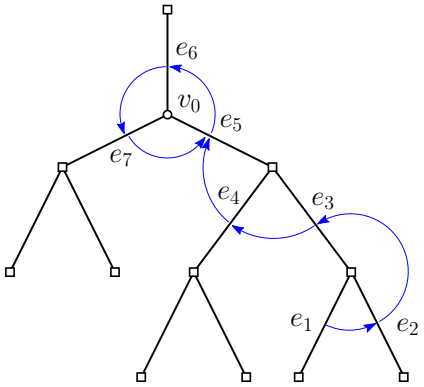


FIGURE 13.边序列 $(e_j)_{j\geq 1} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$ 中的一个示例。$\overline{v_0}$标记为 $\circ$，所有其他顶点均标记为小方块。

根据定义，边序列 $\boldsymbol{b}(e)$ 是预周期的：存在整数$m \geq 0$ 和 $p \geq 1$，使得对所有 $j \geq 1$, $e_{m+p+j} = e_{m+j}$ 成立。最小的 m, p分别称为 $\boldsymbol{b}(e)$ 的预周期和周期。显然，对于最小的 p， $e_{m+1}, \cdots, e_{m+1+p}$恰好是附着在 v_0 处、定向为 $\mathcal{O}(v_0)$ 的边。因此，所有边序列的周期都相同。

3. 对每个 $e \in E_*$, *Oudkerk* 算法应用于 $\boldsymbol{k}(e)$ 会给出一个无限序列 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{k}(e)) = (a_j(\boldsymbol{k}(e)))_{j\geq 1}$, 它与边序列 $\boldsymbol{b}(e)$ 的关系如下

$$a_j(\boldsymbol{k}(e)) = \boldsymbol{k}(b_j(e)), \ \forall j \geq 1.$$

对每个 $e \in E_*$, 令 m_e 为 $\boldsymbol{b}(e) = (e_j)$的预周期$_{j\geq 1}$，并令$X(e_j) := \left(\bigcup_{1\leq s\leq j} V(u(e_s))\right) \cap V_*$。注意， $X(e_1) \neq \emptyset$ 且 $X(e_j) \subset X(e_{j+1})$, 因此对所有 j, 都有 $X(e_j) \neq \emptyset$。

断言：对于每个 $1 \leq j \leq m_e + 1$, 存在一个非空集合 $Y(e_j) \subset X(e_j)$以及 $c_j \in \{\pm 1\}$，使得

$$\sum_{s=1}^{j} \tau_{\boldsymbol{k}(e_s)}(f_n) = 2\pi i c_j \cdot \iota(f_n, Y(e_j)) + O(1), \ \textit{for large } n. \tag{5.1}$$

令 $Y(e_1) = V(u(e_1)) \cap V_* = X(e_1)$。对 $1 \leq j \leq m_e + 1$, 归纳地定义 $Y(e_j)$ 如下：若 $v(e_{j+1}) = v(e_j)$, 则令

$$Y(e_{j+1}) = (V(u(e_{j+1})) \cap V_*) \sqcup Y(e_j);$$

若 $v(e_{j+1}) \neq v(e_j)$, 则 $v(e_j) = u(e_{j+1})$, 令

$$Y(e_{j+1}) = (V(u(e_{j+1})) \cap V_*) - Y(e_j).$$

根据此定义和命题2.4,(5.1) 可通过归纳法验证。

仍需证明 $Y(e_j) \neq \emptyset$。根据标记边的选取，$Y(e_1) = X(e_1)$, 并且关系 $Y(e_j) = X(e_j)$ 一直成立，直到遇到第一个 $j' \geq 1$，使得 $v(e_{j'+1}) \neq v(e_{j'}) = v(e)$。根据定义， $Y(e_{j'+1}) =$

