arXiv:2602.20617v1 [math.AC] 24 Feb 2026

DG-模的级数与 Cohen-Macaulay 性

Yuancheng Ning 和 Xiaoyan Yang 浙江科技大学理学院，杭州 310023 电子邮箱：yangxy@zust.edu.cn

摘要

我们建立了 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(A)$ 中 DG模的投射维数与其级之间的不等式，并将完美 DG 模的概念引入为完满模的一种自然推广。我们证明，对于具有常振幅的局部 Cohen-Macaulay DG 环上的 DG模 M，其为 Cohen-Macaulay 当且仅当 M 是完美的且 $\mathrm{amp}M \leqslant \mathrm{ampR}\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$。我们对 Yoshida [《纯粹与应用代数杂志》123 (1998) 313–326] 中的猜想2.11 给出了肯定的回答。我们还研究了有限内射维数 DG-模的级，并考察了张量积下 Cohen-Macaulay 性的保持性。

关键词： 级；完美DG-模；Cohen–Macaulay DG-模*2020*年数学主题分类： 16E45, 13C14, 16E65.

1. 引言

设 R 是一个交换诺特环， M 是一个有限生成的 R-模。Rees 引入了 M的级 $\mathrm{grade}_R M$，即满足 $\mathrm{Ext}^t_R(M,\ R) \neq 0$的最小整数 $t \geqslant 0$。Rees [14] 证明，$\mathrm{grade}_R M$ 也等于包含在湮没子 $\mathrm{Ann}_R M$中的 R-正则序列的最大长度，这揭示了它与经典深度概念 $\mathrm{depth}_R M$之间的密切联系。 M 的投射维数 $\mathrm{projdim}_R M$是同调代数中的一个基本不变量。由于可以通过 M的投射分解计算 $\mathrm{Ext}^t_R(M,\ R)$，显然有 $\mathrm{grade}_R M \leqslant \mathrm{projdim}_R M$。

关于级与投射维数的研究经常考察集合 $\{i \geqslant 0 | \mathrm{Ext}^i_R(M,\ R) \neq 0\}$的结构。一个核心问题是确定该集合何时由连续整数构成，具体而言，何时等于区间 $[\mathrm{grade}_R M,\ \mathrm{projdim}_R M]$（或者更一般地，等于 $[\mathrm{depth} R - \mathrm{depth}_R M,$ 某个上界$]$）？ 对于交换诺特局部环 R，等式

$$\sup\{i \geqslant 0 | \mathrm{Ext}^i_R(M,R) \neq 0\} = \mathrm{depth} R - \mathrm{depth}_R M$$

已在许多涉及有限同调维数的情形中得到确立。例如，当 M 具有有限投射维数，或当 R 为 Gorenstein 时，这一结论成立。关于这一主题的相关研究可见一系列著作（例如 [1, 7, 8, 11, 24, 26]）。

有限生成的 R-模 M 若满足等式 $\mathrm{grade}_R M = \mathrm{projdim}_R M$，则称为完美。完美模在同调代数和代数

几何学中都发挥着重要作用。一项经典结果指出，在局部 Cohen-Macaulay 环上，有限生成模是 Cohen-Macaulay 的，当且仅当它是完美模。这揭示了完美这一同调性质与 Cohen-Macaulay 这一代数几何性质之间深刻的等价关系。

完美模的概念已成功推广。Foxby [8]将投射维数替换为 G-维数，引入了 G-完美模的概念。Jorge- P´erez、Martins 和 Mendoza-Rubio [10] 将投射维数替换为拟投射维数，引入了拟完美模。这些概念使人们得以在更广泛的环类（如 Gorenstein 环和 Cohen-Macaulay 环）上发展出类似于完美模理论的丰富理论，并进一步拓展了同调方法在研究模与环的性质方面的应用。

Yoshida [26]研究了涉及完美模与极大 Cohen-Macaulay 模的张量积。他证明，在局部 Cohen-Macaulay 环 R上，这类张量积总是 Cohen-Macaulay。更一般地，只要余维猜想成立，同样的结论便成立；也就是说，对于局部诺特环 R 以及一个有限生成的 R-模 M，若其投射维数有限，则等式 $\mathrm{dim}_R M + \mathrm{grade}_R M = \mathrm{dim} R$ 成立。Yoshida 随后提出了以下猜想。

猜想。设 R 为局部诺特环， M 为维数为正的完美 R-模， N 为有限生成的 R-模，且维数$_R N =$ 维数R。若 $M \otimes_R N$ 是 Cohen-Macaulay 的，则 N 是极大 Cohen-Macaulay R-模。

DG 环（微分分次环的简称）使我们能够在更广泛的背景下运用普通环的同调代数技巧。局部 Cohen-Macaulay DG 环理论为经典同调代数与交换代数提供了强有力的推广。它使我们能够在更一般的框架中研究环的基本性质，例如深度、正则序列以及奇点。局部 Cohen-Macaulay DG 环与模的系统研究由 Shaul 在 [17, 18] 中开创。他证明，Cohen-Macaulay 环与模的大量经典理论可以推广到 DG 框架，并给出了局部 Cohen-Macaulay DG 环的许多自然例子，例如序列正则 DG 环和局部 Gorenstein DG 环。在后续工作 [19], 中，Shaul 进一步发展了关于 Cohen–Macaulay DG 环的若干结果，丰富了这些结构在同调代数与代数几何中的理论。

本文聚焦于 DG-模的级与 Cohen-Macaulay 性，结构安排如下。第 2 节给出本文所涉及的定义和一些结果。第 3 节建立 DG-模的级与投射维数之间的不等式，并引入完美 DG 模的概念。在此框架下，我们将完美模的若干经典结果推广到完美 DG 模的情形。我们证明，对于常振幅局部 Cohen-Macaulay DG 环上的 DG模 M，它是 Cohen-Macaulay 的，当且仅当它是完美的且满足 $\mathrm{amp} M \leqslant$

amp$\mathrm{R}\Gamma_{\bar{\mathfrak{m}}}(M)$（见定理 3.4）。此外，我们对上述猜想给出了肯定的回答（见定理 3.6）。作为应用，我们给出 DG 环和 DG-模的若干 Cohen-Macaulay 判据，并对 Auslander 的余维猜想给出部分解答。第 4 节研究有限内射维数 DG-模的级，并得到公式 lc.维数 ${}_AM$ = 深度A − 级${}_AM$，该公式适用于任意具有有限内射维数的 $M \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(A)$（见定理 4.3）。此外，利用与 A 中的有限序列 $^{-}\boldsymbol{x} = \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n$ 相关联的 Koszul DG-模 $M/\!\!/^{-}\boldsymbol{x}$ 的 Cohen-Macaulay 性，我们考察了 DG 语境下张量积对 Cohen-Macaulay 性的保持性（见定理 4.5 和推论 4.6）。

2. 预备知识

本节汇集了本文中将用到的一些预备知识。术语方面，我们遵循 [25] 和 [17]。

DG-模。 一个结合 *DG*-环 A 是一个 $\mathbb{Z}$分次环 $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^i$，配备一个 $\mathbb{Z}$线性映射 $d\colon A \to A$，其次数为 $+1$，满足 $d \circ d = 0$，并且满足

$$d(ab) = d(a)b + (-1)^i ad(b) \tag{2.1}$$

对于 $a \in A^i$ 和 $b \in A^j$。若 DG-环 A 满足：对于 $a \in A^i$和 $b \in A^j$，有 $b \cdot a = (-1)^{i\cdot j}ab$，且当 i 为奇数时有 $a^2 = 0$，则称其为交换 DG-环。若 DG-环 A 对所有$i > 0$都满足 $A^i = 0$，则称其为非正 DG-环。若非正 DG-环 A 的环 $\mathrm{H}^0(A)$是诺特环，且 $\mathrm{H}^0(A)$-模 $\mathrm{H}^i(A)$对所有 $i < 0$都是有限生成的，则称其为诺特 DG-环。若 A 是一个诺特 DG-环，且 $(\mathrm{H}^0(A)\ \bar{\mathfrak{m}}, \bar{\kappa})$ 是一个局部环，则称 $(A, \bar{\mathfrak{m}}, \bar{\kappa})$ 是局部诺特的。除非另有说明，本文始终假设 A是一个满足 amp$A < \infty$ 的交换诺特 DG-环。

DG模 M 是一个分次 A-模，配有一个次数为 $+1$ 的微分，并满足类似于 (2.1) 的 Leibniz 法则。对于 DG模 M，定义下确界 $\inf M := \inf\{n \in \mathbb{Z} | \mathrm{H}^n(M) \neq 0\}$、上确界 $\sup M := \sup\{n \in \mathbb{Z} | \mathrm{H}^n(M) \neq 0\}$ 以及幅 $\mathrm{amp}M := \sup M - \inf M$。 M 的第 i 次移位记为 $M[i]$，其中 $i \in \mathbb{Z}$。 A 上的 DG-模的导出范畴记为 $\mathrm{D}(A)$，其幺半群积记为 $- \otimes^{\mathrm{L}}_A -$，内部 Hom 记为 $\mathrm{RHom}_A(-,-)$。由上同调有上界（分别为下界、有界）的 DG-模组成的全子范畴记为 $\mathrm{D}^-(A)$（分别记为 $\mathrm{D}^+(A)$、$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(A)$）；由具有有限上同调的 DG-模组成的 $\mathrm{D}(A)$ 的全子范畴记为 $\mathrm{D}_{\mathrm{f}}(A)$，并定义 $\mathrm{D}^-_{\mathrm{f}}(A) = \mathrm{D}^-(A) \cap \mathrm{D}_{\mathrm{f}}(A)$、$\mathrm{D}^+_{\mathrm{f}}(A) = \mathrm{D}^+(A) \cap \mathrm{D}_{\mathrm{f}}(A)$、$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(A) = \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(A) \cap \mathrm{D}_{\mathrm{f}}(A)$。

