某些类别谱的非负中心对称可实现性

Nayanthara[a]，Noufal Asharaf[a]

[a]科钦科技大学数学系，印度喀拉拉邦 $a.$

arXiv:2602.20797v1 [math.SP] 24 Feb 2026

摘要

确定能够表示非负矩阵特征值的标量集合，称为非负逆特征值问题（NIEP）。本文研究了具有特定谱的非负矩阵存在的条件。将经典非负逆特征值问题限定于具有中心对称结构的非负矩阵，便得到中心对称非负逆特征值问题（PNIEP）。我们解决了 [5], 中提出的开放问题，并进一步证明，对于由五个复数构成的迹为零的谱，PNIEP与NIEP等价。此外，我们还为某些类别的谱的可实现性导出了新的充分条件，使其可由非负中心对称矩阵实现。基于中心对称矩阵及其特征多项式的一般结构特征，我们的方法具有构造性。我们还分析了扰动对复特征值虚部的影响，并推导出一些扰动结果。

关键词：非负矩阵，非负逆特征值问题，反对称矩阵，反对称逆特征值问题

1. 引言

每个 n 阶方阵都有一组 n 特征值，它们是其特征多项式的根。一个自然的逆向问题是：对于给定的一组 n 标量（实数或复数），是否存在一个 n 阶矩阵，使这些标量成为它的特征值？这一问题催生了逆特征值问题（IEP），这是矩阵理论中一个核心且活跃的研究领域。逆特征值问题旨在确定哪些标量集合能够成为某个矩阵的特征值，并找出这些情况成立的充要条件。如果存在一个矩阵，其特征值与给定集合一致，就称该标量集合是可实现的；这样的矩阵称为实现矩阵。逆特征值问题的研究可追溯至近一个世纪前，其起源通常归功于 Kolmogorov 关于随机矩阵 [7] 的研究。随着时间推移，这一问题因其广泛的应用而日益重要。当矩阵还需满足

Em电子邮件地址：nayan20@cusat.ac.in（Nayanthara ），noufal@cusat.ac.in（Noufal Ashara f)

非负性、对称性或反中心对称性等附加约束时，这一问题尤其引人关注。主要挑战在于建立可解条件，并开发从给定谱数据重构矩阵的计算方法；这项任务在理论上内容丰富，在计算上也颇具挑战。非负逆特征值问题（*NIEP*）旨在刻画哪些标量集合能够成为非负矩阵的特征值。该问题探讨给定一组标量时，存在相应非负矩阵的充要条件。关于非负逆特征值问题（NIEP）的文献十分丰富，其中包含许多刻画可实现谱的充分条件，以及少数必要条件。还有若干研究探讨了这些充分条件之间的相互关系。对于低阶 $n.$ 的集合，NIEP 已得到解决；然而，一般 n 的完整解仍然未知。

Lowey 和 London 在 [11] 解决了 $n = 3$这一情形。后来，Meehan 在 $n = 4$ 中解决了 [12] 这一情形；Torre-Mayo 等人也独立地在 [16] 中根据特征多项式的系数解决了这一问题。对于由五个和为零的复数组成的列表，Laffey 和 Meehan 在 [9]中解决了该问题。Laffey 和 Smigoc 在 [10]中针对一组特定的复数证明了一般情形。对于 $n \geq 5.$ 对矩阵施加结构约束往往会增加逆特征值问题的复杂性。近年来，研究人员开始探索中心对称非负逆特征值问题（PNIEP），它将经典的非负逆特征值问题（NIEP）限定在具有中心对称结构的矩阵范围内。对称实现比一般可实现性要求更严格。对中心对称矩阵的研究有助于深入了解结构约束如何影响矩阵的特征值及其相互关系。从应用角度看，中心对称矩阵自然出现在信号处理、统计学和组合矩阵理论等领域，因为这些领域中往往存在固有的对称模式。随着一般 NIEP 日益复杂，且高阶矩阵的相关问题仍未解决，在中心对称矩阵这一受限框架下研究该问题具有重要意义，因为所施加的结构可能带来新的理论见解，并形成易于处理的子类。本文着重于构造具有中心对称结构、且对应于给定复数集的非负矩阵。A. I. Julio 等人在 [5] 提出了一项重要结果，证明阶数为 $n = 3$的矩阵的 NIEP 与 PNIEP 等价。他们还给出了一个充分条件，使得由五个和为零的复数组成的可实现列表能够作为中心对称非负矩阵的谱。作者提出了这样一个问题：假设一组和为零的五个标量已可实现，但不满足他们的充分条件，那么它是否能够次对称地实现？本文解决了这一开放问题，并给出了完整解答。此外，本文还证明了对于阶数为五的迹为零的可实现谱，NIEP 与 PNIEP 等价。

此外，本文给出了充分条件，以确保存在与某些复数集相对应的非负次对称矩阵。本文还研究了复特征值的虚部受到扰动时，谱的可实现性。对于两类情形，本文均建立了扰动结果：一类是由四个和为零的复数组成的集合；另一类是由五个复数组成的集合，其中一个元素具有正实部，即佩龙特征值，其余元素均具有非正实部。

2. 非负逆特征值问题

若一个 n 阶方阵 $A := (a_{ij})$ 满足对所有 $i, j = 1, 2, \ldots n.$ 均有 $a_{ij} \geq 0$，则称其为非负矩阵。A 的**迹**是其对角元之和，也等于其特征值之和。对于 $\Delta :$ $= \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$，即 A 的谱，我们定义 k^{th} 阶矩为 Δ，其定义如下：

$$s_k(\Delta) := \delta_1^k + \delta_2^k + \cdots + \delta_n^k,$$

谱中各元素的 k^{th} 次幂之和，等于**迹**(A^k)。如果存在一个非负矩阵 A，其谱为集合 Δ，则称该集合为可实现的。矩阵 A 称为 Δ 的实现矩阵 。

定义 2.1. 次对称 矩阵是一个 $n \times n$ 矩阵 $A := (a_{ij})$，其元素满足

$$a_{ij} = a_{n-j+1,n-i+1} \quad \forall i, j \in 1, 2, \ldots, n$$

也就是说，矩阵 A 是次对称 的，当且仅当 $JAJ = A^T$， 其中 J 是在反对角线上为 1、其余位置为 0 的 $n \times n$ 置换矩阵。中心对称矩阵关于反对角线对称。

定义 2.2. 考虑一个首一多项式 $p(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$，其次数为 n，其零点（包括重数）均属于 Δ 。牛顿恒等式系统地揭示了该多项式的系数与其根对应幂和之间的关系，这种关系可表示为如下递推关系：

$$ka_{n-k} + s_1 a_{n-k+1} + s_2 a_{n-k+2} + \cdots + s_k a_n = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

关于非负逆特征值问题的文献中，包含许多用于判断给定标量集合是否可实现的充要条件。谱可实现的一些已知必要条件如下：

¯(i) 该集合在复共轭下封闭， $\Delta(A) = \Delta(A)$。$_n$(ii) 矩阵 A 的幂的迹将为非负，即 $s_k(\Delta) = \sum \delta_i^k \geq 0$ 对所有$_{i=1}$正整数 $k.$

(iii) 最大值 $\max_{1\le i\le n}\{|\delta_i|:\ \delta_i\in\Delta\}$ 属于 Δ，根据佩龙-弗罗贝尼乌斯定理 [2]。(iv) 一个涉及 k^{th} 矩的不等式由 Lowey 和 London 于 [11] 以及 John- son 独立地于 [3] 给出

$$s_k^m \le n^{m-1}s_{km}$$

对于所有正整数 k 和 m。

除了必要条件外，人们还建立了若干充分条件。读者可参阅 [4] 了解详情。最早已知的充分条件由 Sule˘ımanova [15] , 提出：任何恰有一个正值、其余值均为负且总和非负的实数列表，都可实现为某个非负矩阵的谱，其中唯一的正值是佩龙根。实数非负逆特征值问题的其他充分条件采用谱的划分方法：将列表分成较小的子列表，每个子列表都满足 Sule˘ımanova 型条件，然后将这些子列表组合起来，以实现完整的谱。除划分方法外，其他充分条件还包括预先指定一个实现部分谱的矩阵的对角元，再将这一部分实现扩展为完整的谱。对称非负逆特征值问题也已发展出类似的充分条件。研究者考察了这些著名充分条件之间的包含关系和相互独立性，发现虽然有些条件可以推出其他条件，但许多条件彼此不可比较。

非负逆特征值问题（NIEP）已针对基数较小的谱得到解决。通过应用柯西-施瓦茨不等式，Loewy 与 London 建立了一个新的必要条件，从而解决了阶为 $n=3$ 的标量集合的非负逆特征值问题。

定理 2.1. *[11]* 设 $\Delta:=\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$为一组复数，且 $\delta_1\ge|\delta_j|$，$j=2$，3。则 Δ 可实现当且仅当 $\Delta(A)=\bar{\Delta}(A)$ $s_1\ge 0$ 且 $s_1^2\le 3s_2$.

