$\mathbb{P}^3$上切丛层不稳定的分布

Pedro Pfarrius Barbassa

arXiv:2602.20831v1 [math.AG] 24 Feb 2026

摘要

我们研究三维射影空间上的余维一分布，重点考察其切层非分裂且不稳定的情形。我们将非稳定阶数与诱导的曲线子叶状结构的次数联系起来，并证明非稳定阶数有界。此外，我们对容许次数为 1 的曲线子叶状结构的余维一分布的切层进行分类。换言之，在假设该层非分裂的情况下，我们对切层达到最大可能非稳定阶数的情形进行分类。

目录

1 引言 **1**

2 预备知识 **3**
2.1 光滑簇上的分布与叶状结构.3 2.2 自反层的稳定性与非稳定性.5

3 分布与叶状结构 $\mathbb{P}^3$ **6**
3.1 $\mathbb{P}^3$ 上的曲线叶状结构.6 3.2 $\mathbb{P}^3$ 上的余维一分布.7

4 切层不稳定的余维一分布 13

5 结语 17

1 引言

光滑复代数簇 X 上的分布是TX 的一个子层，其商层是无挠层。分布的奇点是商层不再局部自由的点。叶状结构是这类对象中的一种，它们是在 Frobenius 意义下可积的分布。叶状结构理论是代数几何中一个广阔的领域，存在许多不同的观点；参见 [1–3, 20]。

在论文 [5], 中，作者证明了关于 $\mathbb{P}^3$上的余维一分布和叶状结构的若干结果，揭示了切层的性质与其奇异概形之间的联系。他们还给出了分布族的一个等价定义，并构造了相应的精细模空间，将其与 [25]中建立的模空间进行了比较。一个重要观察是，分布的模空间并不要求切层具有稳定性。他们进一步确立了分布不能成为叶状结构的条件。后来， [6], 在更一般的情形下发展了这些障碍，并证明在某些条件下，叶状结构的奇异概形中的高维分支是连通的，而射影空间上的叶状结构满足这些条件。

与 [14], 一同，文献给出了 $\mathbb{P}^3$ 上次数为$d \leq 2$的余维一分布的切层的完整分类。在这些情形下，切层是分裂的，或者至少是 μ-半稳定的，因此不分裂的不稳定层只会出现在更高次数中。事实上，当允许 $\mathscr{F}$ 的次数为$d \geq 3$ 且切层具有一个整体截面时，不稳定层会自然出现。在这种情况下，切层要么分裂，要么是不稳定的。

$\mathbb{P}^3$ 上的不稳定自反层曾在 [26], 中进行研究，作者在文中定义了一种称为非稳定阶数的新不变量。我们将把这一概念应用于 $\mathbb{P}^3$上余维一分布的切层。

本文继续研究 $\mathbb{P}^3$上的余维一分布，重点关注切层不稳定的情形。为了衡量稳定性，我们考虑使切层存在整体截面的最小值$t_{\mathscr{F}}$，如定义 3.4 所述。这个值也是该分布所允许的曲线子叶状结构的最小次数。下文将证明，这种子叶状结构会对余维一分布施加数值条件。我们可以将余维一分布切层的不稳定性与$t_{\mathscr{F}}$的较小取值联系起来。换言之，我们证明以下结果。

引理 (4.1)**.** 设 $\mathscr{F}$ 是 $\mathbb{P}^3$ 上次数为 d 的余维一分布，且 $T_{\mathscr{F}}$ 是非分裂的。那么，$T_{\mathscr{F}}$ 不稳定，当且仅当 $d \geq 3$ 且

$$1 \leq t_{\mathscr{F}} \leq \frac{d-2+\varepsilon}{2},$$

w此处 $\varepsilon \in \{0,1\}$和 $\varepsilon \equiv d$(模 2)。此外，$T_{\mathscr{F}}$将是不稳定的，阶数为 $d \ \frac{+\varepsilon}{2} - t_{\mathscr{F}}$.

利用低次数曲线叶状结构的分类，我们在命题 3.8 中对每个满足$t_{\mathscr{F}} = 1$ 的余维一分布的切层进行了完整分类。换言之，结合推论 3.6，我们对所有满足$H^0(T_{\mathscr{F}}) \neq 0$的余维一分布的切层进行了分类。当允许次数$d \geq 3$时，这类余维一分布的切层要么是分裂的，要么是不稳定的，且具有尽可能大的阶数。

主定理(4.2)。 设 $\mathscr{F}$ 是一个次数为 d 的余维一分布，定义在 $\mathbb{P}^3$ 上，且 $T_{\mathscr{F}}$ 非分裂且不稳定，具有尽可能大的阶数。那么 $d \geq 3$ 并且

1. $T_{\mathscr{F}}$的陈类为$(2-d, 1, d)$，由直线的扩张生成；奇点$_1(\mathscr{F})$是一条次数为 d^2+1、亏格为 $p_a = d(d-1)^2$ 的曲线，并且奇点$_0(\mathscr{F})$ 由 d 个共线点组成；或者 *2.* $T_{\mathscr{F}}$的陈类为$(2-d, 2, 2d)$，由一对异面直线的扩张（或一条亏格为 *-1* 的双直线）生成；奇点$_1(\mathscr{F})$ 是一条次数为 d^2 的曲线（完全交），并且奇点$_0(\mathscr{F})$由两组各含 d 个共线点组成（或双直线上的 d 个共线点）。

我们证明，第1项中每一个由直线的扩张生成的自反层，都是某个余维一分布的切层。对于第2项中的那些，我们无法保证这种存在性，但我们给出一个齐次1-形式的显式例子，它恰好在所规定的奇异概形上消失。

本文组织如下。在第2节中，我们回顾关于 $\mathbb{P}^n$上分布及自反层稳定性的基本定义和结果。在第3节中，我们着重研究 $\mathbb{P}^3$上的余维一分布，强调其子叶状结构如何对切层施加数值条件。我们还对存在次数为 0 和 1 的曲线子叶状结构的余维一分布进行分类。在第4节中，我们将这些数值条件与切层的不稳定性联系起来。

2 预备知识

2.1 光滑簇上的分布与叶状结构

关于这一主题的完整论述可见 [5]。这里，我们只陈述理解主要结果证明所需的定义。对于不熟悉代数几何基本概念的读者，我们推荐阅读 [15]。下文中，X 是一个维数为n的光滑复射影簇。

定义 2. **1.** X 上余维为 r 的（奇异）分布 $\mathscr{F}$ 由一个正合列给出

$$0 \longrightarrow T_{\mathscr{F}} \xrightarrow{\phi} TX \longrightarrow N_{\mathscr{F}} \longrightarrow 0, \tag{1}$$

其中 $T_{\mathscr{F}}$ 是秩为 $n-r$ 的自反层，而 $N_{\mathscr{F}}$ 是秩为 r 的无挠层，分别称为 $\mathscr{F}$的切层与正规层。

$\mathscr{F}$ 的奇异概形是正规层的茎不是局部环上的自由模的那些点，

$$\mathrm{Sing}(\mathscr{F}) = \mathrm{Sing}(N_{\mathscr{F}}) := \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathrm{Supp}(\mathscr{E}xt^i(N_{\mathscr{F}}, \mathscr{O}_X)).$$

换言之，Sing($\mathscr{F}$) 是$N_{\mathscr{F}}$不是局部自由的点。由于$N_{\mathscr{F}}$至少是无挠的，根据 [24, 引理 1.1.8.]，Sing($\mathscr{F}$) 是X中余维至少为 2 的子概形。

