arXiv:2602.20755v1 [math.CT] 24 Feb 2026

幺半群 Schreier 扩张的方向函子

STEFANO AMBRA、ANDREA MONTOLI 和 DIANA RODELO

Abstract. 我们注意到，将作用赋予任意具有交换且可消去核的幺半群 Schreier 扩张这一过程具有函子性。我们证明，该函子是方向函子的一种推广；方向函子用于通过扩张以范畴论方式描述非阿贝尔上同调。我们还证明，我们的函子是保守的保积余纤维化，由此得出其纤维带有典范的对称幺半结构。由这些对称幺半范畴的连通分支构成的交换幺半群，同构于 Patchkoria 为具有半模系数的幺半群定义的第二上同调幺半群。

1. Introduction

阿贝尔群 B 的上同调群 $H^n(B, A)$（系数取自阿贝尔群 A ）有一种以正合列描述的经典方式。事实上，第一上同调群 $H^1(B, A)$ 同构于以 Baer 和构成的、从 A 开始并以 B 结束的扩张（即 B 到 A 的扩张）的同构类群。Yoneda [28] 借助 n- 扩张给出了高阶上同调群的类似描述。相同的结果适用于任意阿贝尔范畴。

（非阿贝尔）群上同调的情况更加多样。事实上，将不一定是阿贝尔群的群 G 用阿贝尔群 A 扩张所得的扩张同构类的全集 $\mathrm{Ext}(G, A)$，并没有上同调意义上的解释。然而，每个以阿贝尔群 A 扩张 G 的群扩张都会在 A 上诱导一个 G-模结构；于是，集合 $\mathrm{Ext}(G, A)$ 可以划分为形如 $\mathrm{Ext}(G, A, \varphi)$ 的子集，其中 $\varphi\colon G \to \mathrm{Aut}(A)$ 是 G 在 A 上的一个作用；正如 [13]，所示，每个集合 $\mathrm{Ext}(G, A, \varphi)$ 都与 G 的第二个 Eilenberg-Mac Lane 上同调群 $H^2(G, A, \varphi)$ 同构，其系数取自 G-模 (A, φ)。[16, 17] 中给出了用适当正合列解释高阶上同调群的结果。类似结论也适用于其他非阿贝尔代数结构，例如结合代数、李代数、莱布尼茨代数以及许多其他结构。

将具有阿贝尔核的群扩张与其诱导的作用相联系，这一过程具有函子性。关于该函子的性质，已有详细研究，见

2020 *Mathematics Subject Classification.* 18G50、20J06、20M50、18E13、18C05。
Key words and phrases. 幺半群的 Schreier 扩张、方向函子、上同调幺半群、可消去半模。本研究得到格鲁吉亚 Shota Rustaveli 国家科学基金会（SRNSFG）的资助，资助项目为 FR-24-9660：“幺半群类结构上同调理论研究的范畴方法：通过 Schreier 扩张的途径”。第一作者和第二作者是代数、几何结构及其应用国家小组（GNSAGA）以及“Francesco Severi”国家高等数学研究所的成员。第三作者感谢葡萄牙科学技术基金会（FCT，https://ror.org/00snfqn58）通过 CIDMA（https://ror.org/05pm2mw36）提供的经费支持，资助项目为 UID/04106/2025（https://doi.org/10.54499/UID/04106/2025）和 UID/PRR/04106/2025（https://doi.org/10.54499/UID/PRR/04106/2025）。

[5], 在此处，这个函子被视为一种非常一般的范畴构造的特例，称为方向函子。方向函子的定义域是具有全局支撑的对象所成的范畴（即指向终对象的箭头是正则满态射），这些对象还配备了自伴Mal'tsev运算，并且所在范畴是 Barr 正合范畴 $\mathcal{C}$; 其余域是 $\mathcal{C}$. 中的内部阿贝尔群范畴。将方向函子应用于切片范畴$\mathbf{Gp}/G$，时，方向函子恰好是将每个具有阿贝尔核的 G扩张映到相应作用的函子。事实上，$\mathbf{Gp}$ $/G$ 中具有全局支撑的对象是满群同态 $f\colon\ X \to G$，并且这样的 f 配备自伴 Mal'tsev运算（必然如此）当且仅当其核同余 $\mathcal{E}q(f)$按 [25], 的意义与自身中心化，这等价于说 f 的核是阿贝尔群。由 $\mathcal{E}q(f)$与自身中心化这一事实确定的双重等价关系，在[5], 中称为***Chasles*** 关系，它在方向函子的构造中起着关键作用：事实上，f 在方向函子下的像是一个分裂满同态，其余域为 G ，定义域则是 Chasles 关系的余等化子。这样的分裂满同态具有阿贝尔核，因而是$\mathbf{Gp}/G$. 中的内部阿贝尔群。通过半直积构造与该分裂满同态相对应的作用，恰好是由 f，诱导的 G 在 f. 的核上的作用。

文献 [5]表明，方向函子具有许多良好性质；特别地，它是余纤维化、保守的，并且保持有限积。得益于这些性质，其余域中任意对象上的阿贝尔群结构都可以提升为其纤维上的对称幺半闭结构。于是，在这些纤维的连通分支集合上便得到规范的阿贝尔群结构。在 $\mathcal{C} = \mathbf{Gp}/G$，的情形下，这些阿贝尔群恰好是上同调群 H^2. 在 [11] 中，利用高维方向函子对 Barr-正则范畴的高阶上同调群也得到了类似的描述（实际上可以弱化 Barr-正则性，改为考虑高效正则范畴，从而包含更多例子，例如拓扑群范畴；参见[11]）。

人们也曾尝试对幺半群扩张给出上同调描述。在这方面，一个关键概念是幺半群的 Schreier 扩张，该概念在 [26]中被引入。幺半群的 Schreier 扩张保留了群扩张的若干良好性质。文献 [15, 20, 21]表明，对于一个幺半群 M 按阿贝尔群 A 的作用所诱导的同一作用，其 Schreier 扩张的同构类集合（在 [8, 9]中称为特殊 ***Schreier*** 扩张）具有阿贝尔群结构；该结构扩展了群扩张通常的 Baer 和，并且这些阿贝尔群实际上同构于上调群 H^2（M， A， φ）。这里的幺半群 M带有系数于 M-模（A， φ）的上同调理论，而该理论直接推广了群的 Eilenberg-Mac Lane 上同调。Patchkoria 在 [23] 中引入了一种针对系数取半模的幺半群上同调理论（这是他在 [22]中引入的另一种上同调理论的变体），在该理论中得到的是上同调的交换幺半群，而非阿贝尔群。此外，他在 [24]中证明，其理论的第二上同调幺半群 H^2（M， K， φ）描述了 M通过 (K， φ) 这一可消去的M-半模扩张 M 的 Schreier 扩张 K.

本文证明，即使在幺半群的情形下，将作用与具有交换核的 Schreier 扩张相关联这一过程也是函子性的；并且，从某种意义上说，此函子是对 [5] 中研究的方向函子的推广。我们函子的定义域是范畴 $cc\text{-}SExt_M$ ，其对象是具有交换且可消去核的幺半群 M 的 Schreier 扩张。对于这样的扩张 $\mathbb{E}\colon\ K \overset{k}{\rightarrowtail} X \overset{f}{\twoheadrightarrow} M$ ，我们关联一个 Schreier 自反

关系（按 [8, 9] 中的意义） $\mathcal{R}_{\mathbb{E}}$，它自动满足传递性（得益于 [8, 9] 中的结果），但一般而言并不对称：由 $\mathcal{R}_{\mathbb{E}}$ 生成的同余恰好是 f 的核同余 $\mathcal{E}q(f)$，并且 $\mathcal{R}_{\mathbb{E}}$ 与 $\mathcal{E}q(f)$ 重合，当且仅当 f 的核是一个群。我们注意到，施赖尔关系 $\mathcal{R}_{\mathbb{E}}$ 将自身中心化；相应的双重施赖尔自反关系（其存在性和唯一性由 [10] 中的结果保证）于是是 [5]，的 Chasles 关系的推广，而我们的函子将 $\mathbb{E}$ 关联到一个分裂满同态，其余域为 M，定义域为广义 Chasles 关系的余等化子。此像是一个内交换幺半群，位于其对象为幺半群 M. 的 Schreier 扩张的范畴中。由此得到一个函子

$$d\colon cc\text{-}SExt_M \longrightarrow \mathbf{CMon}(cc\text{-}SExt_M)$$

其余域是 $cc\text{-}SExt_M$. 中的内部交换幺半群范畴。我们证明，该函子仍满足 [5] 中方向函子的关键性质。这使我们能够为该函子的纤维赋予对称幺半结构，并由此使这些纤维的连通分支集合具有规范的交换幺半群结构。由此得到的幺半群恰好是 Patchkoria 在 [23] 中构造的第二上同调幺半群。函子 d 实际上可以扩展为一个函子

$$D\colon smod\text{-}SExt_M \longrightarrow \mathbf{CMon}(smod\text{-}SExt_M),$$

其中 $smod\text{-}SExt_M$ 是一个范畴，其对象是诱导出 M-半模结构的 M 的施赖尔扩张（$cc\text{-}SExt_M$ 是$smod\text{-}SExt_M$的满子范畴）。这个更广义的函子具有与 d, 相同的性质，因此其纤维的连通分支也可赋予规范的交换幺半群结构，这些结构对应于 Patchkoria 在 [22] 中所研究的上同调理论的第二上同调幺半群。

2. Definition and first properties of Schreier extensions of monoids

本文将研究幺半群扩张，即由幺半群和幺半群同态构成的序列

$$\mathbb{E}: K \rightarrowtail^{k} X \twoheadrightarrow^{f} M \tag{2.1}$$

其中，$(K,\ k)$ 是 f 的核，且 f 是正则满态射（即满射幺半群同态）。遵循 [18] 中对群扩张所作的选择，我们将在 K 和 X 上采用加法记号，并在 M. 上采用乘法记号。不过，应当明确的是，虽然我们最终会要求 K 是交换的，但一般而言，我们从未对 X，作出这样的假设。我们记作 $Ker(f) = k(K) = \{x \in X\colon\ f(x) = 1\}$.。幺半群及其幺半群同态构成的范畴记为 **Mon**。

给定一个幺半群扩张 (2.1)，对于 $m \in M$，，记 B_m，为 $f^{-1}(m)$ 的子集，其定义如下：

$$B_m = \Big\{u \in f^{-1}(m) : \forall x \in f^{-1}(m),\ \exists!\, a \in K \text{ such that } x = k(a) + u\Big\}.$$

注意到，对于某些 m，B_m 完全可能为空；但由于 k 是一个单态射，始终至少有 $0 \in B_1$.。B_m 的元素称为 m 的代表元，我们将所有代表元的集合记为 $B(\mathbb{E}) = \bigcup_{m\in M} B_m$。根据构造，它是 X 的一个子集。

在下一个引理中，我们汇总一些由这些定义直接得到的有用性质。

引理 2.1. 在上述记号下：

(1) 对任意 a、$a' \in K$、$m \in M$ 和 $u \in B_m$，等式 $k(a) + u = k(a') + u$成立，当且仅当 $a = a'$.*(2)* 若 u、$v \in B_m$，则存在唯一的 $a \in U(K)$ 使得 $u = k(a) + v$（其中 $U(K) \subseteq K$表示可逆元构成的子群）。*(3)* 反之，若 $u \in B_m$ 且 $a \in U(K)$，则 $k(a) + u \in B_m$.

定义 2.2 ([26])。我们称 (2.1) 为 *Schreier* 扩张，如果对于每个 $m \in M$.，都有 $B_m \neq \emptyset$

若 (2.1) 是 Schreier 扩张，则对每个固定的 $m \in M$ 和 $u \in B_m$，方程 $x = k\big(q_{m,\,u}(x)\big) + u$ 定义了一个集合 映射（本文用虚线箭头表示，以强调它不是**Mon**中的态射）

$$q_{m,u} \colon f^{-1}(m) \dashrightarrow K,\ x \mapsto q_{m,u}(x).$$

推论 2.3。若(2.1) 是幺半群扩张，则对每个 $m \in M$ 和每个 $u \in B_m$，存在一个双射

$$\vartheta = \vartheta_{m,u} \colon U(K) \xrightarrow{\sim} B_m,\ a \mapsto k(a) + u.$$

因此，对于任意 $u \in B_m$，B_m 上有一个以 u 为中性元的群结构；若 $U(K)$ 是阿贝尔群，则该群结构也是阿贝尔群。特别地，若(2.1) 是 *Schreier* 扩张，则对所有 m、$m' \in M$，存在一个双射 $B_m \cong B_{m'}$；相对于由这些 ϑ 诱导的群结构，该双射是群同构。

证明。由引理 2.1，$\vartheta_{m,\,u}$ 是单射（性质 (1)），也是满射（性质 (2)）。随后，通过 $\vartheta_{m,\,u}$，将 $U(K)$ 的群结构转移到 B_m 上，从而得到所需的群结构；也就是说，对所有 v, $w \in B_m$. □，定义和为 $v +_u w = \vartheta_{m,\,u}\big(\vartheta_{m,\,u}^{-1}(v) + \vartheta_{m,\,u}^{-1}(w)\big)$

定义 2.2 的其他一些直接推论汇集在下面的引理中。

引理 2.4 （参见 [8, 命题 2.1.5]）。对于一个 *Schreier* 扩张 (2.1)：

(1) $q_{1,\,0}k = id_K$；(2) 对于每个 $u \in B(\mathbb{E})$ $q_{f(u),\,u}(u) = 0$；(3) 对于每个 $a \in K$ 和 $u \in B(\mathbb{E})$ $u + k(a) = k\Big(q_{f(u),u}\big(u + k(a)\big)\Big) + u$；(4) 对于每个 x、$x' \in X$、$u \in B_{f(x)}$ 和 $u' \in B_{f(x')}$，

$$q_{f(x),u}(x) + q_{f(x'),u'}(x') = q_{f(x'),u'}\Big(k\big(q_{f(x),u}(x)\big) + x'\Big).$$

证明。(1) 给定 $a \in K$，元素$q_{1,\,0}\big(k(a)\big)$ 由$k(a) = k$唯一确定

$\Big(q_{1,0}\big(k(a)\big)\Big)$，且 k 是一个单态射。

(2) 对某个 $m \in M$，有 $u \in B_m$，因此 $f(u) = m$；故 u 是 $f(u)$的一个代表元。此外，$u = k(0) + u$ 且 $q_{f(u),\,u}(u)$由$u = k\big(q_{f(u),\,u}(u)\big) + u$. 唯一确定。等式由 Schreier 扩张的定义得出。

(3) 由观察到 u是 $f\big(u + k(a)\big) = f(u)$的一个代表元。(4) 元素 $q_{f(x')\,u'}\Big(k\big(q_{f(x),u}(x)\big) + x'\Big) \in K$ 由方程 $k\big(q_{f(x),\,u}(x)\big) + x' = k\Big(q_{f(x')\,u'}\Big(k\big(q_{f(x),u}(x)\big) + x'\Big)\Big) + u'$. 唯一确定。于是

$$\begin{aligned} k\big(q_{f(x),u}(x) + q_{f(x'),u'}(x')\big) + u' &= k\big(q_{f(x),u}(x)\big) + k\big(q_{f(x'),u'}(x')\big) + u' \\ &= k\big(q_{f(x),u}(x)\big) + x', \end{aligned}$$

根据 Schreier 扩张的定义，所需的等式成立。

□

从现在起，为简化记号，我们将写作 u_m ，表示 $m \in M$ 的某个代表元；并对所有 $m \in M$ 和 $u \in B_{m\cdot}$ ，写作$q_{m,\ u} = q$ 。因此，例如，给定一个 Schreier 扩张 (2.1)，对于每个 $x \in X$ （以及 $u_{f(x)} \in B_{f(x)}$），都有唯一的 q（x）$\in K$ 使得

$$x = kq(x) + u_{f(x)}, \tag{2.2}$$

而前一个引理第（4）点中的等式可简写为$q(x) + q(x') = q\big(kq(x) + x'\big)$.

由于根据引理 2.1，同一 m 的任意两个代表元相差一个可逆元素，因此我们得到 Schreier 扩张 (2.1) 的一种刻画，其中核是一个群。

命题 2.5. 给定一个 *Schreier* 扩张(2.1)，以下条件等价：

(1) $B(\mathbb{E}) = X$，即 $B_m = f^{-1}(m)$ 对每个 $m \in M$；

(2) $B_1 = Ker(f)$；(3) K 是一个群。

证明。 显然 (1) 蕴含 (2)，而将 $u = k(a)$ 和 $v = 0$ 代入引理 2.1(2)，即可由 (2) 得到 (3)，其中任意 $a \in K.$ 均成立。现在，为证明 (3) 蕴含 (1)，只需证明：若 $a \in K$ 且 u_m 是一个代表元，则 $k(a) + u_m$ 也是一个代表元；但若 $x \in f^{-1}(m)$，则由 (2.2) 得 $x = kq(x) + u_m$，因此对于 $a'' \in K$，有 $x = k(a'') + (k(a) + u_m)$，其中 $a'' \in K$ 被唯一确定为 $a'' = q(x) - a$. □

定义 2.2 的另一个相关推论如下，它证明 Schreier 扩张确实是短正合列。

命题 2.6 (参见 $[24,$ 节 $4]$)。 若(2.1) 是一个 *Schreier* 扩张，则 f 是 k的余核，因此 (2.1) 是 **Mon**中的短正合列。

证明。设 $g:\ X \to Z$ 是一个幺半群同态，满足 $gk = 0$。那么 g在 $f.$ 的每个纤维 $f^{-1}(m)$ 上都是常值。事实上，由于 (2.1) 是一个 Schreier 扩张，我们有 $B_m \neq \emptyset$；设 $u_m \in B_{m\cdot}$。若 $x, x' \in f^{-1}(m)$，则根据 (2.2)，有 $x = kq(x) + u_m$且$x' = kq(x') + u_m$。由此可得 $g(x) = g(u_m) = g(x')$。注意，若u_m, v_m是 m的两个代表元，则 $g(u_m) = g(v_m)$，因为 $u_m, v_m \in f^{-1}(m)$。定义 φ: $M \to Z$，令 $\varphi(m) = g(u_m)$，其中 u_m 是$m.$ 的任意代表元。上文已证明 φ 定义良好，并且作为函数，它显然满足 $\varphi f = g.$。为证明它也是一个幺半群同态，设 $m, m' \in M$: 则再次根据 (2.2)，有 $u_m + u_{m'} = kq(u_m + u_{m'}) + u_{m\cdot m'}$；又利用$gk = 0$ 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}\varphi(m \cdot m') &= g(u_{m\cdot m'}) = g(kq(u_m + u_{m'}) + u_{m\cdot m'}) \\ &= g(u_m + u_{m'}) = g(u_m) \cdot g(u_{m'}) = \varphi(m) \cdot \varphi(m').\end{aligned}$$