R. Reams 研究了由四个复数组成且零和的集合，并导出了其可实现性的刻画。

定理 2.2. *[13]* 设 $\Delta:=\{\delta_1,\delta_2,\delta_3.\delta_4\}$ 为一组复数。则 Δ 连同$s_1=0$ 可实现当且仅当

$$s_2\ge 0,\quad s_3\ge 0,\quad 4s_4\ge s_2^2$$

E. Meehan 完全解决了 $n=4$ 中的非负逆特征值问题 [12]。后来，Laffey 和 Meehan 通过分析由满足条件 $s_1=0.$ 的五个复标量组成的谱，提出了一项开创性工作。

定理 2.3。 *[9]* 设 $\Delta := \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5\}$ 为一个由五个复数构成的列表，并设 $s_k = \delta_1^k + \delta_2^k + \delta_3^k + \delta_4^k + \delta_5^k$ 对于 $k = 1, 2, \ldots\ldots$ 假设 $s_1 = 0$。那么 Δ 是某个非负 5×5 矩阵的谱，当且仅当满足以下三个条件：

(i) $s_k \geq 0, \quad k = 2, 3, 4,$

5。(ii) $4s_4 \geq s_2^2$，且(iii)

$12s_5 - 5s_2s_3 + 5s_3\sqrt{4s_4 - s_2^2} \geq 0$

此后，Laffey 和 Šmigoc 对一列 n 复数的可实现性给出了一个广义的充要条件，其中除佩龙特征值外的每个特征值都是复数，且实部非正。下面重述他们分析中起核心作用的引理。

引理 2.1。 [10] 设 t 为非负实数，且令 $\delta_2, \delta_3, \ldots\ldots, \delta_n$ 为实部小于或等于零的复数，并满足列表 $(\delta_2, \delta_3, \ldots\ldots, \delta_n)$ 在复共轭下封闭。令 $\rho = 2t - \delta_2 - \cdots - \delta_n$， 并

$$f(x) = (x - \rho)\prod_{j=2}^{n}(x - \delta_j) = x^n - 2tx^{n-1} + b_2x^{n-2} + \cdots + b_n, \text{ then}$$

$b_2 \leq 0$ 意味着 $b_j \leq 0$ 对于 $j = 3, 4, \ldots\ldots, n.$

定理 2.4。 *[10]* 设 $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ 为实部小于或等于零的复数，且令 ρ 为正实数。那么，当且仅当满足以下条件时，列表 $\sigma = \{\rho, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$ 是某个非负矩阵的谱：

(i) 列表 $(\rho, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ 在复共轭下封闭。(ii)

$s_1 = \rho + \sum_{i=2}^{n}\delta_i \geq 0$(iii) $s_2 = \rho + \sum_{i=2}^{n}\delta_i{}^2 \geq 0$(iv) $s_1^2 \leq ns_2$

Ana I. Julio 和 Ricardo L. Soto 首先提出了次对称非负逆特征值问题（PNIEP）。他们通过应用拉多定理 [6]，建立了 PNIEP 存在解的充分条件。随后，A. I. Julio 等人在 [5], 中研究了中心对称可实现性问题，并证明对于任意由三个复数组成的可实现列表，非负逆特征值问题（NIEP）与 PNIEP 等价。

定理 2.5。 *[5]* 设 $\Delta := \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ 是一个复数可实现列表。那么 Δ可由一个次对称矩阵实现。

他们证明，对于某些由四个复数组成的可实现列表，非负逆特征值问题与 PNIEP 是相同的；然而，在一般情况下，这两个问题并不相同。此外，作者给出了一个充分条件，使由五个复数组成的迹为零的列表可实现为次对称非负矩阵的谱，该条件为

定理 2.6。 [5]设 $\Delta := \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_5\}$ 是一个由复数组成的可实现列表，且满足 $s_1 = 0$. 若 $12s_5 - 5s_2s_3 \geq 0$，则 Δ 是反对称可实现的。

基于这些结果，作者提出了一个问题："满足 $s_1 = 0$ 和 $12s_5 - 5s_2s_3 < 0$的复数可实现列表是否反对称可实现？"，
他们还提到，存在一个非负矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 30 & 86 & 30 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，它实现了满足 $s_1 = 0$ 和 $12s_5 - 5s_2s_3 < 0$的集合 $\Delta := \{4, 1, -3, -1+3i, -1-3i\}$。但在这种情况下，是否存在非负中心对称矩阵仍然未知。下一节将探讨并解决这个问题。

3. 主要结果

本节介绍本研究的主要结果。特别是，本文给出了第2 节所述开放问题的完整解答。实现集合 $\Delta_1 := \{4, 1, -3, -1+3i, -1-3i\}$ 的三个次对称矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 43-2\sqrt{451} \\ \frac{43+2\sqrt{451}}{15} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2\sqrt{\frac{86+4\sqrt{451}}{15}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\sqrt{\frac{86+4\sqrt{451}}{15}} & \frac{43+2\sqrt{451}}{15} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{\frac{45}{2}} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{30} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{30} & \sqrt{\frac{45}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{and} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 43+2\sqrt{451} \\ \frac{43-2\sqrt{451}}{15} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2\sqrt{\frac{86-4\sqrt{451}}{15}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\sqrt{\frac{86-4\sqrt{451}}{15}} & \frac{43-2\sqrt{451}}{15} & 0 \end{bmatrix}.$$

这些例子具有以下反对称形式

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & b & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c & b & 0 \end{bmatrix}$$

其中 a、b、c、d 均为非负。以下定理利用这些反对称形式，建立非负逆特征值问题与 PNIEP 之间关于五个复数且零和的可实现列表的等价性。

定理 3.1. 设 $\Delta := \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5\}$ 为五个复数的可实现列表，且$s_1 = 0$. 则 Δ 是反对称实现。

证明。 由于 Δ 是一个复数可实现列表，因此满足定理2.3的所有条件。证明分为以下三种情形。

(a) 情形 *1*: Δ 满足 $6s_5 - 5s_2s_3 \geq 0$. 设 A 是一个形如以下形式的次对称矩阵 $A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d & c & b & a & 0 \end{bmatrix}$. A 的特征多项式为$f(z)$

$$= z^5 - 2az^3 - 2cz^2 + (a^2 - d)z - b^2.$$

应用牛顿恒等式可得将 a, b, c, d 与 s_k联系起来的方程，具体如下

$$2a = \frac{s_2}{2}, \quad 2c = \frac{s_3}{3}, \quad a^2 - d = \frac{s_2^2}{8} - \frac{s_4}{4} \quad and \quad -b^2 = \frac{s_2 s_3}{6} - \frac{s_5}{5}.$$

求解这些方程，将 a, b, c, d 的值用诸 s_k表示为

$$a = \frac{s_2}{4}, \quad b = \frac{\sqrt{30}\sqrt{6s_5 - 5s_2s_3}}{30}, \quad c = \frac{s_3}{6} \quad and \quad d = \frac{4s_4 - s_2^2}{16},$$

