arXiv:2602.20591v1 [math.OA] 24 Feb 2026

关于纯无限冠代数与扩张的注记

P. W. NG 和 CANGYUAN WANG

Abstract. 设 $\mathcal{A}$ 是一个可分核 C*-代数，且 $\mathcal{B}$ 是一个非单位可分单 $\mathcal{Z}$-稳定 C*-代数。延续 [19], 的工作，我们对以下形式的所有具有大补的本质扩张进行分类:

$$0 \to \mathcal{B} \to \mathcal{E} \to \mathcal{A} \to 0,$$

在以下情形下：i. $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 是适当无限的，且该扩张是满的。ii. $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 是纯无限的（但不一定是单的）。我们还得到了若干更一般的结果。

1. Introduction

在开创性的工作中，Brown, Douglas and Fillmore（BDF）利用 K 理论（[5]），对可分无限维希尔伯特空间上的所有本质正规算子进行了分类。他们的分类等价于对以下形式的所有本质扩张进行分类:

$$0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{E} \to C(X) \to 0,$$

其中， $\mathcal{K}$ 是可分希尔伯特空间 l_2上的紧算子C*-代数，而 X 是平面中的一个紧子集。这为算子理论和非交换拓扑中的诸多发展奠定了基础，并引入了许多强大的工具，例如 KK 理论。（关于这段历史及其更广泛的背景，可参见 [5], [6], [11], [51], [1], [23], [24], [48],[34], [20], 等。）

BDF–Kasparov理论对吸收扩张进行了分类。（在核性假设下，Kasparov 的 KK^1 计算吸收扩张的酉等价类（[24]）；而最初的 BDF定理（[5]）可以看作 KK^1的万有系数定理（[48]）的一部分。）事实上，吸收扩张是经典扩张理论的核心（例如，[5], [1], [51], [23], [24], [49]）。关键问题在于，吸收扩张这一类可能非常狭窄。除其他方面之外，BDF–Kasparov理论只能对稳定C*-代数的扩张进行分类；此外，每个吸收扩张 ϕ： $\mathcal{A} \to \mathcal{M}$（$\mathcal{B} \otimes \mathcal{K}$）/（$\mathcal{B} \otimes \mathcal{K}$）都是满的——也就是说，对于所有$a \in \mathcal{A} - \{0\}$， $Ideal$（ϕ（a））$= \mathcal{M}$（$\mathcal{B}\otimes\mathcal{K}$）/（$\mathcal{B}\otimes\mathcal{K}$）。由于对于一般的 C*-代数 $\mathcal{B}$， $\mathcal{M}$（$\mathcal{B}\otimes\mathcal{K}$）/（$\mathcal{B}\otimes\mathcal{K}$）可能拥有许多（甚至无穷多个）理想， KK^1 会遗漏大量本质扩张。

原始 BDF 理论（[5]）之所以发展得如此顺利，或许一个原因在于其冠代数——Calkin 代数 $\mathbb{B}(l_2)/\mathcal{K}$——是单纯无限的。除此之外，BDF–Voiculescu 定理大致指出“所有本质扩张 $\mathcal{K}$ 都是可吸收的”；若 $\mathbb{B}(l_2)/\mathcal{K}$ 不是单的，这一结论便不成立。因此，将 BDF 理论推广到更一般背景的一种合理做法，是先找出具有“良好性质”的冠代数类，再研究这一新的“良好”背景下的扩张理论。这一想法在早期的多项研究中已初现端倪（例如 [13], [31]），但早期具有决定性的结果归功于 Lin（例如 [31]）。Lin 刻画了单纯无限冠代数类（[30]）：设 $\mathcal{B}$ 是一个具有 σ单位的单非幺 C*-代数。那么， $\mathcal{M}(\mathcal{B})/\mathcal{B}$ 是单的，当且仅当 $\mathcal{M}(\mathcal{B})/\mathcal{B}$ 是单的

当且仅当 $\mathcal{B} \cong \mathcal{K}$ 或 $\mathcal{B}$ 具有连续尺度时，它是纯无限的。（注意，在这一刻画中， $\mathcal{B}$ 不必是稳定的。）我们还注意到，对于相当一般的扩张 ϕ: $\mathcal{A} \to \mathcal{C}(\mathcal{D})$（其中 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{D}$也相当一般）， ϕ 通常含有一个位于 $\mathcal{C}(\mathcal{D})$的极小理想内的“部分”，而这“部分”通常是一个连续尺度 C*-代数的扩张（例如参见 [33]）。

推广先前的工作， [19] 给出了如下分类结果：设 $\mathcal{A}$ 是一个可分核 C*-代数，设 $\mathcal{B}$ 是一个非单位 σ-单位单连续尺度 C*-代数。那么映射 $Ext(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \to KK(\mathcal{A}, \mathcal{M}(\mathcal{B})/\mathcal{B})$: $[\phi]_{Ext} \mapsto [\phi]_{KK}$ 是一个群同构。这里， $Ext(\mathcal{A}, \mathcal{B})$由非单位本质扩张 $\mathcal{A} \to \mathcal{M}(\mathcal{B})/\mathcal{B}$的酉等价类组成。

本文从两个方向推广了 [19] 中的结果：i. 将 $\mathcal{B}$ 替换为一个单非单位$\mathcal{Z}$-稳定 C*-代数，其中 $\mathcal{M}(\mathcal{B})/\mathcal{B}$ 是适当无限的，并且限于满非单位扩张。ii. 将 $\mathcal{B}$ 替换为一个单非单位 $\mathcal{Z}$-稳定 C*-代数，其中 $\mathcal{M}(\mathcal{B})/\mathcal{B}$ 是纯无限的（尽管不一定是单的——因此非满扩张也得到分类）。此外，还有一些更一般的结果。本文运用了经典扩张理论中的许多技术和思想、论文 [19],中的相关方法，以及利用 K 理论不变量对核 C*-代数进行分类的 Elliott 纲领。

第一作者感谢 J. Gabe 指出了定理 3.10 的一个早期版本。

2. Some preliminaries

2.1. 关于基本扩张理论的一些参考文献见 [2], [22] 和 [52]。对于非幺 C*-代数$\mathcal{B}$，我们用 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 和 $\mathcal{C}(\mathcal{B}) =_{df} \mathcal{M}(\mathcal{B})/\mathcal{B}$ 分别表示 $\mathcal{B}$的乘子代数和冠代数。回顾一下，对于任意 C*-代数 $\mathcal{A}$，在强同构意义下， $\mathcal{B}$ 由 $\mathcal{A}$ （即，扩张 $0 \to \mathcal{B} \to \mathcal{E} \to \mathcal{A} \to 0$）的扩张与 *-同态 ϕ : $A \to \mathcal{C}(\mathcal{B})$（该扩张的 *Busby* 不变量 ）之间存在一一对应；例如，参见 [2] 15.2、15.3、15.4。回顾一下，当且仅当相应的 Busby 不变量是单射时，扩张是本质的。由于我们只关心在强同构下不变的扩张性质，按照惯例，我们将 *-同态 $\mathcal{A} \to \mathcal{C}(\mathcal{B})$ 与相应的扩张视为相同。

2.2. 设 ϕ、ψ : $\mathcal{A} \to \mathcal{C}(\mathcal{B})$ 为扩张。回顾一下，若存在偏等距 $v \in \mathcal{C}(\mathcal{B})$，使得对所有满足 $v\phi(\cdot)v^* = \psi(\cdot)$ 的 $a \in \mathcal{A}$, 都有 $v^*v\phi(a) = \phi(a)$，则称 ϕ 和 ψ 弱等价。若还能找到酉元 $U \in \mathcal{M}(\mathcal{B})$, 使得 $v = \pi(U)$，则称 ϕ 和 ψ 酉等价。此外，我们用 $[\phi]$ 或 $[\phi]_{Ext}$ 表示 ϕ 的酉等价类。接下来，若存在 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 中酉元的范数连续路径 $\{u_t\}_{t\in[1,\infty)}$，使得对所有 $a \in \mathcal{A}$， $u_t\phi(a)u_t^* \to \psi(a)$，则称 ϕ 和 ψ 渐近酉等价。此外，若存在投影 $p \in \phi(\mathcal{A})^\perp$, 使得 $1_{\mathcal{C}(\mathcal{B})} \preceq p$，则称 ϕ 具有大补。

2.3. 此外，假设 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 是适当无限的。两个扩张 ϕ、ψ: $\mathcal{A} \to \mathcal{C}(\mathcal{B})$ 的 *Brown–Douglas–Fillmore* 和（*BDF* 和）定义为 $(\phi \oplus \psi)(\cdot) =_{df} S^*\phi(\cdot)S + T^*\psi(\cdot)T$, 其中$S$、$T \in \mathcal{C}(\mathcal{B})$ 是满足 $SS^* + TT^* \leq 1_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}$ 的等距算子。BDF 和在弱等价意义下定义良好。当 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 也为 K_1-单射，且 ϕ 和 ψ 都有大补时，BDF 和在酉等价意义下定义良好（参见 [19] 命题 3.7，或参见 [7] 引理 2.2，其中给出了一个更初等的证明）。

3. Classifying extensions: The full case

3.1. 我们固定以下记号：若 $\mathcal{D}$ 是一个 C*-代数，且 $a, b \in \mathcal{D}_+$, $a \preceq b$ 若存在一个序列 $\{x_n\}$ 属于$\mathcal{D}$, 使得 $x_nbx_n^* \to a$ 在范数下。

3.2. 设 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是 C*-代数，其中 $\mathcal{B}$ 非单位。设 $\phi:\mathcal{A}\to\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 是一个扩张。若对所有 $a\in\mathcal{A}-\{0\}$， $\phi(a)$ 在 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 中都是满的（即 $Ideal(\phi(a))=\mathcal{C}(\mathcal{B})$），则称 ϕ 为满。若对所有 $a\in\mathcal{A}_+-\{0\}$， $\phi(a)\oplus\phi(a)\preceq\phi(a)$ 属于 $\mathbb{M}_2(\mathcal{C}(\mathcal{B}))$，则称 ϕ 为纯无限。可以证明， ϕ 既满又纯无限，当且仅当对所有 $a\in\mathcal{A}_+-\{0\}$，存在一个 $x\in\mathcal{C}(\mathcal{B})$，使得

$$x\phi(a)x^*=1_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}. \tag{3.2.1}$$

定义 3.3. 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是 C*-代数，其中 $\mathcal{B}$ 是非单位的。

我们用 $\mathbf{Ext}^{fpi}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 表示具有大补的满纯无限扩张 $\phi:\mathcal{A}\to\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 的所有酉等价类的集合。

3.4. 此外，假设 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 适当无限。那么 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 包含 O_∞ 的一个幺副本，因此也包含 O_2 的一个满副本。若另外， $\mathcal{A}$ 可分且核，则由 [27],$\mathbf{Ext}^{fpi}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 非空。