φ 的唯一性显而易见，因为 f 是满态射。 □

例 2.10.6 将证明，这一结果的逆命题一般并不成立。

Schreier 扩张这一概念自然带有一个关于 Schreier 扩张之间态射的相容概念：

定义 2.7. A*Schreier* 扩张态射 $\mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ 是幺半群扩张的一个态射

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{E}: K & \overset{k}{\rightarrowtail} & X & \overset{f}{\twoheadrightarrow} & M \\ {\scriptstyle\alpha_1}\downarrow & (a) & {\scriptstyle\alpha_2}\downarrow & (b) & \downarrow{\scriptstyle\alpha_3} \\ \mathbb{E}': K' & \underset{k'}{\rightarrowtail} & X' & \underset{f'}{\twoheadrightarrow} & M', \end{array} \tag{2.3}$$

这意味着 α_1， α_2， α_3 是幺半群同态，使得方块 (a) 和 (b) 可交换，并满足附加条件 $\alpha_2(B(\mathbb{E})) \subseteq B(\mathbb{E}')$。

由 (b) 的交换性，将 α_2 限制到 B_m 得到一个映射 $\alpha_2\colon B_m \to B'_{\alpha_3(m)}$ （后者表示 $\mathbb{E}'$ 所对应的 $\alpha_3(m)$ 的代表元集合），该映射相对于推论 2.3 中的群结构是群同态，因为对于每个 $u \in B_m$， 下图

$$\begin{array}{ccc} U(K) & \xrightarrow[\sim]{\vartheta_{m,u}} & B_m \\ {\scriptstyle\alpha_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_2} \\ U(K') & \xrightarrow[\vartheta_{\alpha_3(m),\alpha_2(u)}]{\sim} & B'_{\alpha_3(m)} \end{array}$$

交换（利用 (2.3) 中 (a) 的交换性）。

由引理 2.1 可知，要证明两个 Schreier 扩张之间的幺半群扩张态射 (2.3) 是 Schreier 扩张态射，只需证明对于所有 $m \in M$， m 在 $\mathbb{E}$ 中的任意代表元 u_m 经 α_2 映射后，都是 $\mathbb{E}'$ 中的代表元：

命题 2.8。考虑一个（不一定是 *Schreier* 扩张之间的）幺半群扩张态射 (2.3)，并假设对于某个 $u_m \in B_m$ （其中 $m \in M$）， $\alpha_2(u_m) \in B'_{\alpha_3(m)}$。那么对于所有 $v_m \in B_m$.， $\alpha_2(v_m) \in B'_{\alpha_3(m)}$

证明。如果 u_m，则根据引理 2.1(2)，我们有 $v_m = k(a) + u_m$ 对于唯一的$a \in U(K)$，并且 $f'(\alpha_2(v_m)) = \alpha_3(f(v_m)) = \alpha_3(m)$。此外， $\alpha_1(a)$ 在 K' 中是可逆的，因为 a 在 K 中是可逆的，且 α_1 是幺半群同态。我们有$\alpha_2(v_m) = \alpha_2(k(a)) + \alpha_2(u_m) = k'(\alpha_1(a)) + \alpha_2(u_m)$，这根据引理 2.1(3). □证明了 $\alpha_2(v_m) \in B'_{\alpha_3(m)}$

可以证明，短五引理对于 Schreier 扩张确实成立，尽管它对幺半群一般并不适用（因为范畴**Mon**不是原模的 [4]）。

命题 2.9 ([24, 命题 4.5])。 考虑一个 *Schreier* 扩张的态射 (2.3) 。那么：

(1) 若 α_1 和 α_3 是单态射（即单射幺半群同态），则α_2 是单态射；(2) 若 α_1 和 α_3 是正则满态射（即满射幺半群同态），则 α_2 是正则满态射。

因此，特别地，若 α_1 和 α_3 是同构，则 α_2.也是同构

我们以一些 Schreier 幺半群扩张和非 Schreier 幺半群扩张的具体例子结束本节。

例 2.10。 1. 每个群的短正合列

$$K \rightarrowtail^{k} X \twoheadrightarrow^{f} G$$

都是一个幺半群的 Schreier 扩张，其中所有 $x \in X$ 都是代表元，根据命题 2.5。对于任意 $u \in X$和任意 $x \in f^{-1}（f（u））$， 确实有$x = k（a） + u$，其中存在唯一一个 $a \in K$ 由 $k（a） = x - u$.给出

2。对于每个幺半群 M，平凡扩张

$$M = M \twoheadrightarrow 0$$

都是 Schreier 扩张，其代表元是M.的可逆元素。同样，扩张

$$0 \rightarrowtail M \xlongequal{} M$$

是一个 Schreier 扩张，其中 $B_m = \{m\}$ 对所有 $m \in M$.

3. 对于所有幺半群 K 和 M，幺半群扩张

$$K \xrightarrowtail{\langle id_K, 0\rangle} K \times M \xrightarrow{\pi_M} M$$

（其中 $\pi_M(a, m) = m$）是一个 Schreier 扩张，其代表元为满足 $m \in M$和 $a \in U(K)$。的有序对 (a, m)

4.（参见 [24, 例 4.2]）设 $m > 1$ 为一个自然数，并考虑幺半群扩张

$$(\mathbb{N}, +, 0) \xrightarrowtail{\cdot m} (\mathbb{N}, +, 0) \xrightarrow{f} C_m(t),$$

其中 $C_m(t)$ 是阶为 m 、生成元为 t， $\cdot m$ 表示乘以 m 的通常乘法，且 $f(1) = t$. 它是一个 Schreier 扩张，其代表元为 $B_1 = \{0\}$， $B_t = \{1\}$，$B_{t^2} = \{2\}$，……， $B_{t^{m-1}} = \{m-1\}$.。幺半群扩张

$$0 \rightarrowtail \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{+} \mathbb{N}$$

根据命题 2.6，它不是 Schreier 扩张，因为由自然数求和给出的正规满态射 $+$ 不是正规满态射（否则它将是其核 0 的余核，因而是同构，但 $+$ 不是单射）。

6. 设 $(M_2 = \{0, 1\}, \cdot, 1)$ 是单位元为 1 且 $0 \cdot 0 = 0$, 的交换幺半群，并考虑幺半群扩张

$$(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot, 1) \xrightarrowtail{i} (\mathbb{N}, \cdot, 1) \xrightarrow{f} (M_2, \cdot, 1)$$

其中 i 是包含态射， $f(n) = 1$ 当 $n \neq 0$ 时成立，且 $f(0) = 0$. 。这个扩张不是 Schreier 扩张，因为存在无穷多个 $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 使得 $0 = a \cdot 0$. 。即便如此， f 在**Mon** 中是正规满态射：事实上，若 g: $(\mathbb{N}, \cdot, 1) \to (M, \cdot, 1)$ 是任意一个幺半群同态，并且对所有 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, g， $g(n) = 1$，则它可经由 f 分解为 $g = gf$（且分解唯一，因为 f 是满态射），其中 g: $M_2 \to M$ 由 $g(1) = 1$ 和 $g(0) = g(0)$ 给出。因此命题 2.6 的逆命题不成立。

3. Action induced by a Schreier extension

众所周知，如果 $K \overset{k}{\rightarrowtail} X \overset{f}{\twoheadrightarrow} G$ 是一个群的短正合列，且 K 是阿贝尔群，那么便得到一个 G 在 K 上的（左）作用，定义如下：

$$G \times K \dashrightarrow K, \ (g, a) \mapsto a' \text{ with } k(a') = s(g) + k(a) - s(g), \tag{3.1}$$

其中 s: $G \dashrightarrow X$ 是 f 的任意集合论截面（即， s 是满足 $fs = id_G$ 的任意集合映射）。我们想要证明，幺半群的 Schreier 扩张也有类似的情形。

本节中的大多数事实已为人所知，例如可在 [24], 中找到相关陈述。不过，由于这些性质在我们的主要构造中至关重要，我们认为有必要为读者提供显式证明。

回顾一下，幺半群 $(M, \cdot, 1)$ 在幺半群 $(A, +, 0)$ 上的（左）作用，是一个幺半群同态 $(M, \cdot, 1) \to (\mathrm{End}(A) \circ, id_A)$, 其中 End($A$) 表示 A 的幺半群自同态集合；这等价于存在一个集合映射 $M \times A \dashrightarrow A$,$(m, a) \mapsto m * a$, 满足以下四条公理：

(A_1) $1 * a = a$ 对所有 $a \in A$ 均成立；(A_2) $m * 0 = 0$ 对所有 $m \in M$ 均成立；(A_3) $m * (a + a') = m * a + m * a'$ 对所有 $m \in M$ 和 $a, a' \in A$ 均成立；(A_4) $(m' \cdot m) * a = m' * (m * a)$ 对所有 $m, m' \in M$ 和 $a \in A$. 均成立

如果 $K \overset{k}{\rightarrow} X \overset{f}{\twoheadrightarrow} M$ 是以 K 为交换的幺半群的 Schreier 扩张，我们断言映射

$$M \times K \dashrightarrow K,\ (m, a) \mapsto m * a \ \text{ with } u_m + k(a) = k(m * a) + u_m \tag{3.2}$$

是良定义的，即它不依赖于 m. 的代表元 u_m。事实上，设 u， $v \in B_m$， $a \in K$，并设 a_u，$a_v \in K$ 满足 $u + k(a) = k(a_u) + u$ 且 $v + k(a) = k(a_v) + v$.。由于 u 和 v 都是 m 的代表元，，根据引理 2.1(2)，存在唯一的 $a' \in U(K)$ 使得 $u = k(a') + v$.。我们有

$$u + k(a) = k(a') + v + k(a) = k(a') + k(a_v) + v = k(a' + a_v) + v,$$

$$u + k(a) = k(a_u) + u = k(a_u) + k(a') + v = k(a_u + a') + v,$$

并且根据引理 2.1(1)，由于 K 的交换性以及 a' 的可逆性，可得 $a_u = a_v$.

注意，(3.2) 可以表示为

$$m * a = q\big(u_m + k(a)\big), \tag{3.3}$$

采用上一节的记号。

这里的关键是，(3.2) 几乎定义了 M 在 K上的作用，如下所示。

命题 3.1。若 $\mathbb{E}$： $K \overset{k}{\rightarrow} X \overset{f}{\twoheadrightarrow} M$ 是一个 *Schreier* 扩张，且 K是交换的，则方程 (3.2) 总是满足公理 (A_1)、(A_2) 和 (A_3)。此外，若 K 是可消去的，则(A_4) 也成立；此时(3.2)定义了 M 在 K.上的幺半群作用

证明。(A_1) 根据定义，对于 $a \in K$， $1 * a$ 是满足 $u_1 + k(a) = k(1 * a) + u_1$的唯一元素；于是令 $u_1 = 0$，得到 $1 * a = a$.(A_2) 对于 $m \in M$， 由引理 2.1(1)可知， $u_m = u_m + k(0) = k(m * 0) + u_m$ 蕴含 $m * 0 = 0$.(A_3) 给定 $m \in M$ 和 a，$a' \in K$， 令 $m * a = b$ 和 $m * a' = b'$， 使得$u_m + k(a) = k(b) + u_m$ 且 $u_m + k(a') = k(b') + u_m$. 于是

$$\begin{aligned} u_m + k(a + a') &= u_m + k(a) + k(a') \\ &= k(b) + u_m + k(a') \\ &= k(b) + k(b') + u_m \\ &= k(b + b') + u_m, \end{aligned}$$

由此 $m * (a + a^*) = b + b' = m * a + m * a'$.

(A_4) 现在假设 K 也可消去，并定义 $m * a = b$ （使得$u_m + k(a) = k(b) + u_m$）、$m' * b = b'$ （使得 $u_{m'} + k(b) = k(b') + u_{m'}$），以及 $(m' \cdot m) * a = c$ （使得 $u_{m' \cdot m} + k(a) = k(c) + u_{m' \cdot m}$）。我们要证明

这一点。令 $u_{m'} + u_m = k(l) + u_{m'\cdot m}$；则

$$\begin{aligned} k(l+b') + u_{m'\cdot m} &= k(b') + k(l) + u_{m'\cdot m} \\ &= k(b') + u_{m'} + u_m \\ &= u_{m'} + k(b) + u_m \\ &= u_{m'} + u_m + k(a) \\ &= k(l) + u_{m'\cdot m} + k(a) \\ &= k(l) + k(c) + u_{m'\cdot m} \\ &= k(l+c) + u_{m'\cdot m}, \end{aligned}$$

由引理 2.1(1)和 K.的消去性，结论得证

□

我们强调， K 的消去性只是使(3.2)成为幺半群作用的充分条件：事实上，注意到，如果 $k(K)$在 X中是中心的，那么(3.2)就只是对所有 $m \in M$ 和 $a \in K$，都赋值为 $m * a = a$ 的平凡赋值；即使 K 不可消去，它也始终是一个作用（平凡作用）。例如，当 M 是交换的但不可消去时，例2.10.2（第一个例子）就是这种情况。同样，当 K 是交换的时，例2.10.3的 Schreier 扩张总是诱导出平凡作用（即使 M 不是交换的）。

给定命题3.1中的 Schreier 扩张 $\mathbb{E}$，其中 K是交换且可消去的，我们将上述作用对应的幺半群同态记为

$$\eta\colon M \to \mathrm{End}(K),\ m \mapsto \eta(m)\colon K \to K, \tag{3.4}$$

其中 $\eta(m)(a) = m * a$，如（3.2）所示。

此外请注意，当 $K \overset{k}{\rightarrowtail} X \overset{f}{\twoheadrightarrow} G$ 是一个核为阿贝尔群的群短正合列时（它总是一个幺半群的 Schreier 扩张，且 K 可消去），诱导出的作用（3.2）确实与群作用（3.1）一致。

由于要求 K 交换且可消去这一条件会在接下来的章节中反复出现，为求简洁，我们作如下定义。

定义 3.2。*cc-Schreier* 扩张是指 Schreier 扩张 $K \overset{k}{\rightarrowtail} X \overset{f}{\twoheadrightarrow} M$，其中核 K 交换且可消去。

我们以指出映射 (3.2) 的一个性质来结束本节。尽管这一性质很简单，但在进行显式计算时将非常有用。

引理 3.3. 若 $K \overset{k}{\rightarrowtail} X \overset{f}{\twoheadrightarrow} M$ 是一个 K 交换的 *Schreier* 扩张，则

$$x + k(a) = k\big(f(x) * a\big) + x \tag{3.5}$$

对所有 $x \in X$ 和 $a \in K$.

证明. 由 (.)，有 $x = kq\ x + u_{f(x)}$ 2 2 $x + k\ a = kq\ x + u_{f(x)} + ()$，再由 (.) 得到。于是 $k\ a$ 3 2 $()\ ()\ ()\ (.) = kq()\ x + k\big(f()\ * a\big) + u_{f(x)} = k\big(f()\ * a\big) + kq()\ x + u_{f(x)} = k\big(f()\ * a\big) + x$，这里用到了 K. □ 的交换性

4. Interlude on Schreier points and S-reflexive relations

本节汇集了关于所谓 Schreier 点 的一些主要结果，这些结果将在构造我们的方向函子的过程中用到。

以下概念在 [19], 定义 2.6 中引入：

定义 4.1. 一个幺半群的 *Schreier*分裂扩张，或称*Schreier* 点，是一种分裂扩张

$$K \rightarrowtail^{k} B \underset{s}{\overset{f}{\rightleftarrows}} M \tag{4.1}$$

在 **Mon** 中（其中幺半群同态 s 是 f 的一个固定截面，且 (K,k) 是 f 的一个核），存在唯一的集合映射 $q\colon B \dashrightarrow K$ （称为*Schreier* 收缩），满足

$$b = kq(b) + sf(b), \tag{4.2}$$

对每个 $b \in B$.

文献 [8] 对幺半群的 Schreier 分裂扩张进行了深入研究。

注 4.2. 注意，任意幺半群的 Schreier 分裂扩张 (4.1) 都确定了一个
按定义 2.2 意义下的 Schreier 扩张 $K \rightarrowtail^{k} B \twoheadrightarrow^{f} M$，其中对所有 $m \in M.$，$s(m) \in B_m$ 。请注意，B_m 不一定能约化为唯一元素 $s(m)$，正如群的分裂扩张所示。事实上，根据命题 2.5，当 f 不是单态射时，我们有 $B_1 = f^{-1}(1) = k(K) \neq \{0\}$ 。此外，满足 (4.2) 的唯一元素 $q(b) \in K$ 与 $q_{f(b),sf(b)}(b)$ 相同，这里采用第 2 节的记号。反过来，若 (2.1) 是定义 2.2 意义下的 Schreier 扩张，且由截面 $s\colon M \to X$ 分裂，使得每个 $s(m) \in B_m$,，那么 $K \rightarrowtail^{k} X \underset{s}{\overset{f}{\twoheadrightarrow}} M$ 就是一个 Schreier 分裂扩张。Schreier 收缩由集合映射 $q\colon X \dashrightarrow K$, 给出，其中对每个 $x \in X$,， $q(x) = q_{f(x),sf(x)}(x)$，如定义 2.2 后所定义。

为避免混淆这两个概念，从现在起，我们将沿用*Schreier* 点这一名称来指称 (4.1)。Schreier 点的重要性在于，它们与幺半群作用相对应，正如群的分裂扩张通过半直积构造（参见 [8, 命题 5.2.2], ，另请参见 [3] 第 5.2 节中的群的经典情形）等价于群作用一样。

命题4.3 ([8, 定理 5.1。2])。给定一个 *Schreier* 点 $K \overset{k}{\rightarrowtail} B \underset{s}{\overset{f}{\twoheadrightarrow}} M$及其 *Schreier* 收缩 q， M 在 K 上的诱导幺半群作用定义为

$$M \times K \dashrightarrow K,\ (m,a) \mapsto m \bullet a = q\big(s(m) + k(a)\big). \tag{4.3}$$

注意，(4.3)恰好就是(3.3)，因为每个 $s(m)$ 都是 m.的一个代表元

我们将对应于此作用的幺半群同态记为

$$\sigma\colon M \to \mathrm{End}(K),\ m \mapsto \sigma(m)\colon K \to K, \tag{4.4}$$

其中 $\sigma(m)(a) = m \bullet a$，如（4.3）所示。

Consider a reflexive graph $\mathcal{G}$: $R \underset{\rho_2}{\overset{\rho_1}{\underset{\delta}{\rightleftarrows}}} X$ in **Mon**, so that $\rho_1\delta = \rho_2\delta = id_X$.