我们回顾由 Bird、Shaul、Sridhar 和 Williamson 在 [5] 中引入的 $M \in \mathrm{D}(A)$ 的投射维数、内射维数和平坦维数的定义。

投射维数 M 定义为

$$\text{投射维数}_A M = \text{下确界}\{n \in \mathbb{Z} | \mathrm{H}^i(\text{导出 } \mathrm{Hom}_A(M, Y)) = 0 \text{ 对任意 } Y \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(A) \text{ 和 } i > n + \text{上确界} Y\}。$$

将 M 的内射维数定义为

$$\mathrm{injdim}_A M = \inf\{n \in \mathbb{Z} | \mathrm{H}^i(\text{导出 } \mathrm{Hom}_A(Y, M)) = 0 \text{ 对任意 } Y \in \mathrm{D^b}(A) \text{ 和 } i > n - \inf Y\}。$$

M 的平坦维数 定义为

$$\mathrm{flatdim}_A M = \inf\{n \in \mathbb{Z} | \mathrm{H}^{-i}(Y \otimes^{\mathrm{L}}_A M) = 0 \text{ 对任意 } Y \in \mathrm{D^b}(A) \text{ 和 } i > n - \inf Y\}.$$

局部科恩-麦考利DG模。设 $\bar{\mathfrak{a}} \subseteq \mathrm{H}^0(A)$ 是一个理想。若对任意 $\bar{x} \in M$，存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\bar{\mathfrak{a}}^n \bar{x} = 0$，则称一个 $\mathrm{H}^0(A)$- 模 M 为 $\bar{\mathfrak{a}}$- 挠。范畴 $\mathrm{D}_{\bar{\mathfrak{a}}\text{-tor}}(A)$ 由这样的 DG-模 M 构成，其中每个 $\mathrm{H}^0(A)$-模 $\mathrm{H}^n(M)$ 都是 $\bar{\mathfrak{a}}$-挠。根据 [16], ，包含函子 $\mathrm{D}_{\bar{\mathfrak{a}}\text{-tor}}(A) \hookrightarrow \mathrm{D}(A)$ 有一个右伴随；将此右伴随与包含函子复合，得到三角函子 $\mathrm{R}\Gamma_{\bar{\mathfrak{a}}} : \mathrm{D}(A) \to \mathrm{D}(A)$，称为导出 $\bar{\mathfrak{a}}$-挠函子。导出 $\bar{\mathfrak{a}}$-进完备化 $\mathrm{RHom}_A(\mathrm{R}\Gamma_{\bar{\mathfrak{a}}}(A) A)$，记作 $\mathrm{L}\Lambda(A, \bar{\mathfrak{a}})$，是一个交换 DG-环。

设 $(A, \bar{\mathfrak{m}}, \bar{\kappa})$ 是一个局部 DG 环。Shaul [17] 将复形的 Krull 维数和深度的定义推广到了 DG 情形。DG-模 $M \in \mathrm{D}^-(A)$ 的局部上同调 Krull 维数 是数字

$$\mathrm{lc.dim}_A M := \sup\{\dim_{\mathrm{H}^0(A)} \mathrm{H}^\ell(M) + \ell | \ell \in \mathbb{Z}\},$$

其中维数$\dim_{\mathrm{H}^0(A)} \mathrm{H}^\ell(M)$是$\mathrm{H}^0(A)$-模$\mathrm{H}^\ell(M)$的通常Krull 维数。深度为DG模 $N \in \mathrm{D}^+(A)$的数

$$\mathrm{depth}_A N := \inf \mathrm{RHom}_A(\bar{\kappa}, N).$$

以下如果 [17], 一个 DG模 M 属于 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(A)$，则称其为局部 ***Cohen-Macaulay*** ，如果

$$\mathrm{amp} M = \mathrm{amp} A = \mathrm{amp} \mathrm{R}\Gamma_{\bar{\mathfrak{m}}}(M) = \mathrm{lc.dim}_A M - \mathrm{depth}_A M,$$

其中，最后一个等式由 [17, 定理 2.15] 和 [17, 命题 3.3]得出。局部 Cohen-Macaulay DG模 M 称为极大局部 ***Cohen–Macaulay*** ，如果 $\mathrm{lc.dim}_A M =$ 上确界 M +$\mathrm{lc.dim} A$。局部 DG 环 A 称为局部 ***Cohen-Macaulay*** ，如果 幅A =幅$\mathrm{R}\Gamma_{\bar{\mathfrak{m}}}(A)$。局部 DG 环 A 称为$Gorenstein$ ，如果 内射维数 ${}_A A < \infty$。

局部化。 令 $\pi_A : A \to \mathrm{H}^0(A)$ 为典范满射，$\pi^0_A : A^0 \to \mathrm{H}^0(A)$ 为其 0 次分量。给定素理想 $\bar{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Spec}\mathrm{H}^0(A)$，令 $\mathfrak{p} = (\pi^0_A)^{-1}(\bar{\mathfrak{p}}) \in \mathrm{Spec} A^0$，并定义 $A_{\bar{\mathfrak{p}}} := A \otimes_{A^0} A^0_{\mathfrak{p}}$。更一般地，给定 $X \in \mathrm{D}(A)$，我们定义

$$M_{\bar{\mathfrak{p}}} := M \otimes_A A_{\bar{\mathfrak{p}}} = M \otimes_{A^0} A^0_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{D}(A_{\bar{\mathfrak{p}}}).$$

若素理想 $\bar{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Spec}\mathrm{H}^0(A)$ 满足 $\mathrm{depth}_{A_{\bar{\mathfrak{p}}}} M_{\bar{\mathfrak{p}}} = \inf M_{\bar{\mathfrak{p}}}$，则称其为 M 的关联素理想。 M 的关联素理想集记作 $\mathrm{Ass}_A M$。 M 的支集是集合 $\mathrm{Supp}_A M := \{\bar{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Spec}\mathrm{H}^0(A) | M_{\bar{\mathfrak{p}}} \not\simeq 0\}$。按照 [18, 23], 的说法，若对所有 $\bar{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Supp}_A M$ 都有 $\mathrm{amp} M_{\bar{\mathfrak{p}}} = \mathrm{amp} M$，则称 $M \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(A)$ 具有常振幅。

序列正则 DG 环。 设 $(A, \bar{\mathfrak{m}}, \bar{\kappa})$ 为一个局部 DG 环，且 $M \in \mathrm{D}^+(A)$。元素 $\bar{x} \in \bar{\mathfrak{m}}$称为 M-正则 ，如果它是 $\mathrm{H}^{\inf M}(M)$-正则的，即乘法映射

$$\bar{x} : \mathrm{H}^{\inf M}(M) \to \mathrm{H}^{\inf M}(M)$$

是单射。归纳地，序列 $\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n\in\bar{\mathfrak{m}}$是 M-正则，如果 $\bar{x}_1$是 M-正则的，且序列 $\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n$是 $M/\!\!/\bar{x}_1M$-正则的。这里，$M/\!\!/\bar{x}_1M$是映射 $\bar{x}_1\colon\ M\to M$在 $\mathsf{D}(A)$ 中的锥。对于 $M\in\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(A)$，由中山引理有上确界$M=$ 上确界$M/\!\!/\bar{x}M$。由 [13, 引理 2.13]，$\bar{x}$是 M-正则的当且仅当幅$M=$幅$M/\!\!/\bar{x}M$。按照 [19],，局部 DG 环 $(A,\bar{\mathfrak{m}},\bar{\kappa})$ 称为序列正则，如果 $\bar{\mathfrak{m}}$ 由一个 A-正则序列生成。

下述引理在本文中经常用到。

引理 2.1。 ([13, 21, 22]). (1) 设 $M\in\mathsf{D}^{+}(A)$ $N\in\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(A)$ 满足 $\mathsf{projdim}_AN<\infty$，则 $\mathsf{depth}_A(M\otimes^{\mathrm{L}}_AN)=\mathsf{depth}_AM+\mathsf{depth}_AN-\mathsf{depth}A$。

(2) 设 $M,N\in\mathrm{D}^{-}{}_{\mathrm{f}}(A)$ 满足 $\mathrm{projdim}_AM<\infty$，则有一个不等式

$$\mathrm{lc.dim}_AN\leqslant\mathrm{lc.dim}_A(M\otimes^{\mathrm{L}}_AN)+\mathrm{projdim}_AM.$$

(3) 设 $M\in\mathsf{D}^{-}{}_{\mathrm{f}}(A)$ 满足 $\mathsf{projdim}_AM<\infty$，则 $\mathsf{projdim}_AM=\mathsf{depth}A-\mathsf{depth}_AM$。

(4) 设 $N\in\mathsf{D}^{+}{}_{\mathrm{f}}(A)$ 满足 $\mathsf{injdim}_AN<\infty$，则 $\mathsf{injdim}_AN-\mathsf{sup}N=\mathsf{depth}A$。