注： 若分布 $\mathscr{F}$ 没有奇点，即Sing($\mathscr{F}$) $= /0$，则称其为正则分布。注意，这等价于正规层 $N_{\mathscr{F}}$ 是局部自由的。

通过取最高外幂，式 (1) 中定义的态射 $\phi : T_{\mathscr{F}} \hookrightarrow \mathrm{T}\mathbb{P}^3$ 生成一个整体截面

$$\omega_{\mathscr{F}} \in H^0\big(X, \bigwedge^{n-r} TX \otimes \det(T_{\mathscr{F}})^\vee\big) = H^0\big(X, \Omega_X^r \otimes \det(TX) \otimes \det(T_{\mathscr{F}})^\vee\big). \tag{2}$$

若存在层同构$T_{\mathscr{F}} \xrightarrow{\sim} T_{\mathscr{F}'}$使得图表交换，则称两个分布 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F}'$ 同构

$$\begin{array}{ccc} T_{\mathscr{F}} & \xhookrightarrow{\phi} & TX \\ \downarrow\wr & & \| \\ T_{\mathscr{F}'} & \xhookrightarrow{\phi'} & TX \end{array}$$

根据此定义，同构分布定义式 (2) 中的倍数截面，因此，每个余维为r 的分布的同构类都定义了一个元素

$$\mathbb{P}\big(H^0\big(X, \bigwedge^{n-r} TX \otimes \det(T_{\mathscr{F}})^\vee\big)\big) = \mathbb{P}\big(H^0\big(X, \Omega_X^r \otimes \det(TX) \otimes \det(T_{\mathscr{F}})^\vee\big)\big). \tag{3}$$

如果一个分布满足 $[\phi(T_{\mathscr{F}})\ \phi(T_{\mathscr{F}})] \subset \phi(T_{\mathscr{F}})$，则称其为闭合的。在这种情况下，根据弗罗贝尼乌斯定理，该分布可积，也就是说它与某个叶状结构相切。当分布可积时，我们就简称它为叶状结构。

注。 一维分布必定是叶状结构，因为它在局部由一个向量场生成，且其李括号在局部为 0。我们称一维分布为曲线叶状结构。

叶状结构理论中的一个重要问题是叶状结构空间不可约分支的分类，也就是 (3) 中具有可积截面的扎里斯基开子集。在射影空间上，一些作者已经对余维一叶状结构进行了分类，例如 [19] 针对次数 0、 1, [7] 针对二次，以及 [8] 对三次的部分分类。

反过来，整体截面 $\omega \in H^0(X\ \Omega^r_X \otimes \mathscr{L})$ 且 $\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}(X)$ 定义了r 余维分布于X 上，如果:

- 余维$(\mathrm{Sing}\ (\omega))\ \geq 2$;
- 对于开集$U\ \subset X$ 以及任意$p\ \in U\ \backslash \mathrm{Sing}(\omega)$，存在$p\ \in V\ \subset U$ 的一个邻域和 1-形式 $\eta_1,\ldots,\eta_r$，定义在V上，使得

$$\omega\ |_V = \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_r.$$

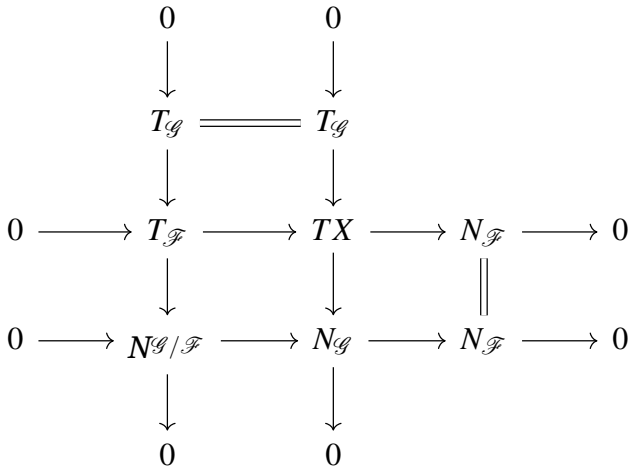
- ω 当且仅当.....时定义了一个叶状结构

$$d\eta_j \wedge \eta_1 \cdots \wedge \eta_r = 0,\ \text{for all}\ \ j = 1,\ldots,r.$$

正如我们将在射影空间中看到的，子分布这一概念为转换不同余维的分布分类提供了一个有用的框架。

定义 2.2。 设 $\mathscr{F}$ 是 X 上一个余维为 r 的分布。 $\mathscr{F}$ 的子分布 $\mathscr{G}$ 是一个余维为 $r'\ (\ > r)$ 的分布，其切层 $T_{\mathscr{G}}$ 是 $T_{\mathscr{F}}$ 的子层。

商$N^{\mathscr{G}/\mathscr{F}} := T_{\mathscr{F}}/T_{\mathscr{G}}$称为相对法层，并利用交换图



相对法层满足如下正合列

$$0 \longrightarrow N_{\mathscr{G}/\mathscr{F}} \longrightarrow N_{\mathscr{G}} \longrightarrow N_{\mathscr{F}} \longrightarrow 0,$$

这表明$N^{\mathscr{G}/\mathscr{F}}$是秩为$r'-r$的无挠层。若 $\mathscr{G}$ 是叶状结构，则称其为子叶状结构。

注。 当 $\mathscr{F}$ 不是曲线叶状结构时，$H^0(X, T_{\mathscr{F}} \otimes \mathscr{L})$ 中一个非零整体截面$\mathscr{L} \in$ 皮卡群(X)定义了一个曲线子叶状结构，其切层为 $\mathscr{L}^\vee$。

最后，我们简要介绍XX上分布的模空间。固定一个有理多项式$P \in \mathbb{Q}[t]$ ，并考虑函子

$$Dist_X^P(S) := \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{F},\phi)\ |\ \text{such that } \mathbf{F} \xrightarrow{\phi} TX_S \text{ is a flat family of} \\ \qquad\qquad \text{distributions, with } \chi(\mathbf{F}|_s(t)) = P(t), \forall\ s \in S \end{array} \right\} / \sim .$$

作者在 [5, 命题 2.4.]中证明，该函子可由一个拟射影概形$D^P(X)$表示。因此，我们有一个函子性同构

$$Dist_X^P(-) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(-, D^P(X)).$$

概形 $D^P(X)$ 定义为 $\mathrm{Quot}^{P_{TX}-P}(TX)$ 的开子集，其点参数化了 TX 的无挠商。此构造并未对与分布族相关联的切层施加任何稳定性条件。

2.2 自反层的稳定性与非稳定性

层的稳定性是代数几何中的一个基本概念，而稳定层是层论的构建基石。然而，当对层施加额外结构（例如要求其为某个分布的切层）时，无法保证其稳定性。斜率稳定性要求在代数簇上选定一种极化；不过，由于我们将在射影空间上开展研究，极化是典范的。

定义2.3。 设 F 是 $\mathbb{P}^n$ 上的无挠层。若对于每一个真相干子层 $F' \subset F$，满足 $0 <$秩（F'） $<$ 秩（F），则称 F 是 μ-稳定的（分别为 μ-半稳定的），我们有

$$\mu(F') < \mu(F),$$

（分别为 $\leq$），其中 $\mu = c_1/$秩 是该层的斜率。

注。 在本文中，我们研究 $\mathbb{P}^3$上的秩二自反层。在此背景下，斜率稳定性等价于 *Gieseker*稳定性；由于斜率稳定性是一个数值条件，我们将重点讨论这一概念。由于无需明确稳定性的类型，我们将简单地称一个层为稳定的。关于 *Gieseker*稳定性的完整论述，推荐参阅 *[18]*。