定义 4.4 ([8, 定义 3.0.10])。我们称 $\mathcal{G}$ 为施赖尔自反图，或称为一个 S-自反图，如果

$$K_1 \rightarrowtail^{k_1} R \underset{\delta}{\overset{\rho_1}{\twoheadrightarrow}} X$$

是一个 Schreier 点，其中 $(K_1,\ k_1)$ 是 ρ_1. 的一个核

由于 ρ_1 的任意两个核之间都由唯一的幺半群同构联系起来，因此这不依赖于 $(K_1,\ k_1)$。当然，如果 $\mathcal{G}$ 是 X 上的一个（自反）关系（也就是说，$(\rho_1,\ \rho_2)$ 是联合单态的），我们就有相应的 S-自反关系概念。我们将使用以下结果：

命题 4.5 ([8, 命题3.1。5])。任何 S-自反关系 $\mathcal{G}$ 都是传递的；当且仅当 K_1 是群时，它才是对称的。

这里一个相关方面是，类似于 Mal'tsev 范畴的情形，对（S-）等价关系存在一种良好的中心性 概念。中心性的研究历史悠久，可追溯到 Smith [27] 对 Mal'tsev 簇的研究，以及 Carboni、Pedicchio、Pirovano [12] 和 Pedicchio [25]对 Mal'tsev 范畴一般情形的研究。最终， [6]引入了连接子 的概念，并证明它等价于 Smith-Pedicchio 中心性定义；该定义以双重中心化关系的形式给出（另见 [7], 引理 2。1）。连接子可以在任意有限完备范畴 $\mathcal{C}$, 中以非常一般的方式定义，但它们在 Mal'tsev 范畴中表现得尤为良好，在这种情形下，可以证明两个等价关系 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{R}'$ 之间的（最终）连接子是唯一的。

回顾一下，若 $\mathcal{R}$: $\underline{\underline{R} \prec \overset{\rho_1}{\underset{\rho_2}{\delta}} \succ X}$ 和 $\mathcal{R}'$: $\underline{\underline{R'} \prec \overset{\rho_1'}{\underset{\rho_2'}{\delta'}} \succ X}$ 是有限完备范畴 $\mathcal{C}$ 中对象 X 上的等价关系，则它们之间的连接子是一个态射 p: $R \times_X R' \longrightarrow X$，属于 $\mathcal{C}$，并满足某些方程公理（见 [6, 定义 2.2]），其中 $R \times_X R'$ 表示一个拉回

$$\begin{array}{ccc} R \times_X R' & \longrightarrow & R' \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \rho_1'} \\ R & \xrightarrow[\rho_2]{} & X. \end{array}$$

当 $\mathcal{C}$ 是 Mal'tsev 范畴——也就是说， $\mathcal{C}$ 中的任意自反关系都是等价关系——这些公理可归结为两个集合论方程 $p(a,\ a,\ z) = z$ 和 $p(b,\ y,\ y) = b$，对所有满足 $a\mathcal{R}'z$ 和 $b\mathcal{R}y.$ 的 $a,\ b,\ y,\ z \in X$ 均成立。此外，若 $\mathcal{R}$ 与 $\mathcal{R}'$ 之间存在连接子，则它必然唯一（[6, 命题 4.1]）。注意，在 Mal'tsev 的情形下，连接子不过是受限的 Mal'tsev 运算，其限制对象是满足 $x\mathcal{R}y\mathcal{R}'z.$ 的三元组 $(x,\ y,\ z)$

现在，幺半群范畴当然不是 Mal'tsev 范畴，即使在 S自反关系的情况下，也只有传递性而非对称性是自动得到保证的（命题 4.5）。然而，根据 [8, 定理 2.4, 2]当 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{R}'$ 是**Mon** 中的自反关系，且其中至少一个是 *Schreier* 自反关系时，同样的连接子简化定义可用于定义中心性：

定义 4.6（[8, 定义 4.3.1]）。若 $\mathcal{R}$: $\underline{\underline{R \prec \overset{\rho_1}{\underset{\rho_2}{\delta}} \succ X}}$和 $\mathcal{R}'$: $\underline{\underline{R' \prec \overset{\rho_1'}{\underset{\rho_2'}{\delta'}} \succ X}}$是 Mon 中的自反关系，且 $\mathcal{R}'$ 是 Schreier 自反关系，则当存在一个幺半群同态 p: $R \times_X R' \longrightarrow X$ 满足：对于所有满足 $a\mathcal{R}'z$和 $b\mathcal{R}y.$ 的 $a, b, y, z \in X$，有 $p(a, a, z) = z$ 以及 $p(b, y, y) = b$ 时，我们称 $\mathcal{R}$ 和$\mathcal{R}'$ 彼此中心化。此时态射 p 必然唯一，称为 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{R}'.$ 的连接子。

下面的刻画将很有用：

命题 4.7 （[8, 命题4.3。3]）。考虑如下的自反关系 $\mathcal{R}$ 和一个S-自反关系 $\mathcal{R}'$，其中

$$K' \overset{k'}{\rightarrowtail} R' \underset{\delta'}{\overset{\rho_1'}{\twoheadrightarrow}} X \quad (q' : R' \to K')$$

是一个 *Schreier* 点，其 *Schreier* 收缩为 q'. 。于是，考虑 $K' \subseteq X$ 和 $k'(t) = (0, t)$，对于 $t \in K'$，$\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{R}'$ 彼此中心化，当且仅当对每个 $t \in K'$ 以及每个 $(x, y) \in R$，等式 $q'(y, y + t) + x = x + t$ 在 X 中成立；在这种情况下，连接子由 $p(x, y, z) = q'(y, z) + x$ 给出（对所有满足 $x\mathcal{R}y\mathcal{R}'z$ 的 $(x, y, z) \in X \times X \times X$）。

Schreier 内部结构的这些 Mal'tsev 方面已在范畴层面上于 [10] 中得到探讨。

5. The Chasles relation of a cc-Schreier extension

现在我们继续研究扩张，并固定一个 Schreier 扩张

$$\mathbb{E} : K \overset{k}{\rightarrowtail} X \overset{f}{\twoheadrightarrow} M,$$

其中 K 是交换的。

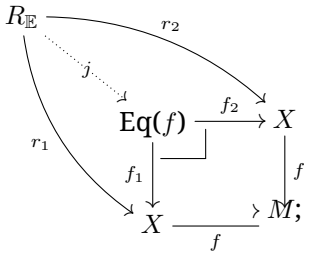
定义一个关系

$$\mathcal{R}_{\mathbb{E}} : \; R_{\mathbb{E}} \underset{r_2}{\overset{r_1}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\longrightarrow}}}} X \tag{5.1}$$

在 X in **Mon** 上，定义为 $(x, z) \in R_{\mathbb{E}}$ 当且仅当存在某个（不一定唯一的）$a \in K$, 使得 $z = k(a) + x$，且 $r_1(x, z) = x$, $r_2(x, z) = z$，以及 $s_0(x) = (x, x)$。利用 (3.5)，我们看到这是 **Mon** 中的一个内关系，因为我们可以写成

$$\begin{aligned}\big(x, k(a) + x\big) + \big(y, k(b) + y\big) &= \big(x + y, k(a) + x + k(b) + y\big) \\ &= \Big(x + y, k(a) + k\big(f(x) * b\big) + x + y\Big) \\ &= \Big(x + y, k\big(a + f(x) * b\big) + x + y\Big).\end{aligned}$$

此外，$\mathcal{R}_{\mathbb{E}}$显然是自反且传递的。由于对所有$x \in X$ 以及所有 $a \in K$, ， $f\big(k(a) + x\big) = f(x)$，因此在 f 的核对中存在一个诱导态射 j



由等式 $\langle f_1, f_2\rangle j = \langle r_1, r_2\rangle$ 可知，j 是一个单态射，并且可将其实现为一个包含映射。因此，$R_{\mathbb{E}}$ 是 Eq(f) 的一个子对象，由下一个命题可知，f 的核对关系，记为 $\mathcal{E}q(f)$，是由关系 $\mathcal{R}_{\mathbb{E}}$ 生成的同余（即 **Mon** 中 X 上包含 $\mathcal{R}_{\mathbb{E}}$ 的最小等价关系）：

命题 5.1. 给定一个 *Schreier* 扩张 $\mathbb{E}$，其中 K 交换，并满足关系 $\mathcal{R}_{\mathbb{E}}$ (5.1)，则正则满态射 f 是(r_1, r_2)的余等化子。

证明。 我们已经论证过 $fr_1 = fr_2$.。假设 $h\colon X \to Z$是满足 $hr_1 = hr_2$.的幺半群同态。给定 $(x, y) \in \mathrm{Eq}(f)$，令 $f(x) = f(y) = m$.。于是， $h(x) \overset{(2.2)}{=} h(kq(x) + u_m) = h(u_m)$，因为 $hr_1 = hr_2$；类似地， $h(y) = h(u_m)$。我们得到 $hf_1 = hf_2$，且 h 唯一地经由 f 分解，因为 f 是其核对的余等化子。□

为更精确地描述这一情形，记 $k_2 = \langle k, 0\rangle\colon K \rightarrowtail \mathrm{Eq}(f)$ 为核对 $\mathrm{Eq}(f)$ 的第二投影 f_2 的核。于是有：

命题 5.2。 设 $\mathbb{E}$为一个 *Schreier* 扩张，且 K 交换的，并满足关系 $\mathcal{R}_{\mathbb{E}}$ (5.1)，则态射 j 和 k_2 是联合极端满态射。

证明。 对于所有 $(x, y) \in \mathrm{Eq}(f)$，我们都可以写成

$$\begin{aligned}(x, y) \overset{(2.2)}{=} \big(kq(x) + u_m, kq(y) + u_m\big) &= (kq(x), 0) + (u_m, kq(y) + u_m)\\ &= k_2(q(x)) + j(u_m, kq(y) + u_m),\end{aligned}$$

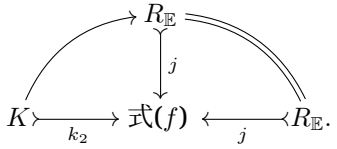
其中 $m = f(x) = f(y)$。 □

因此，对于 $\mathcal{R}_{\mathbb{E}}$是同余的 Schreier 扩张 $\mathbb{E}$，有如下刻画：

推论 5.3. 给定一个 *Schreier* 扩张 $\mathbb{E}$，其中 K 是交换的，且关系为 $\mathcal{R}_{\mathbb{E}}$ (5.1)，则下列陈述等价：

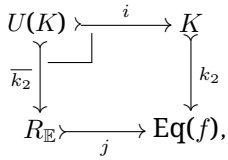
(1) k_2 经由 j分解；(2) j 是一个同构；(3) $\mathcal{R}_{\mathbb{E}}$ 是对称的；(4) K 是一个群。

证明。 (1) ⇒(2) 由前一命题得出，考虑图表



(2) ⇒(3) 是显然的。(3) ⇒ (4) 与 (4) ⇒(1) 来自如下注记：元素 $a \in K$ 可逆当且仅当 $\big(k(a)\ 0\big) \in R_{\mathbb{E}}$，而 $\big(0,\ k(a)\big) \in R_{\mathbb{E}}$ 恒成立。□

$a \in K$ 可逆当且仅当 $\big(k(a)\ 0\big) \in R_{\mathbb{E}}$ 这一事实特别意味着我们有一个拉回方块



其中， i 是包含态射，且 $k_2(a) = \big(k(a)\ \overline{0}\big)$.

在上述记号中，如果 K 也是可消去的，我们可以证明 $\mathcal{R}_{\mathbb{E}}$ 是一个 S-自反关系（定义 4.4），并且可以将其视为整个扩张 $\mathbb{E}$.上的关系

引理 5.4. 若 $\mathbb{E}$ 是上述 *cc-Schreier* 扩张，且 $(x, y) \in R_{\mathbb{E}}$ （见 (5.1)），则 $y = k(a) + x$ 对一个唯一的 $a \in K$.

证明。 事实上，设 $k(a)+x=k(a')+x$. 利用 (2.2) 得到 $k(a)+kq(x)+u_{f(x)}=k(a')+kq(y)+u_{f(x)}$. 应用引理 2.1(1) 以及 K的消去性,我们得出 $a=a'$. □

命题 5.5. 若 $\mathbb{E}$ 是如上所述的 *cc-Schreier* 扩张，则

$$K \overset{k_1=\langle 0,k\rangle}{\rightarrowtail} R_{\mathbb{E}} \underset{s_0}{\overset{r_1}{\rightleftarrows}} X \tag{5.2}$$

是一个 *Schreier* 点（见 (5.1)）；因此， $\mathcal{R}_{\mathbb{E}}$ 是一个 S-自反关系。

证明。 容易看出， k_1 是 r_1. 的核。对于每个 $\big(x,k(a)+x\big)\in R_{\mathbb{E}}$，我们都可以写成

$$\big(x,k(a)+x\big)=\big(0,k(a)\big)+(x,x)=k_1(a)+s_0r_1\big(x,k(a)+x\big)$$

其中元素 $a\in K$ 由引理 5.4 保证唯一，由此得出 (5.2) 是一个 Schreier 点。相应的 Schreier 收缩是集合映射 $q_1\colon R_{\mathbb{E}}\dashrightarrow K$, 定义为 $q_1(x,k(a)+x)=a$. □

我们用 $SExt_M$ 表示这样一个范畴：其对象是余域固定为 M 的 Schreier 扩张 (2.1)，其态射是满足 $M'=M$ 和 $\alpha_3=id_M$. 的态射 (2.3)。由于 α_1 由 α_2 以及 f' 的核 (K',k') 的泛性质唯一确定，我们将这类态射记作 $(\alpha_1,\alpha_2)\colon \mathbb{E}\to\mathbb{E}'$, 或简记为 $\alpha_2\colon \mathbb{E}\to\mathbb{E}'$.

命题 5.6. 若 $\mathbb{E}$ 是如上所述的 *cc-Schreier* 扩张，则关系 $\mathcal{R}_{\mathbb{E}}$确定一个关系

$$\begin{array}{ccccc} K\times K & \overset{\hat{k}}{\rightarrowtail} & R_{\mathbb{E}} & \overset{fr_1=fr_2}{\twoheadrightarrow} & M \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow\uparrow{\scriptstyle +} & & {\scriptstyle r_1}\downarrow\uparrow{\scriptstyle r_2} & & \| \\ K & \underset{k}{\rightarrowtail} & X & \underset{f}{\twoheadrightarrow} & M \end{array} \tag{5.3}$$

在 $SExt_M$中的 $\mathbb{E}$ 上，其中$\hat{}k(a,b)=\big(k(a)\ k(b)+k(a)\big)$, $p_1(a,b)=a$ 且 $+$是 K.上的幺半群运算

$\hat{}$ 证明。 k 是 $fr_1=fr_2$ 的核这一事实是显然的，$+$ 是幺半群同态这一事实同样显然（因为 K 是交换的）。同样容易看出，由于 K是可消去的，态射 p_1与 $+$在 Mon 中是联合单态的。对每一个 $\big(x,k(b)+x\big)\in R_{\mathbb{E}}$，我们有 $\big(x,k(b)+x\big)$ (2.2) $=\big(kq(x)\ k(b)+kq(x)\big)+\big(u_{f(x)},u_{f(x)}\big)=\hat{}k(q(x)\ b)+\big(u_{f(x)},u_{f(x)}\big)$，对于唯一的 $q(x)\in K$.。偶对$(q(x)\ b)$使得 $\big(x,k(b)+x\big)=\hat{}k(q(x)\ b)+\big(u_{f(x)},u_{f(x)}\big)$ 随后由 $q(x)$的唯一性以及 K 的消去性而唯一（见引理 5.4）。这证明(5.3)中的上一行是具有代表元(u_m,u_m)的 Schreier 扩张。由此可知(p_1,r_1)、$(+,r_2)$是 $SExt_M$中的态射，并且由于两对$(p_1,+)$与(r_1,r_2)都是联合单态的，我们得出(5.3)是 $\mathbb{E}$. □上的一个关系

现在，关键点如下：

命题 5.7。 如果 $\mathbb{E}$是上述 *cc-Schreier* 扩张，则 S-自反关系$\mathcal{R}_{\mathbb{E}}$ (5.1) 在定义 *4.6* 的意义下是自中心化的。

证明。 根据命题 4.7，只需证明，对于每个 $(x,y)\in R_{\mathbb{E}}$ 和每个 $b\in K$，都有 $kq_1\big(y,y+k(b)\big)+x=x+k(b)$, 其中 $q_1\colon \mathcal{R}_{\mathbb{E}}\dashrightarrow K$ 是

式 (5.2) 的 Schreier 收缩。现在，若 $(x,y)\in R_{\mathbb{E}}$, 则对唯一的$a\in K$，有 $y=k(a)+x$（见引理 5.4），并且

$$\begin{aligned} q_1\big(k(a)+x,k(a)+x+k(b)\big) &= q_1\big(k(a)+x,k(a)+k\big(f(x)*b\big)+x\big)\\ &= q_1\big(k(a)+x,k\big(f(x)*b\big)+k(a)+x\big)\\ &= f(x)*b, \end{aligned}$$

利用 (3.5) 以及 K 的交换性；于是确实有

$$kq_1\big(k(a)+x,k(a)+x+k(b)\big)+x=k\big(f(x)*b\big)+x=x+k(b),$$

再次利用 (3.5)。 □

同一个命题 4.7 给出了 $\mathcal{R}_{\mathbb{E}}$ 与其自身之间的连接子 $p=p_{\mathbb{E}}\colon R_{\mathbb{E}}\times_X R_{\mathbb{E}}\longrightarrow X$, 的显式定义

$$p\big(x,k(a)+x,k(b)+k(a)+x\big)=k(b)+x, \tag{5.4}$$

对于任意 cc-Schreier 扩张 $\mathbb{E}.$，我们强调，p 的唯一性意味着此构造仅取决于 $\mathbb{E}.$

备注 5.8。如果 X 是一个群，那么 $\mathbb{E}$ 是群的一个以阿贝尔核 K 为核的短正合列，根据推论 5.3，关系 $\mathcal{R}_{\mathbb{E}}$ 就是 $\mathcal{E}q(f)$，即 f 的核对关系，而根据上面的等式，连接子 $p\colon \mathrm{Eq}(f)\times_X\mathrm{Eq}(f)\cong\{(x,\ y,\ z)\in X\times X\times X\colon\ f(x)=f(y)=f(z)\}\longrightarrow X$ 由下式给出

$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= p\big(x,k(a)+x,k(b)+k(a)+x\big)\\ &= k(b)+x\\ &= x-x-k(a)+k(b)+k(a)+x\\ &= x-\big(k(a)+x\big)+\big(k(b)+k(a)+x\big)\\ &= x-y+z \end{aligned}$$

（回想一下，在这里我们可以将 $y=k(a)+x$ 和 $z=k(b)+y$ 写作唯一元素$a,\ b\in K$）。

这意味着在此情形下，p 恰好是切片范畴 $\mathbf{Gp}/M$ 中的内部马尔采夫代数 f 上的（唯一的、自主的 [5]）Mal'tsev 运算（即赋有 $\mathbf{Gp}/M$中的内部 Mal'tsev 运算的对象）。

为简洁起见，我们将 $P_{\mathbb{E}}=R_{\mathbb{E}}\times_X R_{\mathbb{E}}\cong\big\{\big(x,k(a)+x,\ k(b)+k(a)+x\big)\colon x\in X\ \&\ a,\ b\in K\big\}$, 记作，以便得到一个拉回

$$\begin{array}{ccc} P_{\mathbb{E}} & \xrightarrow{p_2} & R_{\mathbb{E}} \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle r_1} \\ R_{\mathbb{E}} & \xrightarrow[r_2]{} & X \end{array}$$

其投影为 $p_1\big(x,\ k(a)+x,\ k(b)+k(a)+x\big)=\big(x,\ k(a)+x\big)$ 以及 $p_2\big(x,\ k(a)+x,\ k(b)+k(a)+x\big)=\big(k(a)+x,\ k(b)+k(a)+x\big)$.