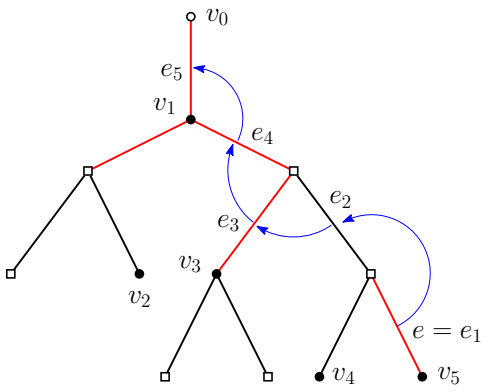


FIGURE 14. 在这个例子中，$V_* \cap V(v_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$。边序列 $(e_j)_{j\geq 1}$ 的预周期为 e，即 $m_e = 4$。$X(e_1) = Y(e_1) = \{v_5\}$; $X(e_2) = \{v_4, v_5\}$, $Y(e_2) = \{v_4\}$; $X(e_3) = \{v_3, v_4, v_5\}$, $Y(e_3) = \{v_3, v_4\}$; $X(e_4) = \{v_3, v_4, v_5\}$, $Y(e_4) = \{v_5\}$; $X(e_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $Y(e_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$。

$X(e_{j'+1}) - Y(e_{j'}) \subsetneq X(e_{j'+1})$。若 $v(e) \notin V_*$，则 $Y(e_{j'+1}) \neq \emptyset$（见步骤 1 中的情况 1）；若 $v(e) \in V_*$，则 $Y(e_{j'+1}) \supset \{v(e)\} \neq \emptyset$。无论哪种情况，重复上述论证即可得出结论。见图14。

最后，我们证明，当 $e \in E_*$ 时，针对 $\boldsymbol{k}(e)$，Oudkerk 算法给出一个无限序列 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{k}(e)) = (a_j(\boldsymbol{k}(e)))_{j\geq 1}$，满足所需的性质。根据 (5.1)，对每个 $1 \leq j \leq m_e + 1$,

$$\operatorname{Im} \sum_{s=1}^{j} \tau_{\boldsymbol{k}(e_s)}(f_n) = 2\pi c_j \operatorname{Re} \iota(f_n, Y(e_j)) + O(1).$$

对于 $j > m_e + 1$，由（5.1）和命题2.4,

$$\operatorname{Im} \sum_{s=1}^{j} \tau_{\boldsymbol{k}(e_s)}(f_n) = 2\pi c_{m_e+1} \operatorname{Re}\Big(\iota(f_n, Y(e_{m_e+1})) + \sum_{s=m_e+2}^{j} \iota(f_n, V(u(e_s)) \cap V_*)\Big) + O(1).$$

可以验证，$c_j = -1$ 若定向 $\mathcal{O}(v(e_j))$为正向循环次序，$c_j = +1$ 若定向 $\mathcal{O}(v(e_j))$ 为负向循环顺序。还要注意，$c_j = c_{m_e+1}$ 对于 $j \geq m_e + 1$。因此，当 $n \to +\infty$时,

$$\operatorname{Im} \sum_{s=1}^{j} \tau_{\boldsymbol{k}(e_s)}(f_n) \to \begin{cases} +\infty, & \text{if } \mathcal{O}(v(e_j)) \text{ is positive cyclic order;} \\ -\infty, & \text{if } \mathcal{O}(v(e_j)) \text{ is negative cyclic order.} \end{cases}$$

根据 $\boldsymbol{a}$-序列和 $\boldsymbol{b}$-序列的定义，我们可以看到，对于所有 j，由归纳法可得$a_j(\boldsymbol{k}(e)) = \boldsymbol{k}(b_j(e))$。

4. $E\backslash E_*$中的边。

我们假设 $\inf_n \operatorname{Re}\ \iota(f_n, v(f_n)) > -\infty$ 对 $v \in V\backslash(\{v_0\} \cup V_*)$ 成立。根据 E_* 的构造，对于任意 $e \in E\backslash E_*$，存在两种可能

(1). $V(u(e)) \cap V_* = \emptyset$, 或者 (2). $V(u(e)) \cap V_* \neq \emptyset$, $v(e) \notin V^*$。在情形 (1) 中，由命题2.4,

$$\tau_{\boldsymbol{k}(e)}(f_n) = \pm 2\pi i \cdot \iota(f_n, V(u(e))) + O(1) = O(1).$$