利用自反层的归一化，可以用一个简单判据验证自反层的稳定性。设 F 是 $\mathbb{P}^n$上的秩二自反层，F 的归一化定义为

$$F_\eta = \begin{cases} F(-c_1(F)/2), \text{ if } c_1 \text{ is even}, \\ F(-(c_1+1)/2), \text{ if } c_1 \text{ is odd}, \end{cases}$$

其中 $F(d) = F \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$。我们称层 F是归一化的，若 $F = F\eta$。注意，归一化后的第一陈类为 0 或 -1。由于对每个 $d \in \mathbb{Z}$，F 稳定当且仅当 $F(d)$ 稳定，因此 F 稳定当且仅当 $F\eta$ 稳定。

引理 2.4 ([16]). 设 F 是 $\mathbb{P}^n$ 上的秩二自反层。那么，F 稳定当且仅当 $H^0(F\eta) = 0$。若 c_1 为偶数，则 F μ-半稳定当且仅当 $H^0(F\eta(-1)) = 0$。

称一个自反层不稳定，也就是说它不满足定义2.3，换言之，它甚至不是 μ-半稳定的。由于这等价于不满足上述引理，我们将采用一种新不变量的定义，该不变量最早在 [26] 中提出。

定义 2.5。 设 F 是 $\mathbb{P}^n$ 上的一个秩二反身层。若存在一个具有如下极大性质的正整数 r，则称 F 是非稳定阶数为 r 的不稳定层

$$H^0((F_\eta)^\vee(-r)) \neq 0.$$

我们称 r 为层 F 的非稳定阶数。由此立即可得，若 $r = 0$，则当 F 的 c_1 为奇数时，F 是稳定的；当 c_1 为偶数时，F 是严格 μ-半稳定的。因此，当我们假设一个自反层是不稳定的时，便假设 $r > 0$。

r 的极大性质意味着，截面 $\sigma \in H^0((F\eta)^\vee(-r))$ 在 $\mathbb{P}^3$ 的某个纯一维科恩-麦考利子概形中消失。事实上，令 $n := \min\{k \in \mathbb{Z} \mid H^0(F(k)) \neq 0\}$，并取$\sigma \in H^0(F(n))$ 的一个非零截面。假设余核(σ) 有挠，且 $T(\sigma)$ 是其最大挠子层。那么我们便得到正合列

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(k) \longrightarrow F(n) \longrightarrow T(\sigma)/\mathrm{coker}(\sigma) \longrightarrow 0.$$

但这将是荒谬的，因为 $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3} \hookrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(k)$ 意味着 $k > 0$，于是 $H^0(F(n-k)) = 0$。回到原来的截面 $\sigma \in H^0((F\eta)^\vee(-r))$，我们有正合列

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3} \xrightarrow{\sigma} (F_\eta)^\vee(-r) \longrightarrow \mathscr{I}_Y(-r - c_1(F_\eta)) \longrightarrow 0.$$

其中Y是一个纯一维的科恩-麦考利子概形，由 $\mathbb{P}^3$ 上 σ 的零点定义。我们称Y为与层F相关联的曲线。注意，假设$r > 0$，则空间$H^0((F\eta)^\vee(-r))$是一维的。

3 $\mathbb{P}^3$上的分布与叶状结构

在这里，我们将上一节的定义推广到$X = \mathbb{P}^3$ 的情形，并讨论它的一些主要性质和不变量。我们的主要目标是利用其所具有的曲线子叶状结构的最小可能次数来研究余维一分布。

3.1 $\mathbb{P}^3$上的曲线叶状结构

次数为d' 的曲线叶状结构 $\mathscr{G}$由下式给出

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(1-d') \longrightarrow \mathrm{T}\mathbb{P}^3 \longrightarrow N_{\mathscr{G}} \longrightarrow 0,$$

其中 $N_{\mathscr{G}}$是一个秩二无挠层。取对偶正合列，得到

$$0 \longrightarrow N_{\mathscr{G}}^{\vee} \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow \mathscr{I}_W(d'-1) \longrightarrow 0 \tag{4}$$

其中 $N_{\mathscr{G}}^{\vee}$是一个秩二自反层，且 $W = \mathrm{Sing}(\mathscr{G})$。层$N_{\mathscr{G}}^{\vee}$称为$\mathscr{G}$的余法丛。现在考虑 $\mathscr{U}'$ $\mathscr{O}_W$的最大零维子层，使得商层是某个纯一维子概形 $C' \subset W \subset \mathbb{P}^3$ 的结构层。我们称

$$C' = \mathrm{Sing}_1(\mathscr{G}) \text{ the 1-dimensional component of } \mathrm{Sing}(\mathscr{G}).$$

$$\mathrm{Supp}(\mathscr{U}') = \mathrm{Sing}_0(\mathscr{G}) \text{ the 0-dimensional component of } \mathrm{Sing}(\mathscr{G}).$$

注。 从另一角度看，曲线叶状结构 $\mathscr{G}$定义了一个截面 $v \in H^0(\mathrm{T}\mathbb{P}^3(d'-1))$。考虑扭曲欧拉正合列

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(d'-1) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(d')^{\oplus 4} \longrightarrow \mathrm{T}\mathbb{P}^3(d'-1) \longrightarrow 0,$$

在齐次坐标 x_i 下，我们可以将整体截面表示为

$$v = \sum F_i \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ with } F_i \in H^0(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(d')).$$

若存在$f \in H^0(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(d'-1))$ 使得，则两种表示 $\{F_i\}$ 和 $\{G_i\}$ 相同

$$F_i - G_i = x_i f, \text{ for every } i = 0, \ldots, 3.$$

奇异概形 $\mathrm{Sing}(\mathscr{G})$ 由矩阵的 2×2 阶子式生成的齐次理想定义

$$\begin{pmatrix} F_0 & F_1 & F_2 & F_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

利用正合列 (4)，我们可以将余法丛的陈类与奇异概形的不变量联系起来。

定理 3.1 ([11])。 设 $\mathscr{G}$ 是 $\mathbb{P}^3$ 中次数为 d' 的曲线叶状结构，并考虑上述针对 C' 和 $\mathscr{U}'$ 的构造。那么，

$$\begin{aligned} c_1(N_{\mathscr{G}}^{\vee}) &= -3 - d' \\ c_2(N_{\mathscr{G}}^{\vee}) &= d'^2 + 2d' + 3 - \deg(C') \\ c_3(N_{\mathscr{G}}^{\vee}) &= \mathrm{length}(\mathscr{U}) = d'^3 + d'^2 + d' - 3\deg(C')(d'-1) + 2p_a(C) - 1 \end{aligned}$$

在 [14, 定理 4.], 中，作者对次数为 1 的曲线叶状结构的余法层 $N_{\mathscr{G}}^{\vee}$ 进行了分类。他们的结果是

1. $N_{\mathscr{G}}^{\vee}$是稳定的，满足 $c_2 = 6$、$c_3 = 4$，且 $\mathrm{Sing}(\mathscr{G})$ 是一个长度为 4 的零维概形；或

2. $N_{\mathscr{G}}^{\vee}$是严格 μ-半稳定的，满足 $c_2 = 5$、$c_3 = 2$，且 $\mathrm{Sing}(\mathscr{G})$ 是一条直线与一个长度为 2 的零维概形的并；或

3. $N_{\mathscr{G}}^{\vee} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)^{\oplus 2}$ 且 $\mathrm{Sing}(\mathscr{G})$ 是一对异面直线（或亏格为 -1 的双直线）。