3. 完美与局部 Cohen-Macaulay DG-模

本节中，我们介绍 DG-模的级与完满性概念，并建立若干关于完美模的经典结果在 DG 情形下的类似结论。此外，我们研究 DG-模张量积的 Cohen-Macaulay性质，并对引言中的猜想给出肯定的回答。

定义 3.1. (1) $M\in\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(A)$ 的级，grade_AM，定义为以下公式

$$\mathrm{grade}_AM:=\mathrm{infRHom}_A(M,A).$$

(2) 如果 $\mathsf{grade}_AM=\mathsf{projdim}_AM+\mathsf{inf}A$，则称 DG 模 $M\in\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(A)$ 为完美。

由 [21, 引理 2.3(1)], 的证明可得一个等式

$$(*)\qquad\mathrm{grade}_AM=\inf\{\mathrm{depth}A_{\bar{\mathfrak{p}}}-\sup M_{\bar{\mathfrak{p}}}|\bar{\mathfrak{p}}\in\mathrm{Supp}_AM\}.$$

下一个引理给出了关于 DG-模的级的一些不等式。

引理 3.2. 设 A 是一个局部 *DG* 环，且 $M\in\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(A)$。则

(1) 级$_AM\geqslant$深度$A-$ lc.维数$_AM$.(2) 若 A 具有常振幅，则 级$_AM\leqslant$ lc.维数$A-$lc.维数$_AM+$下确界A。此外，若 A 是局部 *Cohen-Macaulay*，则 级$_AM=$深度$A-$ lc.维数$_AM$.

(3) 级$_AM\leqslant$ 投射维数$_AM$。此外，若 A 具有常振幅，则 级$_AM\leqslant$投射维数$_AM+$下确界A。

证明。 (1) 根据等式 (∗)，取 $\bar{\mathfrak{p}} \in$ 谱$\mathrm{H}^0(A)$，使得级$_AM$ = 深度$A_{\bar{\mathfrak{p}}}$ −上确界$M_{\bar{\mathfrak{p}}}$。由 [13, 引理 2.26], 深度$A \leqslant$ 深度$A_{\bar{\mathfrak{p}}}$ +维数$\mathrm{H}^0(A)/\bar{\mathfrak{p}}$。根据 [17, 命题 2.13], 中的等式 (2.14)，lc.维数$_AM \geqslant$ 维数$\mathrm{H}^0(A)/\bar{\mathfrak{p}}$ +上确界$M_{\bar{\mathfrak{p}}}$。因此深度A − lc.维数$_AM \leqslant$深度$A_{\bar{\mathfrak{p}}}$ + 维数$\mathrm{H}^0(A)/\bar{\mathfrak{p}}$ − (维数$\mathrm{H}^0(A)/\bar{\mathfrak{p}}$ + 上确界$M_{\bar{\mathfrak{p}}}$) = 级$_AM$。

(2) 由 [17, 等式 (2.14)], ，取 $\bar{\mathfrak{q}} \in$ 谱$\mathrm{H}^0(A)$，使得 lc.维数$_AM$ = 维数$\mathrm{H}^0(A)/\bar{\mathfrak{q}}$ +上确界$M_{\bar{\mathfrak{q}}}$。有以下不等式:

$$\begin{aligned}\mathrm{grade}_A M &\leqslant \mathrm{depth} A_{\bar{\mathfrak{q}}} - \sup M_{\bar{\mathfrak{q}}} \\ &\leqslant \mathrm{lc.dim} A_{\bar{\mathfrak{q}}} + \mathrm{dim}\mathrm{H}^0(A)/\bar{\mathfrak{q}} + \inf A_{\bar{\mathfrak{q}}} - \mathrm{dim}\mathrm{H}^0(A)/\bar{\mathfrak{q}} - \sup M_{\bar{\mathfrak{q}}} \\ &\leqslant \mathrm{lc.dim} A + \inf A - \mathrm{lc.dim}_A M,\end{aligned}$$

其中第一个由等式 (∗) 得出，第二个由 [17, 推论 5.5] 得出，第三个由 [17, 引理 5.10] 以及下确界$A_{\bar{\mathfrak{q}}}$ =下确界A 得出。

(3) 由 [22, 定理 3.4], 可得级$_AM \leqslant$ 投射维数$_AM$。假设 A 具有常振幅。可设投射维数$_AM < \infty$，由 [21, 推论 3.3] 和引理 2.1(3)可得 lc.维数A − lc.维数$_AM \leqslant$ 深度A − 深度$_AM$ = 投射维数$_AM$，所需的不等式由 (2) 得出。□

注 3.3。 (1) 若 A是普通环，且 M 是有限生成的 A-模，那么此定义与 Rees [14]定义的 M 级的通常定义一致。

(2) 若 M 是完美的，则由 [22,命题 4.4(3)]可得，ampRHom$_A(M, A)$ = projdim$_AM$ − grade$_AM$ = amp$A$ 。

(3) 若 A 是局部 Gorenstein，且 $M \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(A)$ 满足 amp$M$ = amp$A$，那么由 (2) 和 [17, 命题 6.2]可知， M 是完美的，当且仅当 M 是局部 Cohen-Macaulay。

(4) 若 A 具有常振幅，且 M 是局部 Cohen-Macaulay 并满足 projdim$_AM < \infty$，那么由引理 3.2，projdim$_AM$ +inf$A$ = depth$A$ −depth$_AM$ + inf$A$ = depth$A$ −lc。dim$_AM \leqslant$ grade$_AM \leqslant$projdim$_AM$ +inf$A$ ，这意味着 M 是完美的。

对于 DG-环 A ， [9], 一个对偶化 *DG*-模 R 是一个 DG-模 $R \in \mathrm{D}^{+}{}_{\mathrm{f}}(A)$，满足内射维数 injdim$_AR < \infty$ ，且自然映射 $A \to$ 导出 Hom$_A(R, R)$ 是 D(A) 中的同构。若 inf R = −lc.dim$A$，则称 R 为归一化 的。以下结果给出了一个 Cohen-Macaulay 判据。

定理 3.4. 设 A 是一个具有常振幅的局部 *Cohen-Macaulay DG*-环，且$M \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(A)$ 的投射维数$_AM < \infty$。以下条件等价:

(1) M 是局部 *Cohen-Macaulay*; (2) M 是完美的，且幅$M \leqslant \mathrm{amp}\mathrm{R}\Gamma_{\bar{\mathfrak{m}}}(M)$。此外，如果 A 有一个对偶化 *DG*-模 R ，那么上述条件等价于(3) M 是完美的，且导出 Hom$_A(M, A)$ 是局部 *Cohen-Macaulay*。

证明。 (1) ⇒ (2) 这由注 3.3(4) 得出。

(2) $\Rightarrow$ (1) 由引理 3.2(2)，级$_A M$ = 深度A − lc。维数$_A M$。由引理 2.1(3)，投射维数$_A M$ = 深度A−深度$_A M$，由 [21, 命题 4.1] 可得，−下确界$A \leqslant$ 幅$M \leqslant$幅R$\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$ = 投射维数$_A M$ − 级$_A M$ = −下确界A。因此，M 是局部 Cohen-Macaulay。

我们不妨假设 R 已归一化。由于 A 具有常振幅，根据 [17, 定理 4.1(2) 和命题 4.4], , R 也如此。由 [3, Page138] 可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ass}_{\mathrm{H}^0(A)}\mathrm{Hom}_{\mathrm{H}^0(A)}(\mathrm{H}^{\sup R}(R), \mathrm{H}^{\inf(M\otimes^{\mathrm{L}}_A R)}(M\otimes^{\mathrm{L}}_A R)) = \\ &\mathrm{Supp}_{\mathrm{H}^0(A)}\mathrm{H}^{\sup R}(R)\cap \mathrm{Ass}_{\mathrm{H}^0(A)}\mathrm{H}^{\inf(M\otimes^{\mathrm{L}}_A R)}(M\otimes^{\mathrm{L}}_A R)\neq\emptyset.\end{aligned}$$

因此，H$^{\inf(M\otimes^{\mathrm{L}}_A R)}$–sup^R(导出 Hom$_A$($R$, $M\otimes^{\mathrm{L}}_A R$)) = Hom$_{\mathrm{H}^0(A)}$(H$^{\sup R}$($R$), H$^{\inf(M\otimes^{\mathrm{L}}_A R)}$($M\otimes^{\mathrm{L}}_A R$)) $\neq$0，这由 [5, 引理 3.2] 得出。注意，根据 [5, 引理 2.7], , $M \simeq$ 导出 Hom$_A$(R, $M\otimes^{\mathrm{L}}_A R$)。因此，inf($M\otimes^{\mathrm{L}}_A R$) = inf$M$ + sup$R$。由于根据 [5, 引理 2.7], , 导出 Hom$_A$(导出 Hom$_A$(M, A) R) $\simeq M\otimes^{\mathrm{L}}_A R$，由 [15, 定理 7.26] 和 [21, 引理 2.3(3)] 可得

幅R$\Gamma_{\mathfrak{m}}$(导出 Hom$_A$(M, A)) = 幅导出 Hom$_A$(导出 Hom$_A$(M, A) R) = 幅($M\otimes^{\mathrm{L}}_A R$) = 幅$M$.