这意味着 Oudkerk 算法在 $r = 1$ 处终止。

在情况 (2) 中，注意到 e 对应于步骤 1 中情况 1 的边 $[u_{j_2}, v]$。我们考虑边序列 $\boldsymbol{b}(e) = (e_j)_{j\geq 1}$。存在一个最小整数 $\ell \geq 1$，使得 $v(e_1) = \cdots = v(e_\ell)$ 且 $v(e_{\ell+1}) \neq v(e_\ell)$。根据假设 $V(u(e)) \cap V_* \neq \emptyset$，并将 Oudkerk 算法应用于 $\boldsymbol{k}(e)$，我们得到一个有限序列 $a_1(\boldsymbol{k}(e)) \cdots, a_{\ell+1}(\boldsymbol{k}(e))$，其中 $a_j(\boldsymbol{k}(e)) = \boldsymbol{k}(b_j(e))$ $\forall 1 \leq j \leq \ell + 1$。根据假设 $e \in E \backslash E_*$ 和 $v(e) \notin V^*$，我们有

$$V(u(e_{\ell+1})) \cap V_* = (V(u(e_1)) \sqcup \cdots \sqcup V(u(e_\ell))) \cap V_*.$$

再次根据命题 2.4,

$$\sum_{j=1}^{\ell+1} \tau_{a_j(\boldsymbol{k}(e))}(f_n) = \pm 2\pi i \cdot \iota\Big(f_n, V(u(e_{\ell+1})) \backslash \bigsqcup_{1\leq s\leq \ell} V(u(e_s))\Big) + O(1) = O(1).$$

因此，Oudkerk 算法在 $r = \ell + 1$ 处终止。

证明完成。 □

注 5.2。 如果 f_0-不动点 $\zeta = 0$ 分裂为一个排斥不动点0 和 ν 个不同的非排斥不动点，属于 f_n，我们仍令 v_0 表示 V 中的指定顶点，使得 $v_0(f_n) = 0$。命题 *5.1* 表述如下：对于任意满足以下条件的非空子集 $V_* \subset V \backslash \{v_0\}$：

$$\mathrm{Re}\ \iota(f_n, v(f_n)) \to +\infty,\ \forall v \in V_*,$$

存在边的子集 $E_* \subset E$ 使得 $\#E_* = \#V_*$，并且对于每个 $e \in E_*$，*Oudkerk* 算法对 $\boldsymbol{k}(e)$都会生成一个无限序列。

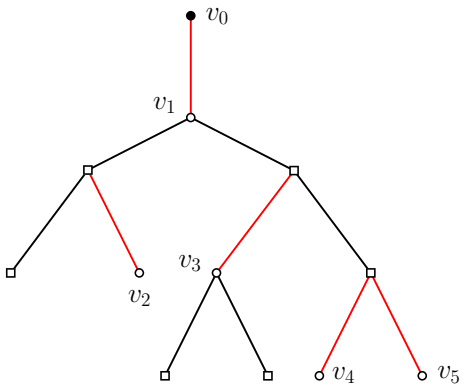


FIGURE 15. 在这个例子中， $V_* = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$，集合$E_*$由五条红色边组成。

的构造如下：对于每个 $v \in V_*$，存在唯一的$v' \in V$使得 $v' \prec v$且 $[v', v]$是一条边。令 $E_* = \{[v', v];\ v \in V_*\}$。见图 *15*。可以验证，对于每个 $e \in E_*$，*Oudkerk* 算法对$\boldsymbol{k}(e)$ 都会生成一个无限序列 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{k}(e)) = (^a j(\boldsymbol{k}(e)))_{j\geq 1}$。