让我们研究奇异概形的一维分支为一条直线并带有若干孤立点的曲线叶状结构。设 $\mathscr{G}$ 是次数为 d' 的曲线叶状结构，使得 $\mathrm{Sing}_1(\mathscr{G}) = L$ 是一条直线，则

$$\begin{aligned} c_1(N_{\mathscr{G}}^{\vee}) &= -3 - d' \\ c_2(N_{\mathscr{G}}^{\vee}) &= d'^2 + 2d' + 2 \\ c_3(N_{\mathscr{G}}^{\vee}) &= d'^3 + d'^2 - 2d' + 2 \end{aligned}$$

这样的叶状结构由$H^0(\mathrm{T}\mathbb{P}^3(d'-1)\otimes \mathscr{I}_L)$中的一个元素定义。利用直线作为完全交的正合列，我们得到

$$0 \longrightarrow \mathrm{T}\mathbb{P}^3(d'-3) \longrightarrow \mathrm{T}\mathbb{P}^3(d'-2)^{\oplus 2} \longrightarrow \mathrm{T}\mathbb{P}^3(d'-1)\otimes \mathscr{I}_L \longrightarrow 0.$$

由于当$d'-2$时，$\mathrm{T}\mathbb{P}^3(d'-2)$是整体生成的，因此$\mathrm{T}\mathbb{P}^3(d'-1)\otimes \mathscr{I}_L$也是整体生成的。这意味着，对于每个 $d' \geq 1$，空间$H^0(\mathrm{T}\mathbb{P}^3(d'-1)\otimes \mathscr{I}_L)$都有一个一般截面。这保证了存在在直线$L$上消失的曲线叶状结构。

3.2 P3上的余维一分布

次数为d的余维一分布 $\mathscr{F}$ 由一个正合列给出

$$0 \longrightarrow T_{\mathscr{F}} \longrightarrow \mathrm{T}\mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathscr{I}_Z(d+2) \longrightarrow 0, \tag{5}$$

其中$T_{\mathscr{F}}$是一个秩二自反层，且$Z = \mathrm{Sing}(\mathscr{F})$是 $\mathscr{F}$的奇异概形。与曲线叶状结构的处理过程相同，我们可以考虑 $\mathscr{U}$ $\mathscr{O}_Z$的最大零维子层，使得商层是一个纯一维子概形$C \subset Z \subset \mathbb{P}^3$ 的结构层。我们称

$$C = \mathrm{Sing}_1(\mathscr{F}) \text{ the 1-dimensional component of } \mathrm{Sing}(\mathscr{F}).$$

$$\text{支集}(\mathscr{U}) = \mathrm{Sing}_0(\mathscr{F}) \text{ 是 } \mathrm{Sing}(\mathscr{F}) \text{ 的零维分支。}$$

注。 如我们所见，余维一分布 $\mathscr{F}$ 定义了一个截面 $\omega \in H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^3}(d+2))$。扭曲欧拉正合列

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}^3}(d+2) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(d+1)^{\oplus 4} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(d+2) \longrightarrow 0,$$

表明在齐次坐标 x_i下，我们可以将该截面写成

$$\omega = \sum_{i=0}^{3} A_i dx_i \text{ with } A_i \in H^0(\mathbb{P}^3, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(d+1)),$$

其中齐次多项式 A_i 必须满足条件

$$\sum_{i=0}^{3} A_i x_i = 0.$$

定理 3.2 ([5]). 设 $\mathscr{F}$ 为 $\mathbb{P}^3$ 中次数为 d 的余维一分布，并考虑上文对 C 与 $\mathscr{U}$ 的构造。则，

$$\begin{aligned} c_1(T_{\mathscr{F}}) &= 2 - d \\ c_2(T_{\mathscr{F}}) &= d^2 + 2 - \deg(C) \\ c_3(T_{\mathscr{F}}) &= \mathrm{length}(\mathscr{U}) = d^3 + 2d^2 + 2d - \deg(C)(3d-2) + 2p_a(C) - 2 \end{aligned}$$

注意，奇异概形 Sing($\mathscr{F}$) 没有孤立点当且仅当 $T_{\mathscr{F}}$ 是局部自由的，这是更一般结果 [5,引理 2.1]的一个特例。

例 1. 零相关丛 N 在 $\mathbb{P}^3$ 上自然定义了一个余维一分布结构。该丛定义为如下正合列所示的一个满射的核

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow \mathrm{T}\mathbb{P}^3(-1) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \longrightarrow 0.$$

若张量以 $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$，则有

$$0 \longrightarrow N(1) \longrightarrow \mathrm{T}\mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(2) \longrightarrow 0,$$

这是一个次数为 0 的正则余维一分布。事实上，正如 *[5]* 所示，这是 $\mathbb{P}^3$ 上唯一的正则分布情形。由于射影空间上的叶状结构总有奇点，因此这是 $\mathbb{P}^3$ 上不可积布的一个例子。

固定 $\mathbb{P}^3$ 上的一个秩二自反层，并构造一个到 $\mathbb{P}^3$ 的切层的显式态射，使其为单射且余核无挠，可能是一项非常困难的任务。然而，在 [5, 附录 1] 中，作者证明了，若 G 是一个整体生成的秩二自反层，则 $G^\vee(1)$ 是一个余维一分布的切层，其次数为 $c_1(G)$。我们可以利用这一结果给出一些能够保证分布存在的上同调条件。

推论 3.3. 设 $d \geq 0$，并固定一个定义在 $\mathbb{P}^3$ 上、满足 $c_1(F) = 2-d$ 的秩二自反层 F。若 F 是$(d-1)$-正则层，则存在一个次数为 d 的余维一分布 $\mathscr{F}$，其切层为 $T_{\mathscr{F}} \cong F$。

证明。 由于 F 是（$d-1$）-正则的，根据 Castelnuovo-Mumford 定理 [22, Page 99], , 我们知道 $F(d-1)$ 是整体生成的。于是 $F(d-1)^\vee(1)$ 是次数为 $c_1(F(d-1)) = c_1(F) + 2(d-1) = d$ 的余维一分布的切层。另外，

$$F(d-1)^\vee(1) \cong F^\vee(2-d) \cong F(-c_1+2-d) \cong F.$$

由此可得结论。 □

总之，固定一个 F，它是一个满足 $c_1(F) = 2-d$ 且 $d \geq 0$ 的秩二自反层。如果

$$H^i(F(d-1-i)) = 0 \text{ for } i = 1,2,3,$$

那么，存在一个次数为d、切层为F的余维一分布。

现在，我们来定义 $\mathbb{P}^3$上的余维一分布 $\mathscr{F}$ 的如下不变量:

定义 3.4. 设 $\mathscr{F}$ 是 $\mathbb{P}^3$上的一个余维一分布。我们定义

$$t_{\mathscr{F}} := \min\{k \in \mathbb{Z} \mid H^0(T_{\mathscr{F}}(k-1)) \neq 0\},$$

使得 $\mathscr{F}$ 的切层具有整体截面的最小整数。由于 $T_{\mathscr{F}}$ 是$\mathrm{T}\mathbb{P}^3$的子层，我们得到 $t_{\mathscr{F}} \geq 0$。

本文主要研究具有固定$t_{\mathscr{F}}$的余维一分布。正如我们将在下一节看到的，当$t_{\mathscr{F}}$ 取值较小时，层 $T_{\mathscr{F}}$ 必定不稳定。