(1) $\Rightarrow$ (3) 由于 M 是局部 Cohen-Macaulay，根据注 3.3(4)，M 是完美的，因此根据注 3.3(2)，幅A =幅导出 Hom$_A$(M, A)。因此，导出 Hom$_A$(M, A)是局部 Cohen-Macaulay。

(3) $\Rightarrow$ (1) 由于导出 Hom$_A$(M, A)是局部 Cohen-Macaulay，幅A = 幅导出 Hom$_A$(M, A) =幅R$\Gamma_{\mathfrak{m}}$(导出 Hom$_A$(M, A)) = 幅M。又因为幅A = 投射维数$_A M$ − 级$_A M$ = 幅R$\Gamma_{\mathfrak{m}}$(M)，这表明 M 是局部 Cohen-Macaulay。□

下一个命题为 Auslander 提出的余维猜想提供了部分答案。

命题 3.5. 设 A 是一个具有常振幅的局部 *DG*-环，且 $M \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(A)$ 的投射维数$_A M < \infty$。那么，M 完美当且仅当 lc.维数$_A M$ +级$_A M$ = lc.维数A + 下确界A，且 ampR$\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$ = ampR$\Gamma_{\mathfrak{m}}(A)$。

证明。 有以下不等式

$$\begin{aligned}\mathrm{lc.dim}_A M + \mathrm{grade}_A M &\leqslant \mathrm{lc.dim}A + \inf A\\ &\leqslant \mathrm{lc.dim}_A M - \mathrm{depth}_A M + \mathrm{depth}A + \inf A\\ &= \mathrm{lc.dim}_A M + \mathrm{projdim}_A M + \inf A,\end{aligned}$$

其中，第一个不等式由引理 3.2(2)得出，第二个不等式由 [21, 推论 3.3],得出。最后一个等式由引理 2.1(3)得出，证毕。□

引言中 Yoshida 猜想的肯定答案是以下定理的一个特例。

定理 3.6. 设 A 是一个具有常振幅的局部 *DG*-环，且 $M, N \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(A)$ 满足 M 完美，幅N = 幅A 且 lc.维数$_A N$ −上确界N = lc.维数A。若 $M\otimes^{\mathrm{L}}_A N$ 是局部 *Cohen-Macaulay*，则 lc.维数$_A$($M\otimes^{\mathrm{L}}_A N$) = lc.维数$_A M$ + 上确界N，且 N 是极大局部 *Cohen-Macaulay DG* 模。

证明。对于 $\bar{\mathfrak{p}} \in \mathrm{SpecH}^0(A)$，有 $\mathrm{dimH}^0(A)/\bar{\mathfrak{p}} + \mathrm{sup}(M \otimes_A^{\mathrm{L}} N)_{\bar{\mathfrak{p}}} = \mathrm{dimH}^0(A)/\bar{\mathfrak{p}} + \mathrm{sup}M_{\bar{\mathfrak{p}}} + \mathrm{sup}N_{\bar{\mathfrak{p}}} \leqslant \mathrm{lc.dim}_A M + \mathrm{sup}N$。由 [21, 引理 2.3(3)], 可得 $\mathrm{lc.dim}_A(M \otimes_A^{\mathrm{L}} N) \leqslant \mathrm{lc.dim}_A M + \mathrm{sup}N$。另一方面，$-\mathrm{inf}A = \mathrm{ampR}\Gamma_{\bar{\mathfrak{m}}}(M \otimes_A^{\mathrm{L}} N) \geqslant \mathrm{ampR}\Gamma_{\bar{\mathfrak{m}}}(N)$。由 [21,推论 3.3], 可得以下（不）等式:

$$\begin{aligned}
\mathrm{lc.dim}_A(M \otimes_A^{\mathrm{L}} N) &= \mathrm{depth}_A(M \otimes_A^{\mathrm{L}} N) - \mathrm{inf}A \\
&= \mathrm{depth}_A N - \mathrm{inf}A - \mathrm{projdim}_A M \\
&\geqslant \mathrm{lc.dim}_A N + \mathrm{inf}A - \mathrm{grade}_A M \\
&\geqslant \mathrm{lc.dim}_A N + \mathrm{lc.dim}_A M - \mathrm{lc.dim}A \\
&= \mathrm{lc.dim}_A M + \mathrm{sup}N,
\end{aligned}$$

其中，第二个等式由引理 2.1 (1) 和 (3) 得出，不等式由 $\mathrm{ampR}\Gamma_{\bar{\mathfrak{m}}}(N) \leqslant -\mathrm{inf}A$ 和引理 3.2(2) 得出。因此，$\mathrm{lc.dim}_A(M \otimes_A^{\mathrm{L}} N) = \mathrm{lc.dim}_A M + \mathrm{sup}N$。此外

$$\begin{aligned}
\mathrm{lc.dim}_A N - \mathrm{depth}_A N &= \mathrm{lc.dim}A + \mathrm{sup}N + \mathrm{depth}_A M - \mathrm{depth}_A(M \otimes_A^{\mathrm{L}} N) - \mathrm{depth}A \\
&= \mathrm{lc.dim}A + \mathrm{sup}N - \mathrm{projdim}_A M - \mathrm{lc.dim}_A(M \otimes_A^{\mathrm{L}} N) - \mathrm{inf}A \\
&= \mathrm{lc.dim}A + \mathrm{sup}N - \mathrm{grade}_A M - \mathrm{lc.dim}_A M - \mathrm{sup}N \\
&\geqslant -\mathrm{inf}A,
\end{aligned}$$

其中，第一个等式由引理 2.1(1) 得出，不等式由引理 3.2(2) 得出。因此 $\mathrm{ampR}\Gamma_{\bar{\mathfrak{m}}}(N) = \mathrm{amp}A$，且 N 是极大局部 Cohen–Macaulay。□

现在我们考虑定理 3.6 的逆命题。

命题 3.7。设 A 是一个具有常振幅的局部 *DG* 环，且 $M, N \in \mathrm{D}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{b}}(A)$ 满足: M 是完美的，且 N 是极大局部 *Cohen–Macaulay*。

(1) $\mathrm{lc.dim}_A(M \otimes_A^{\mathrm{L}} N) = \mathrm{lc.dim}_A M + \mathrm{lc.dim}_A N - \mathrm{lc.dim}A$。(2) 如果 $\mathrm{ampR}\Gamma_{\bar{\mathfrak{m}}}(M \otimes_A^{\mathrm{L}} N) \geqslant \mathrm{amp}(M \otimes_A^{\mathrm{L}} N)$，那么 $M \otimes_A^{\mathrm{L}} N$ 是局部 *Cohen-Macaulay*。

证明。(1) 有以下不等式:

$$\begin{aligned}
\mathrm{lc.dim}_A(M \otimes_A^{\mathrm{L}} N) &\geqslant \mathrm{lc.dim}_A N - \mathrm{projdim}_A M \\
&= \mathrm{lc.dim}A + \mathrm{sup}N - \mathrm{grade}_A M + \mathrm{inf}A \\
&\geqslant \mathrm{lc.dim}A + \mathrm{sup}N + \mathrm{lc.dim}_A M - \mathrm{lc.dim}A \\
&= \mathrm{lc.dim}_A M + \mathrm{sup}N,
\end{aligned}$$

其中，第一个不等式由引理 2.1(2) 得出，第二个不等式由引理 3.2(2) 得出。另一方面，根据定理 3.6 的证明，lc.维数$_A(M \otimes_A^{\mathrm{L}} N) \leqslant$ lc.维数$_A M +$ 上确界N。因此，lc.维数$_A(M \otimes_A^{\mathrm{L}} N) =$ lc.维数$_A M +$ lc.维数$_A N -$ lc.维数A。

(2) 由于 N 是极大局部 Cohen–Macaulay，深度$_A N =$ lc。维数$_A N -$ 幅$N =$ lc。维数$A +$下确界N。因此有如下（不）等式:

$$
\begin{aligned}
\text{幅}\mathrm{R}\Gamma_{\bar{\mathfrak{m}}}(M\otimes_A^{\mathrm{L}}N) &= \text{lc。维数}_A(M\otimes_A^{\mathrm{L}}N) - \text{深度}_A(M\otimes_A^{\mathrm{L}}N)\\
&= \mathrm{lc.dim}_A M + \mathrm{projdim}_A M + \sup N - \mathrm{depth}_A N\\
&= \mathrm{lc.dim}_A M + \mathrm{grade}_A M + \sup N - \mathrm{depth}_A N - \inf A\\
&= \mathrm{lc.dim}_A M + \mathrm{grade}_A M + \mathrm{amp}N - \inf A - \mathrm{lc.dim}A\\
&\leqslant \mathrm{lc.dim}_A M + \mathrm{lc.dim}A - \mathrm{lc.dim}_A M + \inf A + \mathrm{amp}N - \inf A - \mathrm{lc.dim}A\\
&= \mathrm{amp}N,
\end{aligned}
$$

其中，第二个等式由引理 2.1 (1) 和 (3) 得出，不等式由引理 3.2(2) 得出。另一方面，由 [21, 命题 4.1], 可知，根据假设， $M\otimes_A^{\mathrm{L}}N$ 是局部 Cohen-Macaulay。□

推论 3.8。 设 A 是一个具有常振幅的局部 ***Cohen-Macaulay DG*-环**，并且 $M\in \mathrm{D}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{b}}(A)$ 满足 投射维数$_A M<\infty$ 且 $\mathrm{amp}\mathrm{R}\Gamma_{\bar{\mathfrak{m}}}(M)\geqslant$ 幅M。以下各项等价：

(1) M 是局部 ***Cohen-Macaulay***；(2) $M\otimes_A^{\mathrm{L}}N$ 对于任意满足 $\mathrm{amp}\mathrm{R}\Gamma_{\bar{\mathfrak{m}}}(M\otimes_A^{\mathrm{L}}N)\geqslant \mathrm{amp}(M\otimes_A^{\mathrm{L}}N)$的极大局部 ***Cohen-Macaulay DG* 模**，都是局部 ***Cohen-Macaulay***；(3) $M\otimes_A^{\mathrm{L}}N$ 对于某个满足 $\mathrm{amp}\mathrm{R}\Gamma_{\bar{\mathfrak{m}}}(M\otimes_A^{\mathrm{L}}N)\geqslant \mathrm{amp}(M\otimes_A^{\mathrm{L}}N)$的极大局部 ***Cohen-Macaulay DG* 模**，是局部 ***Cohen-Macaulay***；(4) $M\otimes_A^{\mathrm{L}}R$ 是局部 ***Cohen-Macaulay***，并且 $\mathrm{amp}\mathrm{R}\Gamma_{\bar{\mathfrak{m}}}(M\otimes_A^{\mathrm{L}}R)\geqslant$ 幅M，其中 R 是 A的标准化对偶化 ***DG* 模**。

证明。 (1) $\Rightarrow$ (2) 由注 3.3(4)和命题 3.7(2)可得 .