现在我们来到了这一构造的核心部分。对于 cc-Schreier 扩张$\mathbb{E}$，定义 $R_{\mathbb{E}}$ 上的关系 $\mathfrak{Ch}_{\mathbb{E}}$：给定 $(x,\ k(a)+x)$，$(y,\ k(b)+y)\in R_{\mathbb{E}}$，令

$$\big(x,k(a)+x\big)\mathfrak{Ch}_{\mathbb{E}}\big(y,k(b)+y\big)\iff\big(x,y,k(b)+y\big)\in P_{\mathbb{E}}\ \&\ k(a)+x=p\big(x,y,k(b)+y\big),$$

这等价于

$$\big(x,k(a)+x\big)\mathfrak{Ch}_{\mathbb{E}}\big(y,k(b)+y\big)\iff(x,y)\in R_{\mathbb{E}}\ \&\ k(a)+x=k(b)+x$$

并且到

$$\big(x,k(a)+x\big)\mathfrak{Ch}_{\mathbb{E}}\big(y,k(b)+y\big)\iff(x,y)\in R_{\mathbb{E}}\ \&\ a=b \tag{5.5}$$

（使用引理 5.4）。它是**Mon**中的一个内关系，因为 $R_{\mathbb{E}}$ 也是如此，且 p 是一个幺半群同态；显然，它还是自反且传递的（使用 (5.5)）。作为一个自反图，它表示为

$$\mathfrak{Ch}_{\mathbb{E}} : P_{\mathbb{E}} \underset{p_2}{\overset{\pi_1=\langle r_1 p_1, p\rangle}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\longleftarrow\!\!\sigma_0\!\!\longrightarrow}}}} R_{\mathbb{E}}, \tag{5.6}$$

其中 $\pi_1 = \langle r_1 p_1, p\rangle$：$\big(x, k(a)+x, k(b)+k(a)+x\big) \mapsto \big(x, k(b)+x\big)$ 以及 σ_0：$\big(x, k(a)+x\big) \mapsto \big(x, x, k(a)+x\big)$.

我们将 $\mathfrak{Ch}_{\mathbb{E}}$ 与 cc-Schreier 扩张$\mathbb{E}$, 相关联的***Chasles* 关系** 称为如此；正如注 5.8 所述，它确实是 [5]中定义的同名关系的一种推广。

与消去情形中的 $\mathcal{R}_{\mathbb{E}}$ 一样，(5.6) 结果是一个 S-自反关系：

命题 5.9。 若 $\mathbb{E}$ 是上述 ***cc-Schreier* 扩张**，且 $\mathcal{R}_{\mathbb{E}}$ 是(5.1)中的关系，则分裂扩张

$$K \overset{\kappa_1=\langle 0,k,k\rangle}{\rightarrowtail} P_{\mathbb{E}} \underset{\sigma_0}{\overset{\pi_1}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\twoheadrightarrow}{\longleftarrow}}}} R_{\mathbb{E}}$$

是一个 ***Schreier* 点**；因此， $\mathfrak{Ch}_{\mathbb{E}}$ 是一个 S-自反关系。

证明。 容易看出， κ_1 是 π_1. 的核。对于每个 $\big(x,\ k(a)+x,\ k(b)+k(a)+x\big) \in P_{\mathbb{E}}$，我们可以写成

$$\begin{aligned}\big(x, k(a)+x, k(b)+k(a)+x\big) &= \big(x, k(a)+x, k(a)+k(b)+x\big)\\ &= \big(0, k(a), k(a)\big) + \big(x, x, k(b)+x\big)\\ &= \kappa_1(a) + \sigma_0\big(x, k(b)+x\big)\\ &= \kappa_1(a) + \sigma_0\pi_1\big(x, k(a)+x, k(b)+k(a)+x\big),\end{aligned}$$

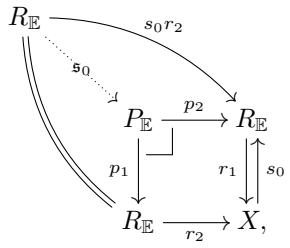
其中，根据引理 5.4， a是唯一的。相应的 Schreier 收缩是集合映射 q_1：$P_{\mathbb{E}} \dashrightarrow K$，定义为 $q_1\big(x,\ k(a)+x,\ k(b)+k(a)+x\big) = a.$ □

于是，根据命题 4.5 和推论 5.3，我们有：

推论 5.10。 给定如上所述的 ***cc-Schreier* 扩张** $\mathbb{E}$，***Chasles* 关系**$\mathfrak{Ch}_{\mathbb{E}}$ (5.6) 是对称的，当且仅当 $R_{\mathbb{E}}$ 是对称的（当且仅当 K 是一个群）。

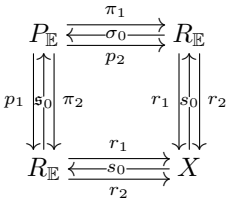
6. Definition of the direction functor for cc-Schreier extensions

固定一个幺半群的 cc-Schreier 扩张 $\mathbb{E}$： $K \overset{k}{\rightarrowtail} X \overset{f}{\twoheadrightarrow} M$，并按照上一节的记号，考虑如式 (5.6) 中与 $\mathbb{E}$ 相关联的 Chasles 关系 $\mathfrak{Ch}_{\mathbb{E}}$。令 $\mathfrak{s}_0$ 表示由拉回 $(P_{\mathbb{E}}, p_1, p_2)$ 的泛性质所诱导的唯一态射，如图表所示



$\mathfrak{s}_0(x,\ k(a)+x) = (x,\ k(a)+x,\ k(a)+x)$。容易看出， $P_{\mathbb{E}} \underset{\pi_2=\langle p}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} R_{\mathbb{E}} \underset{r_2 p_2\rangle}{\overset{\mathfrak{s}_0}{\leftrightarrows}}$也是 S上的一个自反关系，在**Mon** 中 $R_{\mathbb{E}}$，并且具有 $\mathfrak{Ch}_{\mathbb{E}}$，的所有性质，以及

该图表



按照通常的意义是交换的。

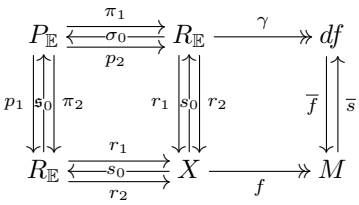
由命题 5.1 可知， f 是 $\mathcal{R}_{\mathbb{E}}$ 的余等化子；又由于**Mon** 是余完备的，我们也可以考虑 Chasles 关系 $\mathfrak{Ch}_{\mathbb{E}}$，的余等化子，记作

$$\gamma = \gamma_{\mathbb{E}} = coeq(\pi_1, p_2) \colon R_{\mathbb{E}} \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow df;$$

thus

$$\gamma(x, k(b) + x) = \gamma(k(a) + x, k(a) + k(b) + x), \ \ \forall a, b \in K. \tag{6.1}$$

我们得到一个交换图表



(6.2)

在**Mon**中， f 和 $\overline{\ }s$ 分别由余等化子 γ 和 f的泛性质唯一诱导，因此可由下式（良好）定义：

$$\overline{f}\big(\gamma(x, k(a) + x)\big) = f(x) \ \text{ and } \ \overline{s}(m) = \gamma(x, x), \tag{6.3}$$

其中 $x \in X$是满足 $f(x) = m.$的任意元素。显然有 $fs = id_M$，并且由 (6.2) 中右上方方块的交换性还可推出

$$\gamma(x, x) = \gamma(y, y) \ \text{ for all } (x, y) \in \mathrm{Eq}(f). \tag{6.4}$$

注意， $\mathfrak{Ch}_{\mathbb{E}}$ 不总是同余（如果 K 不是群，它就不是对称的），因此一般来说，我们只有包含关系 $\mathfrak{Ch}_{\mathbb{E}} \subseteq \mathcal{E}q(\gamma)$。因此，蕴含关系 $\gamma\big(x,\ k(a) + x\big) = \gamma\big(y,\ k(b) + y\big) \Rightarrow \big(x,\ k(a) + x\big)\mathfrak{Ch}_{\mathbb{E}}\big(y,\ k(b) + y\big)$ 通常并不成立。不过，我们能够明确描述由 Chasles 关系生成的同余，即余等化子 γ 的核对关系 $\mathcal{E}q(\gamma)$:

引理 6.1。考虑图表(6.2)。 γ 的核对关系与关系 $\tau\colon \ \ T \overset{t_1}{\underset{t_2}{\rightrightarrows}} R_{\mathbb{E}}$ 一致，其中 $\Big(\big(x, k(a) + x\big), \big(y, k(b) + y\big)\Big) \in T$ 当且仅当 $a = b$ 且 $(x, y) \in \mathrm{Eq}(f)$； t_1 和 t_2 分别是第一和第二投影。

证明。 由引理 5.4， τ定义良好。现在假设 $\Big(\big(x, k(a)+x\big),\ \big(y,\ k(a)+y\big)\Big) \in T$ 且 $\Big(\big(x', k(a') + x'\big),\ \big(y',\ k(a') + y'\big)\Big) \in T.$ 利用 (3.5)，可得

$$\begin{aligned}\big(x, k(a) + x\big) + \big(x', k(a') + x'\big) &= \big(x + x', k(a) + x + k(a') + x'\big) \\ &= \big(x + x', k(a) + k(f(x) * a') + x + x'\big)\end{aligned}$$

并且类似地 $\big(y,\ k(a)+y\big)+\big(y',\ k(a')+y'\big) = \big(y+y',\ k(a)+k(f(y)*a')+y+y'\big)$, 其中$k(a)+k(f(x)*a') = k(a)+k(f(y)*a')$; 显然 $(x+x',\ y+y') \in \mathrm{Eq}(f)$。这

证明了 τ 是 $R_{\mathbb{E}}$ 上的内关系，属于**Mon**。显然， τ 是自反、对称且传递的：因此 τ 是 $R_{\mathbb{E}}$.上的同余

同样容易验证， $\big(x, k(a)+x\big)\mathfrak{Ch}_{\mathbb{E}}\big(k(a')+x, k(a)+k(a')+x\big)$ 蕴含$\big(x, k(a)+x\big)\tau\big(k(a')+x, k(a)+k(a')+x\big)$; 由此可得 $\mathfrak{Ch}_{\mathbb{E}} \subseteq \tau$，从而由 $\mathcal{E}q(\gamma)$在 $R_{\mathbb{E}}$ 上所有包含 $\mathfrak{Ch}_{\mathbb{E}}$. 的同余中的极小性，有 $\mathcal{E}q(\gamma) \subseteq \tau$。反之，考虑 $\big(x, k(a)+x\big)\tau\big(y, k(a)+y\big)$.假设 $f(x) = f(y) = m$并令 $u_m \in B_m$.我们利用 (2.2)、(6.4) 以及 K 的交换性得到

$$\begin{aligned}
\gamma\big(x, k(a)+x\big) &= \gamma\big(kq(x)+u_m, k(a)+kq(x)+u_m\big)\\
&= \gamma\big(kq(y)+kq(x)+u_m, kq(y)+k(a)+kq(x)+u_m\big)\\
&= \gamma\big(kq(x)+kq(y)+u_m, k(a)+kq(x)+kq(y)+u_m\big)\\
&= \gamma\big(kq(x)+y, kq(x)+k(a)+y\big)\\
&= \gamma\big(y, k(a)+y\big).
\end{aligned}$$

这给出 $\tau \subseteq \mathcal{E}q(\gamma)$，从而 $\tau = \mathcal{E}q(f)$。 □

推论6.2。考虑 (6.2) 中的 γ 。我们有：

(1) $\gamma\big(x, k(a)+x\big) = \gamma\big(y, k(b)+y\big)$ *if and only if* $a = b$ *and* $(x, y) \in \mathrm{Eq}(f)$;
(2) *if* $(x, y) \in \mathrm{Eq}(f)$, *then* $\gamma\big(x, k(a)+x\big) = \gamma\big(y, k(a)+y\big)$;

因此特别地

(3) $\gamma\big(x, k(a)+x\big) = \gamma\big(x, k(b)+x\big)$ *if and only if* $a = b$.

命题 6.3。给定如上所述的 *cc-Schreier* 扩张 $\mathbb{E}$，分裂扩张

$$K \overset{\overline{\kappa}}{\underset{\overline{q}}{\rightleftarrows}} df \overset{\overline{f}}{\underset{\overline{s}}{\rightleftarrows}} M, \tag{6.5}$$

其中 $\overline{\kappa}(a) = \gamma\big(0, k(a)\big)$ 是一个 *Schreier* 点，其 *Schreier* 收缩定义为 $q(\gamma\big(x, k(a)+x\big)) = a$.

证明。由推论 6.2(3)可知， κ 是一个单态射。此外，容易验证 $f\kappa = 0$，并且若 $\gamma(x, k(a)+x) \in df$满足 $f(\gamma(x, k(a)+x)) = 1$，则 $f(x) = 1 = f(0)$（见 (6.3)）：因此，根据推论 6.2(2)，我们有 $\gamma(x, k(a)+x) = \gamma(0, k(a)) = \kappa(a)$。

函数q 由推论6.2(1)良好定义。对于每个 $\big(x, k(a)+x\big) \in R_{\mathbb{E}}$，存在唯一分解 $\big(x, k(a)+x\big) = \big(0, k(a)\big) + \big(x, x\big)$，使得$\gamma\big(x, k(a)+x\big) = \gamma\big(0, k(a)\big)+\gamma\big(x, x\big) = \kappa(a) + sf\big(\gamma\big(x, k(a)+x\big)\big)$（这里用到了$\gamma$是幺半群同态这一事实以及(6.3)）。 $\gamma\big(x, k(a)+x\big) = \kappa(a) + sf\big(\gamma\big(x, k(a)+x\big)\big)$ 中 a 的唯一性正是推论6.2(3)的内容。□

记 SPt_M 为一个范畴，其对象是所有以 M 固定的 Schreier 点（4.1）（我们称（4.1）为在 M 上的 Schreier 点），其态射为分裂正合列的态射

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{S}: K & \overset{k}{\rightarrowtail} & B & \underset{s}{\overset{f}{\rightleftarrows}} & M \\
{\scriptstyle\lambda_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\lambda} & & \| \\
\mathbb{S}': K' & \underset{k'}{\rightarrowtail} & B' & \underset{s'}{\overset{f'}{\rightleftarrows}} & M
\end{array}$$

在 **Mon** 中，也就是说， λ_1， λ 是幺半群同态，且满足 $k'\lambda_1 = \lambda k$， $f'\lambda = f$ 和 $\lambda s = s'$. 。正如 [8, 命题 2.31], 中所观察到的，可得 $\lambda_1 q = q'\lambda$，即

态射 $(\lambda_1,\ \lambda)$ 保持 Schreier 收缩。与 $SExt_M$ 中的态射类似，我们将它们记作 $(\lambda_1,\ \lambda)$: $\mathbb{S}\to\mathbb{S}'$，或简记为 $\lambda\colon\ \mathbb{S}\to\mathbb{S}'$.

根据前一个命题，$(f,\ s)$ 是 $\overline{SPt_M}$ 中的一个对象，且 f 具有交换且可消去核 K；下一个结果将帮助我们理解这些对象与施赖尔扩张 (2.1) 之间的关系。

记 $c\text{-}SExt_M$（分别记为 $cc\text{-}SExt_M$）为 $SExt_M$ 的满子范畴，其对象是余域为 M 且具有交换（分别具有交换且可消去）核的所有施赖尔扩张；类似地，记 $c\text{-}SPt_M$（分别记为 $cc\text{-}SPt_M$）为 SPt_M 的满子范畴，其对象是 M 上具有交换（分别具有交换且可消去）核的施赖尔点。

现在回顾以下经典定义：

定义6.4。设范畴 $\mathcal{C}$ 具有有限积。若对象 X 属于 $\mathcal{C}$，且存在态射 ω: $X\times X\to X$（称为乘法）和 $\varepsilon\colon\ 1\to X$（称为单位元），使得

$$\begin{array}{ll}\omega(\omega\times id_X)=\omega(id_X\times\omega) & \text{associativity axiom,}\\ \omega\langle p_2,p_1\rangle=\omega & \text{commutativity axiom,}\\ \omega\langle\varepsilon!_X,id_X\rangle=id_X & \text{unit axiom.}\end{array}$$

（这里 $!_X$ 表示终态射 $X\to 1$.）

两个内部交换幺半群 (X,ω,ε) 和 $(X',\omega',\varepsilon')$ 之间的内部交换幺半群态射，是一个态射 $f\colon\ X\to X'$ in $\mathcal{C}$，满足 $f\varepsilon=\varepsilon'$（$f$ 保单位元）以及 $f\omega=\omega'(f\times f)$（$f$ 保乘法）。我们用 $\mathbf{CMon}(\mathcal{C})$ 表示 $\mathcal{C}$.中的内部交换幺半群范畴

于是我们有：

定理 6.5. 存在范畴等价 $c\text{-}SPt_M\cong\mathbf{CMon}(SExt_M)\cong\mathbf{CMon}(c\text{-}SExt_M)$。考虑核的消去性时，这个等价限制为等价 $cc\text{-}SPt_M\cong\mathbf{CMon}(cc\text{-}SExt_M)$。

为了证明该定理，我们需要以下结果。该结果作为命题 2.1.5 出现在 [8]中，是我们引理 2.4 针对 Schreier 点的版本：

引理 6.6。给定一个带有 *Schreier* 收缩的 *Schreier* 点 $K\overset{k}{\rightarrowtail}B\underset{s}{\overset{f}{\twoheadrightarrow}}M$，则以下性质成立：

(1) $qk=id_K$; (2) $qs=0$; (3) $kq\big(s(m)+k(a)\big)+s(m)=s(m)+k(a)$ 对所有 $m\in M$ 和 $a\in K$; (4) $q(b+b')=q(b)+q\big(sf(b)+kq(b')\big)$ 对所有 $b,\ b'\in B$.