6. THE PROOFS

本节给出定理1.3、1.5、1.6、1.8 以及1.1 在§1中的证明。

下文中，当我们讨论抛物周期点 ζ（属于 f_0）时，我们作如下假设：将 f_0 替换为某个迭代 f_0^l，并假设$f_0(\zeta) = \zeta$，$f_0'(\zeta) = 1$，且 f_0在 ζ处的重数为 $\nu+1 \geq 2$。通过更换坐标，我们假设 $\zeta = 0$。回顾 A_k 是第 k个属于 ζ的直接抛物吸引盆。我们将使用§3中给出的记号。

定理*1.3*的证明。设$(f_n)_n$ 为一个 $*$-序列，对应于 f_0。由定理1.2，Julia 集 $J(f_n) \to J(f_0)$的收敛蕴含 $f_n \to f_0$沿 horocycle 方向。

由于 f_0 没有旋转域，f_0 的每个周期 Fatou 分支要么是吸引的，要么是抛物的 [Mil06, §16]。注意，每个吸引 Fatou 分支 U f_0 都不与任何 $X \in \mathcal{L}((J(f_n))_n$相交 [Dou94]。

要证明 $f_n \to f_0$ 沿 horocycle 方向蕴含 $J(f_n) \to J(f_0)$，只需证明 f_0 的每个抛物 Fatou 分支都不与任何 $X \in \mathcal{L}((J(f_n))_n)$ 相交。

对于 f_0-抛物点 $\zeta = 0$，令 V，A_k 由§3给出。将命题5.1 应用于 $V_* = V\backslash\{v_0\}$的情形，得到 $E_* = E$。结合命题3.4，可知对任意 $k \in \mathbb{Z}_\nu$，$A_k \cap X = \emptyset$，$\forall X \in \mathcal{L}((J(f_n))_n)$。

令 ζ 遍历所有 f_0-抛物点，即得结论。 □

定理 *1.5* 的证明。(1)$\Longrightarrow$(2) 和 (3)。设 $f_n \to f_0$ ℓ在 ζ处沿 horocycle 方向吸引。对于 $(f_n)_n$的任意子序列，都存在一个进一步的子序列 $(f_{n_j})_j$ 满足

- $f_{n_j} \in \mathcal{WB}_\phi(\mathbf{G})$，其中 ϕ，$\mathbf{G}$ 且对所有 $j \geq 1$ (由命题 2.5)。
- $v_0 \in V$对于 $(f_{n_j})_j$ 是 horocycle 吸引的（分别为排斥的）。
- 存在一个子集 $V_* \subset V\backslash\{v_0\}$，其基数为 $\#V_* = \ell$，使得所有 $v \in V_*$ 对于 $(f_{n_j})_j$ 都是沿 horocycle 排斥的（分别为吸引的）。

由命题 5.1 （以及注记5.2），3.3，3.4 和 3.6，存在一个集合 $E_* \subset E$，其基数为 $\#E_* = \ell$，使得对任意 $e \in E_*$,

$$A_{\boldsymbol{k}(e)} \cap X = \emptyset,\ \forall X \in \mathcal{L}((J(f_{n_j}))_j);\ \gamma_{n_j, \boldsymbol{k}(e)} \rightrightarrows \gamma_k,$$

且对任意 $e \in E - E_*$,

$$A_{\boldsymbol{k}(e)} \cap X \neq \emptyset,\ \forall X \in \mathcal{L}((J(f_{n_j}))_j);\ \gamma_{n_j, \boldsymbol{k}(e)} \not\rightrightarrows \gamma_k.$$

结论 (2) 与 (3) 可通过取 $\mathcal{I} = \{\boldsymbol{k}(e); e \in E_*\}$ 得到。

(2) 或 (3) $\Longrightarrow$ (1)。如果 $f_n \to f$ 在 ζ 处并非沿 ℓ-horocycle 方向，则存在一个子序列 $(f_{n_j})_j$ 和一个整数 $\ell' \neq \ell$，使得 $f_{n_j} \to f$ ℓ' 沿 horocycle 方向