(2) $\Rightarrow$ (3)显然。(3) $\Rightarrow$ (1) 设 $N=A$。

(4) $\Rightarrow$ (3)显然，因为 R 由 [17, 定理 6.7] 可知是极大局部 Cohen–Macaulay，并且根据定理 3.4 的证明，amp$(M\otimes_A^{\mathrm{L}}R)$ = amp$M$。

(1) $\Rightarrow$ (4) 由 [15, 定理 7.26], 注 3.3 (4)和(2)，可得 ampR$\Gamma_{\bar{\mathfrak{m}}}(M\otimes_A^{\mathrm{L}}R)$ =导出 HomRHom$_A$($M\otimes_A^{\mathrm{L}}R$, R) = 导出 HomRHom$_A$(M, A) = amp$A$ ，且根据定理 3.4 的证明，amp$(M\otimes_A^{\mathrm{L}}R)$ = amp$M$ ，如所述。□

命题 3.9。 设 A 是一个局部 ***DG* 环**，且 $M\in \mathrm{D}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{b}}(A)$ 是完美的且具有常幅。以下条件等价：

(1) $\bar{\mathfrak{p}}\in$ 关联素理想集$_A M$；(2) 级$_A M=$ 深度$A_{\bar{\mathfrak{p}}}-$ 上确界$M_{\bar{\mathfrak{p}}}$ 和 投射维数$A_{\bar{\mathfrak{p}}}M_{\bar{\mathfrak{p}}}=$ 投射维数$_A M$。

证明。由于 M 是完美的，projdim$_A M<\infty$，因此根据 [21, 命题 4.1], amp$M\geqslant$ –inf$A$ 。由于 M 具有常振幅，inf$M_{\bar{\mathfrak{p}}}=$ inf$M$ 且 sup$M_{\bar{\mathfrak{p}}}=$ sup$M$。有如下不等式：grade$_A M\leqslant$ depth $A_{\bar{\mathfrak{p}}}-$ sup$M_{\bar{\mathfrak{p}}}=$ projdim$_{A_{\bar{\mathfrak{p}}}}M_{\bar{\mathfrak{p}}}$ +depth$_{A_{\bar{\mathfrak{p}}}}M_{\bar{\mathfrak{p}}}$ –sup$M_{\bar{\mathfrak{p}}}\leqslant$ projdim$_A M$ +depth$_{A_{\bar{\mathfrak{p}}}}M_{\bar{\mathfrak{p}}}-$ inf$M-$ amp$M\leqslant$ projdim$_A M+$ depth$_{A_{\bar{\mathfrak{p}}}}M_{\bar{\mathfrak{p}}}-$ inf$M$ +inf$A$。因此， $\bar{\mathfrak{p}}\in$ 属于 Ass$_A M$ 当且仅当 depth $_{A_{\bar{\mathfrak{p}}}}M_{\bar{\mathfrak{p}}}-$ inf$M_{\bar{\mathfrak{p}}}=0$ ，当且仅当 depth$A_{\bar{\mathfrak{p}}}$ –sup$M_{\bar{\mathfrak{p}}}=$ grade$_A M$ 且 projdim$_{A_{\bar{\mathfrak{p}}}}M_{\bar{\mathfrak{p}}}=$ projdim$_A M$。□

Th下一个推论给出了判定 DG-环 A为 Cohen-Macaulay 的准则 ay.

推论 3.10. 设 A 是一个具有常振幅的局部 *DG*-环。以下条件等价:

(1) A 是局部 *Cohen-Macaulay*; (2) 存在一个局部 *Cohen-Macaulay DG*模 $M \neq 0$ ，使得投射维数$_AM < \infty$ 且局部 Cohen-Macaulay。维数$_AM =$局部 Cohen-Macaulay。维数A –级$_AM +$下确界A; (3) 存在一个局部 *Cohen-Macaulay DG*模 $M \neq 0$ ，使得投射维数$_AM < \infty$ 且局部 Cohen-Macaulay。维数$A = \dim \mathrm{H}^0(A)/\bar{\mathfrak{p}} +$ 深度$A_{\bar{\mathfrak{p}}} -$ 下确界A ，其中某个 $\bar{\mathfrak{p}} \in$ 关联素理想集$_AM$。

证明。 通过令 $M = A$, 断言 (1) $\Rightarrow$ (2) 和 (1) $\Rightarrow$ (3) 显然成立。

(2) $\Rightarrow$ (1) 根据注 3.3(4), M 是完美的，因此 lc。维数A –投射维数$_AM =$ lc。维数A –级$_AM +$下确界$A =$lc。维数$_AM =$深度$_AM -$下确界$A =$深度A –投射维数$_AM -$下确界A，由引理 2.1(3)可得。因此, A 是局部 Cohen-Macaulay。

(3) $\Rightarrow$ (1) 存在 $\bar{\mathfrak{p}} \in$ 关联素理想集$_AM$，使得 lc.维数$_AM =$ dimH$^0(A)/\bar{\mathfrak{p}} +$上确界$M_{\bar{\mathfrak{p}}}$。由命题 3.9，深度$A_{\bar{\mathfrak{p}}} -$上确界$M_{\bar{\mathfrak{p}}} =$ 级$_AM$ 。由于根据注 3.3(4), M 是完美的，因此 lc.维数$A+$下确界 $A =$ dimH$^0(A)/\bar{\mathfrak{p}}+$深度$A_{\bar{\mathfrak{p}}} =$lc.维数$_AM+$级$_AM =$深度$_AM+$投射维数$_AM =$深度$A$，如所述。□

4. DG-模的级数

本节研究有限内射维数的 DG-模的级。利用 DG-模 $M/\!\!/^{-}\boldsymbol{x}$的 Cohen–Macaulay 性, 我们探讨张量积在 DG 背景下对 Cohen–Macaulay 性的保持。

引理 4.1. 设 A 是一个具有常振幅的局部 *DG* 环， $^{-}\boldsymbol{x} = \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n \in \bar{\mathfrak{m}}$ 是一个有限序列, 且 $M \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(A)$。那么

(1) 级$_{A/\!\!/\bar{x}}M/\!\!/^{-}\boldsymbol{x} =$ 级$_AM/\!\!/\bar{x} - n$。(2) 级$_AM \leqslant$ 级 $_AM/\!\!/\bar{x} \leqslant$ 级$_AM + n$。(3) 如果 $^{-}\boldsymbol{x}$ 是 A-正则，则 级 $_AM/\!\!/^{-}\boldsymbol{x} =$ 级$_AM$。

证明。 由于 $M/\!\!/^{-}\boldsymbol{x} \simeq A/\!\!/^{-}\boldsymbol{x} \otimes^{\mathrm{L}}_A M$, 由 [18, 命题 2.12], 可得 D($A$) 中的同构

$$\mathrm{RHom}_{A/\!\!/\bar{\boldsymbol{x}}}(M/\!\!/\bar{\boldsymbol{x}}, A/\!\!/\bar{\boldsymbol{x}}) \simeq \mathrm{RHom}_A(M, A/\!\!/\bar{\boldsymbol{x}}),$$

RHom$_A(M/\!\!/^{-}\boldsymbol{x}\ A) \simeq$ 导出 Hom$_A(M,$ 导出 Hom$_A(A/\!\!/^{-}\boldsymbol{x}\ A)) \simeq$ 导出 Hom$_A(M,\ A/\!\!/^{-}\boldsymbol{x})[-n]$.