设 $\sigma \in H^0(T_{\mathscr{F}}(t_{\mathscr{F}}-1))$是一个非零截面。由极小性可知， σ的零点必为一条Cohen-Macaulay曲线 Y，且Y 非空当且仅当$T_{\mathscr{F}}$ 是非分裂的。我们可以通过以下交换图构造一个次数为$t_{\mathscr{F}}$ 的曲线子叶状结构 $\mathscr{G}$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(1-t_{\mathscr{F}}) & = & \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(1-t_{\mathscr{F}}) & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & T_{\mathscr{F}} & \longrightarrow & \mathrm{T}\mathbb{P}^3 & \longrightarrow & \mathscr{I}_Z(\text{维数}+2) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \mathscr{I}_Y(1+t_{\mathscr{F}}-d) & \longrightarrow & N_{\mathscr{G}} & \longrightarrow & \mathscr{I}_Z(d+2) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
\tag{6}
$$

曲线子叶状结构 $\mathscr{G}$ 由中间列定义。因此$t_{\mathscr{F}}$ 是 $\mathscr{F}$ 所容许的曲线子叶状结构的最小次数。这个构造满足 [12, 命题3.4。]其证明了

$$
Y \subset \mathrm{Sing}(\mathscr{G}). \tag{7}
$$

[21, 命题 10.3.] 的作者通过将 $\mathscr{F}$的曲线子叶状结构与一个次数 0 的一般余维一叶状结构取交，证明了其最小次数的一个尖锐上界。用我们的记号表示为

$$
t_{\mathscr{F}} \leq d+1. \tag{8}
$$

此外，如果 $\mathscr{F}$ 是一个叶状结构，那么$t_{\mathscr{F}} \leq d$。

注。 在 *[17],* 中，作者根据陈类给出了秩二反身层具有整体截面的最小扭曲的一个上界。利用这一命题以及定理 *3.2*，我们得到 $t_{\mathscr{F}} \leq 2d-1$。这个上界仅取决于该层，因此作为$\mathrm{T}\mathbb{P}^3$ 的子层意味着可得到如*(8)*所示的更优上界。

命题 3.5。 设 $\mathscr{F}$ 是一个余维一分布， $\mathscr{G}$ 是由某个 $\sigma \in H^0(T_{\mathscr{F}}(t_{\mathscr{F}}-1))$定义的曲线子叶状结构。如果 $\mathscr{G}$只有孤立奇点，则 $T_{\mathscr{F}}$分裂。

证明。 如果 $\mathscr{G}$是仅有孤立奇点的曲线叶状结构，那么 $\mathrm{Sing}(\mathscr{G})$ 是一个零维子概形。因此，由 (7) 可知$Y = /0$，进而$T_{\mathscr{F}}$ 分裂。 □

这表明，余维一分布 $\mathscr{F}$ 若要存在曲线子叶状结构，则 $\mathscr{F}$必须满足某些条件。在 [5, 引理 4.3], 中，作者首次提出了这一构造，并证明：如果余维一分布存在次数 0 的曲线子叶状结构，那么其切层会分裂。换言之，如果$t_{\mathscr{F}} = 0$，那么$T_{\mathscr{F}}$ 分裂。我们可以改写这一结果，从而显式地给出切层。

推论 3.6。 设 $\mathscr{F}$ 是 $\mathbb{P}^3$上的一个次数为 d 的余维一分布，满足 $t_{\mathscr{F}} = 0$。那么

$$
T_{\mathscr{F}} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(1-d) \quad \text{and} \quad d \geq 0.
$$

证明。 由于$t_{\mathscr{F}} = 0$， $T_{\mathscr{F}}$必须分裂。由于$H^0(T_{\mathscr{F}}(-1)) \neq 0$ 且$H^0(T_{\mathscr{F}}(-2)) = 0$， $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$ 必须是其中一个直和项，因此另一个必须是 $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(1-d)$。 □

注。 我们可以用次数和 $t_{\mathscr{F}}$ 来描述分裂余维一分布的切层：

$$T_{\mathscr{F}} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(1-t_{\mathscr{F}}) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(1+t_{\mathscr{F}}-d) \quad \text{with} \quad d \geq 2t_{\mathscr{F}}$$

因此，在这种情况下，切层由这些不变量唯一确定。展开较小的取值可得：

$d/t_{\mathscr{F}}$	0	1	2	3
0	$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$	×	×	×
1	$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}$	×	×	×
2	$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)$	$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}$	×	×
3	$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)$	$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)$	×	×
4	$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)$	$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)$	$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)$	×
5	$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)$	$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)$	$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)$	×
6	$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-5)$	$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)$	$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)$	$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)$

表*1*：按 d 和 t 表示的分裂分布 $_{\mathscr{F}}$

例2. 切层分裂且 μ-半稳定的 $\mathscr{F}$ 上的唯一余维一分布 $\mathbb{P}^3$，是表*1*每一列的首项。注意，在这些情况下，我们有等式

$$d = 2t_{\mathscr{F}}$$

and

$$T_{\mathscr{F}} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(1-t_{\mathscr{F}}) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(1-t_{\mathscr{F}}).$$

因此，用 $t_{\mathscr{F}}$ 来表示分布的每个不变量会更方便。由于 $T_{\mathscr{F}}$ 局部自由，奇异概形是 $\mathbb{P}^3$ 中的纯一维子概形，即 奇异集$(\mathscr{F})$ = 奇异集$_1(\mathscr{F})$ = C。根据定理 *3.2*，我们得到

$$\deg(C) = 3t_{\mathscr{F}}^2 + 2t_{\mathscr{F}} + 1$$
$$p_a(C) = t_{\mathscr{F}}(5t_{\mathscr{F}}^2 - t_{\mathscr{F}} - 1)$$

对每个 $t_{\mathscr{F}} \geq 0$ 都成立。所有这类分布都具有相同的归一化 $(T_{\mathscr{F}})_\eta = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}$。

由于我们关注的是不稳定层，因此将附加切层非分裂这一假设，以避免上述情形。

引理 3.7. 设 $\mathscr{F}$ 是 $\mathbb{P}^3$ 上次数为 d 的余维一分布，且 $d > 2t_{\mathscr{F}}$。则 $h^0(T_{\mathscr{F}}(t_{\mathscr{F}}-1)) = 1$。此外，若 $T_{\mathscr{F}}$ 非分裂，则当 $d = 2t_{\mathscr{F}}$ 时结论仍成立。

证明。 假设 $d > 2t_{\mathscr{F}}$，并考虑正合列

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow T_{\mathscr{F}}(t_{\mathscr{F}}-1) \longrightarrow \mathscr{I}_Y(2t_{\mathscr{F}}-d) \longrightarrow 0.$$

根据我们的假设，层 $\mathscr{I}_Y(2t_{\mathscr{F}}-d)$ 不可能有整体截面，即使 $Y = /0$ 也如此。因此$h^0(T_{\mathscr{F}}(t_{\mathscr{F}}-1))$ $= h^0(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}) = 1$。如果 $T_{\mathscr{F}}$ 是非分裂的，那么 Y 非空，因此 $H^0(\mathscr{I}_Y) = 0$。 □

上述结果给出了最小曲线子叶状结构唯一的条件。注意，例1和例2不满足关系 $d > 2t_{\mathscr{F}}$，且二者都有$h^0(T_{\mathscr{F}}(t_{\mathscr{F}}-1)) > 1$。

命题 3.8 节。 设 $\mathscr{F}$ 是一个次数为 d 的余维一分布，满足 $t_{\mathscr{F}} = 1$。该 n

1. $T_{\mathscr{F}} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(2-d)$ *with* $d \geq 2$*; or*
2. $T_{\mathscr{F}}$的陈类为$(2-d, 1, d)$，其中 $d \geq 1$；或者