3.5. 再假设 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 适当无限。由第 2.3 段，BDF 和在 $\mathbf{Ext}^{fpi}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 上诱导出良定义的加法，其定义为 $[\phi]+[\psi]=_{df}[\phi\oplus\psi]$，我们也称之为 *BDF* 和。此外，在更进一步（相对温和且合理）的假设下，我们可以得到群结构。

定理 3.6. 设 $\mathcal{A}$ 是可分核 C*-代数，且 $\mathcal{B}$ 是一个非单位 σ-幺单 C*-代数，其中 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 适当无限且 K_1-单射。

那么，$\mathbf{Ext}^{fpi}(\mathcal{A},\mathcal{B})$在前一段所述的加法运算（*BDF* 和）下构成一个阿贝尔群。

证明。 这是 [7] 定理 2.14。 □

我们给出 [19] 命题 4.3 的一个（不同的）证明。以下证明实际上出自 J. Gabe 和 H. Lin。与 [19]命题 4.3 的论证类似，这里的论证很简洁，结论可直接由 Phillips 和 Weaver 的精彩论文 [45] 命题 1.4 得出。冗长之处都源于记号。（另见 [35]。）

引理 3.7. （*J. Gabe* 和 *H. Lin*；参见 [19] 引理 *4.3,* [35], 和 [45]命题 *1.4*。）设 $\mathcal{D}$ 是可分 C*-代数，$\mathcal{E}$ 是非单位 σ-幺 C*-代数。两个扩张 $\phi,\psi:\mathcal{D}\to\mathcal{C}(\mathcal{E})$ 渐近酉等价，当且仅当它们弱酉等价。

证明。 由于 ϕ 和 ψ 渐近酉等价， $ker(\phi)=ker(\psi)$，因此为简便起见，假设 ϕ 和 ψ 均为单射。

令 $C_b([1,\infty)\ \mathcal{C}(\mathcal{E}))$ 为从 $[1,\infty)$ 到 $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ 的有界连续函数所构成的 C*-代数，并令 $C_0([1,\infty)\ \mathcal{C}(\mathcal{E}))$ 为由这类在无穷远处消失的函数构成的理想。考虑商 C*-代数 $\mathcal{Q}=_{df}C_b([1,\infty)\ \mathcal{C}(\mathcal{E}))/C_0([1,\infty)\ \mathcal{C}(\mathcal{E}))$，并令 $\pi_Q:C_b([1,\infty)\ \mathcal{C}(\mathcal{E}))\to\mathcal{Q}$.为商映射。

由于 ϕ 和 ψ 渐近酉等价，令 $\{u_t\}_{t\in[1,\infty)}$ 为 $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ 中实现这种等价的酉元范数连续路径（即在逐点范数拓扑下， $u_t\phi(\cdot)u_t^*\to\psi(\cdot)$）。令$U\in C_b([1,\infty)\ \mathcal{C}(\mathcal{E}))$ 为由 $U(t)=_{df}u_t$ 对所有 $t\in[1,\infty)$ 给出的酉元。

令 $\iota_C:\mathcal{C}(\mathcal{E})\to\mathcal{Q}$ 为以显然方式取常值映射所定义的单射 *-同态。也就是说，对于所有 $x\in\mathcal{C}(\mathcal{E})$，$\iota_C(x)=_{df}\pi_Q(\tilde{x})$，其中 $\tilde{x}\in C_b([1,\infty)\ \mathcal{C}(\mathcal{E}))$ 是常值函数 $\tilde{x}(t)=_{df}x$，对所有 $t\in[1,\infty)$ 均成立。

令 $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{Q}$为由 $\mathcal{B}=_{df}C^*(\iota_C\circ\phi(\mathcal{D})\ \iota_C\circ\psi(\mathcal{D})\ \pi_Q(U))$ 给出的可分 C*-子代数，并令 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$为由 $\mathcal{A}=_{df}C^*(\iota_C\circ\phi(\mathcal{D})\ \iota_C\circ\psi(\mathcal{D}))=\iota_C(\mathcal{A}_0)$ 给出的可分 C*-子代数

其中 $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{E})$ 是由 $\mathcal{A}_0 =_{df} C^*(\phi(\mathcal{D})\ \psi(\mathcal{D}))$ 给出的 C*-子代数。事实上，ι_C 限制为从 $\mathcal{A}_0$ 到 $\mathcal{A}$的 *-同构。因此，ι_C^{-1} 在 $\mathcal{A}$上定义良好。

现在，对于包含映射 ι_B： $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{Q}$，限制 $\iota_B|_{\mathcal{A}}$ 通过映射 ρ： $\mathcal{A} \to \mathcal{C}(\mathcal{E})$进行分解，其中 $\rho =_{df} \iota_{\mathcal{A}_0} \circ \iota_C^{-1}$： $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_0 \to \mathcal{C}(\mathcal{E})$，并且其中 $\iota_{\mathcal{A}_0}$： $\mathcal{A}_0 \hookrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{E})$ 是包含映射。（事实上，$\iota_B|_{\mathcal{A}} = \iota_C \circ \rho$。）

因此，由 [45] 命题 1.4，存在一个 *-同态 Ψ： $\mathcal{B} \to \mathcal{C}(\mathcal{E})$，使得

$$\Psi|_{\mathcal{A}} = \rho. \tag{3.7.1}$$

注意，在 $\mathcal{B}$ 中，对所有 $d \in \mathcal{D}$，有 $\pi_C(U)(\iota_C \circ \phi(d))\pi_C(U)^* = \psi(d)$。因此，由 (3.7.1) 以及 ρ 和 Ψ 的定义，在 $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ 中存在一个酉元 $w \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$，使得

$$w\phi(d)w^* = \psi(d) \text{ for all } d \in \mathcal{D}.$$

□

命题 3.8. 设 $\mathcal{B}$ 为非单位单 σ-含幺 C*-代数，使得 $C(\mathcal{B})$ 是适当无限的。设 $\mathcal{A}$ 为含幺可分核 C*-代数，且 ϕ： $\mathcal{A} \to C(\mathcal{B})$ 为满且适当无限的含幺 *-单同态；即对所有 $a \in \mathcal{A}_+ - \{0\}$，存在 $x \in C(\mathcal{B})$ 使得

$$x\phi(a)x^* = 1_{C(\mathcal{B})}. \tag{3.8.1}$$

（见 *3.2*。）

则 $\phi(\mathcal{A})'$ 是适当无限的。

证明。考虑直和（或“对角和”） $\rho =_{df} \phi \oplus 0$，它将 $\mathcal{A}$ 映入 $\mathbb{M}_2 \otimes C(\mathcal{B})$。由于 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 是适当无限的，映射 ρ 作为映入 $\mathbb{M}_2 \otimes \mathcal{C}(\mathcal{B})$ 的映射仍满足 (3.8.1)（尽管 ρ 不是含幺的）。因此，由 [7] 定理 2.9，存在 $v \in \mathbb{M}_2 \otimes C(\mathcal{B})$ 使得

$$v\rho(a)v^* = \phi(a) \oplus \phi(a) \text{ in } \mathbb{M}_2 \otimes \mathcal{C}(\mathcal{B}) \tag{3.8.2}$$

对所有 $a \in \mathcal{A}$，其中 $\oplus$ 是“对角和”。

显然，我们可以假设 $v^*v \leq 1 \oplus 0$ 和 $vv^* = 1 \oplus 1$.

由于 ρ 和 $\phi \oplus \phi$ 都是 *-同态，由 (3.8.2) 可知

$$v\rho(a)v^*v\rho(a)v^* = (\phi(a) \oplus \phi(a))^2 = \phi(a^2) \oplus \phi(a^2) = v\rho(a^2)v^* = v\rho(a)\rho(a)v^*$$

对所有 $a \in \mathcal{A}$。上述所有 $\oplus$ 都是“对角和”。

因此，对于所有 $a \in \mathcal{A}$， $v^*v\rho(a)(1 - v^*v)\rho(a)v^*v = 0$。因此，投影 v^*v 与 $\rho(\mathcal{A})$中的每个元素都可交换。

因此，在 $\mathbb{M}_2 \otimes \mathcal{C}(\mathcal{B})$ 中，

$$\begin{aligned}(\phi(a) \oplus \phi(a))v &= v(\phi(a) \oplus 0)v^*v \text{ (from (3.8.2) and the definition of } \rho)\\ &= v(\phi(a) \oplus 0) \text{ (since } \rho(a) \text{ commutes with } v^*v)\\ &= v(\phi(a) \oplus \phi(a)) \text{ (since } v^*v \leq 1 \oplus 0)\end{aligned}$$

对所有 $a \in A$。在上文中，所有 $\oplus$ 均为“对角和”。

因此， $v \in \mathbb{M}_2(\phi(A)')$.因此， v 见证了 $1 \oplus 1 \preceq 1 \oplus 0$ 属于 $\mathbb{M}_2(\phi(A)')$。

□

3.9. 对于一个 C*-代数 $\mathcal{D}$，我们用 $\mathcal{D}^+$ 表示 $\mathcal{D}$的强制单位化。也就是说，若 $\mathcal{D}$ 是非单位的，则 $\mathcal{D}^+$ 是 $\mathcal{D}$的最小单位化；若 $\mathcal{D}$ 是幺的，则 $\mathcal{D}^+ =_{df} \mathcal{D} \oplus \mathbb{C}$。

现在我们可以对满的纯无限扩张进行分类；也就是说，我们计算 $\mathbf{Ext}^{fpi}(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$。论证与 [19] 定理 4.4 非常相似，我们感谢 J. Gabe 指出了其中一部分论证。

定理 3.10. 设 $\mathcal{A}$是可分的核 C*-代数，且 $\mathcal{B}$ 是非单位的、 σ-幺的单 C*-代数，并且 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 是适当无限的且 K_1-单射。

那么典范同态

$$\Gamma : \mathbf{Ext}_{fpi}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \to KK(\mathcal{A},\mathcal{C}(\mathcal{B})) : [\phi]_{Ext} \mapsto [\phi]_{KK}$$