(1) 这由上述两个同构可得。(2) 有如下不等式:

$$\begin{aligned}\mathrm{grade}_A M &\leqslant \mathrm{inf}\mathrm{RHom}_A(M,A) - \mathrm{projdim}_A A/\!\!/\bar{\boldsymbol{x}} + n\\ &\leqslant \mathrm{inf}(\mathrm{RHom}_A(M,A)\otimes^{\mathrm{L}}_A A/\!\!/\bar{\boldsymbol{x}}) + n\\ &= \mathrm{inf}\mathrm{RHom}_A(M, A/\!\!/\bar{\boldsymbol{x}}) + n\\ &= \mathrm{inf}\mathrm{RHom}_A(M/\!\!/\bar{\boldsymbol{x}}, A)\\ &= \mathrm{grade}_A M/\!\!/\bar{\boldsymbol{x}},\end{aligned}$$

其中，第一个不等式由投射维数$_A A/\!\!/^{-}\boldsymbol{x} \leqslant n$ 得到，第二个不等式由 [22, 命题 3.14],得到。第二个等式由上述同构可得。此外，由 [13, 引理 2.13(1)],

$$\text{级}_A M/\!\!/^{-}\boldsymbol{x} = \text{下确界(导出 Hom}_A(M,A)\otimes^{\mathrm{L}}_A A/\!\!/^{-}\boldsymbol{x}) + n \leqslant \text{下确界导出 Hom}_A(M,A) + n = \text{级}_A M + n.$$

(3) 由于 $\mathrm{Spec}\mathrm{H}^0(A) = \text{支撑}_{\mathrm{H}^0(A)}\mathrm{H}^{\mathrm{inf}A}(A)$, $\bar{x}_1/1,\cdots,\bar{x}_n/1$ 对任意 $\bar{\mathfrak{p}} \in \text{支撑}_A M \cap \text{支撑}_A A/\!\!/^{-}\boldsymbol{x}$都是 $A_{\bar{\mathfrak{p}}}$-正则的。由第二个同构，有

$$\begin{aligned}\mathrm{grade}_A M/\!\!/\bar{\boldsymbol{x}} &= \mathrm{inf}\mathrm{RHom}_A(M, A/\!\!/\bar{\boldsymbol{x}}) + n\\ &= \mathrm{inf}\{\mathrm{depth}(A/\!\!/\bar{\boldsymbol{x}})_{\bar{\mathfrak{p}}} - \mathrm{sup}M_{\bar{\mathfrak{p}}} | \bar{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Spec}\mathrm{H}^0(A)\} + n\\ &= \mathrm{inf}\{\mathrm{depth}A_{\bar{\mathfrak{p}}} - \mathrm{sup}M_{\bar{\mathfrak{p}}} - n | \bar{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Spec}\mathrm{H}^0(A)\} + n\\ &= \mathrm{grade}_A M,\end{aligned}$$

其中第二个等式由 [21, 引理 2.3(1)], 的证明得到，第三个等式由 [23, 引理 3.6]和 [13, 引理 2.13(2)] 得到。□

注 4.2。设 A 是一个局部 DG 环，且 $M \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(A)$ 的内射维数有限。由 [15,注 7.17], 内射维数$_A\mathrm{R}\Gamma_{\bar{\mathfrak{m}}}(M) \leqslant$ 内射维数，因此由引理 2.1(4) 有 $\mathrm{sup}\mathrm{R}\Gamma_{\bar{\mathfrak{m}}}(M) \leqslant \mathrm{sup}M$ 。于是 [21, 引理 2.1(2)]推出

$$\mathrm{lc.dim}_A M \leqslant \mathrm{sup}M \leqslant \mathrm{injdim}_A M - \mathrm{inf}A = \mathrm{depth}A + \mathrm{sup}M - \mathrm{inf}A.$$

下一个结　　果改进了上述不等式，也是引理 2.1(3)的对偶版本。

定理 4.3。设 A 是一个常振幅的局部 *DG* 环，且 $M \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(A)$ 具有常振幅，且 内射维数$_A M < \infty$。那么

$$\mathrm{lc.dim}_A M = \mathrm{depth}A - \mathrm{grade}_A M.$$

证明。由于对 $\bar{\mathfrak{q}} \in \mathrm{Spec}\mathrm{H}^0(A)$，有 $\mathrm{injdim}_A M < \infty$、$\mathrm{injdim}_{A_{\bar{\mathfrak{q}}}} M_{\bar{\mathfrak{q}}} < \infty$ 。由等式 $(*)$，取$\bar{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Spec}\mathrm{H}^0(A)$，使得 $\mathrm{grade}_A M = \mathrm{depth}A_{\bar{\mathfrak{p}}} - \mathrm{sup}M_{\bar{\mathfrak{p}}}$。于是由引理 2.1(4)，$\mathrm{grade}_A M = \mathrm{injdim}_{A_{\bar{\mathfrak{p}}}} M_{\bar{\mathfrak{p}}} - \mathrm{sup}M_{\bar{\mathfrak{p}}} < \infty$ 。我们对 $\mathrm{grade}_A M \geqslant \mathrm{inf}A - \mathrm{sup}M$作归纳。若 $\mathrm{grade}_A M = \mathrm{inf}A - \mathrm{sup}M$，则由引理 3.2(1)，$\mathrm{depth}A \leqslant$ lc。$\mathrm{dim}_A M - \mathrm{sup}M + \mathrm{inf}A$ 。另一方面，对于 $\bar{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Spec}\mathrm{H}^0(A)$，有以下不等式

$$\begin{aligned}\mathrm{dim}\mathrm{H}^0(A)/\bar{\mathfrak{p}} + \mathrm{sup}M_{\bar{\mathfrak{p}}} &\leqslant \mathrm{dim}\mathrm{H}^0(A)/\bar{\mathfrak{p}} + \mathrm{injdim}_{A_{\bar{\mathfrak{p}}}} M_{\bar{\mathfrak{p}}} - \mathrm{inf}A_{\bar{\mathfrak{p}}}\\ &\leqslant \mathrm{injdim}_A M - \mathrm{inf}A,\end{aligned}$$

其中第一个不等式由 [21, 引理 2.1(2)], 得到，第二个不等式由 [13, 引理 2.26 和命题 2.29]得到。因此，由[17, 等式 (2.14)] 和引理 2.1(4)，$\mathrm{lc.dim}_A M - \sup M + \inf A \leqslant \mathrm{injdim}_A M - \sup M = \mathrm{depth} A$ ，所需的等式成立。现在假设 $\mathrm{grade}_A M > \inf A - \sup M$。则 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{H}^0(A)}(\mathrm{H}^{\sup M}(M), \mathrm{H}^{\inf A}(A)) = 0$，由 [12,定理 16.6]可知，存在一个 A-正则元素 $\bar{x} \in \bar{\mathfrak{m}}$，使得 $\bar{x}\mathrm{H}^{\sup M}(M) = 0$。由于 $\inf A/\!\!/\bar{x} - \sup M/\!\!/\bar{x} = \inf A - \sup M$、$\mathrm{injdim}_{A/\!\!/\bar{x}} M/\!\!/\bar{x} < \infty$，且由引理 4.1 有 $\mathrm{grade}_{A/\!\!/\bar{x}} M/\!\!/\bar{x} = \mathrm{grade}_A M - 1$，故由归纳法可得

$$\mathrm{lc.dim}_{A/\!\!/\bar{x}} M/\!\!/\bar{x} = \mathrm{depth} A/\!\!/\bar{x} - \mathrm{grade}_{A/\!\!/\bar{x}} M/\!\!/\bar{x} = \mathrm{depth} A - \mathrm{grade}_A M.$$

考虑 $\mathrm{D}(A)$ 中的正合三角 $M \xrightarrow{\bar{x}} M \to M/\!\!/\bar{x} \to M[1]$。对于 $\ell \in \mathbb{Z}$，有如下短正合列

$$0 \to \mathrm{H}^\ell(M)/\bar{x}\mathrm{H}^\ell(M) \to \mathrm{H}^\ell(M/\!\!/\bar{x}) \to (0 :_{\mathrm{H}^{\ell+1}(M)} \bar{x}) \to 0,$$

由 [6, 命题 14.2.6] 可得

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathrm{H}^0(A)/(\bar{x})} \mathrm{H}^\ell(M/\!\!/\bar{x}) &= \max\{\dim_{\mathrm{H}^0(A)/(\bar{x})} \mathrm{H}^\ell(M)/\bar{x}\mathrm{H}^\ell(M), \dim_{\mathrm{H}^0(A)/(\bar{x})}(0 :_{\mathrm{H}^{\ell+1}(M)} \bar{x})\} \\
&= \max\{\dim_{\mathrm{H}^0(A)} \mathrm{H}^\ell(M)/\bar{x}\mathrm{H}^\ell(M), \dim_{\mathrm{H}^0(A)}(0 :_{\mathrm{H}^{\ell+1}(M)} \bar{x})\} \\
&= \dim_{\mathrm{H}^0(A)} \mathrm{H}^\ell(M/\!\!/\bar{x}).
\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{Supp}_A M = \mathrm{Supp}_{\mathrm{H}^0(A)} \mathrm{H}^{\sup M}(M)$ 且 $\bar{x}\mathrm{H}^{\sup M}(M) = 0$，因此 $\mathrm{Supp}_A M = \mathrm{Supp}_A M/\!\!/\bar{x}$。注意到 $\mathrm{H}^0(A/\!\!/\bar{x}) \cong \mathrm{H}^0(A)/(\bar{x})$，可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{lc.dim}_{A/\!\!/\bar{x}} M/\!\!/\bar{x} &= \sup\{\dim_{\mathrm{H}^0(A)/(\bar{x})} \mathrm{H}^\ell(M/\!\!/\bar{x}) + \ell | \ell \in \mathbb{Z}\} \\
&= \sup\{\dim_{\mathrm{H}^0(A)} \mathrm{H}^\ell(M/\!\!/\bar{x}) + \ell | \ell \in \mathbb{Z}\} \\
&= \mathrm{lc.dim}_A M/\!\!/\bar{x} \\
&= \sup\{\dim \mathrm{H}^0(A)/\bar{\mathfrak{p}} + \sup(M/\!\!/\bar{x})_{\bar{\mathfrak{p}}} | \bar{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Supp}_A M\} \\
&= \sup\{\dim \mathrm{H}^0(A)/\bar{\mathfrak{p}} + \sup M_{\bar{\mathfrak{p}}} | \bar{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Supp}_A M\} \\
&= \mathrm{lc.dim}_A M,
\end{aligned}$$