在 ζ 处。根据前面的论证，存在 $(f_{n_j})_j$ 的一个进一步子序列 $(f_{m_j})_j$ 和一个基数为 ℓ' 的指标集 $\mathcal{I}'$，满足

$$\begin{cases} A_k \cap X = \emptyset,\ \forall X \in \mathcal{L}((J(f_{m_j}))_j); \gamma_{m_j,k} \rightrightarrows \gamma_k, & \text{if } k \in \mathcal{I}'; \\ A_k \cap X \neq \emptyset,\ \forall X \in \mathcal{L}((J(f_{m_j}))_j); \gamma_{m_j,k} \not\rightrightarrows \gamma_k, & \text{if } k \notin \mathcal{I}'. \end{cases}$$

序列 $(f_{m_j})_j$ 不含满足 (2) 与 (3) 的进一步子序列。这是一个矛盾。□

定理 *1.6* 的证明。 (1)$\Longrightarrow$ (2) 与 (3)。注意， $f_n \to f_0$ 沿 horocycle 方向于 ζ 等价于说 $f_n \to f_0$ ν-沿 horocycle 方向于 ζ。由定理1.5，$(f_n)_n$ 的任意子序列都包含一个进一步的子序列 $(f_{n_j})_j$ 使得

$$X \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_\nu) = \emptyset,\ \forall X \in \mathcal{L}((J(f_{n_j}))_j;\ \gamma_{n_j,k} \rightrightarrows \gamma_k,\ \forall k \in \mathbb{Z}_\nu.$$

由此可知，整个序列 $(f_n)_n$ 满足

$$X \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_\nu) = \emptyset,\ \forall X \in \mathcal{L}((J(f_n))_n);\ \gamma_{n,k} \rightrightarrows \gamma_k,\ \forall k \in \mathbb{Z}_\nu.$$

Applying Theorem 1.5 to the case $\ell = \nu$, we get (2) or (3) $\Longrightarrow$ (1). □

定理 *1.8* 的证明。 我们假设抛物不动点 $\zeta = 0$ （即 f_0 中的）分裂为 f_n的不动点，其中之一为 0。取两个小圆盘 U， V，以 0 为中心，使得 $f_n|_U$， $f_0|_U$均为单叶，且它们的像 $f_n(U)$ $f_0(U)$ 包含 V。注意， $\lambda_n \to 1$ 沿 horocycle 方向当且仅当 $1/\lambda_n \to 1$ 沿 horocycle 方向。由此可知， $f_n \to f_0$ ℓ-沿 horocycle 方向于 0 当且仅当逆序列 $f_n^{-1}|_V \to f_0^{-1}|_V$ ℓ-沿 horocycle 方向于 0。

令 $\gamma_{n,\,k}$ 和 γ_k 为外射线的尾部（即其格林势 $\leq \varepsilon_0$ 对于某个较小的 $\varepsilon_0 > 0$），分别对应外射线 $R_{f_n}(\theta_k)$ 和 $R_{f_0}(\theta_k)$，使得$\gamma_k \subset V$ （有可能 $\gamma_{n,\,k}$ 不包含于 V），并且 $\gamma_{n,\,k}$ 局部一致收敛到 γ_k （采用适当的参数化）。由定理1.5即可得出结论。□

注 6.1。 设 $f_n, f_0 \in \mathcal{C}_d$。将 f_0 替换为某次迭代后，我们假设 ζ 是一个 f_0-抛物不动点。回忆一下， Θ 由所有满足以下条件的角 $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 组成： $R_{f_0}(t)$ 落在 ζ处。如果 $(f_n)_n$ 是 f_0 在 ζ处的一般扰动，那么以下两个陈述等价：

(1). 对每个 n，都存在一个 f_n-不动点 ζ_n，使得

$$\zeta_n \to \zeta,\ \textit{and}\ f_n'(\zeta_n)/f_0'(\zeta) \to 1\ \textit{horocyclically}.$$

(2). 对于 $(f_n)_n$的每个子序列，都存在一个更细的子序列$(f_{n_j})_j$ 以及一个 $\theta \in \Theta$，使得 $R_{f_{n_j}}(\theta) \to R_{f_0}(\theta)$ 在豪斯多夫拓扑下收敛。