是群同构。

证明。 由基本的 KK 理论可知， Γ是一个定义良好的群同态。

首先，我们验证 Γ 是满射。任取 $x \in KK(\mathcal{A},\mathcal{C}(\mathcal{B}))$。由[18], 的定理 A，存在一个 *-同态 $\phi_1 : \mathcal{A} \to \mathcal{C}(\mathcal{B})$，使得 $[\phi_1]_{KK} = x$。根据定理 3.6，取 $\phi_0 : \mathcal{A} \to \mathcal{C}(\mathcal{B})$ 为一个满的纯无限扩张，具有大补，并满足 $[\phi_0]_{Ext} = 0 \in \mathbf{Ext}^{fpi}(\mathcal{A},\mathcal{B})$。那么 $\phi_0 \oplus \phi_1$ 是一个具有大补的满纯无限扩张，其中 $\oplus$是 BDF 和（见 2.3；注意，存在 $x \in \mathcal{C}(\mathcal{B})$ 使得 $x(\phi_0 \oplus \phi_1)x^* = 1_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}$，因为对 ϕ_0 也有类似的等式 —— 见 3.2（3.2.1））。因此 $[\phi_0 \oplus \phi_1]_{Ext} \in \mathbf{Ext}^{fpi}(\mathcal{A},\mathcal{B})$，并且

$$\Gamma([\phi_0 \oplus \phi_1]_{Ext}) = \Gamma([\phi_0]_{Ext} + [\phi_1]_{Ext}) = \Gamma([\phi_1]_{Ext}) = x.$$

其次，我们证明 Γ 是单射。假设 ϕ，ψ：$\mathcal{A} \to \mathcal{C}(\mathcal{B})$ 是满纯无限扩张，且具有大补，并且 $\Gamma([\phi]_{Ext}) = \Gamma([\psi]_{Ext})$；也就是说，$[\phi]_{KK} = [\psi]_{KK}$。

令 $\mathcal{A}^+$ 为 $\mathcal{A}$ 的强制单位化（见 3.9）。令 ϕ^+，ψ^+：$\mathcal{A}^+ \to \mathcal{C}(\mathcal{B})$ 为分别是 ϕ 和 ψ 的唯一含幺扩张的 *-同态。也就是说，$\phi^+(1_{\mathcal{A}^+}) = 1_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}$, $\phi^+|_{\mathcal{A}} = \phi$,$\psi^+(1_{\mathcal{A}^+}) = 1_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}$，且 $\psi^+|_{\mathcal{A}} = \psi$。

接下来，我们证明 ϕ^+ 和 ψ^+ 都是满且纯无限的。只需证明 ϕ^+ 是满且纯无限的（因为证明 ψ^+ 的过程完全相同）。令 $a \in \mathcal{A}^+$ 为一个非零正元。若 $a \in \mathcal{A}$，则由于 $\phi^+|_A = \phi$ 和 ϕ 是满且纯无限的，我们可以找到 $x \in \mathcal{C}(\mathcal{B})$，使得 $x\phi(a)x^* = 1_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}$ （见 3.2 (3.2.1)）；因此，$x\phi^+(a)x^* = 1_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}$。现在假设 $a = \alpha 1 + a_0$，其中 $\alpha > 0$ 且 $a_0 \in \mathcal{A}$。那么 $\phi(a) = \alpha 1_{\mathcal{C}(\mathcal{B})} + \phi(a_0)$。由于 ϕ 具有大补，我们可以找到一个投影 $p \in \phi(\mathcal{A})^\perp$，使得 $p \sim 1_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}$ （因此，$p \perp \phi(a_0)$）。于是，令 $v \in \mathcal{C}(\mathcal{B})$ 为一个偏等距，其中 $v^*v = p$ 且 $vv^* = 1_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}$。因此，若取 $x =_{df} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} v$，则 $x\phi^+(a)x^* = 1_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}$。由于 $a \lneq (\mathcal{A}^+)_+ - \{0\}$ 是任意的，ϕ^+ 是满且纯无限的（见 3.2 (3.2.1)）。同理，ψ^+ 也是满且纯无限的。

根据命题 3.8，并且由于适当无限 C*-代数含有 O_∞ 的幺副本，ϕ^+ 和 ψ^+ 都满足按 [18] (1.1) 意义下的强 O_∞-稳定性质（另见 [18]定义 4.1 和注 4.2）。此外，不难验证（例如，考察 $0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}^+ \to \mathbb{C} \to 0$ 的 KK 中的六项正合列），由于 $[\phi]_{KK} = [\psi]_{KK}$ 属于 $KK(\mathcal{A},\ \mathcal{C}(\mathcal{B}))$, $[\phi^+]_{KK} = [\psi^+]_{KK}$ 属于 $KK(\mathcal{A}^+,\ \mathcal{C}(\mathcal{B}))$。因此，根据 [18] 定理 B，$\phi^+$ 和 ψ^+ 渐近酉等价。因此，ϕ 和 ψ 渐近酉等价。因此，根据引理 3.7（另见 [19] 命题 4.3），ϕ 和 ψ 弱酉等价。因此，根据 [19] 命题 3.7（更初等的证明另见 [7] 引理 2.2），ϕ 和 ψ 酉等价；即，$[\phi]_{Ext} = [\psi]_{Ext}$ 属于 $\mathbf{Ext}^{fpi}(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$。

□

定义 3.11。 设 $\mathcal{B}$ 为 σ-幺、非幺 C*-代数，且 $\mathcal{C}$（$\mathcal{B}$）是适当无限的 .

若对所有 $A \in \mathcal{C}(\mathcal{B})_+$，只要 A 在 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 中是满的（即 $Ideal(A) = \mathcal{C}(\mathcal{B})$），就存在一个 $X \in \mathcal{C}(\mathcal{B})$，则称 $\mathcal{B}$ 具有强余代数因子分解性质（强 CFP），使得

$$XAX^* = 1_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}.$$

3.12. 强余代数因子分解性质（强 CFP）不同于通常的余代数因子分解性质（CFP）（[28]; [38]），因为在原 CFP 中，典范理想 $\mathcal{B}$ 被假设为稳定的，而正元 A 被假设具有这样的性质：$C^*(A)$ 中的每个非零元素在 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 中都是满的。

回顾一下，对于可分稳定 C*-代数 $\mathcal{B}$，$\mathcal{B}$ 具有 CFP，当且仅当 $\mathcal{B}$ 的每个范数满扩张都是核吸收的（[28], [38]）；因此，CFP 刻画了一类 C*-代数，对于这类代数，可以用一种具体方式挑选出能够通过 KK^1 进行分类的扩张，正如 BDF–Kasparov 理论中所做的那样。我们利用强 CFP 将这一点推广到我们的情形（见定理 3.14）。

与通常的 CFP 类似，许多 C*-代数具有强 CFP（例如，见命题 3.17 和 3.16）。最后，事实证明，CFP 性质与 C*-代数自身的重要结构性质密切相关，例如单实秩零 C*-代数的二分问题（例如，见 [29], [38], [43]）；我们想知道强 CFP 是否也具有这种性质。

3.13. 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是 C*-代数，且 $\mathcal{B}$ 非单位。我们将具有大补的满扩张 $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}(\mathcal{B})$ 的所有酉等价类所成的集合记为 $\mathbf{Ext}^f(\mathcal{A}, \mathcal{B})$。

此外，若 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 适当无限，则 $\mathbf{Ext}^f(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 具有 BDF 和，其定义如 2.3 节对 $\mathbf{Ext}^{fpi}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 所述。

定理 3.14. 设 $\mathcal{A}$ 是可分核 C*-代数，且 $\mathcal{B}$ 是具有强 CFP 的非单位 σ-幺单 C*-代数，并且 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 适当无限且 K_1 单射。

那么典范同态

$$\Gamma : \mathbf{Ext}_f(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \to KK(\mathcal{A}, \mathcal{C}(\mathcal{B})) : [\phi]_{Ext} \mapsto [\phi]_{KK}$$

是群同构。

证明。这由定理 3.10 以及以下事实得出：由于 $\mathcal{B}$ 具有强 CFP，每个满扩张 $\mathcal{A} \to \mathcal{C}(\mathcal{B})$ 都自动是纯无限的（因此，$\mathbf{Ext}^{fpi}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathbf{Ext}^f(\mathcal{A}, \mathcal{B})$）。□

3.15. 为了证明与通常的 CFP 一样，许多 C*-代数满足强 CFP，我们首先回顾一些关于 Cuntz 半群“非稳定化”版本的记号。（参见 [9] 和[47]。）

设 $\mathcal{B}$ 为一个 C*-代数。回顾 $\mathbb{M}_\infty(\mathcal{B}) =_{df} \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{M}_n(\mathcal{B})$，其中对于所有 n，嵌入$\mathbb{M}_n(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathbb{M}_{n+1}(\mathcal{B})$：$a \mapsto diag(a, 0)$。对于 $a \in \mathbb{M}_k(\mathcal{B})_+$ 和 $b \in \mathbb{M}_l(\mathcal{B})_+$，令 $a \oplus b = diag(a, b) \in \mathbb{M}_{k+l}(\mathcal{B})_+$，并回顾，$a \precsim b$ 当且仅当存在一个序列 $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ 属于 $\mathbb{M}_{k+l}(\mathcal{B})$，使得 $x_m b x_m^* \to a$。若 $a \precsim b$ 且 $b \precsim a$，记作 $a \sim b$。置 $W(\mathcal{B}) =_{df} \mathbb{M}_\infty(\mathcal{B})/\sim$，并令 $[a]$ 表示包含 a的 $\sim$-等价类。

定义一个 加法以及 $W(\mathcal{B})$ 上的偏序如下：对所有 $a,\ b \in \mathbb{M}_\infty(\mathcal{B})_+$, $[a] + [b] =_{df} [a \oplus b]$ and $[a] \leq [b] \Leftrightarrow a \precsim b$。于是，$W(\mathcal{B})$ 是一个偏序阿贝尔半群。

如果对于所有 $[a],\ [b] \in W(\mathcal{B})$ 以及所有 $m,\ n \in \mathbb{N}$，满足 $n[a] \leq m[b]$ 和 $n > m$，都有 $[a] \leq [b]$，则称 $W(\mathcal{B})$ 是几乎无孔的。

我们从一个标准计算开始。

命题 3.16. 设 $\mathcal{B}$ 是一个非单位 σ-单位 C*-代数，其中 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 是适当无限的，且 $W(\mathcal{C}(\mathcal{B}))$ 几乎无孔。

则 $\mathcal{B}$ 具有强 CFP。

证明。设 A 是 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$+中的一个满元。因此，设 $\{X_n\}_{n=1}^k$ 属于 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$，使得 $1_{\mathcal{C}(\mathcal{B})} = \sum_{n=1}^k X_n A X_n^*$。那么 $[1_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}] \leq k[A]$ 属于 $W(\mathcal{C}(\mathcal{B}))$。由于 $1_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}$ 是适当无限的，故 $[1_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}] + [1_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}] \leq [1_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}]$。于是 $(k+1)[1_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}] \leq k[A]$ 属于 $W(\mathcal{C}(\mathcal{B}))$。由于 $W(\mathcal{C}(\mathcal{B}))$几乎无孔，故可得 $[1_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}] \leq [A]$ 属于 $W(\mathcal{C}(\mathcal{B}))$。于是存在一个序列 $\{Y_n\}$ 属于 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$，使得 $Y_n A Y_n^* \to 1_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}$在范数拓扑下成立。由连续函数演算可知，我们可以找到 $X \in \mathcal{C}(\mathcal{B})$，使得 $XAX^* = 1_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}$。由于 A 是任意的， $\mathcal{B}$ 具有强 CFP。□