定理 *6.5* 的证明。设 $K\overset{k}{\rightarrowtail}B\underset{s}{\overset{f}{\twoheadrightarrow}}M$ 是 M 上的一个 Schreier 点，且 K 是交换的。我们要证明，扩张 $\mathbb{E}\colon\ K\overset{k}{\rightarrowtail}B\overset{f}{\twoheadrightarrow}M$ 在 $(c\text{-})SExt_M$. 中具有自然的交换幺半群结构。$(c\text{-})SExt_M$ 中的乘法 $\mathbb{E}\times\mathbb{E}$ 可由下式实现

$$\begin{array}{ccccc}\mathbb{E}\times\mathbb{E}\colon\ K\times K & \overset{k\times_M k}{\rightarrowtail} & \mathrm{Eq}(f) & \overset{ff_1=ff_2}{\twoheadrightarrow} & M\\ {\scriptstyle p_1}\big\downarrow\big\downarrow{\scriptstyle p_2} & & {\scriptstyle f_1}\big\downarrow\big\downarrow{\scriptstyle f_2} & & \big\|\\ \mathbb{E}\colon\ K & \underset{k}{\rightarrowtail} & B & \underset{f}{\twoheadrightarrow} & M,\end{array}$$

其中 $(\mathrm{Eq}(f)\ f_1,\ f_2)$ 是 f 的核对，而 $p_1,\ p_2$ 是显然的投影。容易验证，$\mathbb{E}\times\mathbb{E}$ 确实是一个 Schreier 扩张，其代表元具有 $(u_m,\ v_m)\in B_m\times B_m$，这种形式，对每个 $m\in M$ 都成立（此处 B_m 表示对于 $\mathbb{E},\ m$ 的代表元集合，按惯例）。

我们定义映射 $\mu\colon \mathrm{Eq}(f)\longrightarrow B$ by $\mu(x,y)=kq(x)+y$. 它是一个幺半群同态，因为 $\mu(0,0)=0,\ \mu(x,y)+\mu(x',y')=kq(x)+y+kq(x')+y'$,并且

$$\begin{aligned}\mu\big((x,y)+(x',y')\big)&=\mu\big(x+x',y+y'\big)\\&=kq(x+x')+y+y'\\&=kq(x)+kq\big(sf(x)+kq(x')\big)+kq(y)+sf(y)+y'\\&=kq(x)+kq(y)+kq\big(sf(y)+kq(x')\big)+sf(y)+y'\\&=kq(x)+kq(y)+sf(y)+kq(x')+y'\\&=kq(x)+y+kq(x')+y',\end{aligned}$$

利用引理 6.6(4)、引理 6.6(3)、(4.2) 以及 K.的交换性。我们断言

$$\begin{array}{ccccc}\mathbb{E}\times\mathbb{E}: K\times K & \xrightarrow{k\times_M k} & \mathrm{Eq}(f) & \xrightarrow{ff_1=ff_2} & M\\ {\scriptstyle +}\downarrow & \text{(a)} & \downarrow{\scriptstyle \mu} & \text{(b)} & \| \\ \mathbb{E}: K & \xrightarrow[k]{} & B & \xrightarrow[f]{} & M,\end{array}\tag{6.6}$$

其中 $+$ 表示 K 上的幺半群运算（它是幺半群同态，因为 K 是交换的），是一个 Schreier 扩张态射。（b）的交换性由 μ的定义立即得出，而（a）由引理 6.6(1)交换。为了证明 μ 保留代表元，设 $(u_m,v_m)\in B_m\times B_m$ 是 $m\in M$关于 $\mathbb{E}\times\mathbb{E}$. 的一个代表元。我们要证明 $\mu(u_m,v_m)=kq(u_m)+v_m\in B_m$，也就是说，对于任意 $b\in f^{-1}(m)$, 都可以唯一地写成 $b=k(a)+kq(u_m)+v_m$，其中有唯一的$a\in K$. 。由于 u_m 和 v_m 是 m的代表元，因此有 $b=k(a')+u_m$，且$s(m)=k(a'')+v_m$，其中 a', $a''\in K$是唯一确定的元素，于是

$$\begin{aligned}b=k(a')+u_m&\overset{(4.2)}{=}k(a')+kq(u_m)+s(m)\\&=k(a')+kq(u_m)+k(a'')+v_m\\&=k(a'+a'')+kq(u_m)+v_m\ \ (K\text{ is commutative})\\&=k(a)+kq(u_m)+v_m\end{aligned}$$

带有 $a=a'+a''$. 最终，若 $k(a)+kq(u_m)+v_m=k(a)+kq(u_m)+v_m$ 对于另一个 $a\in K$，则由引理 2.1(1)，$a+q(u_m)=\bar{a}+q(u_m)$，因此 $a=a$，因为 $q(u_m)$ 在 K中可逆，由引理 2.1(2) 可知（因为 $u_m=kq(u_m)+s(m)$，且 u_m 和 $s(m)$都是 m 的代表元）。

现在我们证明，态射 $\mu\colon \mathbb{E}\times\mathbb{E}\to\mathbb{E}$ 在 (c-)$SExt_M$. 中定义了 $\mathbb{E}$ 上的乘法。首先，μ 是结合的且交换的。事实上，对所有 $(x,\ y)\in\mathrm{Eq}(f)$，令 $\mu(x,\ y)=x\cdot y$；于是我们有：

- 结合律：$x\cdot(y\cdot z)=kq(x)+\big(kq(y)+z\big)$ 以及 $(x\cdot y)\cdot z=kq\big(kq(x)+y\big)+z=\big(kq(x)+kq(y)\big)+z$(根据引理 6.6);
- 交换性：

$$x\cdot y=kq\ x\ +y\ =\ kq\ x\ +kq\ y\ +sf\ y\ =kq\ y\ +(\ )$$

$$kq\ x\ +sf\ x\overset{4\ 2}{=}kq\ y\ +x=y\cdot x$$

$$_{(4.2)}(\ )\ (\ )\ (\ )\ (\ )\ (\ )\ (\ )\ _{(.)}(\ )\ (\text{根据交换性以及 } f(x)=f(y)\text{ 这一事实})_K。$$

扩张 $\mathbb{E}$ 上的单位元由 s 给出： $\mathbb{1} \to \mathbb{E}$

$$
\begin{array}{ccccc}
1:0 & \rightarrowtail & M & = & M \\
{\scriptstyle 0_K}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s} & & \| \\
\mathbb{E}: K & \underset{k}{\rightarrowtail} & B & \underset{f}{\twoheadrightarrow} & M
\end{array}
\tag{6.7}
$$

（注意， $0 \rightarrowtail M$ $=M$ 是$(c\text{-})SExt_M$ 中的终对象，且 s保持 m关于1的代表元 $\{m\}$ ； 参见例2.10.2）。

事实上， f 的截面 s 充当 μ的中性元：对任意 $b \in B$， $\mu\langle sf,\ id_B\rangle(b) = \mu(sf(b)$ $b) = kqsf(b) + b = 0 + b = b$， 通过应用引理 6.6（参见定义6.4中的单位元公理）。

我们得出结论： $\mathbb{E}$ 是$(c\text{-})SExt_M$ 中的一个内交换幺半群，其乘法为(6.6)，单位元为(6.7)。

通过观察以下事实，可以轻易证明这一构造的函子性：

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & {\scriptstyle q}\frown & & \\
K & \underset{k}{\rightarrowtail} & B & \underset{s}{\overset{f}{\rightleftarrows}} & M \\
{\scriptstyle \lambda_1}\downarrow & {\scriptstyle q'}\frown & \downarrow{\scriptstyle \lambda} & & \| \\
K' & \underset{k'}{\rightarrowtail} & B' & \underset{s'}{\overset{f'}{\rightleftarrows}} & M
\end{array}
$$

是 Schreier 点的态射，那么

$$
\begin{array}{ccccc}
K & \overset{k}{\rightarrowtail} & B & \overset{f}{\twoheadrightarrow} & M \\
{\scriptstyle \lambda_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda} & & \| \\
K' & \underset{k'}{\rightarrowtail} & B' & \underset{f'}{\twoheadrightarrow} & M
\end{array}
$$

是 Schreier 扩张态射（根据命题 2.8，因为 $\lambda s = s'$），它是 $\mathbf{CMon}((c\text{-})SExt_M)$ 中的一个态射，且保持我们在上文定义的幺半群结构。事实上， $\lambda s = s'$，因此单位元得以保持；并且对于所有 $(x, y) \in \mathrm{Eq}(f)$

$$
\begin{aligned}
\lambda\big(\mu(x,y)\big) &= \lambda\big(kq(x) + y\big) \\
&= k'\lambda_1 q(x) + \lambda(y) \\
&= k'q'\lambda(x) + \lambda(y) \\
&= \mu'\big(\lambda(x), \lambda(y)\big) \\
&= \mu'(\lambda \times_M \lambda)(x,y),
\end{aligned}
$$

因此乘法得以保持；参见定义6.4。

反过来，设 $\mathbb{E}$： $K \overset{k}{\rightarrowtail} B \overset{f}{\twoheadrightarrow} M$ 是 $SExt_M$ 中的内交换幺半群，其乘法为 ω： $\mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{E}$

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbb{E}\times\mathbb{E}: K\times K & \underset{k\times_M k}{\rightarrowtail} & \mathrm{Eq}(f) & \underset{ff_1=ff_2}{\twoheadrightarrow} & M \\
{\scriptstyle \omega_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \omega} & & \| \\
\mathbb{E}: K & \underset{k}{\rightarrowtail} & B & \underset{f}{\twoheadrightarrow} & M
\end{array}
$$

单位元为 $s\colon\ \mathbb{1}\to\mathbb{E}$

$$\begin{array}{ccccc} 1:0 & \rightarrowtail & M & = & M \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s} & & \| \\ \mathbb{E}:K & \xrightarrow[k]{} & B & \xrightarrow[f]{} & M. \end{array}$$

于是，由于 $fs=id_M$ 和 s 保持了1的 m 的代表元 $\{m\}$，分裂扩张 $K\overset{k}{\rightarrow}B\underset{s}{\overset{f}{\twoheadleftarrow}}M$是 M 上的一个Schreier 点，其Schreier 回缩 q为：

$B\dashrightarrow K$ 由 $q(b)=q_{f(b)}$定义，$sf(b)(b)$，对所有 $b\in B$ 成立（见注4.2）。此外，对所有 $a\in K$，由定义6.4的单位元公理，我们有 $\omega\big(0,k(a)\big)=\omega\big(sfk(a)\ k(a)\big)=k(a)$。$\omega$的交换性给出 $\omega\big(k(a)\ 0\big)=\omega\big(0,k(a)\big)=k(a)$。我们推得 $\omega_1(0,a)\ =\omega_1(a,0)\ =a.$。于是，由于 ω_1 是一个幺半群同态，根据Eckmann-Hilton论证，我们得出 $\omega_1=+$，即 K上的幺半群运算，因此它是交换的； consequently， $\mathbb{E}$ 是 $c\text{-}SExt_M$. 的一个对象。如果$(x,y)\in$Eq(f) $f(x)\ =f(y)\ =m$，则我们有

$$\begin{aligned}\omega(x,y)&=\omega\big(kq(x)+s(m),y\big)\\&=\omega\Big(\big(kq(x),0\big)+\big(s(m),y\big)\Big)\\&=\omega\big(kq(x),0\big)+\omega\big(s(m),y\big)\\&=kq(x)+\omega\big(sf(y),y\big)\\&=kq(x)+y\\&=\mu(x,y);\end{aligned}$$

这里我们用到了（4.2）和定义6.4的单位元公理。

这证明了上述给出的乘法 $\omega\colon\ \mathbb{E}\times\mathbb{E}\to\mathbb{E}$ 与在（6.6）中推导出的乘法一致。

最后，显然，当也考虑核的可消去性时，这个等价限制为等价 $cc\text{-}SPt_M\cong\mathbf{CMon}(cc\text{-}SExt_M)$。

□

注记 6.7。 注意，如果 $K\overset{k}{\rightarrow}B\underset{s}{\overset{f}{\twoheadleftarrow}}M$是 M 上的一个 Schreier 点，且K 是交换的和可消去的，那么定理 6.5 中给出的 cc-Schreier 扩张 $\mathbb{E}:K\overset{k}{\rightarrow}B\overset{f}{\twoheadrightarrow}M$ 上定义的内部乘法 $\mu(x,\ y)\ =kq(x)\ +y$可以用连接子 $p\colon P_{\mathbb{E}}\longrightarrow X$ 表示为

$$\mu(x,y)=p\big(y,kq(y)+y,kq(x)+kq(y)+y\big)$$

（见（5.4））。

推论 6.8。 由 *Schreier* 点 (6.5)，可在 *Schreier* 扩张 $\mathbb{E}:\ K\overset{\kappa}{\rightarrow}df\overset{f}{\twoheadrightarrow}M$上得到一个自然的内部交换幺半群结构，如 (6.5) 所示，其单位元为 $\bar{s}\colon\ \mathbb{1}\ \overset{\bar{}}{\rightarrow}\mathbb{E}$，乘法为态射$\mu\colon\mathbb{E}\times\mathbb{E}\to\mathbb{E}$，其中 $\mu:\mathrm{Eq}(f)\longrightarrow df$由下式给出

$$(6.8)\ \ \bar{\mu}\big(\gamma(x,k(a)+x),\gamma(y,k(b)+y)\big)=\gamma\big(x,k(a)+k(b)+x\big)(=\gamma\big(y,k(a)+k(b)+y\big)).$$

证明。 该结论由命题 6.3、定理 6.5 和推论 6.2(2)立即得到。□

在不会产生歧义时，我们将 df 上的这个幺半群运算简记为 $\mu\big(\gamma(x,y)\ \gamma(z,w)\big)=\bar{\gamma}(x,y)\ \cdot\gamma(z,w)$。

注 6.9。容易证明，关于这个定义在μ df,γ上的幺半群运算，满足所谓的沙勒恒等式 $\gamma(x,x)$ $=1$ 以及 $\gamma(x,y)\cdot\gamma(y,z)=\gamma(x,z)$ （参见 [5]）。事实上，前者由单位元 s 的定义立即可得： $\mathbb{1}\to\mathbb{E}$（因为对任意 $m=f(x)\in M$，都有 $s(m)=\gamma(x,x)$，），而对于后者，我们有

$$\begin{aligned}\gamma\big(x,k(a)+x\big)\cdot\gamma\big(k(a)+x,k(b)+k(a)+x\big)&=\gamma\big(x,k(a)+x\big)\cdot\gamma\big(k(a)+x,k(a)+k(b)+x\big)\\&=\gamma\big(x,k(a)+x\big)\cdot\gamma\big(x,k(b)+x\big)\\&=\gamma\big(x,k(a)+k(b)+x\big),\end{aligned}$$

利用 K, 的交换性以及等式 (6.1) 和 (6.8)。

构造 (6.2) 得到一个对象的对应关系

$$\begin{aligned}d\colon cc\text{-}SExt_M&\longrightarrow\mathbf{CMon}(cc\text{-}SExt_M),\\\mathbb{E}&\longmapsto d(\mathbb{E})=(\overline{\mathbb{E}},\overline{\mu}\colon\overline{\mathbb{E}}\times\overline{\mathbb{E}}\to\overline{\mathbb{E}},\overline{s}\colon\mathbb{1}\to\overline{\mathbb{E}})\end{aligned}\tag{6.9}$$

我们声称该对应关系是函子性的。注意，对于每个态射 $\alpha\colon\mathbb{E}\to\mathbb{E}'$

$$\begin{array}{ccccc}\mathbb{E}: K & \xrightarrow{k} & X & \xrightarrow{f} & M\\ {\scriptstyle\alpha_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \| \\ \mathbb{E}': K' & \xrightarrow[k']{} & X' & \xrightarrow[f']{} & M,\end{array}\tag{6.10}$$

我们可以导出两个幺半群同态

$$\begin{aligned}R(\alpha)\colon R_{\mathbb{E}}&\longrightarrow R_{\mathbb{E}'},\\\big(x,k(a)+x\big)&\longmapsto\big(\alpha(x),\alpha k(a)+\alpha(x)\big)=\big(\alpha(x),k'\alpha_1(a)+\alpha(x)\big)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}P(\alpha)\colon P_{\mathbb{E}}&\longrightarrow P_{\mathbb{E}'},\\\big(x,k(a)+x,k(b)+k(a)+x\big)&\longmapsto\big(\alpha(x),\alpha k(a)+\alpha(x),\alpha k(b)+\alpha k(a)+\alpha(x)\big)=\\&=\big(\alpha(x),k'\alpha_1(a)+\alpha(x),k'\alpha_1(b)+k'\alpha_1(a)+\alpha(x)\big)\end{aligned}$$

使得下图的左侧交换

$$\begin{array}{ccccc}P_{\mathbb{E}} & \underset{p_2}{\overset{\pi_1}{\rightrightarrows}} & R_{\mathbb{E}} & \xrightarrow{\gamma} & df\\ {\scriptstyle P(\alpha)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle R(\alpha)} & & \vdots{\scriptstyle d(\alpha)}\\ P_{\mathbb{E}'} & \underset{p_2'}{\overset{\pi_1'}{\rightrightarrows}} & R_{\mathbb{E}'} & \xrightarrow[\gamma']{} & df'.\end{array}$$

根据余等化子的泛性质 γ，这诱导出唯一的态射$d(\alpha)\colon df\to df'$，属于**Mon**，使得 $d(\alpha)\gamma=\gamma' R(\alpha)$。用元素表示，我们有$d(\alpha)\big(\gamma(x,\ k(a)+x)\big)=\gamma'\big(\alpha(x)\ k'\alpha_1(a)+\alpha(x)\big)$.