这尤其意味着，对于所有$\theta \in \Theta$， $\overline{R_{f_0}(\theta)} \subsetneq X, \forall X \in \mathcal{L}(\overline{(R_{f_n}(\theta))_n})$ 成立，当且仅当对于任意满足 $\zeta_n \to \zeta$的 f_n-不动点 ζ_n， 我们有

$$\sup_{n \geq 1} \left| \mathrm{Re}\Big(\frac{f_0'(\zeta)}{f_0'(\zeta) - f_n'(\zeta_n)} \Big) \right| < +\infty.$$

证明。 考虑外射线的尾部$\gamma_{n,\,k}$和 γ_k $R_{f_n}(\theta_k)$以及 $R_{f_0}(\theta_k)$分别，可由定理1.4 (1)$\Longleftrightarrow$ (3)得出结论。□

定理 1.7 的证明。对于每个 $k \in \mathbb{Z}_\nu$，分别考虑外射线 $R_{f_n}(\theta_k)$ 和 $R_{f_0}(\theta_k)$ 的尾部 γ_n、$_k$ 和 γ_k，其中 θ_k 是 Θ_ν中的一个角，使得 $R_{f_0}(\theta_k)$ 落在第 k 个排斥方向上的 ζ 处。根据命题 3.6，并考虑逆芽 f_n^{-1}、f_0^{-1}，Oudkerk 算法对于 $k \in \mathbb{Z}_\nu$永不终止。结论由与定理 1.2 相同的论证得出。最后一个结论由定理 1.8 得出。□

定理 1.1 的证明。注意，f_{λ_0} 恰有一个由 q个直接抛物吸引盆组成的周期，因为 f_{λ_0} 在 $\mathbb{C}$中只有一个临界点。因此，在 0 附近，$g_0 = f_{\lambda_0}^q$ 具有如下形式：$g_0(z) = z + az^{q+1} + O(z^{q+2})$，其中 $a \neq 0$。对于满足 $\lambda_n \neq \lambda_0$ 的序列 $\lambda_n \to \lambda_0$，注意到 $g_n = f_{\lambda_n}^q$ 是 g_0的一般扰动。此外，g_n 有一个乘子为 λ_n^q 的不动点 0，且有q 个乘子相同、均为 μ_n 的不动点（这些 q 个不动点对应于 f_{λ_n}的一个 q周期轨道）。因此，由 (3.1) 得，

$$\frac{q}{1-\mu_n} + \frac{1}{1-\lambda_n^q} \to \iota(g_0, 0). \tag{6.1}$$

如果 $J(f_{\lambda_n}) \to J(f_{\lambda_0})$，由定理 1.2，$g_n \to g_0$ 沿 horocycle 方向。在特别的情况下，$|\mathrm{Re}(1/(\lambda_n^q - 1))| \to +\infty$。

另一方面，如果 $|\mathrm{Re}(1/(\lambda_n^q - 1))| \to +\infty$，那么（6.1）推出$|\mathrm{Re}(1/(1-\mu_n))| \to +\infty$。因此 $g_n \to g_0$ 沿 horocycle 方向。注意，在此情形下，$(g_n)_n$是一个 $*$-序列，属于 g_0。根据定理 1.3，$J(f_{\lambda_n}) \to J(f_{\lambda_0})$。□

注 6.2. 设 $f_n \to f_0$ 是 f_0 在 ζ 处的 *leaned* 序列。那么

$$X \cap A_k \neq \emptyset,\ \forall X \in \mathcal{L}((J(f_n))_n),\ \forall k \in \mathbb{Z}_\nu.$$