从而该非负矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{s_2}{4} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{30}\sqrt{6s_5 - 5s_2s_3}}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{s_3}{6} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{4s_4 - s_2^2}{16} & \frac{s_3}{6} & \frac{\sqrt{30}\sqrt{6s_5 - 5s_2s_3}}{30} & \frac{s_2}{4} & 0 \end{bmatrix}.$$

根据假设， A 中的每一项均为非负。因此 A次对称地实现 Δ。(b) 情形 *2*： Δ 满足 $6s_5 - 5s_2s_3 < 0$ 和$2s_4 - s_2^2 \geq 0$. 。证明分为两部分。

(i) Let $s_5 = 0, s_2 \neq 0, s_3 \neq 0$, and $B := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 \end{bmatrix}$ be a persymmetric matrix

具有特征多项式 $f(z) = z^5 - cz^3 - b^2z^2 - a^2cz + b^2c.$ 应用（1）给出关系

$$c = \frac{s_2}{2}, \quad b^2 = \frac{s_3}{3}, \quad a^2c = \frac{s_4}{4} - \frac{s_2^2}{8} \quad and \quad b^2c = \frac{s_2 s_3}{6} - \frac{s_5}{5}.$$

对 a， b和 c求解该方程组，得到 $a = \sqrt{(\frac{s_4}{4} - \frac{s_2^2}{8}}\ \frac{2}{s_2} = \sqrt{\frac{2s_4 - s_2^2}{4s_2}}$, $b = \sqrt{\frac{s_3}{3}}$ and $c = \frac{s_2}{2}$. 因此，实现矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{\frac{2s_4 - s_2^2}{4s_2}} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{\frac{s_3}{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{s_3}{3}} & \sqrt{\frac{2s_4 - s_2^2}{4s_2}} & 0 \end{bmatrix}$$

(ii) 设 $s_5 \neq 0, s_2 \neq 0, s_3 \neq 0$. 在这种情况下，考虑该反对称矩阵，其形式 $C := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c & b & 0 \end{bmatrix}$，其特征多项式为 $f(z) = z^5 + (-a - d)z^3 - ac^2z^2 + (-ab^2d + ad)z + ac^2d$. (1)给出了以下关系，即 $f(z)$ 的系数与 k^{th} 矩 s_k.

$$a + d = \frac{s_2}{2}, \quad ac^2 = \frac{s_3}{3}, \quad ad - ab^2d = \frac{s_2^2}{8} - \frac{s_4}{4} \quad and \quad ac^2d = \frac{s_2s_3}{6} - \frac{s_5}{5}.$$

因此，这些值 a, b, c与 d为

$$a = \frac{3s_5}{5s_3},\ b = \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{\frac{12s_5(5s_2s_3 - 6s_5) + 25s_3^2(2s_4 - s_2^2)}{s_5(5s_2s_3 - 6s_5)}},\ c = \frac{\sqrt{5}s_3}{3\sqrt{s_5}} \quad and$$
$$d = \frac{5s_2s_3 - 6s_5}{10s_3}.$$

则矩阵 C 是

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3s_5}{5s_3} \\ \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{\frac{12s_5(5s_2s_3 - 6s_5) + 25s_3^2(2s_4 - s_2^2)}{s_5(5s_2s_3 - 6s_5)}} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}s_3}{3\sqrt{s_5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5s_2s_3 - 6s_5}{10s_3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{\sqrt{5}s_3}{3\sqrt{s_5}} & \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{\frac{12s_5(5s_2s_3 - 6s_5) + 25s_3^2(2s_4 - s_2^2)}{s_5(5s_2s_3 - 6s_5)}} & 0 \end{bmatrix}.$$

在给定假设下，矩阵 C 次对称地实现 Δ.

(c) 情形3： $6s_5 - 5s_2s_3 < 0$与$2s_4 - s_2^2 < 0$. 考虑一个形如 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 形式， $D := \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 & 1 \\ b & d & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 \end{bmatrix}$，其特征多项式为 $f(z) = z^5 + (-2c -$

$d)z^3 - az^2 + 2cdz + ad - b^2$. 牛顿恒等式给出了 $f(z)$ 的系数与 s_k. 之间的以下关系

$$2c + d = \frac{s_2}{2}, \quad a = \frac{s_3}{3}, \quad 2cd = \frac{s_2^2}{8} - \frac{s_4}{4} \quad and \quad ad - b^2 = \frac{s_2 s_3}{6} - \frac{s_5}{5},$$

并且， a, b, c, d 的值可推导如下

$$a = \frac{s_3}{3}, \; b = \sqrt{\frac{12s_5 - 5s_2s_3 + 5s_3\sqrt{4s_4 - s_2^2}}{60}}, \; c = \frac{s_2 - \sqrt{4s_4 - s_2^2}}{8} \quad and$$
$$d = \frac{s_2 + \sqrt{4s_4 - s_2^2}}{4}.$$

因此，实现矩阵为

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{s_2 - \sqrt{4s_4 - s_2^2}}{8} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{\frac{12s_5 - 5s_2s_3 + 5s_3\sqrt{4s_4 - s_2^2}}{60}} & \frac{s_2 + \sqrt{4s_4 - s_2^2}}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{s_3}{3} & \sqrt{\frac{12s_5 - 5s_2s_3 + 5s_3\sqrt{4s_4 - s_2^2}}{60}} & \frac{s_2 - \sqrt{4s_4 - s_2^2}}{8} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

根据假设， D 的所有元素均为非负数。因此， D 次对称地实现了 Δ。由此，非负逆特征值问题与 PNIEP 之间的等价性得以确立。□

下面的例子说明该定理。

例 3.1. 考虑集合 $\Delta_1 := \{2, -1 + i, -1 - i, i, -i\}$。前五个矩为 $s_1 = 0$, $s_2 = 2$, $s_3 = 12$, $s_4 = 10$, $s_5 = 40$. 此外，我们还有

$$4s_4 - s_2^2 = 36, \quad 6s_5 + 5s_2s_3 = 120 > 0.$$

那么，根据定理 3.1的情形 1，实现矩阵为 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{9}{4} & 2 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

例 3.2. 集合 $\Delta_2 := \{6, -5, 1, -1 + 4i, -1 - 4i\}$ 且前五个矩为 $s_1 = 0$, $s_2 = 32$, $s_3 = 186$, $s_4 = 2244$, $s_5 = 2410$. 注意， $2s_4 - s_2^2 = 3464 > 0$, $6s_5 - 5s_2s_3 = -15300 < 0$, $12s_5 - 5s_2s_3 = -840 < 0$. 根据定理 3.1 情形 2 实现矩阵是 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{241}{31} \\ \frac{\sqrt{1910272}}{2\sqrt{61455}} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{62}{\sqrt{482}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{255}{31} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{62}{\sqrt{482}} & \frac{\sqrt{1910272}}{2\sqrt{61455}} & 0 \end{bmatrix}$

例 3.3. 前五个矩对应于集合 $\Delta_3 := \{6, 4, -4, -3+4i, -3-4i\}$ 为 $s_1 = 0$, $s_2 = 54$, $s_3 = 450$, $s_4 = 754$, 以及 $s_5 = 8250$. 此外, 请注意 $2s_4 - s_2^2 = -1408 < 0$, $6s_5 - 5s_2 s_3 = -72000 < 0$, $12s_5 - 5s_2 s_3 = -22500 < 0$. 该实现矩阵 Δ_3 根据定理的情形3 3.1 为 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{11}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 150 & 0 & \frac{11}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

—

4. 对称实现的充分条件

4.1. 具有单个正特征值的谱的对称实现的充分条件

本节分析由一个实部为正的元素（佩龙特征值）和其余所有实部非正的元素组成的复数集合的次对称可实现性。定理2.4确立了这些谱的非负可实现性。下述定理给出了满足这些条件的五阶集合的次对称可实现性的一个充分条件5。

定理 4.1. 设 $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$ 是一个在共轭下封闭且实部非正的复数列表, δ 是一个正实数。那么列表$\Delta := \{\delta, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$ 是次对称可实现的, 当且仅当 $s_1 \geq 0$ 且 $s_2 - s_1^2 \geq 0$.