现在注意，按照 $d(\alpha)$ 的这个定义，图表

$$\begin{array}{ccccc}K & \xrightarrow{\overline{\kappa}} & df & \underset{\overline{s}}{\overset{\overline{f}}{\rightleftarrows}} & M\\ {\scriptstyle\alpha_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d(\alpha)} & & \| \\ K' & \xrightarrow[\overline{\kappa}']{} & df' & \underset{\overline{s}'}{\overset{\overline{f'}}{\rightleftarrows}} & M\end{array}$$

是交换的，因此 $d(\alpha)$ 是 $cc\text{-}SPt_M$ 中的一个态射，于是根据定理 6.5，它确定了 $\mathbf{CMon}(cc\text{-}SExt_M)$ 中的一个态射 $d(\alpha)\colon d(\mathbb{E})\to d(\mathbb{E}')$。显然，这个关于态射 $\alpha\colon\mathbb{E}\to\mathbb{E}'$ 的 d 定义保持复合与恒等态射，因此我们可以得出结论，(6.9) 确实是一个函子，我们称之为

用于 cc-Schreier 扩张的方向函子 。我们有理由这样称呼它，因为由注 5.8 可知，当 $\mathbb{E}$ 是群扩张时，连接子$p = p_{\mathbb{E}}$ 是与 $f \in \mathbf{Gp}/M$ 相关联的唯一自伴Mal'tsev运算，而在这种情况下，按照构造，我们的函子 d 与应用于切片范畴 $\mathbf{Gp}/M.$ 的经典方向函子 [5] 一致

与上述群的情形一样，由定理 6.5 可知，函子 (6.9) 可以用幺半群作用来明确描述。

回顾命题4.3，任意 Schreier 点 $K \underset{k}{\rightarrowtail} B \underset{s}{\overset{f}{\twoheadrightarrow}} M$确定了一个作用 $\bullet\colon M \to \mathrm{End}(K)$，它由 $\overline{\overline{\quad q \quad}}$ 在 $\overline{\overline{\quad K \quad}}$ 上定义，定义方式为 $\sigma(m)(a) = m \bullet a = q\big(s(m) + k(a)\big)$（见 (4.4)）；借助分裂短五引理（该引理对 Schreier 点成立，见 $[8,\ \text{推论 } 2.3.8]$），这使我们能够将 B 描述为半直积 $B \cong K \rtimes_\sigma M$。更准确地说，在 SPt_M 中有一个同构

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \overset{\pi_K}{\curvearrowleft} & & \\
K & \underset{\langle id_K, 0\rangle}{\rightarrowtail} & K \rtimes_\sigma M & \underset{\langle 0, id_M\rangle}{\overset{\pi_M}{\twoheadrightarrow}} & M \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \| \\
K & \underset{k}{\rightarrowtail} & B & \underset{s}{\overset{f}{\twoheadrightarrow}} & M,
\end{array}$$

其中 $K \rtimes_\sigma M = (K \times M, +)$（幺半群运算定义为 $(a, m) + (a', m') = (a + m \bullet a', m \cdot m')$，对于 $a,$ $a' \in K$和 $m, m' \in M$），且态射 $\varphi\colon K \rtimes_\sigma M \to B, \varphi(a, m) = k(a) + s(m)$，是 $\mathbf{Mon}$.中的一个同构。

当 K是交换的时，称 (K, σ) 为一个 M-半模。我们用 $\mathcal{S}mod_M$ 表示由 M-半模和保持作用的同态构成的范畴：$h\colon (K, \sigma) \to (K', \sigma')$ 是 $\mathcal{S}mod_M$中的一个态射，当且仅当 $h\colon K \to K'$是一个幺半群同态，并且下图交换

$$\begin{array}{ccc}
M \times K & \dashrightarrow & K \\
{\scriptstyle id_M \times h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\
M \times K' & \dashrightarrow & K',
\end{array}$$

也就是说，对于所有 $a \in K$ 和 $m \in M.$，$h(\sigma(m)(a)) = \sigma'(m)(h(a))$

容易验证，$c\text{-}SPt_M \cong \mathcal{S}mod_M.$ 该等价关系通过q将每个带有交换 K的 M-半模（K，σ）与 Schreier 点 $K \underset{k}{\rightarrowtail} B \underset{s}{\overset{f}{\twoheadrightarrow}} M$相关联而得到，其中 σ 在（4.4）中定义；反过来，将每个$\pi_K M$-半模（K，σ）与 Schreier 点$K \underset{\langle id_K, 0\rangle}{\rightarrowtail} K \rtimes_\sigma M \underset{\langle 0\ id_M\rangle}{\overset{\pi_M}{\twoheadrightarrow}} M$，相关联（带有 π_K和 π_M 投影）。在我们的情形中，有：

命题 6.10。 给定一个 *cc-Schreier* 扩张 $\mathbb{E}$ 如上，由 *Schreier* 点 (6.5) 诱导的M 在 K 上的幺半群作用，与由 $\mathbb{E}$.诱导的幺半群作用 (3.2)一致

证明。 根据命题 6.3，(6.5) 的 Schreier 收缩由 $q(\gamma(x, k(a) + x)) = a.$给出。因此，对于所有 $m = f(x) \in M$和 $a \in K$，相应的 M-作用在K 上为 $m \bullet a = q\big(s(m) + \kappa(a)\big) = q\gamma\big(x,$ $x + k(a)\big) = q\gamma\big(\overline{x},\ \overline{k(m * a)} + x\big) = \overline{m} * a$（使用 (3.5)），这与 (3.2) 中相同。□

若用 $\eta\colon M \to \mathrm{End}(K)$ 表示给出由 $\mathbb{E}$ （见 (3.4)）诱导的 (3.2) 中作用的幺半群同态，则可得 $df \cong K \rtimes_\eta M$ 通过 $\varphi\colon K \rtimes_\eta M \longrightarrow df, (a,m) \mapsto \kappa(a) + s(m) = \gamma\big(x, k(a) + x\big)$，其中 $x \in X$ 是满足 $f(x) = m.$ 的任意元素。我们得出结论，(6.9) 中定义的方向函子可以解释为函子 $d\colon cc\text{-}SExt_M \longrightarrow \mathcal{S}mod_M$，它将每个 cc-Schreier 扩张 $\mathbb{E}$ 对应到 M-半模 (K,η)，并将 cc-Schreier 扩张之间的每个态射 (6.10) 对应到 M-半模的态射 $\alpha_1 : (K,\eta) \to (K',\eta')$。事实上，此态射保持作用，也就是说，对所有 $a \in K$ 和 $m \in M$，都有 $\alpha_1(m * a) = m *' \alpha_1(a)$；这是因为在 (6.10) 中 α 保持代表元。

7. Properties of the direction functor

这里汇总上一节介绍的方向函子 d 的主要性质。我们将灵活使用它的两种描述 d，一种是将 Schreier 点 (6.5) 赋给任意 cc-Schreier 扩张的函子

$$\begin{array}{ccc} d\colon cc\text{-}SExt_M & \longrightarrow & \mathbf{CMon}(cc\text{-}SExt_M) \cong cc\text{-}SPt_M \\ \mathbb{E} : K \overset{k}{\rightarrowtail} X \overset{f}{\twoheadrightarrow} M & \longmapsto & K \underset{\overline{\kappa}}{\overset{\overline{q}}{\rightarrowtail}} df \underset{\overline{s}}{\overset{\overline{f}}{\leftrightarrows}} M, \end{array}$$

，另一种是作用函子，它将 Schreier 点 (6.5) 赋给任意 cc-Schreier 扩张 $\mathbb{E}$

$$\begin{array}{ccc} d\colon cc\text{-}SExt_M & \longrightarrow & \mathcal{S}mod_M \\ \mathbb{E} : K \overset{k}{\rightarrowtail} X \overset{f}{\twoheadrightarrow} M & \longmapsto & (K, \eta\colon M \to \mathrm{End}(K)) \end{array}$$

，它将 $\mathbb{E}$ 上由幺半群作用 (3.2) 给出的 M-半模结构赋予 K。

注意，函子 $d\colon cc\text{-}SExt_M \longrightarrow \mathcal{S}mod_M$ 更一般地可定义在满子范畴 $smod\text{-}SExt_M \subseteq c\text{-}SExt_M$ 上，该范畴由所有诱导出 M-半模结构的 Schreier 扩张构成，即满足以下条件的 Schreier 扩张 (2.1)：K 具有交换性，且映射 (3.2) 是一个作用（事实上，我们从第 3 节得知，核 K 的消去性只是满足这一条件的充分条件）。本节余下部分将指出 d 以及这个扩展后的函子 $D\colon smod\text{-}SExt_M \longrightarrow \mathcal{S}mod_M$ 的良好性质（使得 $d = D$ 在 $cc\text{-}SExt_M$ 上成立）。

命题 7.1。函子 d 和 D 是保守的。

证明。考虑（6.10）中的一个态射 $\alpha\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$，其中 $cc\text{-}SExt_M$，使得

$$\begin{array}{ccccc} K & \overset{\overline{\kappa}}{\rightarrowtail} & df & \underset{\overline{s}}{\overset{\overline{f}}{\leftrightarrows}} & M \\ {\scriptstyle\alpha_1}\downarrow & & {\scriptstyle d(\alpha)}\downarrow & & \| \\ K' & \underset{\overline{\kappa'}}{\rightarrowtail} & df' & \underset{\overline{s'}}{\overset{\overline{f'}}{\leftrightarrows}} & M \end{array}$$

是 $cc\text{-}SPt_M.$ 中的一个同构。因此，特别地，α_1 是幺半群的一个同构。由短五引理（命题 2.9）应用于（6.10）可知，α 也是一个同构。注意，若 $u'_m = \alpha(u) \in X'$ 是一个代表元，则 $u \in X$ 也是一个代表元，因此 α^{-1} 保持代表元。这表明 d 是保守的；同样的证明也适用于 D，。□

事实上，d 和 D 的保守性可视为以下结果的推论：

命题 7.2. 函子 d 和 D 保留并反映单态射和正则满态射。

证明只需应用 $c\text{-}SExt_M$ 中的短五引理以及 $c\text{-}SPt_M$ 中的分裂短五引理，前提是已确定两个范畴中单态射和正则满态射的性质。完整的详细证明见附录 A。

命题 7.3。 方向函子 d 和 D 保有限积。

证明。 回忆一下，平凡扩张

$$\mathbb{1} : 0 \rightarrowtail M = M$$

是 $cc\text{-}SExt_M$ 中的终对象，并注意，给定两个 cc-Schreier 扩张

$$\mathbb{E} : K \overset{k}{\rightarrowtail} X \overset{f}{\twoheadrightarrow} M,$$

$$\mathbb{E}' : K' \overset{k'}{\rightarrowtail} X' \overset{f'}{\twoheadrightarrow} M,$$

它们在 $cc\text{-}SExt_M$ 中的积由下式给出

$$\mathbb{E} \times \mathbb{E}' : K \times K' \overset{k \times_M k'}{\rightarrowtail} X \times_M X' \overset{f'p_2 = fp_1}{\twoheadrightarrow} M, \tag{7.1}$$

带有显然的投影到 $\mathbb{E}$ 和 $\mathbb{E}'$，其中

$$\begin{array}{ccc} X \times_M X' & \xrightarrow{p_2} & X' \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ X & \xrightarrow[f]{} & M \end{array}$$

是一个拉回。（通过将 $X \times_M X' \cong \{(x,\ x') \in X \times X' \colon f(x) = f'(x')\}$，(7.1) 实现为一个具有代表元的 Schreier 扩张 $(u_m,\ u'_m)$，其中 u_m 是 m 关于 $\mathbb{E}$ 的一个代表元，u'_m 是 m 关于 $\mathbb{E}'$.的一个代表元）

现在，考虑作用形式下的方向函子 $d\colon cc\text{-}SExt_M \longrightarrow \mathcal{S}mod_M$，使得 $d(\mathbb{E}) = (K,\ \eta)$，其中 η 是诱导的幺半群同态作用 (3.4)；令 $d(\mathbb{E}') = (K',\ \eta')$。那么 d (1) 是平凡的 M-半模 $(0,\ !_M)$，显然是 $\mathcal{S}mod_M$. 中的一个终对象。接下来假设 $d(\mathbb{E} \times \mathbb{E}') = (K \times K',\ \nu)$，其中$\nu\colon M \to \mathrm{End}(K \times K')$ 是由积Schreier扩张 (7.1) 诱导的幺半群同态：因此，对于任意 $m \in M$，

$$\nu(m)\colon K \times K' \longrightarrow K \times K',\ (a, a') \mapsto (b, b'),$$

with

$$\begin{aligned} &(u_m, u'_m) + k \times_M k'(a, a') = k \times_M k'(b, b') + (u_m, u'_m) \\ \Leftrightarrow\ &(u_m, u'_m) + \big(k(a), k'(a')\big) = \big(k(b), k'(b')\big) + (u_m, u'_m). \end{aligned}$$

由此可得 $u_m + k(a) = k(b) + u_m$ 和 $u'_m + k'(a') = k'(b') + u'_m$，也就是说，$b = \eta(m)(a)$ 和 $b' = \eta'(m)(a')$。我们得出 $\nu(m)(a,\ a') = (\eta(m)(a)\ \eta'(m)(a'))$，这意味着 ν 是由幺半群同态更准确地给出的积作用 $\eta \times \eta'$

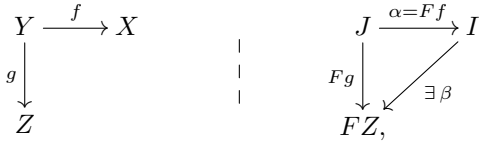
$$M \xrightarrow{\langle id_M, id_M \rangle} M \times M \xrightarrow{\eta \times \eta'} \mathrm{End}(K) \times \mathrm{End}(K') \rightarrowtail \mathrm{End}(K \times K').$$

这证明了 $d(\mathbb{E} \times \mathbb{E}') \cong d(\mathbb{E}) \times d(\mathbb{E}')$。注意，证明中完全没有用到消去性，因此 D. □ 也同样成立

接下来讨论 d 和 D，的主要性质，即它们是余纤维化。回顾一下后者的一般定义：

定义 7.4。设 $F\colon \mathcal{U}\to\mathcal{V}$ 是一个函子。

(1) 我们称态射 $f\colon Y\to X$ in $\mathcal{U}$ 在态射上余笛卡尔$\alpha\colon J\to I in\ \mathcal{V}$，如果 $Ff=\alpha$，并且对于每个态射 $g\colon Y\to Z$in $\mathcal{U}$，满足 $Fg=\beta\alpha$ in $\mathcal{V}$，其中某个 $\beta\colon I\to FZ$



存在唯一的 $h\colon X\to Z$in $\mathcal{U}$，使得 $Fh=\beta$，并且有 $g=hf$



若态射 $f$in $\mathcal{U}$在 $\alpha=Ff$.上余笛卡尔，则称其为余笛卡尔（相对于 F）。**(2)** 若 $F\colon \mathcal{U}\to\mathcal{V}$ 对于每个态射 $\alpha\colon J\to I$ in $\mathcal{V}$ 以及纤维 $F^{-1}(J)$ 中的每个对象 Y，都存在一个在 α 上、定义域为 Y.的 $\mathcal{U}$ 中的余笛卡尔态射，则称其为余纤维化

（这一概念及其对偶概念纤维化可追溯至 A. Grothen- dieck [14]。另见 [3],附录 A.7.）

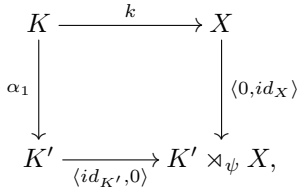
固定一个 Schreier 扩张 $\mathbb{E}\colon K\rightarrowtail^{k}X\overset{f}{\twoheadrightarrow}M$ 属于 $smod\text{-}SExt_M$，它如 **(3.4)** 所示诱导作用 η，并考虑 M-半模的一个态射 $\alpha_1\colon (K,\ \eta)=D(\mathbb{E})\longrightarrow(K',\ \eta')$：因此，$\alpha_1$ 是一个幺半群同态，对每个 $m\in M$ 与 $a\in K$.满足 $\alpha_1\big(\eta(m)(a)\big)=\eta'(m)\big(\alpha_1(a)\big)$

我们将通过构造所谓的 $\mathbb{E}$ 沿 α_1 的推前，来进行，这将给出一个 Schreier 扩张 $\mathbb{E}'$ 以及一个余笛卡尔态射 $\alpha\colon\ \mathbb{E}\to\mathbb{E}'$ 属于 $smod\text{-}SExt_M$ 且位于 α_1 之上：$D(\mathbb{E})\to(K',\ \eta')$（见 **(7.3)**）。

首先，注意到将作用 $\eta'\colon M\longrightarrow \mathrm{End}(K')$ 与 f 复合后，我们得到一个作用 $\psi=\eta' f\colon X\longrightarrow \mathrm{End}(K')$，其中 X 作用于 K'，使得

$$\psi(x)(a')=\eta'(f(x))(a'),\ \text{for all } x\in X \text{ and } a'\in K'. \tag{7.2}$$

于是我们可以构造半直积 $K'\rtimes_\psi X$，并考察下面的方形



它通常并不交换。定义 $\big(X',\ r\colon K'\rtimes_\psi X\twoheadrightarrow X'\big)$ 为 $\langle id_{K'},0\rangle\alpha_1$ 与 $\langle 0,id_X\rangle k$ 在 **Mon**, 中的一个余等化子，使得 $X'\cong(K'\rtimes_\psi X)/_\sim$ 其中$\sim$ 是由 $\big(\alpha_1(a)\ 0\big)\sim\big(0,\ k(a)\big)$ 对所有 $a\in K$. 生成的 $K'\rtimes_\psi X$ 上的内部等价关系。我们有：

引理 *7.5*（参见 [24]）。上述关系 $\sim$ 与 ρ 在$K'\rtimes_\psi X$上的关系 $(a'、\ x)\rho(b'、\ y)$ 重合，当且仅当 $(x,\ y)\in Eq(f)$，且 $a'+\alpha_1(q(x))=b'+\alpha_1(q(y))$；其中，$x=kq(x)+u_m$，并且 $y=kq(y)+u_m$ 是相对于 $m=f(x)$的某个代表元 u_m而言的 $=f(y)$（使用（*2.2*））。

证明。首先注意到， ρ定义良好，即它不依赖于 u_m的选择，因为任意两个代表元相差一个K 中的可逆元素（引理 2.1），而可逆元素在幺半群同态 α_1 下的像在 K'. 中仍然可逆。此外， ρ 显然是 $K' \rtimes_\psi X$上的一个等价关系，并且 [24, 命题 4. 7] 中证明了 ρ 是 Mon 中的一个内关系（使用（3.5））。还要注意，对于每个 $a \in K$，都有 $(\alpha_1(a)\ 0)\rho(0、\ k(a))$，这是通过选取 $1 \in M$的一个代表元 $0 \in X$ 得到的，因此 $\sim$包含于 ρ.中。反之，设 $(a'、\ x)\rho(b'、\ y)$，并写作 $x = kq(x) + u_m$、$y = kq(y) + u_m$，其中 $m = f(x) = f(y)$。那么，由于 $\sim$是自反的， $(a' + \alpha_1(q(x))\ u_m) \sim (b' + \alpha_1(q(y))\, u_m)$，并且

$$(a' + \alpha_1(q(x)), u_m) = (\alpha_1(q(x)), 0) + (a', u_m) \sim (0, kq(x)) + (a', u_m) = (a', x)$$

（利用 K'， $\sim$ 的生成元的交换性以及 $K' \rtimes_\psi X$ 上幺半群运算的定义）。类似地， $(b' + \alpha_1(q(y))u_m) \sim (b',\ y)$，由此我们可以得出 $(a',\ x) \sim (b',\ y)$. □

于是，我们可以将余等化子 $(X',\ r)$ 计算为 $K' \rtimes_\psi X \xrightarrow{r} X' = (K' \rtimes_\psi X)/\rho$，$(a',\ x) \mapsto [(a',\ x)]_\rho$，并且有一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\ k\ } & X \\ {\scriptstyle \alpha_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha = r\langle 0, id_X\rangle} \\ K' & \xrightarrow[k' = r\langle id_{K'}, 0\rangle]{} & X'. \end{array}$$

注意，态射 $k' = r\langle id_{K'},\ 0\rangle$: $K' \to X'$ 是一个单态射，因为根据 ρ 的定义，$(a',\ 0)\rho(b',\ 0)$ 当且仅当 $a' = b'$。此外，若 π_X 表示投影态射 $K' \rtimes_\psi X \to X$，$(a',\ x) \mapsto x$，则等式 $f\pi_X\langle 0,\ id_X\rangle k = fk = 0 = f\pi_X\langle id_{K'},\ 0\rangle\alpha_1$ 和余等化子的泛性质保证存在如图表所示的唯一 f'

$$\begin{array}{ccccc} K & \underset{\langle id_{K'}, 0\rangle\alpha_1}{\overset{\langle 0, id_X\rangle k}{\rightrightarrows}} & K' \rtimes_\psi X & \xrightarrow{\ r\ } & X' \\ & & {\scriptstyle f\pi_X}\downarrow & \nearrow_{f'} & \\ & & M & & \end{array}$$