下一个结果可由 [16] 定理 B 立即推出。不过，由于 [16]尚未发表，我们简要概述证明。

回忆一下，对于非幺 C*-代数 $\mathcal{B}$， $\mathcal{B}^\sim$ 是 $\mathcal{D}$的最小单位化，

命题 3.17. 设 $\mathcal{B}$ 是一个非单位、可分的 $\mathcal{Z}$-稳定 C*-代数。

那么 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 和 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 都是可分地 $\mathcal{Z}$-稳定的；也就是说，若 $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}(\mathcal{B})$ （或 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$）是一个可分 C*-子代数，则存在一个可分 C*-代数 $\mathcal{D}_1$，使得 $\mathcal{D}_1$ 是 $\mathcal{Z}$-稳定的，并且 $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_1 \subset \mathcal{M}(\mathcal{B})$（分别为 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$）。

因此， $W(\mathcal{M}(\mathcal{B}))$和 $W(\mathcal{C}(\mathcal{B}))$几乎无孔。

证明概要。由 [15] 定理 C， $\mathcal{C}(\mathcal{B}^\sim \otimes \mathcal{Z} \otimes \mathcal{K})$可分地 $\mathcal{Z}$-稳定。由于 $\mathcal{Z}$-稳定性在扩张下保持（[50] 定理 4.3）， $\mathcal{M}(\mathcal{B}^\sim \otimes \mathcal{Z} \otimes \mathcal{K})$可分地 $\mathcal{Z}$-稳定。由 [28]命题 3.1，可找到一个投影 $P \in \mathcal{M}(\mathcal{B}^\sim \otimes \mathcal{Z} \otimes \mathcal{K})$，使得 $P(\mathcal{B}^\sim \otimes \mathcal{Z} \otimes \mathcal{K})P \cong \mathcal{B} \otimes \mathcal{Z} \cong \mathcal{B}$。因此 $P\mathcal{M}(\mathcal{B}^\sim \otimes \mathcal{Z} \otimes \mathcal{K})P \cong \mathcal{M}(\mathcal{B})$。但是，由于 $\mathcal{Z}$-稳定性在遗传 C*-子代数下保持（[50] 推论 3.1）， $P\mathcal{M}(\mathcal{B}^\sim \otimes \mathcal{Z} \otimes \mathcal{K})P$，因而 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$可分地 $\mathcal{Z}$-稳定。由于 $\mathcal{Z}$-稳定性在商下保持（[50] 推论 3.3）， $\mathcal{C}(\mathcal{B})$可分地 $\mathcal{Z}$-稳定。

现在证明 $W(\mathcal{C}(\mathcal{B}))$ 几乎无孔。（关于 $W(\mathcal{M}(\mathcal{B}))$ 的证明类似。）假设 $[a], [b] \in W(\mathcal{C}(\mathcal{B}))$，且 $n > m$ 满足 $n[a] \leq m[b]$。设 $a, b \in \mathbb{M}_L(\mathcal{C}(\mathcal{B}))_+$。那么存在一个序列 $\{x_l\}$，属于 $\mathbb{M}_{nL}(\mathcal{C}(\mathcal{B}))$，且满足 $x_l(\bigoplus^m b) x_l^* \to \bigoplus^n a$。由于 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 是可分的 $\mathcal{Z}$-稳定的，取 $\mathcal{D}_1$ 为 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 的一个可分 $\mathcal{Z}$-稳定 C*-子代数，使得 $a, b \in \mathbb{M}_L(\mathcal{D}_1)$，并且对所有 l 都有 $x_l \in \mathbb{M}_{nL}(\mathcal{D}_1)$。因此， $n[a] \leq m[b]$ 属于 $W(\mathcal{D}_1)$。由于 $\mathcal{D}_1$ 是 $\mathcal{Z}$-稳定的，根据 [47] 定理 4.5， $W(\mathcal{D}_1)$ 几乎无孔。因此， $[a] \leq [b]$ 属于 $W(\mathcal{D}_1)$。因此， $[a] \leq [b]$ 属于 $W(\mathcal{C}(\mathcal{B}))$。由于 $[a], [b], m, n$ 是任意的， $W(\mathcal{C}(\mathcal{B}))$ 几乎无孔。完全相同的论证表明，$W(\mathcal{M}(\mathcal{B}))$ 几乎无孔。

□

定理 3.18。设 $\mathcal{A}$ 是可分核 C*-代数，且 $\mathcal{B}$ 是非单位、可分、单且 $\mathcal{Z}$-稳定的 C*-代数，并且 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 是适当无限的。

那么典范同态

$$\Gamma : \mathbf{Ext}_f(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \to KK(\mathcal{A}, \mathcal{C}(\mathcal{B}))$$

是群同构。

证明概要。由命题 3.17 和 3.16， $\mathcal{B}$ 具有强 CFP。

接下来证明 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 是 K_1-单射的。设 $u \in \mathcal{C}(\mathcal{B})$ 是一个酉元，满足 $[u] = 0$ 属于 $K_1(\mathcal{C}(\mathcal{B}))$。由于 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 是适当无限且可分地 $\mathcal{Z}$-稳定的（命题 3.17），我们可以找到一个可分的 $\mathcal{Z}$-稳定 C*-代数 $\mathcal{D}_1$，使得 $\mathcal{D}_1$ 是适当无限的，$u \in \mathcal{D}_1 \subset \mathcal{C}(\mathcal{B})$， $[u] = 0$ 属于 $K_1(\mathcal{D}_1)$，且 $1_{\mathcal{C}(\mathcal{B})} \in \mathcal{D}_1$。根据 [46] 定理 6.2.3， $\mathcal{D}_1$ 是 K_1-单射的，因此 u 在 $U(\mathcal{D}_1)$ 中同伦于 1。于是， u 在 $U(\mathcal{C}(\mathcal{B}))$ 中同伦于 1。由于 u 是任意的， $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 是 K_1-单射的。

由上述内容和定理 3.14，结论得证。 □

3.19. 在即将发表的论文中（[41], [42]），我们将证明：如果 $\mathcal{B}$ 是一个非单位的 σ-幺简单纯 C*-代数，且 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$适当无限，那么 $W(\mathcal{C}(\mathcal{B}))$几乎无孔（由命题 3.16 可知，这意味着 $\mathcal{B}$ 具有强 CFP）。事实上，我们将证明这个 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$是纯的且具有实秩零，这也意味着 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$是 K_1-单射的（[32]）。因此，根据定理 3.14，在定理 3.18 中，我们可以将 $\mathcal{B}$ 可分且 $\mathcal{Z}$-稳定的假设替换为 $\mathcal{B}$的 σ-幺性和纯性

此外，在 [42], 对于一个 σ-幺、非单位、单、纯 C*-代数 $\mathcal{B}$ 的情况下，我们给出了 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 和 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 的 K 理论计算；这可用于给出定理 3.18 中同构的具体实例。

4. Classifying extensions: The case of purely infinite corona algebras

本节将分类扩张。与上一节（以及经典的 BDF–Kasparov 情形）不同，这里的扩张不必是满的。采用现有方法，需要假设冠代数具有纯无限性（不一定是单的）。关于本文所使用的一些预备记号和术语，我们再次请读者参阅第 2 节。

我们首先定义要计算的对象。在需要证明更多性质并进行分类之前，该定义本身不需要太多假设。

定义 4.1。设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是可分 C*-代数，且 $\mathcal{B}$ 非单位。假设 $\sigma:\ \mathcal{A}\to\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 是一个本质扩张。

那么，$\mathbf{Ext}_\sigma(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 由所有满足以下条件的 $[\phi]$ （见 *2.2*）组成：

(a) $\phi:\ \mathcal{A}\to\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 是本质扩张且有大补，并且(b) $Ideal_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}$ $(\phi(a))\ = Ideal_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}(\sigma(a))$ 对所有 $a\in\mathcal{A}$ 均成立。

4.2. 通过类似于 3.4 中的论证，如果 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 是性质无限的，且 $\mathcal{A}$ 可分且核，那么总能找到一个本质扩张 $\sigma:\ \mathcal{A}\to\mathcal{C}(\mathcal{B})$；并且对于任意本质扩张 $\sigma:\ \mathcal{A}\to\mathcal{C}(\mathcal{B})$，$\mathbf{Ext}_\sigma(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 非空。

4.3. 当 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 适当无限时，$\mathbf{Ext}_\sigma(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 上有一个*BDF* 和，其定义方式与 3.5 中完全相同（另见 2.3）。在此和运算下，$\mathbf{Ext}_\sigma(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 是一个阿贝尔半群。

为了给 $\mathbf{Ext}_\sigma(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 引入更多结构（例如群结构）并证明更多结果，我们还将假设 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 是纯无限的（不一定是单的）。

4.4. 回顾一下，若一个（可能非单的）C*-代数 $\mathcal{D}$ 的每个非零正元都适当无限——也就是说，对所有 $a\in\mathcal{D}_+$、$a\oplus a\preceq a\in\mathbb{M}_2(\mathcal{D})$均成立（见 3.1）——则称其为纯无限。

单纯无限冠代数最初由 Lin（[30]）刻画，此后关于扩张理论的大量研究都聚焦于这一情形（例如，见 [31], [33], [19]）。

因此，探索非单纯无限冠代数的情形便颇有意义。我们给出以下结果（定理 4.5），但不解释其中的定义或记号，以便让读者了解该理论的特点。有关定义、历史和证明，请参阅 [25]；我们还指出，[25], 中的结果陈述实际上更为一般。为使讨论简明，同时仍保持相对一般的层次，我们专门讨论简单纯典范理想的情形；并且指出，在稳定典范理想的情形下，相关陈述更容易理解（见定理 4.5 的最后一段）。

继续之前，我们指出，在本文余下部分，每当我们讨论非单位σ-单位典范理想 $\mathcal{B}$时，均假设 $\mathcal{B}$ 的每个拟迹都是迹。

定理 4.5。 设 $\mathcal{B}$ 是一个非单位 σ-单位简单纯 C*-代数，其可度量化迹单纯形 $T(\mathcal{B})$非零。

那么，以下各项等价：

(1) $\mathcal{B}$ 具有拟连续尺度。*(2)* $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 的正元关于迹具有严格比较性质。*(3)* $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 是纯无限的。*(4)* $\mathcal{M}(\mathcal{B})/\mathcal{I}_{min}$ 是纯无限的。*(5)* $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 有有限个理想。*(6)* $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 有有限个理想。*(7)* $\mathcal{I}_{min}=\mathcal{I}_{fin}$。*(8)* $V(\mathcal{M}(\mathcal{B}))$ 有有限个序理想。此外，假设 $\mathcal{B}$ 是稳定的。那么， $\mathcal{B}$ 具有拟连续尺度，当且仅当 $T(\mathcal{B})$ 有有限个极端点。