证明。 假设集合 Δ 是某个反对称矩阵 A, 的谱, 那么其特征多项式为: $p(z) = (z-\delta)(z-\delta_1)(z-\delta_2)(z-\delta_3)(z-\delta_4)$。考虑矩阵 A_1, A_2, A_3, A_4, 以及 A_5, 它们具有以下反对称结构,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 1 & 0 & 0 \\ q & 0 & t & 1 & 0 \\ r & 0 & 0 & 0 & 1 \\ s & r & q & p & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ q & p & t & 1 & 0 \\ r & 0 & p & 0 & 1 \\ s & r & q & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 1 & 0 & 0 \\ q & 0 & t & 1 & 0 \\ r & q & 0 & 0 & 1 \\ s & r & q & p & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 1 & 0 & 0 \\ q & p & t & 1 & 0 \\ r & q & p & 0 & 1 \\ s & r & q & p & 0 \end{bmatrix}, A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & p & t & 1 & 0 \\ r & q & p & 0 & 1 \\ s & r & 0 & 0 & t \end{bmatrix} \quad \text{where } p, q, r, s, t \in \mathbb{R}.$$

(i) A_1 的特征多项式为

$$f(z) = z^5 - tz^4 - 2pz^3 + (2pt - 2q)z^2 + (p^2 - 2r)z + (-p^2 t + 2pq - s).$$

常数 p, q, r, s, t 利用牛顿恒等式用 s_i 表示，其中 $i = 1,2 \ldots 5$，如下

$$p = \frac{s_2 - s_1^2}{4}, \quad q = \frac{s_3 - s_1^3}{6}, \quad r = \frac{s_4 + 6s_1^2 s_2 - 16 s_1 s_3 - 3s_2^2 + 12 s_4}{96} \tag{2}$$

$$s = \frac{7s_1^5 - 10 s_1^3 s_2 + 6 s_1^2 s_2 + 20 s_1^2 s_3 + 9 s_2^2 s_1 - 60 s_1 s_4 - 20 s_2 s_3 + 48 s_5}{240}, \quad t = s_1. \tag{3}$$

通过比较 $p(z)$ 和 $f(z)$ 的系数，也可以用 Δ 中的元素表示常数 p、q、r、s 和 t。接下来需要证明这些常数均为非负。由于 $s_1 \geq 0$ 和 $s_2 - s_1^2 \geq 0.$，由 (2) 和 (3) 可得，$s_1 \geq 0 \implies t \geq 0$ 和 $s_2 - s_1^2 \geq 0 \implies p \geq 0.$。因此，引理 2.1 适用于多项式 $f(z)$，并且有如下结论。

$$2pt - 2q \leq 0 \implies pt \leq q \implies q \geq 0$$

$$p^2 - 2r \leq 0 \implies p^2 \leq 2r \implies r \geq 0$$

$$2pq - p^2 t - s \leq 0 \implies s \geq 2p(q - pt) \implies s \geq 0.$$

因此，这些常数均为非负。

(ii) A_2 的特征多项式为 $f(z) = z^5 - tz^4 - 2pz^3 - 2qz^2 - 2rz - s.$ 常数 p、q、r、s、t 用 s_i 表示，其中 $i = 1$、2.....5 利用（1）可得如下结果

$$p = \frac{s_2 - s_1^2}{4}, \quad q = \frac{s_1^3 + 2s_3 - 3s_1 s_2}{12}, \quad r = \frac{6s_4 + 6s_1^2 s_2 - 3s_2^2 - s_1^4 - 8 s_1 s_3}{48} \tag{4}$$

$$s = \frac{24 s_5 - 30 s_1 s_4 20(s_2 s_3 - s_3 s_1^2) - 10 s_2 s_1^3 + 15 s_1 s_2^2 + s_1^5}{120}, \quad t = s_1 \tag{5}$$

由于 $s_1 \geq 0$ 且 $s_2 - s_1^2 \geq 0.$ 由（4）和（5）可得，$s_1 \geq 0 \implies t \geq 0$ 且 $s_2 - s_1^2 \geq 0 \implies p \geq 0.$ 因此引理 2.1 适用于多项式 $f(z)$ 且下列结论成立。

$$-2q \leq 0 \implies q \geq 0, \ -2r \leq 0 \implies r \geq 0, \ -s \leq 0 \implies s \geq 0.$$

因此，所有这些常数都是非负的。

(iii) A_3 的特征多项式为

$$f(z) = z^5 - tz^4 - 2pz^3 + (2pt - 3q)z^2 + (p^2 - 2r)z - p^2 t + 2pq - s$$

常数 p, q, r, s, t 用 s_i 表示（其中 $i = 1$，$2 \ldots 5$ 根据（1）得出，如下：

所示

$$p=\frac{s_2-s_1^2}{4},\quad q=\frac{s_3-s_1^3}{9},\quad r=\frac{s_1^4+6s_2s_1^2-16s_1s_3-3s_2^2+12s_4}{96} \tag{6}$$

$$s=\frac{s_1^5-10s_1^3s_2+80s_1^2s_3+45s_1s_2^2-180s_1s_4-80s_2s_3+144s_5}{720},\quad t=s_1. \tag{7}$$

由于 $s_1\geq 0$ 且 $s_2-s_1^2\geq 0$. 由（6）和（7）可得，$s_1\geq 0 \implies t\geq 0$ 且 $s_2-s_1^2\geq 0 \implies p\geq 0$. 因此，引理 2.1 适用于多项式 $f(z)$ 且下列结论成立，

$$2pt-3q\leq 0 \implies 2pt\leq 3q \implies q\geq 0,\ p^2-r\leq 0 \implies p^2\leq r \implies r\geq 0,$$

$$-p^2t+2pq-s\leq 0 \implies s\geq p(2q-pt) \implies s\geq 0.$$

这表明所有常数均为非负。

(iv) A_4 的特征多项式为

$$f(z)=z^5-tz^4-4pz^3+(2pt-3q)z^2+(3p^2-2r)z-p^2t+2pq-s$$

常数 p、q、r、s、t 用 s_i 表示，其中 $i=1$、$2\ldots 5$ 利用（1）如下

$$p=\frac{s_2-s_1^2}{8},\quad q=\frac{4s_3-3s_1s_2-s_1^3}{36},\quad r=\frac{s_1^4+30s_1^2s_2-64s_1s_3-15s_2^2+48s_4}{384} \tag{8}$$

$$s=-\frac{s_1^5+110s_1^3s_2-400s_1^2s_3-255s_1s_2^2+720s_1s_4+400s_2s_3-576s_5}{2880},\quad t=s_1 \tag{9}$$

由于 $s_1\geq 0$ 且 $s_2-s_1^2\geq 0$. 由（8）和（9）可得，$s_1\geq 0 \implies t\geq 0$ 且 $s_2-s_1^2\geq 0 \implies p\geq 0$. 于是，引理 2.1 适用于多项式 $f(z)$ 且下列结论成立。

$$2pt-3q\leq 0 \implies 3q\geq 2pt \implies q\geq 0,\ 3p^2-r\leq 0 \implies 3p^2\leq r \implies r\geq 0,$$

$$-p^2t+2pq-s\leq 0 \implies s\geq p(2q-pt) \implies s\geq 0.$$

这显然意味着所有常数均为非负。

(v) A_5 的特征多项式为 $f(z)=z^5-tz^4-2pz^3-qz^2-2rz-s$. 常数 p、q、r、s、t 用 s_i 表示，其中 $i=1$、$2.....5$ 利用（1）可得如下结果

$$p=\frac{s_2-s_1^2}{8},\quad q=\frac{s_1^3+2s_3-3s_1s_2}{6},\quad r=\frac{6s_4+6s_1^2s_2-3s_2^2-s_1^4-8s_1s_3}{48} \tag{10}$$

$$s = \frac{24s_5 - 30s_1s_4 20(s_2s_3 - s_3s_1^2) - 10s_2s_1^3 + 15s_1s_2^2 + s_1^5}{120}, \quad t = s_1. \tag{11}$$