3. $T_{\mathscr{F}}$的陈类为$(2-d,2,2d)$，其中 $d \geq 0$。

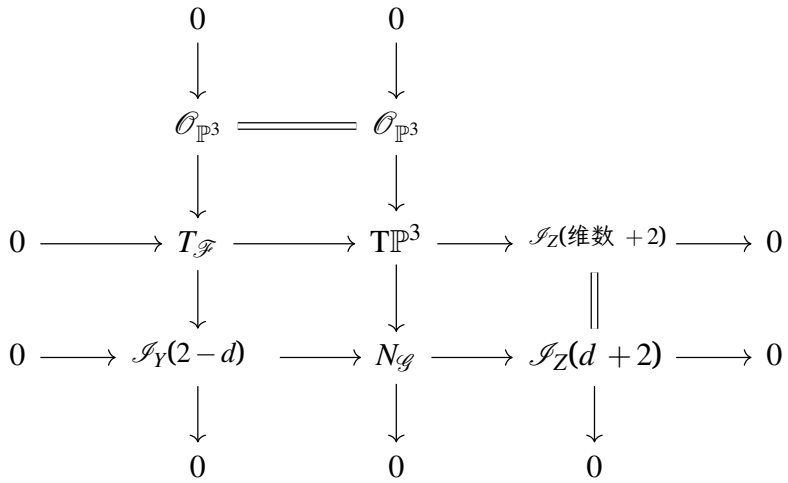
证明。 令 $\mathscr{F}$ 为次数d 的余维一分布，且$Z = \mathrm{Sing}(\mathscr{F})$，由下式给出

$$0 \longrightarrow T_{\mathscr{F}} \longrightarrow \mathrm{T}\mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathscr{I}_Z(d+2) \longrightarrow 0.$$

取 $\sigma \in H^0(T_{\mathscr{F}})$ 的一个非零截面。由于这是经扭曲后的第一个整体截面，我们知道零点$Y := (\sigma)_0$ 将是 $\mathbb{P}^3$ 的一个余维二子概形。若Y为空，则$T_{\mathscr{F}}$是分裂的；根据我们的假设，其中一个直和项必定为 $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}$，因此得到

$$T_{\mathscr{F}} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(2-d) \text{ and } d \geq 2.$$

下文中，我们假设Y 非空。(6) 中的构造表明，复合映射 $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3} \overset{\sigma}{\hookrightarrow} T_{\mathscr{F}} \hookrightarrow \mathrm{T}\mathbb{P}^3$ 定义了一个次数为 1 的子叶状结构，记为 $\mathscr{G}$，且交换图

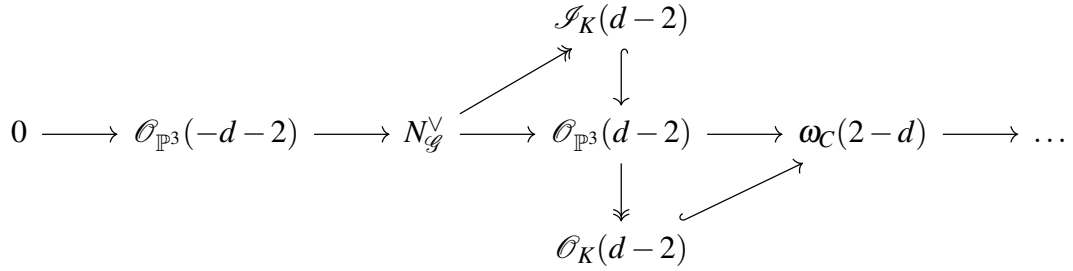


将底行对偶化，我们得到

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-d-2) \to N_{\mathscr{G}}^{\vee} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(d-2) \overset{\xi}{\to} \omega_C(2-d) \to$$

$$\to \mathscr{E}xt^1(N_{\mathscr{G}}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}) \to \omega_Y(2+d) \to \mathscr{E}xt^3(\mathscr{U}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}) \to 0,$$

其中 $C = \mathrm{Sing}_1(\mathscr{F})$ 且 $\mathrm{Supp}(\mathscr{U}) = \mathrm{Sing}_0(\mathscr{F})$。我们可以通过定义子概形 K为 $\mathbb{P}^3$的 $\ker(\xi) = \mathscr{I}_K(d-2)$，从而拆分正合列，得到



因此我们得到短正合列

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-d-2) \longrightarrow N_{\mathscr{G}}^{\vee} \longrightarrow \mathscr{I}_K(d-2) \longrightarrow 0,$$

于是 K 是$H^0(N_{\mathscr{G}}^{\vee}(d+2))$ 中一般截面的零点。因此

$$\deg(K) = c_2(N_{\mathscr{G}}^{\vee}(d+2)) = c_2(N_{\mathscr{G}}^{\vee}) + d^2 - 4.$$

由因子分解可得包含关系 $\mathscr{O}_K(d-2) \hookrightarrow \omega_C(2-d)$，从而得到支撑上的包含关系

$$K \subseteq C.$$

由于这两个概形都是纯一维的，我们得到不等式

$$\deg(K) \leq \deg(C).$$

现在，$\deg(Y) = c_2(T_{\mathscr{F}})$，且 Y 非空，因此 $c_2(T_{\mathscr{F}}) > 0$，并由定理 3.2,

$$\deg(C) < d^2 + 2.$$

利用 [14,定理 4.], 中次数为 1 的曲线叶状结构的分类，我们可以计算 $\deg(K)$ 的每一种可能，并与上述关于C的条件进行比较。

1. 若 $N_{\mathscr{G}}^{\vee}$是 μ-稳定的，且 $c_2(N_{\mathscr{G}}^{\vee}) = 6$，则它仅有孤立奇点，并且由命题 3.5，$T_{\mathscr{F}}$ 将是分裂的，这是荒谬的。

2. 若 $N_{\mathscr{G}}^{\vee}$是严格 μ-半稳定的，且 $c_2(N_{\mathscr{G}}^{\vee}) = 5$，则 $\deg(K) = d^2+1$，这意味着 $\deg(C) = d^2+1$，因此 $K = C$。于是我们有

$$\deg(Y) = c_2(T_{\mathscr{F}}) = d^2 + 2 - \deg(C) = 1,$$

并且 $Y = L$ 是一条直线。由于 Y 是一条直线，则 $p_a(Y) = 0$，于是

$$c_3(T_{\mathscr{F}}) = 2p_a(Y) - 2 + 1(4 - c_1(T_{\mathscr{F}})) = -2 + d + 2 = d.$$

因此，$T_{\mathscr{F}}$的陈类为 $(c_1, c_2, c_3) = (2-d, 1, d)$。在 $d = 0$ 的情况下，该正合列

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow T_{\mathscr{F}} \longrightarrow \mathscr{I}_L(2) \longrightarrow 0,$$

是直线对应正合列的一个扭曲，这意味着 $T_{\mathscr{F}} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$，但这意味着 $t_{\mathscr{F}} = 0$。因此，$d \geq 1$。

3. 若 $N_{\mathscr{G}}^{\vee} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)^{\oplus 2}$，则 K 是次数为 d^2 的完全交。对于 C，有两种可能性：一种是 $\deg(C) = d^2+1$，这与上面的情况相同，因此我们可以假设 $\deg(C) = d^2$，此时$C = K$。因此，

$$\deg(Y) = c_2(T_{\mathscr{F}}) = d^2 + 2 - \deg(C) = 2.$$

由于C 是两个次数为 d 的超曲面的完全交，

$$p_a(C) = \frac{1}{2} dd(d+d-4) + 1 = d^2(d-2) + 1 = d^3 - 2d^2 + 1.$$

应用定理 3.2 的结论，

$$\begin{aligned} c_3(T_{\mathscr{F}}) &= d^3 + 2d^2 + 2d - \deg(C)(3d-2) + 2p_a(C) - 2 \\ &= d^3 + 2d^2 + 2d - d^2(3d-2) + 2(d^3 - 2d^2 + 1) - 2 \\ &= 2d. \end{aligned}$$