证明。 这可由 [25] 定理 7.11 和推论 7.12 立即得出，后者是一个更一般的结果。（再次注意，稳定典范理想的情形更容易理解。）□

由上可知，下面结果中的假设是合理的；该结果给出了$\mathbf{Ext}_\sigma(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$ 成为群的充分条件。

定理 4.6. 设 $\mathcal{A}$ 是一个可分核 C*-代数。设 $\mathcal{B}$ 是一个具有拟连续尺度的可分非单位单纯纯 C*-代数（等价地，根据定理 *4.5*， $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 是纯无限的）。

设 $\mathcal{A}\to\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 是一个本质扩张。则
$\mathbf{Ext}_\sigma(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 是一个阿贝尔群。（见 *4.3*。）

证明. 这由 [39] 定理 3.2 推出，其中假设（因而结论）更为一般。□

4.7. 我们注意到，在满足定理 4.6 中假设的情形下（等价地，满足定理 4.5 中任一条件的情形下），确实存在一个如定理 4.6 陈述中所述的本质扩张 σ，而且 $\mathbf{Ext}_\sigma(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 非空。证明使用了与第 3.4 段相同的论证。

为了计算对象 $\mathbf{Ext}_\sigma(\mathcal{A},\mathcal{B})$，从而分类扩张，我们还需要证明一些与命题 3.8 类似的结果，尽管需要一些技术上的补充：

引理 4.8. 设 $\mathcal{A}$ 为可分的幺核 C*-代数，并设 $\mathcal{B}$ 为具有拟连续尺度的可分、非单位、单、纯 C*-代数（等价地，由定理 *4.5*， $\mathcal{C}(\mathcal{B})$为纯无限）。

设 $\phi:\mathcal{A}\to\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 为幺本质扩张。
则存在偏等距 $v\in\mathbb{M}_2\otimes\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 使得

$$v(\phi(a)\oplus 0)v^*=\phi(a)\oplus\phi(a)\ \ in\ \mathbb{M}_2\otimes\mathcal{C}(\mathcal{B})$$

对所有 $a\in\mathcal{A}$。（此处， $\oplus$ 是通常的“对角和”。）

证明。 由于 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 是适当无限的，取 $S,T\in\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 为等距算子，使得 $SS^*+TT^*\le 1_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}$。（必然，$S$ 和 T 的值域正交。）现在考虑 *-同态 $\psi:\mathcal{A}\to\mathcal{C}(\mathcal{B})$

由 $\psi(a) =_{df} S\phi(a)S^* + T\phi(a)T^*$ 定义，对所有 $a \in \mathcal{A}$. 均成立。（也就是说， ψ 是 ϕ 与自身的 BDF 和。参见 2.3。）注意，对所有 $a \in \mathcal{A}$， $\psi(a) \in Ideal(\phi(a))$。

根据 [39]定理 2.12，令 $w \in \mathcal{C}(\mathcal{B})$ 满足：对于所有 $a \in \mathcal{A}.$， $w\phi(a)w^* = \psi(a)$。由于 ϕ 是幺的，$ww^* = \widetilde{SS^*} + \widetilde{TT^*}$ 是一个投影（属于 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$），因此， w 是一个偏等距。

$\widetilde{\ }$为简化记号，设 $S, T, \widetilde{w} \in \mathbb{M}_2 \otimes \mathcal{C}(\mathcal{B})$ 分别由 $S =_{df} S\oplus 0$, $T =_{df} T \oplus 0$, 以及 $\widetilde{w} =_{df} w\oplus 0$ 定义于 $\mathbb{M}_2\otimes\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 中，其中 $\oplus$是通常的“对角和”。注意到 $\widetilde{e}_{2,1} =_{df} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2\otimes\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 是一个偏等距，它见证了 $1 \oplus 0 \sim 0 \oplus 1$ 属于 $\mathbb{M}_2 \otimes \mathcal{C}(\mathcal{B})$，令 $v \in \mathbb{M}_2 \otimes \mathcal{C}(\mathcal{B})$ 为由 $v =_{df} (S^* + \widetilde{e}_{2,1}T^*)$ 定义的$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$偏等距。$\widetilde{w}$. 于是对所有 $a \in \mathcal{A}$，我们有

$$v(\phi(a) \oplus 0)v^* = \phi(a) \oplus \phi(a) \text{ in } \mathbb{M}_2 \otimes \mathcal{C}(\mathcal{B}),$$

其中 $\oplus$ 是“对角和”。 □

命题 4.9。 设 $\mathcal{A}$是一个含幺可分核 C^*-代数，且 $\mathcal{B}$ 是一个带拟连续尺度的可分、非含幺、单、纯 C^*-代数（等价地， $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 是纯无限的，见定理 *4.5*）。

设 $\phi\colon\ \mathcal{A} \to \mathcal{C}(\mathcal{B})$ 是一个含幺本质扩张。
则 $\phi(\mathcal{A})'$ 是适当无限的。

证明。 证明与命题 3.8 的证明完全相同，唯一的区别是将（3.8.2）——即应用 [39]定理 2.9——替换为本文的引理 4.8。 □

在继续计算对象 $\mathbf{Ext}_\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 的过程中，我们将简要回顾拓扑空间对 C*-代数的作用以及 Kirchberg 有趣的理想相关 KK 理论所涉及的一些记号和概念（见 [26]; 另见 [18], [36]）。我们仅（快速地）介绍最低限度的必要概念，并以 [18] 作为主要参考文献；更多详细内容亦请参阅该文。

4.10. 回想一下，完备格 是指这样一种偏序集，其中每个子集都有上确界和下确界（例如，见 [18]第 10.1小节）。对于拓扑空间 X，令 $\mathcal{O}(X)$表示 X的开子集集族。那么 $\mathcal{O}(X)$是一个偏序集，其序关系为子集关系。事实上， $\mathcal{O}(X)$是一个完备格，其中下确界和上确界按以下方式定义：设 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 $\mathcal{O}(X)$ 中的一个集族（即， $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 X的开子集集族）。那么 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 的下确界为 $Int(\bigcap_{\alpha\in I} G_\alpha)$（即 $\bigcap_{\alpha\in I} G_\alpha$的内部）。（见[18] 脚注38。）此外， $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 的上确界显然是$\bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha$。

类似地，对于 C*-代数 $\mathcal{D}$，若令 $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ 表示 $\mathcal{D}$ 的闭双边理想所构成的偏序集族（同样，其中序关系为子集关系），那么 $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ 是一个完备格，其上确界和下确界定义如下：设 $\{\mathcal{J}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ 中的一个集族（即， $\{\mathcal{J}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 $\mathcal{D}$ 的闭双边理想集族）。那么 $\{\mathcal{J}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 的上确界是 $\sum_{\alpha\in I} \mathcal{J}_\alpha$ （所有 $\mathcal{J}_\alpha$的代数和（有限和）的范数闭包）。（参见[18] 公式（10.2）。）此外，显然， $\{\mathcal{J}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 的下确界是 $\bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{J}_\alpha$。

4.11. 接下来，我们回顾一些关于拓扑空间在 C*-代数上的作用的基本记号和概念。关于这部分内容，我们主要参考 [18] 第 10.2 小节（并辅以第 10.1 和 10.3 小节）。设 X 为一个拓扑空间， $\mathcal{D}$ 为一个 C*-代数。回顾一下，$\mathcal{O}(X)$ 是 X的开子集所构成的（完备）格，而 $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ 是 $\mathcal{D}$ 的闭双边理想所构成的（完备）格（见前一段 4.10）。 X 在 $\mathcal{D}$ 上的作用 是一个保序映射 $\Phi_{\mathcal{D}}\colon\ \mathcal{O}(X) \to \mathcal{I}(\mathcal{D})$。称有序对 $(\mathcal{D}, \Phi_{\mathcal{D}})$ 为一个 X-C^*-代数 ——不过，有时在上下文（作用）明确时，我们会省略 $\Phi_{\mathcal{D}}$，直接称 $\mathcal{D}$ 为一个 X-C*-代数。为简化记号，我们有时也对每个 $U \in \mathcal{O}(X)$ 写作 $\mathcal{D}(U) =_{df} \Phi_{\mathcal{D}}(U)$。设 $\mathcal{E}$是另一个 C*-代数

并且 $\Phi_{\mathcal{E}}: \mathcal{O}(X) \to \mathcal{I}(\mathcal{E})$ 是 X 在 $\mathcal{E}$ 上的一个作用（即，$(\mathcal{E}, \Phi_E)$ 是另一个 X-C*-代数）。若映射 $\phi: \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ 满足

$$\phi(\mathcal{A}(U)) \subseteq \mathcal{E}(U) \text{ for all } U \in \mathcal{O}(X)$$

或者，等价地，$\phi \circ \Phi_{\mathcal{D}} \subseteq \Phi_{\mathcal{E}}$ 作为集合映射。

4.12. 回顾定义 1.8 方程之后第二段中的满等变映射的定义（另见 [18] 注记 10.19）：设 X, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\Phi_{\mathcal{D}}$ 和 $\Phi_{\mathcal{E}}$ 如前一段 4.11 所述（即，我们假设 $(\mathcal{D}, \Phi_{\mathcal{D}})$ 和 $(\mathcal{E}, \Phi_{\mathcal{D}})$ 是 X-C*-代数）。此外，假设对于每个 $d \in \mathcal{D}$，都存在一个最小的 $U_d \in \mathcal{O}(X)$，使得 $d \in \Phi_{\mathcal{D}}(U_d)$（即，存在一个最小的开子集 $U_d \subseteq X$，使得 $d \in \mathcal{D}(U_d)$）。那么，X-等变 *-同态 $\phi: \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ 称为 X-满，若对所有 $d \in \mathcal{D}$，$\phi(d)$ 在 $\mathcal{E}(U_d) = \Phi_{\mathcal{E}}(U_d)$ 中都是满的。（注意，对于所有 $d \in \mathcal{D}$，U_d 存在这一假设在 $\Phi_{\mathcal{D}}$ 为下半连续时成立。见 [18] 定义 10.8 及其后的段落。）

引理 4.13。设 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{E}$ 是 C*-代数，并设 $\phi: \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ 是一个 *-同态。设 X 为由 $X =_{df} Prim(\mathcal{E})$给出的拓扑空间，即 X 是 $\mathcal{E}$的本原理想空间，赋予 *Jacobson* 拓扑或包核拓扑（参见 [10] 第 *VII.3* 节或 [44]第 *4.1.2* 小节）。