由于 $s_1 \geq 0$ 且 $s_2 - s_1^2 \geq 0$. 由（10）和（11）可得， $s_1 \geq 0 \implies t \geq 0$ 且 $s_2 - s_1^2 \geq 0 \implies p \geq 0$. 因此，引理2.1 适用于多项式 f（z）并且有如下结论，

$$-q \leq 0 \implies q \geq 0, \ -2r \leq 0 \implies r \geq 0, \ -s \leq 0 \implies s \geq 0.$$

由于所有常数 p, q, r, s 与 t 均为非负，故可采用结构为 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 的非负中心对称矩阵，用以实现 Δ. □

注 4.1. 若 $s_1 = 0$, 则谱 Δ 容许一个矩阵结构为 A_4.的非负托普利兹实现

注 4.2. 由于这些条件对于对称实现并非必要，逆命题不成立。例如，

(i) 考虑集合 $\Delta := \{10, 0, -1, -1 + 6i, -1 - 6i\}$. 对于 Δ的这一选取， $s_2 - s_1^2 = -18 < 0$。尽管如此，仍存在中心对称实现，如下：

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{53}{10} & \frac{7}{5} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{4626}{25} & 0 & \frac{7}{5} & 1 & 0 \\ \frac{695597}{1000} & 0 & 0 & \frac{7}{5} & 1 \\ \frac{9900378}{3125} & \frac{695597}{1000} & \frac{4626}{25} & \frac{53}{10} & \frac{7}{5} \end{bmatrix}$$

(ii) 考虑集合 $\Delta := \{9, -1+4i, -1-4i, -1+4i, -1-4i\}$. 于是， $s_2 - s_1^2 = -4 < 0$,但仍存在一个实现 Δ, 的非负中心对称矩阵，给出如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 144 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 448 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4352 & 448 & 144 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

注 4.3. 考虑集合 $\Delta := \{\delta, a + ib, a - ib, c + id, c - id\}$. 假设给定了 $a, c \leq 0$，则可以选择一个 δ 的值，使得 $s_1 = \delta + 2(a + c) \geq 0$，即 $\delta \geq -2(a + c)$。由 $s_2 - s_1^2 \geq 0$, 可得 $b^2 + d^2$ 的一个界，如下所示：

$$s_2 - s_1^2 \geq 0 \implies \delta^2 + 2(a^2 - b^2 + c^2 - d^2) - (\delta + 2a + 2c)^2 \geq 0$$

即,

$$0 \leq b^2 + d^2 \leq -2\delta(a + c) - 4ac - (a^2 + c^2).$$

例4.1。 给定 $a=-1,\ c=-2.$ 由于 $s_1 \geq 0$，可任取满足 $\delta \geq -2(a+c)$ 的 δ s。对于每个这样的 δ，可由不等式$s_2 - s_1^2 \geq 0$确定 b^2+d^2 的界。若 $\delta = -2(a+c) = 6$，则，

$$0 \leq b^2+d^2 \leq -2\delta(a+c) - 4ac - (a^2+c^2).$$

即，$0 \leq b^2+d^2 \leq 23.$ 取 $b=3$ 和 $d=2.$ 则，实现集合 $\{6, -1+3i, -1-3i, -2+2i, -2-2i\}$ 的次对称矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{281}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 980 & \frac{281}{2} & 50 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

下一个目标是推广定理4.1。Ricardo L. Soto 等人在 [14],中得到了存在 $n \times n$ 具有指定初等因子的逐项非负矩阵的条件。特别地，他们证明，$_n$多项式 $p(z) = x^n - \sum_{k=1} c_{k-1}x^{n-k}$的友矩阵与下列反对称矩阵相似，

$$P = \begin{bmatrix} p_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_1 & p_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & p_0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ p_{\frac{n-1}{2}} & 0 & 0 & \dots & p_0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{n-3} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ p_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \dots & p_0 & 1 \\ p_{n-1} & p_{n-2} & p_{n-3} & \cdots & p_{\frac{n-1}{2}} & p_{\frac{n+1}{2}} & \dots & p_1 & p_0 \end{bmatrix}.$$

他们的工作中一个有趣的结果是，友矩阵的非负性蕴含次对称矩阵的非负性。这一结果促使我们将定理推广到任意阶的情形 $n.$

定理4.2。 设 $\{\delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n\}$ 是一个由复数组成的列表，该列表在共轭运算下封闭，且实部非正；设 δ 为正实数。那么，当 $s_1 \geq 0$ 且 $s_2 - s_1^2 \geq 0.$ 时，列表$\Delta:= \{\delta, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n\}$ 可对称实现。

证明。 设 Δ 是次对称矩阵 P 的谱，其特征多项式为 $p(z) = z^n - a_1 z^{n-1} - a_2 z^{n-2} - \cdots - a_n.$与 $p(z)$ 对应的友矩阵为

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \end{bmatrix}.$$

的系数 $p(z)$ 可根据 s_i 利用（1）求得： $a_1 = s_1$， $a_2 = \frac{s_2 - s_1^2}{2}$. 由于假设表明 ~~$a_{n-1}$~~ 和 a_{n-2}均为非负数，对 引理 2.1 应用于$p(z)$ 可得 $a_i \geq 0$ 当 $i = 3$时，4，.....， n. 因此，友矩阵 C 是非负的。因此，对应的次对称矩阵 P 也是非负的。□

4.2. 五元素谱的次对称实现的充分条件

本节着重探讨如何建立一组五个复数可由非负次对称矩阵实现的充分条件。下面的定理指出，要实现这样的非负次对称实现，必须满足某些准则。

定理4.3. 设 $\Delta := \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_5\}$，且该集合关于复共轭封闭。那么，若满足以下条件， Δ 便可由非负次对称矩阵实现:

(a) $s_1 \geq 0$(b) $5s_2 - s_1^2 \geq 0$(c) $2s_1^3 - 15s_1s_2 + 25s_3 \geq 0$(d)
$2000s_4 + 730s_1^2s_2 - 73s_1^4 - 1600s_1s_3 - 625s_2^2 \geq 0$(e)
$394s_1^5 - 4925s_1^3s_2 + 12125s_1^2s_3 + 9375s_1s_2^2 - 22500s_1s_4 - 15625s_2s_3 + 22500s_5 \geq 0$

证明。 设 A 为与谱 Δ 对应的矩阵，其形式为

$$A = \begin{bmatrix} t & 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & t & 1 & 0 & 0 \\ q & p & t & 1 & 0 \\ r & q & p & t & 1 \\ s & r & q & p & t \end{bmatrix} \text{ where } p, q, r, s, t \in \mathbb{R}$$

且特征多项式为 $f(z) = z^5 - 5tz^4 + (-4p + 10t^2)z^3 + (12pt - 3q - 10t^3)z^2 + (3p^2 - 12pt^2 + 6qt - 2r + 5t^4)z + (2pq - 3p^2t + 4pt^3 - 3qt^2 + 2rt - s - t^5)$。常数 p, q, r, s, t 在 $i = 1, 2 \ldots 5$ 时由 s_i 利用 (1) 表示如下:

$$p = \frac{5s_2 - s_1^2}{40},\ q = \frac{2s_1^3 - 15s_1s_2 + 25s_3}{225},\ r = \frac{2000s_4 + 730s_1^2s_2 - 73s_1^4 - 1600s_1s_3 - 625s_2^2}{16000}$$

$$s=\frac{394s_1^5-4925s_1^3s_2+12125s_1^2s_3+9375s_1s_2^2-22500s_1s_4-15625s_2s_3+22500s_5}{112500},\ t=\frac{s_1}{5}.$$