其中第四个等式由 [17, 等式 (2.14)]得到。因此，$\mathrm{lc.dim}_A M = \mathrm{lc.dim}_{A/\!\!/\bar{x}} M/\!\!/\bar{x} = \mathrm{depth} A - \mathrm{grade}_A M$。□

接下来的结果是定理 3.4 的对偶版本。

推论 4.4。设 A 是一个具有常振幅的局部 *DG* 环，且 $0 \not\simeq M \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(A)$ 具有常振幅并满足 内射维数$_A M < \infty$。那么， M 是完美的且 幅$M \leqslant \mathrm{amp}\mathrm{R}\Gamma_{\bar{\mathfrak{m}}}(M)$ ，当且仅当 M 是局部 *Cohen-Macaulay*。

证明。设 M 是完美的，且 $\mathrm{amp} M \leqslant \mathrm{amp}\mathrm{R}\Gamma_{\bar{\mathfrak{m}}}(M)$。由于 $\mathrm{injdim}_A M < \infty$，由[21, 命题 4.5] 和 [17, 推论 5.5] 可得 $\mathrm{amp} M \geqslant \mathrm{lc.dim} A - \mathrm{depth} A \geqslant -\inf A$。由定理 4.3，$\mathrm{lc.dim}_A M = \mathrm{depth} A - \mathrm{grade}_A M = \mathrm{depth} A - \mathrm{projdim}_A M - \inf A = \mathrm{depth}_A M -$

$\inf A$。因此 $\operatorname{amp} M \leqslant \operatorname{amp}\mathrm{R}\Gamma_{\bar{\mathfrak{m}}}(M) = -\inf A \leqslant \operatorname{amp} M$，所以 M 是局部 Cohen-Macaulay。反之由注 3.3(4)可得。□

下一个定理给出了使 $M/\!\!/{}^{-}\boldsymbol{x}$ 成为完美且 Cohen-Macaulay 的一个条件。

定理 4.5。 设 $(A,\bar{\mathfrak{m}})$ 为一个局部 *DG* 环，且 ${}^{-}\boldsymbol{x} = \bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n \in \bar{\mathfrak{m}}$ 为一个有限序列，并设 $M \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(A)$。

(1) 若 A 具有常振幅且 $M/\!\!/{}^{-}\boldsymbol{x}$ 是完美的，则 lc.维数$_A M/\!\!/{}^{-}\boldsymbol{x}$ = lc.维数$_A M - n$。(2) 若 A 是具有常振幅的局部 *Cohen-Macaulay*，则 $M/\!\!/{}^{-}\boldsymbol{x}$ 是完美的，当且仅当 M 是完美的且 lc.维数$_A M/\!\!/{}^{-}\boldsymbol{x}$ = lc.维数$_A M - n$。(3) 若 M 是具有常振幅的局部 *Cohen-Macaulay*，则 幅$M/\!\!/{}^{-}\boldsymbol{x} = \operatorname{amp}\mathrm{R}\Gamma_{\bar{\mathfrak{m}}}(M/\!\!/{}^{-}\boldsymbol{x})$

特别地， $M/\!\!/{}^{-}\boldsymbol{x}$ 是关于 $A/\!\!/{}^{-}\boldsymbol{x}$ 的局部 *Cohen-Macaulay*，当且仅当 幅$M/\!\!/{}^{-}\boldsymbol{x}$ =幅$A/\!\!/{}^{-}\boldsymbol{x}$。

证明。 由 [4,命题 A.4],可得以下不等式:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{lc.dim}_A M/\!\!/\bar{\boldsymbol{x}} &= \sup\{\dim_{\mathrm{H}^0(A)}\mathrm{H}^{\ell}(M/\!\!/\bar{\boldsymbol{x}}) + \ell \mid \ell \in \mathbb{Z}\} \\
&\geqslant \sup\{\dim_{\mathrm{H}^0(A)}\mathrm{H}^{\ell}(M)/\bar{\boldsymbol{x}}\mathrm{H}^{\ell}(M) + \ell \mid \ell \in \mathbb{Z}\} \\
&\geqslant \sup\{\dim_{\mathrm{H}^0(A)}\mathrm{H}^{\ell}(M) + \ell \mid \ell \in \mathbb{Z}\} - n \\
&\geqslant \operatorname{lc.dim}_A M - n.
\end{aligned} \tag{†}
$$

由于 $\operatorname{projdim}_A M < \infty$ 当且仅当 $\operatorname{projdim}_A M/\!\!/{}^{-}\boldsymbol{x} < \infty$，由 [22, 命题 4.4(3)]和 [18, 命题 2.12] 可得

$$\operatorname{projdim}_A M/\!\!/\bar{\boldsymbol{x}} = \operatorname{supRHom}_A(M/\!\!/\bar{\boldsymbol{x}}, A) = \operatorname{supRHom}_A(M, A/\!\!/\bar{\boldsymbol{x}}[-n]) = \operatorname{projdim}_A M + n.$$

(1) 有以下（不）等式

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grade}_A M/\!\!/\bar{\boldsymbol{x}} &\leqslant \operatorname{lc.dim} A - \operatorname{lc.dim}_A M/\!\!/\bar{\boldsymbol{x}} + \inf A \\
&\leqslant \operatorname{lc.dim} A - \operatorname{lc.dim}_A M + n + \inf A \\
&\leqslant \operatorname{depth} A - \operatorname{depth}_A M + n + \inf A \\
&= \operatorname{projdim}_A M + n + \inf A \\
&= \operatorname{projdim}_A M/\!\!/\bar{\boldsymbol{x}} + \inf A,
\end{aligned}
$$

其中，第一个不等式由引理 3.2(2)得出，第二个由不等式（†）得出，第三个由 [21, 推论 3.3]得出。因此 lc.维数$_A M/\!\!/{}^{-}\boldsymbol{x}$ = lc.维数$_A M - n$。

(2) 有如下（不）等式

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grade}_A M/\!\!/\bar{\boldsymbol{x}} &= \operatorname{depth} A - \operatorname{lc.dim}_A M/\!\!/\bar{\boldsymbol{x}} \\
&\leqslant \operatorname{depth} A - \operatorname{lc.dim}_A M + n \\
&= \operatorname{grade}_A M + n \\
&\leqslant \operatorname{projdim}_A M + n + \inf A \\
&= \operatorname{projdim}_A M/\!\!/\bar{\boldsymbol{x}} + \inf A,
\end{aligned}
$$

其中，第一个和第二个等式由引理 3.2(2) 得出，第一个不等式由不等式（†）得出，第二个不等式则由引理 3.2(3) 得出，证毕。

(3) 由中山引理可知，上确界$M/\!\!/^{-}\boldsymbol{x}$ = 上确界M。由 [19, 命题 3.17] 和 [23,定理 3.7(1)], 可得，下确界$M/\!\!/^{-}\boldsymbol{x}$ =lc.维数$_A M$ − lc.维数$_A M/\!\!/^{-}\boldsymbol{x}$ +下确界$M - n$。因此，我们得到以下等式

$$\begin{aligned}\mathrm{lc.dim}_A M/\!\!/\bar{\boldsymbol{x}} - \sup M/\!\!/\bar{\boldsymbol{x}} &= \mathrm{lc.dim}_A M + \inf M - n - \inf M/\!\!/\bar{\boldsymbol{x}} - \sup M \\ &= \mathrm{depth}_A M - n - \inf M/\!\!/\bar{\boldsymbol{x}} \\ &= \mathrm{depth}_A M/\!\!/\bar{\boldsymbol{x}} - \inf M/\!\!/\bar{\boldsymbol{x}},\end{aligned}$$

其中第三个等式由 [23, 引理 3.6], 得到，证毕。 □

DG 环之间的映射 $f : (A, \bar{\mathfrak{m}}) \to (B, \bar{\mathfrak{n}})$称为平坦局部映射，若其平坦维数$_A B = 0$，且诱导映射 $\mathrm{H}^0(f) : \mathrm{H}^0(A) \to \mathrm{H}^0(B)$是局部的。

众所周知，正则环的张量积通常并非正则环。Bouchiba 和 Kabbaj [2] 证明，若 R 是一个平坦的 k-模，且 S 是一个有限生成的 k-模，那么 Cohen-Macaulay 环的张量积 $R \otimes_k S$ 仍为 Cohen-Macaulay 环，其中 k是一个域。作为上述定理的应用，我们探讨 DG 语境下张量积对序列正则性和 Cohen–Macaulay 性的保持性；这是 [20, 定理 1]的 DG 版本，并改进了 [19, 定理 4.12]。

推论 **4.6.** 设 $f : (A, \bar{\mathfrak{m}}) \to (B, \bar{\mathfrak{n}})$ 是 *DG*-环之间的平坦局部同态。

(1) 如果 B 是常振幅的局部 *Cohen-Macaulay*，则 $A/\!\!/\bar{\mathfrak{m}} \otimes^{\mathrm{L}}_A B$ 是局部 *Cohen-Macaulay DG* 环。