设 $\phi: \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ 是一个 *-同态，并设 $\Phi_{\mathcal{D}}: \mathcal{O}(X) \to \mathcal{I}(\mathcal{D})$ 和 $\Phi_{\mathcal{E}}: \mathcal{O}(X) \to \mathcal{I}(\mathcal{E})$ 分别是 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{E}$ 上的 X作用，定义如下：

$$\Phi_{\mathcal{E}}: G \mapsto \bigcap_{\mathcal{J} \in X-G} \mathcal{J} \text{ and } \Phi_{\mathcal{D}}: G \mapsto \phi^{-1}(\Phi_{\mathcal{E}}(G)). \tag{4.13.1}$$

那么以下陈述成立：

(1) $\Phi_{\mathcal{E}}$ 是一个序同构（因此是双射）。(2) $\Phi_{\mathcal{D}}$ 保持下确界（即，$\Phi_{\mathcal{D}}$ 保持 $\mathcal{O}(X)$任意子集的下确界）。此外，若 $\mathcal{O}(X)$ 是有限的，则 $\Phi_{\mathcal{D}}$ 保持 $\mathcal{O}(X)$中非空递增网的上确界。(3) 对于每个 $d \in \mathcal{D}$，都存在一个最小开子集 $U_d \subseteq X$，使得 $d \in \mathcal{D}(U_d)$。(4) *-同态 ϕ 是 X-等变的且 X-满。(5) 设 $\psi: \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ 是一个 *-同态。那么

$$Ideal(\psi(a)) = Ideal(\phi(a)) \text{ for all } a \in \mathcal{D} \tag{4.13.2}$$

当且仅当 ψ 是 X等变的且 X满。

证明。陈述 (1) 由 [44] 定理 4.1.3 及其证明得出。

对于陈述 (2)，我们首先证明 $\Phi_{\mathcal{D}}$ 保下确界。设 $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是$\mathcal{O}(X)$中的一个集族。我们有

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathcal{D}}\left(\inf\{G_\alpha : \alpha \in I\}\right) &= \phi^{-1}\left(\Phi_{\mathcal{E}}\left(\inf\{G_\alpha : \alpha \in I\}\right)\right) \text{ (definition of } \Phi_{\mathcal{D}}) \\
&= \phi^{-1}\left(\inf\{\Phi_{\mathcal{E}}(G_\alpha) : \alpha \in I\}\right) \text{ (by (1), } \Phi_{\mathcal{E}} \text{ preserves infima.)} \\
&= \phi^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in I} \Phi_{\mathcal{E}}(G_\alpha)\right) \text{ (definition of infimum in } I(\mathcal{E}); \text{ see 4.10.)} \\
&= \bigcap_{\alpha \in I} \phi^{-1}(\Phi_{\mathcal{E}}(G_\alpha)) \\
&= \bigcap_{\alpha \in I} \Phi_{\mathcal{D}}(G_\alpha) \text{ (definition of } \Phi_{\mathcal{D}}) \\
&= \inf\{\Phi_{\mathcal{D}}(G_\alpha) : \alpha \in I\} \text{ (definition of infimum in } I(\mathcal{D}); \text{ see 4.10).}
\end{aligned}$$

因此，由于 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是任意的， $\Phi_{\mathcal{D}}$ 保下确界。

对于(2)中的第二个陈述，假设 $\mathcal{O}(X)$是有限的。设 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 $\mathcal{O}(X)$中的递增网（因此 I 是有向集；并且对所有 $\alpha,\alpha'\in I$，若 $\alpha\leq\alpha'$ 则$G_\alpha\subseteq G_{\alpha'}$）。由于$\mathcal{O}(X)$是有限的，我们可以选取 $\beta\in I$，使得对所有满足 $\alpha\geq\beta$的 $\alpha\in I$，有 $G_\alpha=G_\beta$。因此，

$$\Phi_{\mathcal{D}}(\sup\{G_\alpha:\alpha\in I\})=\Phi_{\mathcal{D}}(G_\beta)=\sup\{\Phi_{\mathcal{D}}(G_\alpha):\alpha\in I\}.$$

由于 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是任意的，若 $\mathcal{O}(X)$有限，则 $\Phi_{\mathcal{D}}$ 保持递增上确界 .

我们现在证明(3)。设 $d\in\mathcal{D}$。考虑集族 $\mathcal{S}=_{df}\{G\in\mathcal{O}(X):\ d\in\Phi_{\mathcal{D}}(G)\}$。根据 $\Phi_{\mathcal{D}}$的定义，

$$\mathcal{S}=\{G\in\mathcal{O}(X):\phi(d)\in\Phi_{\mathcal{E}}(G)\}. \tag{4.13.3}$$

因此，由(1)， $\mathcal{S}\neq\emptyset$。由(2)， $\Phi_{\mathcal{D}}$ 保持任意下确界。因此，若我们令 $U_d\in\mathcal{O}(X)$由 $U_d=_{df}\inf(\mathcal{S})$ $=_{df}Int(\bigcap\mathcal{S})$给出，则

$$\Phi_{\mathcal{D}}(U_d)=\inf\Phi_{\mathcal{D}}(\mathcal{S})=_{df}\bigcap_{G\in\mathcal{S}}\Phi_{\mathcal{D}}(G) \tag{4.13.4}$$

根据 $\mathcal{S}$ 的定义，后一个集合包含 d。因此， $d\in\Phi_{\mathcal{D}}(U_d)$。因此，根据 $\mathcal{S}$ 和 U_d 的定义， U_d 是满足 $d\in\Phi_{\mathcal{D}}(U_d)$ 的 X 的最小开子集。

接下来, 现在证明 (4)。首先，对于所有 $G\in\mathcal{O}(X)$，根据 $\Phi_{\mathcal{D}}$ 的定义，我们有

$$\phi(\Phi_{\mathcal{D}}(G))=\phi(\phi^{-1}(\Phi_{\mathcal{E}}(G)))\subseteq\Phi_{\mathcal{E}}(G),$$

因此， ϕ 是 X-等变的。

此外，任取 $d\in\mathcal{D}$。令 $U_d\in\mathcal{O}(X)$ 和 $\mathcal{S}$ 如 (3) 及其证明中所述。由 (1) 和 (4.13.3)，我们有

$$Ideal(\phi(d))=\bigcap_{G\in\mathcal{S}}\Phi_{\mathcal{E}}(G). \tag{4.13.5}$$

但由 (1)， $\Phi_{\mathcal{E}}$ 保持下确界。因此， $\Phi_{\mathcal{E}}(\inf(\mathcal{S}))=\inf\Phi_{\mathcal{E}}(\mathcal{S})$。因此，根据 U_d 的定义（就在 (4.13.4) 之前）以及 4.10， $\Phi_{\mathcal{E}}(U_d)=\bigcap_{G\in\mathcal{S}}\Phi_{\mathcal{E}}(G)$。由此以及 (4.13.5)， $Ideal(\phi(d))=\Phi_{\mathcal{E}}(U_d)$。也就是说， $\phi(d)$ 在 $\Phi_{\mathcal{E}}(U_d)$ 中是满的。由于 $d\in\mathcal{D}$ 是任意的， ϕ 是 X-满的。

现在证明（5）的“仅当”方向。假设 $\psi:\mathcal{D}\to\mathcal{E}$ 是一个 *-同态，使得对于所有 $a\in\mathcal{D}$， $Ideal(\phi(a))=Ideal(\psi(a))$，也就是说，假设（4.13.2）成立。令 $G\in\mathcal{O}(X)$。由于 ϕ 是 X-等变的， $\phi(\Phi_{\mathcal{D}}(G))\subseteq\Phi_{\mathcal{E}}(G)$。因此 $Ideal(\phi(\Phi_{\mathcal{D}}(G)))\subseteq\Phi_{\mathcal{E}}(G)$。但根据假设（4.13.2）， $Ideal(\phi(\Phi_{\mathcal{D}}(G)))=Ideal(\psi(\Phi_{\mathcal{D}}(G)))$。于是， $\psi(\Phi_{\mathcal{D}}(G))\subseteq\Phi_{\mathcal{E}}(G)$。由于$G\in\mathcal{O}(X)$是任意的， ψ 是 X-等变的。

令 $d\in\mathcal{D}$ 为任意元素。根据（3），令 $U_d\in\mathcal{O}(X)$为 X 的最小开子集，使得$d\in\Phi_{\mathcal{D}}(U_d)$。由于 ϕ 是 X-满的， $\phi(d)$ 在 $\Phi_{\mathcal{E}}(U_d)$中是满的。但根据假设（4.13.2）， $Ideal(\psi(d))=Ideal(\phi(d))=\Phi_{\mathcal{E}}(U_d)$。因此， $\psi(d)$在 $\Phi_{\mathcal{E}}(U_d)$中是满的。由于 d 是任意的， ψ 是 X-满的。

最后，让我们证明 (5) 的“若”方向。设 $\psi:\mathcal{D}\to\mathcal{E}$ 是一个 X-等变的且X-满的 *-同态。令 $d\in\mathcal{D}$ 为任意元素。由 (3)，令 $U_d\in\mathcal{O}(X)$ 为 X 的最小开子集，使得 $d\in\Phi_{\mathcal{D}}(U_d)$。由于 ψ 是 X-满的， $\psi(d)$ 在 $\Phi_{\mathcal{E}}(U_d)$ 中是满的（见 4.12）。因此，$Ideal(\psi(d))=\Phi_{\mathcal{E}}(U_d)$。但由 (4)， ϕ 也是 X-等变的且 X-满的。因此， $Ideal(\phi(d))=\Phi_{\mathcal{E}}(U_d)=Ideal(\psi(d))$。由于 $d\in\mathcal{D}$ 是任意的，证毕。□

4.14. 我们将用到 Kirchberg 有趣的理想相关 KK 理论（[26]）。我们简要介绍这一主题，给出 KK 理论的广义同态（或 Cuntz）图像的理想类比。更多详情请参阅 [18] 第 12.3 节（不过我们的术语会略有不同