满足 $f\pi_X = f'r$.具体而言， f'定义为 $f'([(a', x)]_\rho) = f(x)$，并注意到，由于 f 和 π_X 是 Mon 中的正则满态射， f'. 也是正则满态射。因此，我们有$Ker(f') = \{[(a', x)]_\rho \in X' \colon\ x \in Ker(f)\} = k'(K')$，其中 $k' = r\langle id_{K'}, 0\rangle$，因为对每个 $a \in K$ 和 $a' \in K'$，$\left[(a', k(a))\right]_\rho = \left[(a' + \alpha_1(a)\ 0)\right]_\rho = k'(a' + \alpha_1(a))$；又由于我们已知 k' 是单态射，因此得出 (K', k') 是 f'. 的核

我们得到一个幺半群扩张 $\mathbb{E}' \colon K' \overset{k'}{\rightarrowtail} X' \overset{f'}{\twoheadrightarrow} M$（它是 $\mathbb{E}$ 沿着 α_1 的推前），并且可以看出该图表

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{E} : K & \xrightarrow{\ k\ } & X & \xrightarrow{\ f\ } & M \\ {\scriptstyle \alpha_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \| \\ \mathbb{E}' : K' & \xrightarrow[k']{} & X' & \xrightarrow[f']{} & M \end{array} \tag{7.3}$$

是可交换的（因为 $f'\alpha = f'r\langle 0,\ id_X\rangle = f\pi_X\langle 0,\ id_X\rangle = f$）。

引理7.6. 序列 $\mathbb{E}'$ 和态射 (7.3) 属于 $smod\text{-}SExt_M$，并且， $D(\mathbb{E}') = (K', \eta')$。

证明。根据 (2.2)，每个 $[(a',x)]_\rho \in X'$（其中 $x = kq(x) + u_{f(x)}$）都可以写成$[(a',x)]_\rho = [(a' + \alpha_1(q(x))^{u_{f(x)}})]_\rho = [(a' + \alpha_1(q(x)), 0)]_\rho + [(0,^{u_{f(x)}})]_\rho = k'(a' + \alpha_1(q(x))) + [(0,^{u_{f(x)}})]_\rho$。由 ρ的定义可知，若 $[(a',x)]_\rho = k'(b') + [(0,^{u_{f(x)}})]_\rho = [(b',^{u_{f(x)}})]_\rho$，其中 $b' \in K'$为另一个元素，则 $a' + \alpha_1(q(x)) = b'$。因此， $\mathbb{E}'$ 是具有代表元 $[(0,u_m)]_\rho = \alpha(u_m)$ 的 Schreier 扩张；所以 $\alpha\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ 是 Schreier 扩张态射（见定义 2.7）。我们还需证明的唯一一点是，与 $\mathbb{E}'$ 关联的映射 $M \times K' \dashrightarrow K'$（如 (3.2) 中所述）与由 η'. 诱导的映射相对应。这是因为$M \times K' \dashrightarrow K'$ 由 $(m,a') \mapsto a''$定义，其中 a'' 是 K'中满足 $[(0,u_m)]_\rho + k'(a') = k'(a'') + [(0,u_m)]_\rho$. 的唯一元素。由此可得

$$
\begin{aligned}
&[(0,u_m)]_\rho + [(a',0)]_\rho = [(a'',0)]_\rho + [(0,u_m)]_\rho \\
&\Leftrightarrow [(\psi(u_m)(a'),u_m)]_\rho = [(a'',u_m)]_\rho \\
&\Leftrightarrow \psi(u_m)(a') = a'' \\
&\Leftrightarrow \eta'(m)(a') = a'',
\end{aligned}
$$

利用引理 7.5 和 (7.2) 中的定义 ρ。 □

我们断言，(7.3) 是一个位于 α_1，上的余笛卡尔态射，其含义如定义 7.4 所述，对函子 $D\colon smod\text{-}SExt_M \longrightarrow \mathcal{S}mod_M$. 而言。事实上，假设给定一个态射

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbb{E}: K & \xrightarrow{k} & X & \xrightarrow{f} & M \\
{\scriptstyle\lambda_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\lambda} & & \| \\
\mathbb{F}: L & \xrightarrow[l]{} & Y & \xrightarrow[g]{} & M
\end{array}
$$

在 $smod\text{-}SExt_M$，中，使得对于某个 $\beta_1\colon (K',\ \eta') \to (L,\ \nu)$，有 $\lambda_1 = \beta_1\alpha_1$ $\mathcal{S}mod_M$

$$
\begin{array}{ccc}
(K,\eta) & \xrightarrow{\alpha_1} & (K',\eta') \\
{\scriptstyle\lambda_1}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle\beta_1} & \\
(L,\nu), & &
\end{array}
$$

其中 $(L,\ \nu) = D(\mathbb{F})$。

我们定义 $h\colon K' \rtimes_\psi X \longrightarrow Y$，$(a',\ x) \mapsto l\beta_1(a') + \lambda(x)$，这是一个幺半群同态，因为

$$
\begin{aligned}
h\big((a',x)+(b',y)\big) &= h\big(a' + \psi(x)(b'), x+y\big) \\
&= h\big(a' + \eta'(f(x))(b'), x+y\big) \\
&= l\beta_1\big(a' + \eta'(f(x))(b')\big) + \lambda(x+y) \\
&= l\beta_1(a') + l\beta_1\big(\eta'(f(x))(b')\big) + \lambda(x) + \lambda(y) \\
&= l\beta_1(a') + l\big(\nu(f(x))(\beta_1(b'))\big) + \lambda(x) + \lambda(y) \\
&= l\beta_1(a') + l\big(\nu(g\lambda(x))(\beta_1(b'))\big) + \lambda(x) + \lambda(y) \\
&= l\beta_1(a') + \lambda(x) + l\beta_1(b') + \lambda(y) \\
&= h(a',x) + h(b',y)
\end{aligned}
$$

（利用（7.2）、 β_1 是 $\mathcal{S}mod_M$ 中的一个态射这一事实以及（3.5））。于是我们有$h\langle 0, id_X\rangle k = h\langle id_{K'}, 0\rangle\alpha_1,$，因为 $\lambda k = l\lambda_1 = l\beta_1\alpha_1$. 根据

余等化子 r, 的泛性质，唯一的 β: $X' \to Y$ 由此导出

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow[\langle id_{K'}, 0\rangle \alpha_1]{\langle 0, id_X\rangle k} & K' \rtimes_\psi X & \xrightarrow{\quad r \quad} & X' \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle h} & \swarrow{\scriptstyle \beta} & \\ & & Y & & \end{array} \tag{7.4}$$

满足 $h = \beta r$，显式地（良好）定义为 $\beta\big([(a',\ x)]_\rho\big) = h(a',\ x) = l\beta_1(a') + \lambda(x)$。

该图表

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{E}' : K' & \overset{k'}{\rightarrowtail} & X' & \overset{f'}{\twoheadrightarrow} & M \\ {\scriptstyle \beta_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \| \\ \mathbb{F} : L & \underset{l}{\rightarrowtail} & Y & \underset{g}{\twoheadrightarrow} & M \end{array} \tag{7.5}$$

也是交换的，因为 $\beta k'(a') = \beta\big([(a',0)]_\rho\big) = l\beta_1(a')$ 且 $g\beta\big([(a',x)]_\rho\big) = g\big(l\beta_1(a') + \lambda(x)\big) = 0 + g\lambda(x) = f(x) = f'\big([(a',x)]_\rho\big)$ 对每个 $a' \in K'$ 和 $x \in X$. 都成立。此外，β 保持代表元，因为根据假设，λ 如此，且 $\beta\big([(0,u_m)]_\rho\big) = \lambda(u_m)$: 因此 (7.5) 是 $smod\text{-}SExt_M$ 中的一个态射，并且对于每个 $x \in X$，等式 $\beta\alpha(x) = \beta\big([(0,x)]_\rho\big) = \lambda(x)$ 都成立（从而 $\beta\alpha = \lambda$），于是该三角形

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \xrightarrow{(\alpha_1,\alpha)} & \mathbb{E}' \\ {\scriptstyle (\lambda_1,\lambda)}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle (\beta_1,\beta)} & \\ \mathbb{F} & & \end{array} \tag{7.6}$$

在 $smod\text{-}SExt_M$. 中交换

为证明 (7.6) 中 β 的唯一性，假设还有另一个态射

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{E}' : K' & \overset{k'}{\rightarrowtail} & X' & \overset{f'}{\twoheadrightarrow} & M \\ {\scriptstyle \beta_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\beta}} & & \| \\ \mathbb{F}\colon\ L & \underset{l}{\rightarrowtail} & Y & \underset{g}{\twoheadrightarrow} & M \end{array}$$

在 $smod\text{-}SExt_M$ 中有 $\beta\overline{\alpha} = \lambda$. 于是对所有 $(a',x) \in K' \rtimes_\psi X$

$$\begin{aligned} \overline{\beta}r(a',x) &= \overline{\beta}\big([(a',x)]_\rho\big) \\ &= \overline{\beta}\big([(a',0)]_\rho + [(0,x)]_\rho\big) \\ &= \overline{\beta}\big([(a',0)]_\rho\big) + \overline{\beta}\big([(0,x)]_\rho\big) \\ &= \overline{\beta}k'(a') + \overline{\beta}\alpha(x) \\ &= l\beta_1(a') + \lambda(x) \\ &= h(a',x), \end{aligned}$$

因此，根据 (7.4) 中 β 的唯一性，$\beta = \beta$。

由此我们证明了:

定理 7.7. 函子 D: $smod\text{-}SExt_M \longrightarrow \mathcal{S}mod_M$ 与 d: $cc\text{-}SExt_M \longrightarrow c\text{-}\mathcal{S}mod_M$，其中 $c\text{-}\mathcal{S}mod_M \subseteq \mathcal{S}mod_M$ 是所有 M-半模（K，η）且 K 可消去的满子范畴，均为余纤维化。

（显然，对 $D\colon\ smod\text{-}SExt_M \longrightarrow \mathcal{S}mod_M$ 所给出的同一证明同样适用于 $d\colon\ cc\text{-}SExt_M \longrightarrow c\text{-}\mathcal{S}mod_M$.）

这一事实的重要性源自以下经典结果：

定理 7.8. 设 $\mathcal{U}$ 是一个具有有限积的范畴，且 $F\colon\ \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ 是一个保积余纤维化。进一步假设，$\mathcal{U}$ 中的余笛卡尔态射在有限积下稳定。若$(M, \omega\colon\ M \times M \longrightarrow M, \varepsilon\colon\ 1 \longrightarrow M)$是 $\mathcal{V}$中的一个内幺半群，则纤维 $F^{-1}(M)$上存在一个幺半结构；当内幺半群 M 是交换的时，该结构还是对称的。

(例如，参见定理 9]的证明。)

注意，函子 $D\colon\ smod\text{-}SExt_M \longrightarrow \mathcal{S}mod_M$和 $d\colon\ cc\text{-}SExt_M \longrightarrow c\text{-}\mathcal{S}mod_M$ 都适用于定理 7.8，因为对于余纤维化而言，保守等价于定义域范畴中的每个态射都是余笛卡尔态射。此外，注意 $\mathcal{S}mod_M \cong \mathbf{CMon}(\mathcal{S}mod_M)$, ，因为每个$M$-半模 (K, η) 都是 $\mathcal{S}mod_M$中的一个内幺半群，其在 $\mathcal{S}mod_M$ 中的内幺半群运算就是交换幺半群 K 自身的幺半群运算 $+\colon\ K \times K \to K$ （K 的交换性保证了 $+$ 是幺半群同态，而根据 η上的作用公理，它也保持作用）。类似地，我们有$c\text{-}\mathcal{S}mod_M \cong \mathbf{CMon}(c\text{-}\mathcal{S}mod_M)$。

根据定理 7.8，我们有：

推论 7.9。对于 $\mathcal{S}mod_M$ 中（分别地，$c\text{-}\mathcal{S}mod_M$ 中）的每个对象(K, η)，方向函子$D\colon\ smod\text{-}SExt_M \longrightarrow \mathcal{S}mod_M$（分别地，函子 $d\colon\ cc\text{-}SExt_M \longrightarrow c\text{-}\mathcal{S}mod_M$）的纤维 $D^{-1}(K, \eta)$ 上都由此得到一个对称幺半结构。

由于我们从 [5, 第 VI 节]已知，对于群 G 被一个 G-模 (A, η), 扩张的情形，群的相应方向函子的纤维上由此得到的张量积与通常的扩张 Baer 和一致，因此我们有理由将函子 $d\colon\ cc\text{-}SExt_M \longrightarrow c\text{-}\mathcal{S}mod_M$ 的纤维 $d^{-1}(K, \eta)$ 上由此得到的张量积 $\mathbb{E} \otimes \mathbb{E}'$ 称为 cc-Schreier 扩张 $\mathbb{E}, \mathbb{E}'$ 的***Baer*** 和 （对于 $D\colon\ smod\text{-}SExt_M \longrightarrow \mathcal{S}mod_M$ 也类似）。

记 SExt(M, K, η) 为 $D^{-1}(K, \eta)$ 的连通分支集合，它正是诱导作用 η 的、 M 被 K 的 Schreier 扩张的同构类集合，由此我们得出， $D^{-1}(K, \eta)$ 上的张量积赋予集合 SExt(M, K, η) 交换幺半群的结构。借助[24, 定理 4.19], , 该交换幺半群 SExt(M, K, η) 同构于 Patchkoria 在 [22] 中所引入的上同调理论的第二上同调幺半群 $\mathcal{H}^2(M, K, \eta)$。此外，当 K 是可消去的时，纤维 $D^{-1}(K, \eta)$ 与$d^{-1}(K, \eta)$ 重合，并且由 [24, 定理 4.29] 可知，相应的交换幺半群 SExt(M, K, η) 也同构于 Patchkoria 在 [23] 中所引入的上同调理论的第二上同调幺半群 $H^2(M, K, \eta)$。

这类上同调理论的高阶上同调幺半群的解释将留待未来研究。

Appendix A. Monomorphisms and regular epimorphisms in $cc\text{-}SExt_M$

我们旨在证明，在幺半群 M 上的 $cc\text{-}SExt_M$ cc-Schreier 扩张范畴中，单态射（分别为正则满态射）恰好是这样的态射

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{E}: K & \xrightarrow{k} & X & \xrightarrow{f} & M \\ {\scriptstyle\alpha_1}\downarrow & (*) & {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \| \\ \mathbb{E}': K' & \xrightarrow[k']{} & X' & \xrightarrow[f']{} & M \end{array} \tag{A.1}$$

在 $cc\text{-}SExt_M$ 中， α_1 和 α 是 **Mon**中的单态射（分别为正则满态射）。这一刻画使我们能够给出命题 7.2 证明的完整细节。

回想 $cc\text{-}SExt_M$ 中核对的存在性。以下是一个非常一般的事实：

引理 A.1. 考虑交换图

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{l} & B & \xrightarrow{g} & C \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & {\scriptstyle\beta}\downarrow & & \| \\ A' & \underset{k}{\rightarrowtail} & B' & \xrightarrow[f]{} & C \end{array}$$

在基点范畴 $\mathcal{C}$ 中，其中 (A', k) 是 f. 的核。那么，当且仅当左侧方块是一个拉回时，(A, l) 是 g 的核。

接着，考虑 **Mon** 中 α_1 和 α 的核对，以及诱导态射 $k \times_{X'} k$: Eq(α_1) $\to$ Eq(α)，从而得到交换图

$$\begin{array}{lccccc} \overline{\mathbb{E}}: & \mathrm{Eq}(\alpha_1) & \xrightarrow{k\times_{X'}k} & \mathrm{Eq}(\alpha) & \xrightarrow{f\rho_1 = f\rho_2} & M \\ & {\scriptstyle\pi_1}\downarrow\downarrow{\scriptstyle\pi_2} & (\dagger) & {\scriptstyle\rho_1}\downarrow\downarrow{\scriptstyle\rho_2} & & \| \\ \mathbb{E}: & K & \underset{k}{\rightarrowtail} & X & \underset{f}{\twoheadrightarrow} & M \\ & {\scriptstyle\alpha_1}\downarrow & (*) & {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \| \\ \mathbb{E}': & K' & \underset{k'}{\rightarrowtail} & X' & \underset{f'}{\twoheadrightarrow} & M. \end{array} \tag{A.2}$$

由此可知，两个交换方块 (†) 都是拉回，因为 (∗) 是一个拉回。由引理 A.1 可得，$\mathbb{E}$ 是 (2.1) 意义下的幺半群扩张。¯（注意， $f\rho_1 (= f\rho_2)$ 是一个正则满态射，因为 f 和 ρ_1 都是正则满态射，且 **Mon** 是一个正则范畴。）

由于 K 是交换的且可消去的，而 Eq(α_1) 是 $K \times K$ 的一个子幺半群（同构于一个子幺半群），显然，Eq(α_1) 也是交换的且可消去的，并且有：

命题 A.2。 序列 $\mathbb{E}$是一个 ***cc-Schreier*** 扩张，且(A.2)是 $cc\text{-}SExt_M$. 中(α_1, α) 的核对：$\mathbb{E} \to \mathbb{E}'$

证明。如果 u_m 是 $\mathbb{E}$ 关于 $m \in M$ 的一个代表元，那么 (u_m, u_m) 是 $\mathbb{E}$. 关于 m 的一个代表元。事实上，¯注意到如果 $(x, y) \in$Eq(α)，则 $f(x) = f'\alpha(x) = f'\alpha(y) = f(y)$，从而根据 (2.2)（其中 $m = f(x) = f(y)$），$x = kq(x) + u_m$ 且 $y = kq(y) + u_m$。由于 $\alpha(x) = \alpha(y)$，可得 $\alpha(kq(x))+\alpha(u_m) = \alpha(kq(y))+\alpha(u_m)$；因此，由引理 2.1(1) 以及 α 保持代表元这一事实，$\alpha(kq(x)) = \alpha(kq(y))$。偶对 $(q(x)\ q(y))$ 属于 Eq(α_1)，因为$k'\alpha_1(q(x)) = \alpha(kq(x)) = \alpha(kq(y)) = k'\alpha_1(q(y))$，且 k' 是单态射。于是，对于唯一的元素 $(q(x)\ q(y)) \in$Eq(α_1)，有 $(x, y) = k \times_{X'} k(q(x)\ q(y))+(u_m, u_m)$。此外，根据命题 2.8，态射 ρ_1 和 ρ_2 保持所有代表元。

接下来，我们需要证明这个交换方块

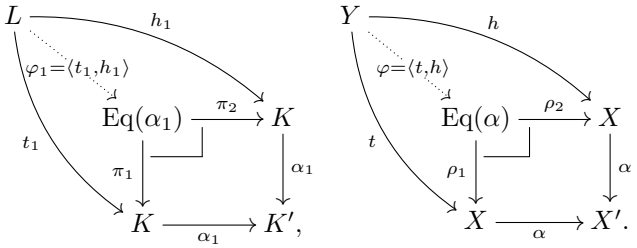
$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{E}} & \xrightarrow{(\pi_2,\ \rho_2)} & \mathbb{E} \\ {\scriptstyle(\pi_1,\rho_1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle(\alpha_1,\ \alpha)} \\ \mathbb{E} & \underset{(\alpha_1,\ \alpha)}{\longrightarrow} & \mathbb{E}' \end{array}$$