由此得出，$T_{\mathscr{F}}$的不变量为（$2-d$，2，$2d$）。在最后一种情况下，对于$d = 0$，我们有$T_{\mathscr{F}}$的不变量为（2，2，0），且必为$T_{\mathscr{F}} = N(1)$，如例 1 所示。因此，对每个$d \geq 0$，都有$t_{\mathscr{F}} = 1$。

□

请注意，在切层局部自由且存在次数为 0 或 1 的子叶状结构的情况下，该层要么分裂，要么是例 1 中的零相关丛，而后者不是叶状结构。换言之，我们已经证明，如果 $\mathbb{P}^3$ 上的一个余维一叶状结构具有局部自由的切层，且存在次数为 0 或 1 的子叶状结构，那么$T_{\mathscr{F}}$ 就会分裂。我们的结果与 [9, 定理C], 一致；该定理曾独立地首次证明了这一事实。

引理3.9. 设 $\mathscr{F}$ 是 $\mathbb{P}^3$ 上的一个余维一分布，使得 $T_{\mathscr{F}}$ 分裂，且 $\mathscr{G}$ 由 $\sigma \in H^0(T_{\mathscr{F}}(t_{\mathscr{F}}-1))$ 诱导的曲线子叶状结构。那么

$$\mathrm{Sing}(\mathscr{G}) \subset \mathrm{Sing}(\mathscr{F}).$$

证明. 相对法层的正合列为

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(1+t_{\mathscr{F}}-d) \to N_{\mathscr{G}} \longrightarrow \mathscr{I}_Z(d+2) \longrightarrow 0,$$

其中 $Z = \mathrm{Sing}(\mathscr{F})$。对该正合列取对偶，得到

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-2-d) \longrightarrow N_{\mathscr{G}}^{\vee} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(d-1-t_{\mathscr{F}}) \longrightarrow \omega_Z(d-2) \longrightarrow \mathscr{E}xt^1(N_{\mathscr{G}}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}) \longrightarrow 0.$$

由于最后一个 映射是满射，因此 $\mathrm{Supp}(\mathscr{E}xt^1(N_{\mathscr{G}}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}))$ 上的每一点都属于 Z。因此我们有 e

$$\mathrm{Sing}(\mathscr{G}) = \mathrm{Supp}(\mathscr{E}xt^1(N_{\mathscr{G}}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3})) \subset \mathrm{Sing}(\mathscr{F}).$$

□

现在来研究包含这样一种曲线叶状结构的余维一分布：该曲线叶状结构在一条直线上消失，且具有孤立点。设 $\mathscr{F}$ 是 $\mathbb{P}^3$ 上的一个余维一分布，使得非平凡截面 $\sigma \in H^0(T_{\mathscr{F}}(t_{\mathscr{F}}-1))$ 定义了一个曲线叶状结构 $\mathscr{G}$，其奇点集 $\mathrm{Sing}_1(\mathscr{G}) = L$ 为一条直线。假设$T_{\mathscr{F}}$ 非分裂，则截面 σ 的零点非空。但根据 (7)，$Y \subseteq L$，因此我们得到$Y = L$。这意味着 $c_2(T_{\mathscr{F}}(t_{\mathscr{F}}-1)) = 1$，于是

$$\begin{cases} c_1(T_{\mathscr{F}}) = 2-d \\ c_2(T_{\mathscr{F}}) = -t_{\mathscr{F}}^2 + d(t_{\mathscr{F}}-1)+2 \\ c_3(T_{\mathscr{F}}) = d-2(t_{\mathscr{F}}-1) \end{cases}$$

其次数为 $d \geq 2(t_{\mathscr{F}}-1)$。如果希望通过固定$t_{\mathscr{F}}$来对余维一分布进行分类，那么上述情形始终属于每个$t_{\mathscr{F}} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$对应的分类。

4 切层不稳定的余维一分布

文献 [26], 研究了不稳定的自反层，其中作者表明，最初仅针对稳定层考察的性质，例如上同调群的消失条件和谱，可以借助一个称为非稳定阶数的不变量推广到不稳定层。现在，将定义2.5应用于余维一分布的切层。令 $\mathscr{F}$ 为 $\mathbb{P}^3$ 上的一个次数为d 的余维一分布，并定义 ε 为 $\varepsilon \in \{0,1\}$，且 $\varepsilon \equiv d \pmod 2$。由于$c_1(T_{\mathscr{F}}) = 2-d$，其归一化为

$$(T_{\mathscr{F}})_\eta = T_{\mathscr{F}}\left(\frac{d-2-\varepsilon}{2}\right).$$

现在假设 $T_{\mathscr{F}}$ 是不稳定的，阶为 r，那么

$$H^0((T_{\mathscr{F}})_\eta^{\vee}(-r)) \neq 0.$$

展开可得

$$H^0((T_{\mathscr{F}})^{\vee}_{\eta}(-r)) = H^0\big(T_{\mathscr{F}}\big(\frac{d-2+\varepsilon}{2} - r\big)\big)$$

根据r 的极小性和定义 3.4，可得

$$t_{\mathscr{F}} = \frac{d+\varepsilon}{2} - r.$$

注意到非稳定阶数与$t_{\mathscr{F}}$ 成反比，因此$T_{\mathscr{F}}$ 越不稳定，最小曲线子叶状结构的次数就越低。由于二者都是正整数，因此$r \geq 1$，结合引理 2.4，我们得到以下结果。

引理 4.1. 设 $\mathscr{F}$ 是 $\mathbb{P}^3$ 上的一个次数为 d 的余维一分布，且 $T_{\mathscr{F}}$ 非分裂。那么，当且仅当 $d \geq 3$ 且.....时，$T_{\mathscr{F}}$ 不稳定

$$1 \leq t_{\mathscr{F}} \leq \frac{d-2+\varepsilon}{2},$$

其中 $\varepsilon \in \{0,1\}$ 且 $\varepsilon \equiv d$(模 2)。此外，$T_{\mathscr{F}}$将具有 $d^{\frac{+\varepsilon}{2}} - t_{\mathscr{F}}$阶的非稳定性。

上述引理表明，当$T_{\mathscr{F}}$ 非分裂且不稳定时，它满足引理 3.7 的条件。换言之，若 $\mathscr{F}$ 是一个余维一分布，且$T_{\mathscr{F}}$ 非分裂且不稳定，那么最小曲线子叶状结构是唯一的。

当 $t_{\mathscr{F}}$ 达到其最小值 $t_{\mathscr{F}} = 1$ 时，非稳定阶数恰好达到其最大可能值。具有这一性质的余维一分布已在命题 3.8 中分类，因此得到如下结果。

定理 4.2. 设 $\mathscr{F}$ 是 $\mathbb{P}^3$ 上次数为 d 的余维一分布，且 $T_{\mathscr{F}}$ 非分裂、非稳定，并具有最大非稳定阶。则 $d \geq 3$ 并且

1. $T_{\mathscr{F}}$的陈类为 $(2-d, 1, d)$，由一条直线生成；$\mathrm{Sing}_1(\mathscr{F})$ 是一条次数为 d^2+1、亏格为 $p_a = d(d-1)^2$ 的曲线；而 $\mathrm{Sing}_0(\mathscr{F})$ 由 d 个共线点组成；或

2. $T_{\mathscr{F}}$的陈类为 $(2-d, 2, 2d)$，由一对异面直线（或一条亏格为 *-1* 的双直线）生成；$\mathrm{Sing}_1(\mathscr{F})$ 是一条次数为 d^2 的曲线（完全交），而 $\mathrm{Sing}_0(\mathscr{F})$ 由两组各含 d 个共线点组成（或由双直线上的 d 个共线点组成）。