于他们的术语；另见 [36]）。粗略地说，理想相关 KK 理论与 KK 理论相同，只是我们要求所有映射都以适当的意义保持等变。

首先，我们简要回顾 KK 的广义同态（或 Cuntz）图景（见 [22]第 4 章）。设 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{E}$ 为 C*-代数，其中 $\mathcal{D}$ 可分且 $\mathcal{E}$ σ幺。回顾一下，$KK_h(\mathcal{D},\ \mathcal{E})$-余循环是由一对 *-同态 $(\phi,\ \psi)$ 组成的，它们满足 $\phi(d)\ -\psi(d)\ \in \mathcal{E}\otimes\mathcal{K}$ 对所有$d\in\mathcal{D}$均成立。还要回顾的是，若存在一条路径 $\{(\phi_t,\ \psi_t)\}_{t\in[0,1]}$，使得以下陈述成立，则称两个 $KK_h(\mathcal{D},\ \mathcal{E})$-余循环 $(\phi_0,\ \psi_0)$ 和 $(\phi_1,\ \psi_1)$ 是同伦的：

i. 对所有 $t\in[0,1]$，$(\phi_t,\ \psi_t)$ 都是一个 $KK_h(\mathcal{D},\ \mathcal{E})$-余循环。ii. 对所有 $d\in\mathcal{D}$，由 $t\mapsto\phi_t(d)$ 和 $t\mapsto\psi_t(d)$ 给出的两个映射 $[0,1]\to\mathcal{M}(\mathcal{E}\otimes\mathcal{K})$ 都是严格连续的。iii. 对所有 $d\in\mathcal{D}$，映射 $[0,1]\to\mathcal{E}\otimes\mathcal{K}:\ t\mapsto\phi_t(d)\ -\psi_t(d)$ 都是范数连续的。

我们用 $KK(\mathcal{D},\mathcal{E})$ 表示 $KK_h(\mathcal{D},\mathcal{E})$-上循环的同伦类。$KK(\mathcal{D},\mathcal{E})$ 具有一种显然的加法，使其成为一个阿贝尔群，并且任意 *-同态 $\xi:\ \mathcal{D}\to\mathcal{E}$ 都可以通过定义 $[\xi]_{KK}=_{df}[(\xi(\cdot)\otimes e_{1,1},0)]\in KK(\mathcal{D},\mathcal{E})$ 诱导出一个 KK 元素。（此处，$\xi(\cdot)\otimes e_{1,1}:\ \mathcal{D}\to\mathcal{E}\otimes\mathcal{K}\subset\mathcal{M}(\mathcal{E}\otimes\mathcal{K})$。）详见 [22] 第 4 章。

为了从 KK 过渡到 Kirchberg 的理想相关 KK 理论，我们现在引入一个拓扑空间的作用（见第 4.10、4.11 段）。我们将遵循 [18] 第 12.3 小节，并请读者参阅该处以了解更多细节，尽管我们使用的术语略有不同。现在设 X 为一个拓扑空间，并进一步假设 $\mathcal{D}$ 与 $\mathcal{E}$ 是 X-C*-代数（见 4.11）。则 $\mathcal{E}\otimes\mathcal{K}$ 是一个 X-C*-代数，其X-作用以显然的方式由 $\mathcal{E}$ 的作用诱导而来。称映射 $\phi:\ \mathcal{D}\to\mathcal{M}(\mathcal{E}\otimes\mathcal{K})$ 为弱X-等变的，如果对所有 $x\in\mathcal{E}\otimes\mathcal{K}$，映射 $\mathcal{D}\to\mathcal{E}\otimes\mathcal{K}:\ d\to x\phi(d)x^*$ 都是 X-等变的（见 4.11；另见 [18] 定义 11.1、注记 11.2 与推论 11.12）。称 $KK_h(\mathcal{D},\mathcal{E})$-上循环 (ϕ,ψ) 为弱 X-等变的，如果 ϕ 与 ψ 都是弱 X-等变的。称两个弱 X-等变的$KK_h(\mathcal{D},\mathcal{E})$-上循环 (ϕ_0,ψ_0) 与 (ϕ_1,ψ_1) 为 X-同伦的，如果它们（如同上一段；见条目 i.、ii. 与 iii.）经由一条路径 $\{(\phi_t,\psi_t)\}_{t\in[0,1]}$ 同伦，使得对所有 $t\in[0,1]$，(ϕ_t,ψ_t) 都是弱 X-等变的。$KK(X;\mathcal{D},\mathcal{E})$ 由所有弱X-等变的 $KK_h(\mathcal{D},\mathcal{E})$-上循环的 X-同伦类组成。同样，借助一种显然的加法，$KK(X;\ \mathcal{D},\mathcal{E})$ 是一个阿贝尔群，并且给定的 X-等变 *-同态 $\xi:\ \mathcal{D}\to\mathcal{E}$ 诱导出一个元素 $[\xi]_{KKX}=_{df}[(\xi(\cdot)\otimes e_1,1,0)]\in KK(X;\mathcal{D},\mathcal{E})$。（不难看出，$\xi(\cdot)\otimes e_1,1:\ \mathcal{D}\to\mathcal{E}\otimes\mathcal{K}\subset\mathcal{M}(\mathcal{E}\otimes\mathcal{K})$ 是弱 X-等变的。）详见 [18] 第 12.3 节。

定理 4.15. 设 $\mathcal{A}$ 是一个可分核 *C**-代数，且 $\mathcal{B}$ 是一个具有准连续尺度的非单位、可分、单纯纯 *C**- 代数（等价地，根据定理 *4.5*，$\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 是纯无限的）。

设 $X=_{df}Prim(\mathcal{C}(\mathcal{B}))$（即 X 是 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 的本原理想空间，并赋予 *Jacobson* 拓扑），并设 $\sigma:\ \mathcal{A}\to\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 是一个单射 *- 同态。令 $\Phi_{\mathcal{A}}:\ O(X)\to\mathcal{A}$ 和 $\Phi_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}:\ O(X)\ \to\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 分别为作用在 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 上的作用，它们按 *(4.13.1)* 中的方式定义（在引理 *4.13* 的假设中，分别以 $\mathcal{A}$、$\mathcal{C}(\mathcal{B})$、σ 替换 $\mathcal{D}$、$\mathcal{E}$、ϕ）。

那么典范同态

$$\Gamma:\mathbf{Ext}_\sigma(\mathcal{A},\mathcal{B})\to KK(X;\mathcal{A},\mathcal{C}(\mathcal{B})):[\psi]_{Ext}\mapsto[\psi]_{KKX}$$

是一个群同构。（参见定理 *4.6* 和 *4.14*。）

证明。注意，根据 $\mathbf{Ext}_\sigma(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 的定义（见定义 4.1）以及引理 4.13 第 (5) 项，若 $[\psi]_{Ext}\in\mathbf{Ext}_\sigma(\mathcal{A},\mathcal{B})$，则 $\psi:\ \mathcal{A}\to\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 是 X-等变的，因此，ψ 诱导出一个元素

$[\psi]_{KKX} \in KK(X;\mathcal{A},\mathcal{C}(\mathcal{B}))$。（见 4.14 最后一段的末尾。）因此， Γ 是一个定义良好的群同态，这一点由上述内容以及理想相关 KK 理论的基本性质得出（例如，见 4.14 和 [18] 第 12 节）。

接下来，我们证明映射 Γ 是满射。我们的首要目标是验证 [18] 命题 15.6 中存在性定理的假设均得到满足。首先， $\mathcal{A}$ 是一个可分核 C*-代数。此外，根据引理 4.13 的第 (2) 项， $\mathcal{A}$ 按照 [18] 定义 10.8 的意义是一个下半连续 X-C*-代数。

接下来，由于 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 是适当无限的，它包含 O_∞ 的一个幺嵌入，因此存在 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$，即 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 中一个两两正交投影的序列，使得对所有 n， $p_n \sim 1_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}$。设 $d \in \mathcal{C}(\mathcal{B})$ 由 $d =_{df} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{n}$ 给出。则 $\mathcal{D}_1 =_{df} d\mathcal{C}(\mathcal{B})d$ 是 σ-幺、满的遗传 C*-子代数，且包含于 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$。此外，根据 d 的定义，并且由于 d 是 $\mathcal{D}_1$ 的严格正元素，不难验证 $\mathcal{D}_1$ 满足 [21] 定理3.3 中的稳定性刻画。因此，根据 [21] 定理3.3， $\mathcal{D}_1$ 是稳定的。因此， $\mathcal{D}_1$ 是 $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ 的一个 σ-幺、满、稳定的遗传 C*-子代数。

接下来，由引理 4.13 第 (4) 条， $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{C}(\mathcal{B})$ 是 X-等变且 X-满的。最后，回忆一下，$\mathcal{A}^+$ 是 $\mathcal{A}$的强制单位化（见 3.9）。若令 $\sigma^+ : \mathcal{A}^+ \to \mathcal{C}(\mathcal{B})$ 为 σ的唯一幺扩张，则由命题 4.9， σ^+ 在 [18] (1.1)的意义下强 O_∞-稳定。因此， σ 在 [18] (1.1)的意义下也强 O_∞-稳定。

由以上内容可知， [18] 命题 15.6 的假设均已满足。现在任取 $\alpha \in KK(X;\mathcal{A},\mathcal{C}(\mathcal{B}))$。由 [18] 命题 15.6，存在一个 X-等变且 X-满的 *-同态$\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}(\mathcal{B})$，使得 $[\phi]_{KKX} = \alpha$。如有必要，用 $\phi \oplus 0$ 替换 ϕ （其中 $\oplus$ 是 BDF 和；见 4.3 ），我们可以假设 ϕ 有大补。此外，由引理 4.13 第 (5) 条，对所有 $a \in \mathcal{A}$ ，都有$Ideal(\phi(a)) = Ideal(\sigma(a))$（这意味着 ϕ 是单射，因为 σ 是单射——也就是说，ϕ 是本质扩张）。因此， ϕ 导出了一个元素 $[\phi]_{Ext} \in \mathrm{Ext}_\sigma(\mathcal{A},\mathcal{B})$（见定义 4.1），且 $\Gamma([\phi]_{Ext}) = \alpha$。由于 $\alpha \in KK(X;\mathcal{A},\mathcal{B})$ 是任意的， Γ 是满射。

现在我们证明 Γ 是单射的。再次，我们首先检查唯一性定理 [18] Theorem F 的假设是否成立。首先，注意到 $\mathcal{A}$ 是可分核 C*-代数。此外，根据引理 4.13 第 (2) 项， $\mathcal{A}$ 是 X-C*-代数，且在 [18] 10.8 的意义下下半连续。

现在设 $[\phi]_{Ext}$， $[\psi]_{Ext} \in \mathbf{Ext}_\sigma(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$ 满足 $\Gamma([\phi]_{Ext}) = \Gamma([\psi]_{Ext})$；也就是说， $[\phi]_{KKX} = [\psi]_{KKX}$ 属于 $KK(X;\ \mathcal{A},\ \mathcal{C}(\mathcal{B}))$。因此 ϕ和 ψ都是具有大补的本质扩张，并且对于所有 $a \in \mathcal{A}$， $Ideal(\phi(a)) = Ideal(\sigma(a)) = Ideal(\psi(a))$。于是，根据引理 4.13 第 (5) 项， ϕ 和 ψ 都是 X-等变的，且为 X-满。