在 $cc\text{-}SExt_M$. 中是一个拉回。假设有两个 cc-Schreier 扩张的态射 $(t_1,\ t)$，$(h_1,\ h)$

$$\begin{array}{rccccc}
\mathbb{F}: & L & \xrightarrow{l} & Y & \xrightarrow{g} & M \\
& {\scriptstyle t_1}\downarrow\downarrow{\scriptstyle h_1} & & {\scriptstyle t}\downarrow\downarrow{\scriptstyle h} & & \| \\
\mathbb{E}: & K & \xrightarrow[k]{} & X & \xrightarrow[f]{} & M
\end{array}$$

满足 $\alpha_1 t_1 = \alpha_1 h_1$ 和 $\alpha t = \alpha h$. 。于是，根据核对的泛性质，我们得到两个唯一的幺半群同态

(A.3)



由于 ρ_1 和 ρ_2 是联合单态，并且

$$\begin{cases} \rho_1 k \times_{X'} k\varphi_1 = k\pi_1\varphi_1 = kt_1 = tl = \rho_1\varphi l \\ \rho_2 k \times_{X'} k\varphi_1 = k\pi_2\varphi_1 = kh_1 = hl = \rho_2\varphi l, \end{cases}$$

因此可得 $k \times_{X'} k\varphi_1 = \varphi l$. 。此外，$f\rho_1\varphi = ft = g$，所以

$$\begin{array}{rccccc}
\mathbb{F}: & L & \xrightarrow{l} & Y & \xrightarrow{g} & M \\
& {\scriptstyle \varphi_1}\downarrow & & {\scriptstyle \varphi}\downarrow & & \| \\
\overline{\mathbb{E}}: & \mathrm{Eq}(\alpha_1) & \xrightarrow[k\times_{X'}k]{} & \mathrm{Eq}(\alpha) & \xrightarrow[f\rho_1]{} & M
\end{array}$$

是幺半群扩张的态射。它是 Schreier 扩张态射，因为 $\varphi = \langle t,\ h\rangle$，并且根据假设，$t$ 和 h 保持代表元不变。如果 $(\psi_1,\ \psi)$: $\mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{E}$ 是另一个满足 $\pi_1\psi_1 = t_1$，$\rho_1\psi = t$ 和 $\pi_2\psi_1 = h_1$，$\rho_2\psi = h$，的 Schreier 扩张态射，那么由 (A.3) 中 φ_1 和 φ 的唯一性，立即可得 $\psi_1 = \varphi_1$ 和 $\psi = \varphi$。□

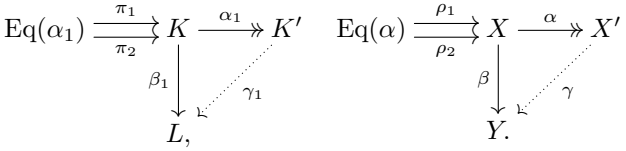
单态射与正则满态射的刻画。现在我们可以证明，(A.1) 是 $cc\text{-}SExt_M$ 中的单态射，当且仅当 α_1 与 α 是 $\mathbf{Mon}$，中的单态射，对正则满态射亦然。我们将分步进行。

命题 A.3。若 α_1 与 α 是**Mon**中的正则满态射，则 $(\mathrm{A}.1)$是 $cc\text{-}SExt_M$.中的正则满态射

证明。我们证明，在我们的假设下，(α_1, α) 是其核对的余等化子 (A.2)。设 (β_1, β): $\mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$

$$\begin{array}{rccccc}
\overline{\mathbb{E}}: & \mathrm{Eq}(\alpha_1) & \xrightarrow{k\times_{X'}k} & \mathrm{Eq}(\alpha) & \xrightarrow{f\rho_1=f\rho_2} & M \\
& {\scriptstyle \pi_1}\downarrow\downarrow{\scriptstyle \pi_2} & & {\scriptstyle \rho_1}\downarrow\downarrow{\scriptstyle \rho_2} & & \| \\
\mathbb{E}: & K & \xrightarrow[k]{} & X & \xrightarrow[f]{} & M \\
& {\scriptstyle \beta_1}\downarrow & & {\scriptstyle \beta}\downarrow & & \| \\
\mathbb{F}: & L & \xrightarrow[l]{} & Y & \xrightarrow[g]{} & M
\end{array}$$

是 cc-Schreier 扩张的一个态射，并且 $(\beta_1, \beta)(\pi_1, \rho_1) = (\beta_1, \beta)(\pi_2, \rho_2)$。那么，由于 α_1 是 (π_1, π_2) 的余等化子，且 α 是 (ρ_1, ρ_2) 的余等化子，存在唯一的分解



容易验证，$(\gamma_1, \gamma)\colon \mathbb{E}' \to \mathbb{F}$ 是幺半群扩张态射，使得 $(\beta_1, \beta) = (\gamma_1, \gamma)(\alpha_1, \alpha)$。这样的态射 (γ_1, γ) 的唯一性由 α_1 与 α 均为（正则）满态射这一事实得出。剩下要证明 $(\gamma_1, \gamma)\colon \mathbb{E}' \longrightarrow \mathbb{F}$ 是 Schreier 扩张态射，即 γ 保持代表元。由命题 2.8，只需证明对每个 $m \in M$，m 对于 $\mathbb{E}'$ 的某个代表元被 γ. 保持。由于对 m对于 $\mathbb{E}$ 的每个代表元 u_m 都有 $\gamma\big(\alpha(u_m)\big) = \beta(u_m)$，并且由假设，$\alpha$ 与 β 都保持代表元，结论随之成立。□

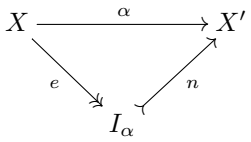
关于单态射，显然，若 α_1 和 α 是**Mon** 中的单态射，则 **(A.1)** 是 $cc\text{-}SExt_M$. 中的单态射。反之亦然（如下文所示），因此我们可以将 $cc\text{-}SExt_M$ 中单态射与正则满态射的刻画补充如下：

命题 A.4. 考虑一个 *cc-Schreier* 扩张之间的态射$(\mathrm{A}.1)$ 。则：

(1) (α_1, α) 是 $cc\text{-}SExt_M$ 中的单态射，当且仅当 α_1 和 α 是**Mon**中的单态射；

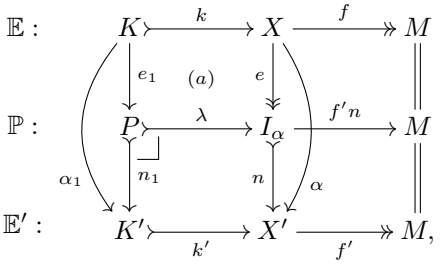
(2) (α_1, α) 是 $cc\text{-}SExt_M$ 中的正则满态射，当且仅当 α_1 和 α 是**Mon**中的正则满态射。

证明。 考虑一个（正则满态射，单态射）分解 $\alpha = ne$



在**Mon**中，*</style}*令 $(, n_1, \lambda)$ 为沿 k'. 对 n 作出的拉回。那么在图表中

(A.4)



其中，e_1 是由 α_1 和 ek 经由拉回 P 所诱导的唯一态射，方形 (a) 也是一个拉回（利用 **(A.1)** 中的方形 $(*)$ 是拉回这一事实，正如我们已经论证过的）。因此，e_1 是 **Mon** 中的正则满态射，而 $\alpha_1 = n_1 e_1$是 α_1. 的（正则满态射，单态射）分解。此外，注意到 $f'n$是正则满态射，因为 $(f'n)e = f$ 也是如此，并且根据引理 **A.1**，(P, λ) 是 $f'n$.的一个核。

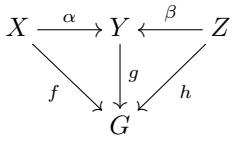
我们证明，幺半群扩张 $\mathbb{P}$ 是一个 cc-Schreier 扩张，并且 (e_1, e)、(n_1, n) 是 Schreier 扩张的态射。首先注意， P 是交换且可消去的（因为借助单态射 n_1，它可实现为 K'的一个子幺半群）。接下来我们声称，对于 m中关于 $\mathbb{E}$的每个代表元 u_m， $e(u_m)$ 可作为 $\mathbb{P}.$ 中关于 $\mathbb{P}.$ 的代表元 m。事实上，给定 $y \in I_\alpha$，对于某个$x \in X$，我们有 $y = e(x)$（因为 e 是 Mon 中的正则满态射，即满射的幺半群同态）。利用 (2.2)，得到 $y = e(x) = e\big(kq(x) + u_m\big) = e(kq(x)) + e(u_m) = \lambda(e_1 q(x)) + e(u_m)$。假设对于另一个 $z \in P.$，有 $y = \lambda(z) + e(u_m)$。我们有，对于某个 $b \in K$，$z = e_1(b)$（因为 e_1 是正则满态射），因此

$$
\begin{aligned}
e\big(kq(x) + u_m\big) = y = \lambda e_1(b) + e(u_m) &= e\big(k(b) + u_m\big) \Rightarrow \\
\alpha kq(x) + \alpha(u_m) = ne\big(kq(x) + u_m\big) = ne\big(k(b) + u_m\big) &= \alpha k(b) + \alpha(u_m) \Rightarrow \\
\alpha kq(x) &= \alpha k(b) \Rightarrow \\
k'\alpha_1(q(x)) &= k'\alpha_1(b) \Rightarrow \\
\alpha_1(q(x)) &= \alpha_1(b) \Rightarrow \\
e_1(q(x)) &= e_1(b) = z,
\end{aligned}
$$

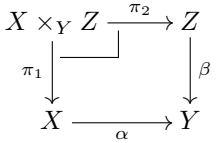
利用 $\alpha(u_m)$ 是一个代表元、引理 2.1(1)，以及 k' 和 n_1 是单态射这一事实。于是 $\mathbb{P}$ 是一个 Schreier 扩张，并且 e通过构造保持代表元。由于 $\alpha = ne$ 和 α 保持代表元，我们得出 n 也保持代表元（利用命题 2.8）。

根据命题 A.3，(e_1, e): $\mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{P}$是 $cc\text{-}SExt_M$中的正则满态射；又由于 n_1和 n是幺半群的单态射，(n_1, n)是 $cc\text{-}SExt_M$.中的单态射。由 $(\alpha_1, \alpha) = (n_1, n)(e_1, e)$可知，若 (α_1, α) 是$cc\text{-}SExt_M$中的单态射，则 (e_1, e) 也是单态射，这意味着 (e_1, e) 是 $cc\text{-}SExt_M$. 中的同构。进而可知 e_1 和 e 是 Mon 中的同构，由此得出 $\alpha_1 = n_1 e_1$ 和 $\alpha = ne$ 是 Mon 中的单态射。同样，若 (α_1, α) 是 $cc\text{-}SExt_M$中的正则满态射，则 n_1 和 n 是 Mon 中幺半群的同构，由此得出 $\alpha_1 = n_1 e_1$ 和 $\alpha = ne$ 是 Mon 中的正则满态射 . □

备注 A.5. 根据前一个命题， $cc\text{-}SExt_M$中的每个态射 (A.1) 都可以分解为 (A.4)，即一个正则满态射后接一个单态射；并且我们从命题 A.2 知道核对存在。此外，不难证明，只要拉回存在， $cc\text{-}SExt_M$中的正则满态射在拉回下保持不变，因此，按照 $[1, \text{I.1.3}]$和 $[2, \text{定义 2.1.1}]$的意义， $cc\text{-}SExt_M$是一个正则范畴。不过要注意，通常情况下， $cc\text{-}SExt_M$ 并非有限完备：事实上，即使在群扩张的情形下，对拉回封闭这一性质也不成立。这里的问题在于，两个态射α: $f \to g$, β: $h \to g$的拉回



在$\mathbf{Gp}/G$ 中通过拉回构造



β 沿着 α 在**Gp**，但即使 f， g 和 h 都是满射，复合态射$f\pi_1 = h\pi_2$ 通常也未必是满射。同样的情况也出现在$cc\text{-}SExt_M$.

方向函子保留并反映单态射和正则满态射。 现在我们可以证明函子 d: $cc\text{-}SExt_M \longrightarrow cc\text{-}SPt_M$保留并反映单态射和正则满态射。根据上述结果， $cc\text{-}SExt_M$ 中的态射 (A.1) 是单态射，当且仅当α_1 和 α 都是**Mon**中的单态射，正则满态射的情形也类似。$cc\text{-}SPt_M$.中的单态射和正则满态射也有同样的刻画

假设将 d 应用于 $cc\text{-}SExt_M$ 中的态射 (A.1)，得到一个

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{\overline{\kappa}} & df & \underset{\overline{s}}{\overset{\overline{f}}{\rightleftarrows}} & M \\ {\scriptstyle\alpha_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d(\alpha)} & & \| \\ K' & \xrightarrow[\overline{\kappa'}]{} & df' & \underset{\overline{s'}}{\overset{\overline{f'}}{\rightleftarrows}} & M \end{array} \tag{A.5}$$

cc-Schreier 点态射。于是，特别地， α_1 是**Mon**中的单态射，而针对 cc-Schreier 扩张的短五引理（命题 2.9）保证 α也是幺半群的单态射；这意味着 (A.1) 是$cc\text{-}SExt_M$中的单态射，因此 d 反映单态射。反过来，如果 (A.1) 是 $cc\text{-}SExt_M$中的单态射，根据命题 A.4 α_1 是**Mon**中的单态射。 根据 Schreier 点的分裂短五引理（见 [8], 命题 2.3.10）， $d(\alpha)$也是幺半群的单态射，因此我们得出 (A.5) 是 $cc\text{-}SPt_M$中的单态射，即 d保留单态射。类似的论证表明， d 反映并保留正则满态射，由此完成命题 7.2 的证明。

最后我们指出，我们对 $cc\text{-}SExt_M$ 所得到的单态射与正则满态射的刻画并未用到消去性，因此同一证明也适用于范畴 $smod\text{-}SExt_M$.。

References

[1] M. Barr, *Exact categories*，载于数学讲义236，Springer-Verlag，1971，1-120。[2] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra*，第2卷，剑桥大学出版社，1994。[3] F. Borceux，D. Bourn， *Mal'cev, Protomodular, Homological and Semi-Abelian Categories*，数学及其应用566，克吕维尔，2004。[4] D. Bourn， *Normalization equivalence, kernel equivalence and affine categories*，载于数学讲义1488，Springer-Verlag，1991，43-62。[5] D. Bourn， *Baer sums and fibered aspects of Mal'cev operations*，《拓扑与微分几何范畴学刊》G´eom. Diff´er. Cat´eg. 40第4期（1999），297-316。[6] D. Bourn，M. Gran， *Centrality and normality in protomodular categories*，《范畴理论与应用》，9（2002），151–165。[7] D. Bourn，M. Gran， *Centrality and connectors in Maltsev categories*，《普世代数》48（2002），309-331。[8] D. Bourn，N. Martins-Ferreira，A. Montoli，M. Sobral, *Schreier split epimorphisms in monoids and in semirings* 45, ，《数学文本》（B辑），卷，科英布拉大学Matem´atica数学系，2013。[9] D. Bourn，N. Martins-Ferreira，A. Montoli，M. Sobral, *monoids* 88 2014 739 752 *Schreier split epimorphisms between* ，《半群论坛》（），–。[10] D. Bourn，N. Martins-Ferreira，A. Montoli，M. Sobral, *categories* 18 1 2016 151 172 *Monoids and pointed S-protomodular* ，《同调、同伦与应用》（）（），–。[11] D. Bourn，D. Rodelo， *Cohomology without projectives*，《拓扑与微分几何范畴学刊》G´eom. Diff´er. Cat´eg. 48（2007），104–153。

[12] A. Carboni, M. C. Pedicchio, N. Pirovano, *Internal graphs and internal groupoids in Mal'cev categories* 13 1992 97 109 , 《CMS会议论文集》（），–。[13] S. Eilenberg, S. Mac Lane, *Cohomology Theory in Abstract Groups, I*，数学年刊48（1947），51-78。[14] A. Grothendieck, *Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique.* , Nicolas Bourbaki研讨班第190讲（1960），299-327。[15] G. Hoff, *On the cohomology of categories*, 《数学汇报》7（1974），169–192。[16] D. Holt, *An interpretation of the cohomology groups H^n（G, M）*, 《代数杂志》60（1979），307-318。[17] J. Huebschmann, *Crossed n-fold extensions of groups and cohomology*, 《瑞士数学评论》55（1980），302-314。[18] S. Mac Lane, *Homology*, Springer-Verlag, 1963。[19] N. Martins-Ferreira, A. Montoli, M. Sobral, *Semidirect products and crossed modules in monoids with operations* 217 2013 334 347 , 《纯粹与应用代数杂志》（），-。[20] N. Martins-Ferreira, A. Montoli, M. Sobral, *Baer sums of special Schreier extensions of monoids* 93 2016 403 415 , 《半群论坛》（），–。[21] N. Martins-Ferreira, A. Montoli, M. Sobral, *The nine lemma and the push forward construction for special Schreier extensions of monoids with operations*, 《半群论坛》97（2018），325-352。[22] A. Patchkoria, *Cohomology of monoids with coefficients in semimodules*, 《格鲁吉亚科学院通报》86（1977），545–548（俄文）。[23] A. Patchkoria, *Cohomology monoids of monoids with coefficients in semimodules I*, 《同伦及相关结构杂志》9（2014），239–255。[24] A. Patchkoria, *Cohomology monoids of monoids with coefficients in semimodules II*, 《半群论坛》97（2018），131–153。[25] M. C. Pedicchio, *A categorical approach to commutator theory*, 《代数杂志》177（1995），647-657。[26] L. R´edei, *Die Verallgemeinerung der Schreierischen Erweiterungstheorie*, 《塞格德数学学报》14（1952），252-273。[27] J. D. H. Smith, *Mal'cev Varieties*, 数学讲义554, Springer-Verlag, 1976。[28] N. Yoneda, *On Ext and exact sequences*, 《东京大学理学部纪要》第I辑8（1960），507-526。

(Stefano Ambra) Dipartimento di Matematica "Federigo Enriques", Università degli Studi di Milano, Via Saldini 50, 20133 Milano, Italy*Email address*: stefano.ambra@unimi.it

(Andrea Montoli) Dipartimento di Matematica "Federigo Enriques", Università degli Studi di Milano, Via Saldini 50, 20133 Milano, Italy*Email address*: andrea.montoli@unimi.it

(Diana Rodelo) Department of Mathematics, University of the Algarve, 8005-139 Faro, Portugal and Center for Research and Development in Mathematics and Applications (CIDMA), Department of Mathematics, University of Aveiro, 3810-193 Aveiro, Portugal*Email address*: drodelo@ualg.pt