这尤其意味着 $J(f_0) \subsetneq X,\ \forall X \in \mathcal{L}((J(f_n))_n)$。

证明。不妨设 $f_n \in \mathcal{WB}_\phi(\mathbf{G})$，其中 ϕ，$\mathbf{G}$ 且对所有 $n \geq 1$（根据命题 2.5）。令 V 为由$\mathbf{G}$ 诱导的顶点集（见 §3）。由于（f_n）$_n$是 f_0 在 ζ处的 leaned 序列，根据引理 3.1，对任意 $v \in V$，

$$\sup_n |\mathrm{Re}\ \iota(f_n, v(f_n))| < +\infty. \tag{6.2}$$

因此，对于任意 $k \in \mathbb{Z}_\nu$，Oudkerk 算法对于 k 可在第 (3) 步对 $r = 1$终止。结论由命题 3.3得出。□

注 6.3。在注 *6.2*中，我们还假设 f_n，f_0 是具有连通 *Julia* 集的多项式（例如，当 f_n 沿分岔轨迹趋近于f_0 时，在 $\mathcal{P}_d$中就可能出现这种情况）。

那么 (6.2) 意味着，对于任意一个 f_n-不动点 ζ_n 使得 $\zeta_n \to \zeta$，乘子序列 $(f_n'(\zeta_n))_n$ 不会沿 *horocycle* 方向收敛到 1 。根据备注*6.1*，对于任意一条 $R_{f_0}(\theta)$ 落在 ζ上的外射线，

$$\overline{R_{f_0}(\theta)} \subsetneq X,\ \forall X \in \mathcal{L}((\overline{R_{f_n}(\theta)})_n).$$

REFERENCES

[BZ96] O. Bodart 和 M. Zinsmeister，《关于二次多项式的 Julia 集豪斯多夫维数的一些结果》，*Fund. Math.* 151 (1996)，121-137。[BT 07] *J. Diff.* X. Buff *Geom.* 77 2007 1 41 和 L. Tan。动力学收敛与多项式向量场。（） - 。[Dou94] A. Douady。Julia 集是否依赖于多项式的连续变化？载于 R. Devaney 编，*Complex Analytic Dynamics*。美国数学会，1994。[DH85] A. Douady，J. H. Hubbard。*Exploring the Mandelbrot set.* 奥赛讲义。1985。[Lav 89] *Systemes dynamique holomorphe Explosion de points periodique* P. *paraboliques.* 1989 Lavaurs。博士论文，巴黎第十一大学奥赛分校（）。[Mc94] C. McMullen。*Complex Dynamics and Renormalization*。《数学年刊研究》第135卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1994。[Mc00] C. McMullen。《豪斯多夫维数与共形动力学 II：几何有限有理映射》。*Comment. Math. Helv.* 75 (2000) 535–593。[Mil06] J. Milnor，*Dynamics in One Complex Variable (3rd Edition)*。《数学年刊研究》第160卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2006。[Ou99] R. Oudkerk。《 $f_0(z) = z + z^{\nu+1} + \mathcal{O}(z^{\nu+2})$ 的抛物 implosion》，博士论文，华威大学。1999。[Ou02] R. Oudkerk。《抛物 implosion：Lavaurs 映射与有理映射的强收敛》。*Contemporary Mathematics*。第303卷。2002。[PZ24a] C. Petersen，S. Zakeri。外射线的豪斯多夫极限：拓扑图景。*Proc. London Math. Soc.* 128 (2024) e12598。[PZ24b] C. Petersen，S. Zakeri。近抛物映射的 Buff 形式与不变曲线。arXiv:2412.17125。[Sh98] M. Shishikura。Mandelbrot 集边界与 Julia 集的豪斯多夫维数。*Ann. of Math.* (2)，147(2):225-267，1998。[Sh00] M. Shishikura。抛物不动点的分岔。载于 *The Mandelbrot set theme*，《伦 *and variations* 274 页码。剑桥大学出版社，剑桥，2000。[S25] R. Simanjuntak， *The Blaschke model for the main hyperbolic component of cubic polynomials* 2025 。学位 论文。印第安纳大学。。[W99] S. Wu。Julia 集的连续性。*Sciences in China (Series A)*。1999，42。[Y95] Y. Yin。多项式的 Julia 集的连续性。*Acta Math. Sinica*(中文)，1995，38：99

SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, ZHEJIANG UNIVERSITY, HANGZHOU, 310027,CHINA*Email address*: wxg688@163.com