此外，通过将 ϕ和 ψ （分别）唯一地扩张为含幺扩张 ϕ^+ 和 ψ^+，使其取值于 $\mathcal{A}^+$，并应用命题 4.9，我们可知，按照 [18] (1.1) 的意义， ϕ和 ψ 是强 O_∞-稳定的。

因此， [18] 定理 F 的所有假设均已满足。于是，由 [18] 定理 F，按照 [18] (1.6) 的意义， ϕ和 ψ渐近地 Murray–von Neumann 等价。因此，由于 $\mathcal{C}$（$\mathcal{B}$）是适当无限的，且 ϕ 和 ψ 均有大补，并由命题 3.10 [17] ， ϕ 和ψ 渐近酉等价。因此，由引理 3.7， ϕ和 ψ 弱酉等价。注意，由定理 4.9 (4) [7] ， $\mathcal{C}$（$\mathcal{B}$）是 K_1-单射的。因此，由命题 3.7 [19] （另一种证明也见引理 2.2 [7] ），可得 ϕ和 ψ 酉等价。因此，$[\phi]_{Ext} = [\psi]_{Ext}$。由于 $[\phi]_{Ext}$ 和 $[\psi]_{Ext}$ 是任意的， Γ 是单射的。

□

4.16. 定理 4.15 之后，接下来的任务之一是为理想相关 KK 理论提供计算结果。对于原始的 Kasparov KK 理论，这通常意味着给出一个万有系数定理

（[48]）。但是，理想相关 KK 理论并不存在一般的万有系数定理（例如，参见 [4], [3], [12], [37], [33]）。此外，我们目前还没有全面了解这些理想的 K 理论及其他性质。因此，这些问题留待将来研究。

致谢

第二作者获得了国家自然科学基金委员会（项目编号：12201216）以及南开大学陈省身数学研究所访问学者项目的资助。我们衷心感谢 Chi-Keung Ng 教授慷慨提供的支持，以及研究所营造的良好科研环境。

References

[1] W. Arveson, 《C*-代数扩张札记》, 《杜克数学杂志》44 (1977), no. 2, 329-355. [2] B. Blackadar, 《算子代数的 K 理论》。第二版。数学科学研究所出版物，5。剑桥大学出版社，剑桥，1998。[3] R. Bentmann，具有实秩零和中间消去的 Kirchberg X-代数。《非交换几何杂志》8 (2014), no. 4, 1061-1081. [4] A. Bonkat, 《投射系统范畴中 C*-代数的双变 K 理论》, 博士论文，明斯特威斯特法伦威廉大学，2002，SFB 478 预印本系列，第 319 期。[5] L. G. Brown、R. Douglas 和 P. Fillmore, *Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C*-algebras.* 1973 58 128 算子理论会议论文集（达尔豪斯大学，哈利法克斯，新斯科舍省），第 – 页。*Lecture Notes in Math.*，第 345 卷，Spring，柏林，1973。[6] L. G. Brown、R. Douglas 和 P. Fillmore, 《C*-代数扩张与 K-同调》。《数学年刊》**105** (1977), 265–324.[7] A. Chand、P. W. Ng 和 A. Sutradhar，乘子酉群、扩张群与 K_1-内射性，《Banach 数学分析杂志》16 (2022), no. 2, 论文编号 22，共 34 页。[8] M. D. Choi 和 E. G. Effros, *The completely positive lifting problem for C*-algebras,* 《数学年刊》(2) **104** (1976), no. 3, 585-609. [9] J. Cuntz, 《单 C*-代数上的维数函数》, 《数学年刊》233 (1978), 145-153. [10] K. R. Davidson, 《C*-代数实例》, 菲尔兹研究所专著，美国数学会，罗得岛（1996）。[11] R. G. Douglas, 《C*-代数扩张与 K-同调》, 《数学年刊研究》第 95 号，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州（1980）。[12] S. Eilers、G. Restorff 和 E. Ruiz, 《Kirchberg 理想相关 KK 理论中的非分裂性》, 《加拿大数学通报》54 (2011), no. 1, 68-81. [13] G. Elliott 和 D. Handelman, 《C*-代数扩张的加法》。《太平洋数学杂志》137 (1989), no. 1, 87–121. [14] G.A. Elliott 和 D. Kucerovsky, 《抽象的 Voiculescu-Brown-Douglas-Fillmore 吸收定理》, 《太平洋数学杂志》198, No. 2, (2001), 385-409. [15] I. Farah, 《Calkin代数、Kazhdan 的 (T) 性质与强自吸收 C*-代数》, 《伦敦数学会会刊》127 (2023), no. 6, 1749-1774. [16] I. Farah 和 G. Szabo, 《余代数与强自吸收 C*-代数》。预印本。可从 arXiv:2411.02274v1 获取副本[17] J. Gabe, 《Kirchberg 的 O_2-稳定分类的新证明》, 《纯粹与应用数学杂志》761 (2020), 247-289. [18] J. Gabe, 《 O_∞-稳定 C*-代数的分类》。《美国数学会回忆录》293(2024), no.1461, v+115 页。[19] J. Gabe、H. Lin 和 P. W. Ng, 《具有连续尺度的 C*-代数扩张》。预印本。可从 arxiv.org/pdf/2307 15558 获取副本。D. Hadwin、M. Ma 和 J. Shen, 《适当无穷因子中的 Voiculescu 定理》, [20]《泛函分析杂志》290 (2026), no. 1, 论文编号 111198。[21] J. Hjelmborg 和 M. Rordam, 《关于 C*-代数的稳定性》, 《泛函分析杂志》155 (1998), no. 1, 153-170.

[22] K. K. Jensen 和 K. Thomsen, 《KK-理论入门》。Birkhauser，波士顿（1991）。[23] G. Kasparov, 《Hilbert C*-模：Stinespring 与 Voiculescu 定理》。《算子理论杂志》4 (1980), 133– 150.[24] G. Kasparov, 《算子 K-函子与 C*-代数扩张》。《苏联科学院消息·数学辑》44 (1980), no. 3, 571–636. [25] V. Kaftal、P. W. Ng 和 S. Zhang, 《纯无限冠代数》, 《算子理论杂志》82 (2019), no. 2, 307-355. [26] E. Kirchberg, 《非交换 Michael 选择原理与非单代数的分类》, 载于《C*-代数》（明斯特，1999），第 92-141 页，施普林格，柏林，2000。[27] E. Kirchberg 和 N. C. Phillips, 《正合 C*-代数嵌入 Cuntz 代数 O_2》, 《纯粹与应用数学杂志》525 (2000), 17-53. [28] D. Kucerovsky 和 P. W. Ng, 《余代数因子分解性质与近似酉等价》, 《休斯敦数学杂志》32 (2006), no. 2, 531-550. [29] D. Kucerovsky 和 P. W. Ng, 《S-正则性与余代数因子分解性质》, 《斯堪的纳维亚数学杂志》99 (2006), no. 2, 204-216. [30] H. Lin, 《具有连续尺度的单 C*-代数与简单余代数》, 《美国数学会会刊》112 (1991), no. 3, 871-880. [31] H. Lin, 《实秩零 C*-代数的扩张，II》, 《伦敦数学会会刊》(3) 71 (1995), no. 3, 641–674. [32] H. Lin, 《实秩零 C*-代数中以有限谱正规元逼近》, 《太平洋数学杂志》173 (1996), 443-489. [33] H. Lin, 《实秩零 C*-代数的扩张，III》, 《伦敦数学会会刊》(3) 76 (1998), no. 3, 634–666. [34] H. Lin, 《同态的稳定近似酉等价》, 《算子理论杂志》47 (2002), no. 2, 343-378.[35] V. Manuilov 和 K. Thomsen, 《E-理论是 KK-理论的一个特例》, 《伦敦数学会会刊》(3) 88 (2004), 455-478.[36] R. Meyer 和 R. Nest, 《拓扑空间上的 C*- 代数：引导类》, 《明斯特数学杂志》 2 (2009), 215-252.[37] R. Meyer 和 R. Nest, 《拓扑空间上的 C*- 代数：滤层 K 理论》, 《加拿大数学杂志》64 (2012), no. 2, 368-408. [38] P. W. Ng, 《余代数因子分解性质》。《当代数学》414, 美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，2006，97-110。可从 arxiv.org/pdf/math/0510248.pdf 获取副本。[39] P. W. Ng, 《关于纯无限冠代数扩张群的若干评注》, 《线性与多重线性代数》70 (2022), no. 13, 2459-2504. [40] P. W. Ng 和 T. Robin, 《冠代数中的投影与真无限性》, 《算子矩阵》17 (2023), no. 3, 671-691.[41] P. W. Ng 和 H. Thiel, 《简单纯 C*-代数的乘子代数与冠代数的纯性》。进行中的工作。[42] P. W. Ng 和 H. Thiel, 《简单纯 C*-代数的冠代数的实秩零》。进行中的工作。[43] E. Ortega、F. Perera 和 M. Rordam, 《余代数因子分解性质与细化幺半群》, 《美国数学会汇刊》363 (2011), no. 9, 4505-4525. [44] G. K. Pedersen, 《C*-代数及其自同构群》，学术出版社，伦敦，（1979）。[45] N. C. Phillips 和 N. Weaver, 《Calkin代数具有外自同构》, 《杜克数学杂志》139 1, 185 2007 202 ( ), no. - .[46] R. Rohde, 《C*-代数的 K_1-内射性》，博士论文，南丹麦大学，2009。可从 https://web.math.ku.dk/rordam/students/rohde-thesis.pdf 获取副本。[47] Mikael Rordam, 《 $\mathcal{Z}$ 15 2004 10, -吸收 C*-代数的稳定秩与实秩》。《国际数学杂志》( ), no. – .[48] J. Rosenberg 和 C. Schochet, 《Kasparov 广义 K-函子的 Künneth 定理与万有系数定理》, 《杜克数学杂志》55 (1987), no. 2, 431-474. [49] K. Thomsen, 《关于吸收扩张》, 《美国数学会会刊》129 5, 1409 2000 1417 ( ), no. - .[50] A. Toms 和 W. Winter, 《强自吸收 C*-代数》, 《美国数学会汇刊》359 (2007), no. 8, 3999-4029.

1065, 1084

[51] D. Voiculescu, 《非交换 Weyl–von Neumann 定理》。Rev. Roum. Math. Pures Appl. 21 (1976), 97–113.[52] N. E. Wegge–Olsen, 《K 理论与 C*-代数》, 牛津大学出版社, 牛津, 1993.Department of Mathematics, University of Louisiana at Lafayette, 217 Maxim Doucet Hall, 1401Johnston St., Lafayette, Louisiana, 70503, USA*Email address*: png@louisiana.eduSchool of Mathematical Sciences, Ocean University of China, 238 Songling Road, Laoshan District,Qingdao, Shandong, 266100, P. R. China*Email address*: cyw@ouc.edu.cn