(2) 如果 A 是序列正则的，且 $A/\!\!/\bar{\mathfrak{m}} \otimes^{\mathrm{L}}_A B$ 是局部 *Cohen-Macaulay DG* 环，则 B是局部 *Cohen-Macaulay*。

(3) 如果 B 是序列正则的，则 A 是序列正则的。(4) 如果 A 和 $A/\!\!/\bar{\mathfrak{m}} \otimes^{\mathrm{L}}_A B$ 是序列正则的，则 B 是序列正则的。

证明。 由于 $\mathrm{flatdim}_A B = 0$，诱导映射 $\mathrm{H}^0(f) : \mathrm{H}^0(A) \to \mathrm{H}^0(B)$ 也是平坦的。

(1) 这由定理 4.5(3) 和 [18,命题 2.9] 得出。

(2) 由假设，$\bar{\mathfrak{m}}$ 由一个 A-正则序列 $\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_d$生成，且 d =局部上同调维数A，因此 $A/\!\!/\bar{\mathfrak{m}} \otimes^{\mathrm{L}}_A B \simeq B/\!\!/(f(\bar{x}_1) \cdots, f(\bar{x}_d))$。由于平坦维数$_A B = 0$，由 [13,引理 2.13(2)]和 [19,引理 4.11]可得下确界$(A/\!\!/\bar{\mathfrak{m}} \otimes^{\mathrm{L}}_A B)$ =下确界$A/\!\!/(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_d)$ =下确界A =下确界B，因此$f(\bar{x}_1) \cdots, f(\bar{x}_d) \in \bar{\mathfrak{n}}$是 B-正则，这再次由 [13,引理 2.13(2)]得出。因此 [4,定理 A.11]蕴含局部上同调维数B =维数$\mathrm{H}^0(B)$ =维数$\mathrm{H}^0(A/\!\!/\bar{\mathfrak{m}} \otimes^{\mathrm{L}}_A B)$ +维数$\mathrm{H}^0(A)$ =深度$(A/\!\!/\bar{\mathfrak{m}} \otimes^{\mathrm{L}}_A B)$ −下确界$(A/\!\!/\bar{\mathfrak{m}} \otimes^{\mathrm{L}}_A B)$ +局部上同调维数A =深度$B/\!\!/(f(\bar{x}_1) \cdots, f(\bar{x}_d))$ −下确界B +局部上同调维数A =深度B −下确界B，从而 B 是局部 Cohen-Macaulay。

(3) 由 [19, 定理 3.4], $\mathrm{H}^0(B)$ 是正则的，根据 [20, 定理 1(b1)] 可知，$\mathrm{H}^0(A)$ 是正则的，并且 $\bar{\mathfrak{m}}$ 由一个 $\mathrm{H}^0(A)$-正则序列 $\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_d$生成，其中 d =lc.维数A。由[4, 命题 1.1.2], 可知，$f(\bar{x}_1) \cdots, f(\bar{x}_d)$ 是 $\mathrm{H}^0(B)$-正则的。由于 B是序列正则的,

B根据 [19,注 7.4],具有常振幅，因此由 [19,定理 3.3]可知， $f(\bar{x}_1)\ \cdots, f(\bar{x}_d)$ 是 B-正则的。于是，根据定理 4.5(3)，$A/\!\!/\bar{\mathfrak{m}} \otimes^{\mathrm{L}}_A B \simeq B/\!\!/f(\ \bar{x_1})\ \cdots, f(\ \bar{x_d})$ 是一个局部 Cohen-Macaulay DG 环，并且有以下（不）等式

$$\begin{aligned}
&\text{深度}B - \text{下确界}B - \text{深度}A + \text{下确界}A \leqslant \text{维数}\mathrm{H}^0(B)\ - \text{维数}\mathrm{H}^0(A)\\
&= \text{维数}\mathrm{H}^0(A/\!\!/\bar{\mathfrak{m}} \otimes^{\mathrm{L}}_A B)\\
&= \mathrm{lc.}\text{维数}(A/\!\!/\bar{\mathfrak{m}} \otimes^{\mathrm{L}}_A B)\\
&= \text{深度}B/\!\!/f(\ \bar{x_1})\ \cdots, f(\ \bar{x_d})\ - \text{下确界}B/\!\!/f(\ \bar{x_1})\ \cdots, f(\ \bar{x_d})\\
&= \text{深度}B - d - \text{下确界}B\\
&\leqslant \text{深度}B - \text{下确界}B - \text{深度}A + \text{下确界}A,
\end{aligned}$$

其中两个不等式由 [17, 推论 5.5], 给出；第四个等式由 [18, 命题 3.2] 和 [13, 引理 2.13(2)]给出。因此，$\mathrm{lc.dim}A = \mathrm{depth}A - \mathrm{inf}A$，于是根据 [19,定理 3.4]， A 是序列正则的。

(4) 由于 $f : (A, \bar{\mathfrak{m}}) \to (B, \bar{\mathfrak{n}})$ 是 DG-环的平坦局部同态，映射 $\mathrm{L}\Lambda_{\bar{\mathfrak{m}}}(A, \bar{\mathfrak{m}}) \to \mathrm{L}\Lambda_{\bar{\mathfrak{n}}}(B, \bar{\mathfrak{n}})$ 根据 [16, 命题 3.18]是平坦局部的。根据 [19, 推论 4.5], ，不妨设 A 和 B 是导出完备化。于是，根据 [15, 命题 7.21]， A 和 B 具有对偶化 DG-模。由于 $\mathrm{H}^0(A/\!\!/\bar{\mathfrak{m}} \otimes^{\mathrm{L}}_A B) \cong \mathrm{H}^0(A)/\bar{\mathfrak{m}} \otimes_{\mathrm{H}^0(A)} \mathrm{H}^0(B)$ 根据 [19,定理 3.4], 是正则的，由 [19, 定理 4.12(2)] 可知， B 是序列正则的。□

致谢

本研究得到国家自然科学基金（12571035）的部分资助。

参考文献

[1] T. Araya, Y. Yoshino，关于深度公式、级不等式及 Auslander 猜想的评注，代数通讯 **11**(1998) 3793–3806。[2]S. Bouchiba, S.E. Kabbaj，Cohen-Macaulay 环的张量积：Grothendieck 问题的解答，代数杂志 **252** (2002) 65–73。[3] N. Bourbaki，代数`与交换代数，Herman，巴黎，1967。[4] W. Bruns, J. Herzog，*Cohen-Macaulay* 环，剑桥高等数学研究丛书39，剑桥大学出版社，1993。[5] I. Bird, L. Shaul, P. Sridhar, J. Williamson，交换DG环上的有限维数，*Math. Z.***309**(2025) 1–29。[6] L.W. Christensen, H.-B. Foxby, H. Holm，《交换代数中的导出范畴方法》，Springer数学专著丛书，2024。[7] K. Divaani-Aazar, F.M. Aghjeh Mashhad, M. Tousi，关于某些有限戈伦斯坦同调维数模的存在性，代数通讯 **42** (2013) 1630–1643。[8] H. B. Foxby，Cohen-Macaulay 环上的拟完美模，*Math. Nachr.* **66**(1975) 103–110。

[9] A. Frankild, S. Iyengar, P. Jøgensen，对偶微分分次模与戈伦斯坦微分分次代数，伦敦数学会杂志 68 (2003) 288–306。[10] V.H. Jorge-P´erez, P. Martins, V.D. Mendoza-Rubio，Ischebeck 公式、级与拟同调维数，arXiv: 2412.06659v1，2024。[11] L. Khatami, S. Yassemi，张量积的 Cohen–Macaulay 性，落基山数学杂志 34 (2004) 205–213。[12] H. Matsumura，《交换环论》，剑桥大学出版社，1986。[13] H. Minamoto，交换微分分次代数的同调恒等式与对偶化复形，以色列数学杂志 242 (2021) 1–36。[14] D. Rees，理想或模的级，剑桥哲学学会会刊 53 (1957) 28–42。[15] L. Shaul，非正DG环上的内射DG模，代数杂志 515 (2018) 102–156。[16] L. Shaul，交换DG环上的完备化与挠，以色列数学杂志 232 (2019) 531–588。[17] L. Shaul，导出交换代数中的 Cohen-Macaulay 性，美国数学会汇刊 373 (2020) 6095–6138。[18] L. Shaul，Cohen-Macaulay 环上的 Koszul复形，数学进展 386 (2021) 107806。[19] L. Shaul，序列正则交换DG环，代数杂志 647 (2024) 400–435。[20] M. Tousi, S. Yassemi，某些特殊环的张量积，代数杂志 268 (2003) 672–676。[21] X.Y. Yang，非正DG环上DG-模的交叉定理，爱丁堡皇家学会学报A辑，已在线发表。[22] X.Y. Yang, L. Wang，非正DG环上的同调不变量，代数与应用杂志 2050153 (2020)（18页）。[23] X.Y. Yang, Y.J. Li，局部科恩-麦考利DG模，应用范畴结构 31 (2023) 1–13。[24] S. Yassemi, L. Khatami, T. Sharif，级与戈伦斯坦维数，代数通讯 29 (2001) 5085–5094。[25] A. Yekutieli，《导出范畴》，剑桥高等数学研究丛书，剑桥大学出版社，剑桥，2019。[26] K. Yoshida，完满模的张量积与极大满射Buchsbaum模，《纯粹与应用代数杂志》123 (1998) 313–326。