上述常数的非负性保证了矩阵的非负性。还可以观察到，该矩阵既是次对称矩阵，也是托普利茨矩阵。至此，证明完毕。□

例 4.2. 设 $\Delta:=\{6,1+2i,1-2i,3+2i,3-2i\}$. 则相应的非负次对称实现矩阵为:

$$A=\begin{bmatrix}\frac{14}{5} & 1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{10} & \frac{14}{5} & 1 & 0 & 0\\ \frac{496}{75} & \frac{1}{10} & \frac{14}{5} & 1 & 0\\ \frac{4027}{1000} & \frac{496}{75} & \frac{1}{10} & \frac{14}{5} & 1\\ \frac{889888}{9375} & \frac{4027}{1000} & \frac{496}{75} & \frac{1}{10} & \frac{14}{5}\end{bmatrix}$$

例 4.3. 设 $\Delta:=\{8,2,1,2+2i,2-2i\}$. 则相应的非负次对称实现矩阵为:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0\\ \frac{46}{3} & 3 & 3 & 1 & 0\\ 56 & \frac{46}{3} & 3 & 3 & 1\\ 142 & 56 & \frac{46}{3} & 3 & 3\end{bmatrix}$$

注 4.4. 定理 4.3 中所述条件是充分条件，但不是必要条件。例如，考虑 $\Delta:=\{4,2,-3,-1+3i,-1-3i\}$. Δ 由于 $s=-\frac{614896}{3125}<0.$ 的值，因此它无法由定理中所述形式的矩阵实现。然而，它可以由另一个次对称矩阵实现，如下所示:

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 4\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 & 0\\ \frac{15\sqrt{15}}{8} & \frac{47}{8} & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{8} & \frac{15\sqrt{15}}{8} & 4\sqrt{2} & 0 & 0\end{bmatrix}$$

注 4.5. 在定理 4.3中，若 $s_1=0$，则五个复数构成的列表可实现为非负次对称矩阵的一个充分条件如下:

(i) $s_i\geq 0,\quad i=2,$

3。(ii) $16s_4-5s_2^2\geq 0$

(iii) $36s_5-25s_2s_3\geq 0$

5. 特征值扰动下的可实现性

本节中，我们固定所有实特征值，并求出为实现性所需的共轭特征值对虚部的界。此外，我们对集合施加扰动，以探究保持可实现性的其他条件。本文的研究方向受到 Guo 等人在 [1], 中的工作的启发；他们指出，有必要进一步研究复特征值虚部的变化。本文考虑两种情况：由四个复数构成的列表，其中 $s_1 = 0$；以及由五个复数组成的列表，其中一个元素的实部为正（佩龙特征值），其余元素的实部均为非正。

5.1. 给定的四个复数列表

考虑由以下四个复数构成的集合 $\Delta := \{a, b, c+id, c-id\}$ 其中 $s_1 = 0$，且a， b，c， $d \in \mathbb{R}.$ 那么，当 Δ 满足定理 2.2的条件时，它是可实现的。本节分析非实特征值 $c \pm id$的虚部 d 发生变化时，如何影响 Δ的可实现性。

(i) 实部不等于零：设 $\Delta := \{a, b, c+id, c-id\}$ 其中 $c \neq 0.$。注意， s_1 保持不变，而 s_2、 s_3 和 $4s_4 - s_2^2$ 取决于 $d.$

$$s_2 = a^2 + b^2 + 2(c^2 - d^2),\ s_3 = a^3 + b^3 + 2(c^3 - 3cd^2)$$
$$4s_4 - s_2^2 = 3(a^4 + b^4) - 2a^2b^2 + 4(c^4 + d^4) - 40c^2d^2 - 4(a^2 + b^2)(c^2 - d^2).$$

施加定理 2.2的条件后， d^2 的界如下所示。

$$s_2 \geq 0 \implies (a^2 + b^2) + 2(c^2 - d^2) \geq 0 \implies 0 \leq d^2 \leq c^2 + \frac{(a^2 + b^2)}{2} \tag{12}$$

由此得到 $d^2.$ 的上界

$$s_3 \geq 0 \implies (a^3 + b^3) + 2(c^3 - 3cd^2) \geq 0 \implies 3cd^2 \leq c^3 + \frac{(a^3 + b^3)}{2}. \tag{13}$$

根据 $c.$ 的符号，这可以为 d^2给出上界和下界。因此，若 $c > 0$

$$s_3 \geq 0 \implies d^2 \leq \frac{c^3 + (a^3 + b^3)/2}{3c} \tag{14}$$

且若 $c < 0$

$$s_3 \geq 0 \implies d^2 \geq \frac{c^3 + (a^3 + b^3)/2}{3c}. \tag{15}$$

第三个条件得出 $4s_4 - s_2^2 \geq 0$ 由此可知，

$$4d^4 + 4(a^2 + b^2 - 10c^2)d^2 + 3a^4 + 3b^4 - 2a^2b^2 + 4c^4 - 4(a^2 + b^2)c^2 \geq 0. \tag{16}$$

可以将其视为关于 d^2 的二次方程。

$$f(d^2) = 4d^4 + 4(a^2 + b^2 - 10c^2)d^2 + (3a^4 + 3b^4 - 2a^2b^2 + 4c^4 - 4(a^2 + b^2)c^2).$$

这个二次方程的非负性完全取决于其判别式的符号。鉴于判别式可能为正或为负，因此必须分别考察这两种情况。

(a) 若判别式为负，则对每个实数 d，$f(d^2) > 0$。(b) 若判别式为正，则该二次方程有两个实根 d_1 和 d_2。由于首项系数为正，方程 $f(d^2)$ 在区间 (d_1, d_2).之外非负。

因此，我们得到了 d^2 的取值范围，进而得到 d 的取值范围，其中a、b 和 c 为固定值。

(ii) **实部等于零**：令 $\Delta := \{a, b, id, -id\}$. 注意，在这种情况下，$s_1$ 和 s_3 都不依赖于 d。由于 $s_1 = 0$，可得 $a = -b$。因此，$s_2 = 2a^2 - 2d^2$ 且 $4s_4 - s_2^2 = 4d^4 + 8a^2d^2 + 4a^4$. 此外，$4s_4 - s_2^2$始终非负，根据定理 2.2 ，$d$的界为：

$$s_2 \geq 0 \implies 2a^2 - 2d^2 \geq 0 \implies |d| \leq a. \tag{17}$$

在这种情况下，可根据 a 得到 d 的上界。

例 5.1. 根据前面的讨论，d 在 $a = 4$，$b = -2$，$c = -1$ 条件下的取值范围为，

$$0 \leq d \leq \sqrt{11}.$$

例 5.2. 对于 $a = 3$，$b = -3$ 和 $c = 0$，d 的取值范围为 $|d| \leq 3$.

这一观察得出一项重要结论：复特征值的虚部不能任意扰动；虚部存在一个特定的界限，在此范围内集合仍然可实现。因此，必须考虑实特征值的变化，以确保扰动集的可实现性。随后，我们将考察在此类变化下保持可实现性所需的条件，并在下文给出相应的定理。

定理 5.1. 若 $\Delta := \{a, b, c+id, c-id\}$ 是一个可实现列表，其中 a 是佩龙根，且 $s_1(\Delta) = 0$ 和 $a-b-2d \geq 0$，则对于每个 $t > 0$，扰动集 $\Delta' := \{a+t, b-t, c+i(d-t)\ c-i(d-t)\}$ 也可实现。

证明。 假设 $s_1(\Delta) = 0 = s_1(\Delta')$ 使得 $c = -\frac{(a+b)}{2}$. 由于 Δ 是由四个复数组成的可实现列表，且满足 $s_1(\Delta) = 0$ 因此它满足定理 2.2 的条件，即：

$$s_2(\Delta) \geq 0,\ s_3(\Delta) \geq 0,\ 4s_4(\Delta) - s_2(\Delta)^2 \geq 0.$$

注意， Δ' 可实现当且仅当

$$s_2(\Delta') \geq 0,\ s_3(\Delta') \geq 0,\ 4s_4(\Delta') - s_2(\Delta')^2 \geq 0.$$

Δ' 关于 Δ的矩为，

$$s_2(\Delta') = s_2(\Delta) + 2t(a-b+2d),\ s_3(\Delta') = s_3(\Delta) + 6t^2(a+b) + 3t(a+b)(a-b-2d)$$

$$4s_4(\Delta') - s_2(\Delta')^2 = (4s_4(\Delta) - s_2(\Delta)^2) + 16t^4 + 16t^3(a-b-2d) + 8t^2\big((a-b-d)^2 + 3d^2\big) + t\Big((a-b)(10a^2+12ab+10b^2+8d^2) + d\left[12(a^2+ab+b^2) + 28ab - 16d^2\right]\Big).$$

假设 $b \geq 0$。根据假设，显然 $s_2(\Delta') \geq 0$ 且 $s_3(\Delta') \geq 0$。由于 t^4， t^3 和 t^2 的系数均为非负，为了使 $4s_4(\Delta') - s_2(\Delta')^2$. 具有非负性，我们需要 t 的系数也为非负。注意， $s_2(\Delta) = \frac{3}{2}(a^2+b^2) + ab - 2d^2 \geq 0$ 这意味着 $12(a^2+ab+b^2)+28ab-16d^2 \geq 0$ 因此， $4s_4(\Delta') - s_2(\Delta')^2 \geq 0$.这表明，只要 $b \geq 0.$ ， Δ' 就可实现。如果扰动 t 大于 b，那么对于 $b < 0.$ □， Δ' 可实现

推论 5.1. 设 $\Delta := \{a, b, c+id, c-id\}$ 是一个可实现列表，其中 a 是佩龙根，且 $s_1 = 0$ 和 $a - b - 2d < 0.$。那么，对于所有 $t \geq (b+2d-a)\,4$，扰动集 Δ': $= \{a+t, b-t, c+i(d-t)\ c-i(d-t)\}$ 也是可实现的。

5.2. 给定的五个复数列表

对于由五个复数组成的列表，其谱可能包含一对共轭复特征值，也可能包含两对共轭复特征值。因此，可按如下方式将其分为两类。

(i) 考虑集合 $\Delta := \{\delta, a_1 + ib_1, a_1 - ib_1, a_2 + ib_2, a_2 - ib_2\}$，其中 δ 是佩龙根，且 $a_i \leq 0.$。该集合由两对共轭复特征值组成。如果 Δ 可实现，则它满足定理 2.4 的条件。目标是根据 δ 和 a_i 确定 $(b_1^2 + b_2^2)$ 的取值范围，使所得集合可实现。 σ 中元素之和为 $s_1 = \delta + 2(a_1 + a_2)$，该值不依赖于 b_1 和 $b_2.$。由于 Δ 可实现当且仅当 $s_1 \geq 0$，选取 a_1 和 a_2，使得$\delta + 2(a_1 + a_2) \geq 0.$。定理所蕴含的其余约束为

$$s_2 = \delta^2 + (a_1+ib_1)^2 + (a_1-ib_1)^2 + (a_2+ib_2)^2 + (a_2-ib_2)^2 = \delta^2 + 2(a_1^2+a_2^2-b_1^2-b_2^2) \geq 0$$

即，

$$b_1^2 + b_2^2 \leq \frac{\delta^2 + 2(a_1^2+a_2^2)}{2} \tag{18}$$

且 $5s_2 - s_1^2 = 6(a_1^2 + a_2^2) + 4\delta^2 - 10(b_1^2 + b_2^2) - 4\delta(a_1 + a_2) \geq 0$ 即,

$$b_1^2 + b_2^2 \leq \frac{6(a_1^2 + a_2^2) + 4\delta^2 - 4\delta(a_1 + a_2)}{10}. \tag{19}$$

利用（18）和（19）， $b_1^2 + b_2^2$ 的界为

$$0 \leq b_1^2 + b_2^2 \leq \min\left\{\frac{\delta^2 + 2(a_1^2 + a_2^2)}{2}, \frac{6(a_1^2 + a_2^2) + 4\delta^2 - 4\delta(a_1 + a_2)}{10}\right\}. \tag{20}$$

若 $s_1 = 0$ 有 $\delta = -2$（$a_1 + a_2$），则（20）为

$$0 \leq b_1^2 + b_2^2 \leq 3a_1^2 + 3a_2^2 + 4a_1a_2.$$

一般而言，考虑可实现集合 $\Delta := \{\delta, a_1 + ib_1, a_1 - ib_1, a_2 + ib_2, a_2 - ib_2$、……、$a_m + ib_m$、$a_m - ib_m\}$，其基数为 $|\Delta| = 2m + 1$，且每个 $a_i \leq 0$.。目标是确定 $\sum b_i^2$ 的允许界，方法是固定 δ 和 a_i，对所有 $_{i=1}i = 1$，2、……、m.。由于 Δ 可实现， $k = 1$，2 的矩 s_k 满足

$$\begin{aligned}
s_1 &= \delta + 2\sum_{i=1}^{m} a_i \geq 0 \\
s_2 &= \delta^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{m} a_i^2 - \sum_{i=1}^{m} b_i^2\right) \geq 0 \\
(2m+1)s_2 - s_1^2 &= (2m+1)\left(\delta^2 + 2\sum_{i=1}^{m} a_i^2 - 2\sum_{i=1}^{m} b_i^2\right) - \left(\delta + 2\sum_{i=1}^{m} a_i\right)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

$_m$由这些不等式可得 $\sum b_i^2$ 的界为$_{i=1}$

$$0 \leq \sum_{i=1}^{m} b_i^2 \leq \min\left\{\frac{m\delta^2 - 2\delta\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right) - 2\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)^2 + (2m+1)\sum_{i=1}^{m} a_i^2}{2m+1}, \frac{\delta^2 + 2\sum_{i=1}^{m} a_i^2}{2}\right\}$$

例 5.3。 对于集合 $\Delta := \{4, -1 + ib, -1 - ib, -1 + id, -1 - id\}$，其中 $s_1 = 0$，我们有 $0 \leq b^2 + d^2 \leq 10$.

$$(b, d) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 10\}.$$

（ii）考虑集合 $\Delta : = \{\delta, a_1, a_2, a_3 + ib_3, a_3 - ib_3\}$ 由五个复数组成，其中仅出现一个共轭复数对。 δ 是佩龙根，且 $a_i \leq 0$. 我们来确定 b_3 的取值范围，使得 Δ 可实现。假设 Δ 可实现，则它满足定理 2.4的条件，如下所示 $s_1 \geq 0$， $s_2 \geq 0$，$5s_2 - s_1^2 \geq 0$. 该

不等式

$$s_1 \geq 0 \implies \delta + a_1 + a_2 + 2a_3 \geq 0$$

它与 b_3.无关

$$\begin{aligned} s_2 \geq 0 &\implies \delta^2 + a_1^2 + a_2^2 + (a_3 + ib_3)^2 + (a_3 - ib_3)^2 \geq 0 \\ &\implies b_3^2 \leq \frac{\delta^2 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_3^2}{2}. \end{aligned}$$

$5s_2 - s_1^2$的非负性意味着， $5\delta^2 + a_1^2 + a_2^2 + 2(a_3^2 - b_3^2) - (\delta + a_1 + a_2 + 2a_3)^2 \geq 0$.因此，

$$b_3^2 \leq \frac{4(\delta^2 + a_1^2 + a_2^2) + 6a_3^2 - 2(\delta a_1 + \delta a_2 + a_1 a_2) - 4a_3(\delta + a_1 + a_2)}{10}.$$

因此， b_3 的上界为 $M_1 := \sqrt{4_{(\delta^2+a_1^2+a_2^2)+6a_3^2-2(\delta a_1+\delta a_2+a_1a_2)-4a_3(\delta+a_1+a_2)\ 10}}$以及 $M_2 := \sqrt{\frac{\delta^2+a_1^2+a_2^2+2a_3^2}{2}}$ b_3的可行范围因此为 $|b_3| \leq \min\{M_1, M_2\}$.

例 5.4. 考虑 $\Delta := \{8, -3, -1, -1 + ib_3, -1 - ib_3\}$， 其中 $s_1 = 2$. 上界为 $M_1 = \sqrt{38}$ 和 $M_2 = \sqrt{\frac{188}{5}}$. d 的上界为 $|b_3| \leq \sqrt{\frac{188}{5}}$

根据上述分析可以看出，在保持其他特征值不变的情况下，将虚部扰动至一定范围内，会得到一个可实现谱。另一个值得考虑的问题是，当谱沿相反方向扰动，并同时减小一对共轭复数对的虚部时，可实现性是否仍能保持。下面的定理将对此进行讨论。

定理 5.2. 设 $\Delta := \{\delta, a, b, c+id, c-id\}$ 是一个可实现列表，其中 δ 是佩龙根，且 a 和 b 非正。那么，对于每个 $t > 0.$，扰动集 $\Delta' := \{\delta+t, a-t, b, c+i(d-t)\ c-i(d-t)\}$也是可实现的

证明。由于 Δ 可实现，它满足定理 2.4 的条件。因此， $s_1(\Delta) \geq 0$, $s_2(\Delta) \geq 0$, $5s_2(\Delta) - s_1(\Delta)^2 \geq 0$. 注意， $s_1(\Delta) = s_1(\Delta')$。因此， Δ' 可实现，当且仅当 $s_2(\Delta') \geq 0$, $5s_2(\Delta') - s_1(\Delta')^2 \geq 0$. 将这些不等式用 Δ 的矩表示，得到:

$$s_2(\Delta') = s_2(\Delta) + 2t(\delta - a + 2d)$$

$$5s_2(\Delta') - s_1(\Delta')^2 = 5s_2(\Delta) - s_1(\Delta)^2 + 10(\delta - a + 2d).$$

由于根据假设这些数都是非负的，因此对于所有 $t \geq 0.$， Δ' 都是可实现的 □

假设有两对复特征值共轭对，可以对实部和虚部以及佩龙根进行扰动。以下定理给出了相应的扰动结果。

定理 5.3. 设 $\Delta := \{\delta, a+ib, a-ib, c+id, c-id\}$ 是一个可实现列表，其中 δ 是佩龙根，且 a 和 b 均为非正数。那么，对于每个 $t > 0.$，扰动集 $\Delta' := \{\delta + 2t, (a-t) + i(b-t), (a-t) - i(b-t)\ c+id, c-id\}$ 也是可实现的

证明。 这可由与定理 5.2的证明相同的论证得到。 s_2 和 $5s_2 - s_1^2$ 的 Δ' 表达式如下：

$$s_2(\Delta') = s_2(\Delta) + 4(t^2 + t(\delta - a + b))$$
$$5s_2(\Delta') - s_1(\Delta')^2 = (5s_2(\Delta) - s_1(\Delta)^2) + 20(t^2 + t(\delta - a + b))$$

根据假设，二者均为非负。因此，对于所有 $t > 0.$ □， Δ' 都是可实现的

一般而言，上述结果可扩展到这样的 n 值：其中一个元素具有正实部（佩龙特征值），其余所有元素具有非正实部，具体如下：

定理 5.4。 令 $\Delta : = \{\delta, a_1 + ib_1, a_1 - ib_1, a_2 + ib_2, a_2 - ib_2, \ldots, a_m + ib_m, a_m - ib_m\}$其中 δ 是佩龙根，且当 $i = 1$、2、……、$m.$ 时， $a_i \leq 0$ 。那么，扰动集 $\Delta' : = \{\delta + 2t, a_1 + ib_1, a_1 - ib_1, a_2 + ib_2, a_2 - ib_2, \ldots,$ $(a_k - t) + i\ (b_k - t)$ 、 $(a_k - t) - i\ (b_k - t)$ ……、 $a_m + ib_m$、 $a_m - ib_m\}$ 对任意 k 以及所有 $t \geq 0.$ 也都是可实现的

证明。 证明采用与定理 5.2相同的方法。相应的 s_2 和 $5s_2 - s_1^2$ 的 Δ' 表达式如下：

$$s_2(\Delta') = s_2(\Delta) + 4(t^2 + t(\delta - a_k + b_k))$$
$$(2m+1)s_2(\Delta') - s_1(\Delta')^2 = ((2m+1)s_2(\Delta) - s_1(\Delta)^2) + 4(2m+1)(t^2 + t(\delta - a_k + b_k)).$$

根据假设，两者均为非负数，因此对于所有 $t > 0.$， Δ' 均可实现 □

6. 结论

总而言之，本文所述结果主要揭示了对于和为零的五个复数列表，非负逆特征值问题（NIEP）与次对称非负逆特征值问题（PNIEP）之间的等价性。此外，本文还建立了一个充分条件：当给定的复数列表满足某些条件时，存在一个与该列表对应的非负次对称矩阵。本文还证明了另一个充分条件，用以保证存在一个可实现五个复数列表的非负次对称矩阵。本文还详细研究了复特征值虚部的取值范围，并探讨了该分量的小扰动如何影响谱的可实现性。此外，本文还针对复特征值虚部发生变化的情形建立了扰动结果。

参考文献

[1] Siwen Guo、Wuwen Guo，《非负实矩阵非实特征值的扰动》，《线性代数及其应用》第426卷第1期，2007年，第199–203页，ISSN 0024-3795。[2] R. A. Horn、C. R. Johnson，《矩阵分析》，剑桥大学出版社，剑桥，1990年。1985年原版的更正重印本。[3] C. R. Johnson，《与双随机矩阵相似的行随机矩阵》，《线性与多重线性代数》10（2）（1981），113–130。[4] Johnson、C. R.、Marijuán、C.、Paparella、P.、Pisonero、M.（2018）。《非负逆特征值问题》。载于《算子理论、算子代数与矩阵理论》（第199–220页）。沙姆：施普林格国际出版公司。[5] Ana I. Julio、Valeria Collants 和 Roberto C. Díaz。《低维情形下的次对称非负逆特征值问题》。《线性代数及其应用》690（2024）：142–161。[6] Ana I. Julio、Ricardo L. Soto，《次对称与双对称非负逆特征值问题》，《线性代数及其应用》第469卷，2015年，第130–152页，ISSN 0024-3795。[7] A. N. Kolmogorov，《具有可数个可能状态的马尔可夫链》，《莫斯科国立大学数学与力学通报》1(3)（1937），1–16。[8] Thomas J. Laffey、Eleanor Meehan，《迹为零的非负5×5 矩阵的刻画》，《线性代数及其应用》第302–303卷，1999年。[9] T.J. Laffey、E. Meehan，《迹为零的非负 5×5 矩阵的刻画》，《线性代数及其应用》302/303（1999），295–302。[10] T.J. Laffey、H. Šmigoc，《具有负实部特征值谱的非负实现》，《线性代数及其应用》416（2006），148–159。[11] R. Loewy、D. London，《关于非负矩阵逆问题的注记》，《线性与多重线性代数》6（1978），83–90。[12] E. Meehan，《关于矩阵谱的一些结果》，博士论文，爱尔兰国立大学都柏林分校，1998年。[13] Robert Reams（1996），《非负矩阵的不等式与逆特征值问题》，《线性与多重线性代数》41：4，367–375。

[14] Ricardo L. Soto, Ana I. Julio, Mario Salas, 《具有指定初等因子的非负中心对称矩阵》, 《线性代数及其应用》, 第 483 卷, 2015 年, 第 139-157 页, ISSN 0024-3795。[15] K. R. Suleimanova, 《具有实特征值的随机矩阵》, 《苏联科学院通报》, 66（1949）, 343-345。[16]J. Torre-Mayo, M.R. Abril-Raymundo, E. Alarcia-Estévez, C. Marijuán, M. Pisonero, 《基于特征多项式系数的非负逆特征值问题：EBL 有向图》, 《线性代数及其应用》426（2007）729-773。