最大阶第一族。此处我们将讨论第一族上分布的存在性与性质。设 $\mathscr{F}$ 为第一族上具有最大非稳定阶数的余维一分布

$$0 \longrightarrow T_{\mathscr{F}} \longrightarrow \mathrm{T}\mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathscr{I}_Z(d+2) \longrightarrow 0.$$

因此，$T_{\mathscr{F}}$的陈类为 $(2-d,\ 1,\ d)$，且由直线的扩张生成。考虑 F，它是一个秩为 2 的自反自反层，由直线 L 的扩张生成 $\subset \mathbb{P}^3$

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow F \longrightarrow \mathscr{I}_L(2-d) \longrightarrow 0. \tag{9}$$

现在我们可以考虑直线的正合列

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)^{\oplus 2} \longrightarrow \mathscr{I}_L \longrightarrow 0,$$

并利用 $\mathbb{P}^3$ 上可逆层的上同调，我们得到消失性 s:

$$H^1(\mathscr{I}_L) = H^2(\mathscr{I}_L(-1)) = 0.$$

最后，利用上述消失性和 Serre 对偶，我们有

$$H^i(F(d-1-i)) = 0 \text{ for } i > 0.$$

因此，根据推论 3.3，由式 (9) 生成的每个秩二自反层都将是次数为d的余维一分布的切层。

利用直线的正合列，我们可以计算 $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{I}_L(2-d)\ \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3})$，并得到其维数为$d+1$。由于参数化 $\mathbb{P}^3$ 上直线的格拉斯曼簇维数为 4，因此存在一个维数为$d+4$的代数簇 $\mathbb{V}$，它参数化了由式 (9) 生成的层的同构类。

回到分布 $\mathscr{F}$，我们有 $H^1_*(T_{\mathscr{F}}) = 0$，因此 $Z = \mathrm{Sing}(\mathscr{F})$ 不包含在次数为d的超曲面中。此外，$\mathrm{Sing}_1(\mathscr{F}) = C$具有以下不变量

$$\deg(C) = d^2+1 \text{ and } p_a(C) = d(d-1)^2.$$

C 的一个可能例子是一个次数为d^2 的完全交与一条直线的并，且该直线与完全交相交于d 个不同的点。

例 3. 考虑由齐次坐标(x, y, z, w)下的 *1*-形式定义的次数为 *3* 的余维一分布 $\mathscr{F}$：

$$\begin{aligned}\omega = &(xy^2z - xyz^2 + yw^3 - zw^3)dx\\ &+ (-x^2yz + xyz^2 - 2x^3w - 2y^3w + 3xyzw - 2z^3w - xw^3 + zw^3 + 3w^4)dy\\ &+ (x^2yz - xy^2z + xw^3 - yw^3)dz\\ &+ (2x^3y + 2y^4 + -3xy^2z + 2yz^3 - 3yw^3)dw.\end{aligned}$$

于是$\mathrm{Sing}_0(\mathscr{F})$ 的长度为 *3*，且$\mathrm{Sing}_1(\mathscr{F})$ 是由理想$(x^3+y^3+z^3, xyz + w^3)$ 所定义的完全交与直线 $L = \{y = w = 0\}$的并。

最大阶第二族。 现在我们来研究定理 4.2 中由下式给出的第二族

$$0 \longrightarrow T_{\mathscr{F}} \longrightarrow \mathrm{T}\mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathscr{I}_Z(d+2) \longrightarrow 0,$$

其中$T_{\mathscr{F}}$的陈类为 $(2-d, 2, 2d)$。设F是作为扩张生成的秩二反身层

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow F \longrightarrow \mathscr{I}_Y(2-d) \longrightarrow 0, \tag{10}$$

其中Y是一对异直线（或亏格为 -1 的双直线）。由于$H^0(\mathscr{I}_Y(1)) = 0$，层$F(d-1)$ 不能整体生成，并且不能保证由该扩张生成的每一个层都是余维一分布的切层。

我们可以算出 $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{I}_Y(2-d)\ \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3})$ 的维数为 $2d+2$。由于异面直线由 $\mathbb{P}^3$ 上参数化直线的格拉斯曼簇去掉对角线后的对称积所参数化，它们由一个维数为 6 的代数簇参数化。因此存在一个维数为 $2d+7$ 的代数簇，用以参数化形如 (10) 生成的层的同构类。

分布 $\mathscr{F}$ 的奇异集 $\mathrm{Sing}_1(\mathscr{F}) = C$ 是一个次数为d^2的完全交。由于$T_{\mathscr{F}}$的唯一非零第一上同调群是$h^1(T_{\mathscr{F}}(d-2)) = 1$，这意味着$H^1(T_{\mathscr{F}}(-2)) = 0$，由此我们得到，$\mathrm{Sing}(\mathscr{F})$不包含在次数为$d$的超曲面中。我们无法保证每个按式 (10) 生成的层都存在，但可以构造一个明确的例子，使其在我们指定的位置消失。

例 4. 考虑由齐次坐标下的 *1*-形式定义的三次余维一分布 $\mathscr{F}$

$$\begin{aligned}\omega = &(x^3y+y^4-x^3z+xy^2z-y^3z+xyz^2+yz^3-z^4-2xyzw+yw^3+zw^3-2w^4)dx\\ &+(-x^4-xy^3+x^3z-x^2yz+y^3z+3xyz^2-xz^3\\ &+z^4-2x^3w-2y^3w+xyzw-2z^3w-xw^3+3zw^3+w^4)dy\\ &+(x^4-x^3y+xy^3-y^4-x^2yz-3xy^2z+xz^3\\ &-yz^3+2x^3w+2y^3w+xyzw+2z^3w-xw^3-3yw^3+w^4)dz\\ &+(2x^3y+2y^4-2x^3z+2x^2yz-xy^2z-2y^3z-xyz^2+2yz^3-2z^4+2xw^3-yw^3-zw^3)dw.\end{aligned}$$

那么 $\mathrm{Sing}_0(\mathscr{F})$ 的长度为 *6*，而 $\mathrm{Sing}_1(\mathscr{F})$ 是由理想 $(x^3+y^3+z^3,xyz+w^3)$定义的次数为 *9* 的完全交。

注意，在我们的分类中，出现的局部自由层只有分裂层或例 1 中的零相关丛；后者是稳定的，并且不定义余维一叶状结构。我们可以构造一个切层为局部自由、非分裂且不稳定的余维一分布的例子。

例 5。 取 $L\subset\mathbb{P}^3$ 为一条直线，Y 为 L 上的一个亏格为 $p_a=-4$ 的双重结构；关于直线上的多重结构，参见 *[23,* 命题 *14]*。现在考虑扩张

$$0\longrightarrow\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}\longrightarrow F\longrightarrow\mathscr{I}_Y(-1)\longrightarrow 0. \tag{11}$$

那么 F 是一个不稳定的秩为 *2* 的局部自由层，其陈类为 $(c_1,c_2)=(-1,\ 2)$。利用 *Serre* 对偶，我们得到

$$H^3(F(m))^\vee=H^0(F(-m-3)),\ \text{for all } m\in\mathbb{Z}.$$

因此我们得到以下消失性

$$H^3(F(m))=0,\ \text{for } m\geq -2.$$

正合列

$$0\longrightarrow\mathscr{O}_L(3)\longrightarrow\mathscr{O}_Y\longrightarrow\mathscr{O}_L\longrightarrow 0$$

连同结构正合列，可得

$$\begin{aligned}H^1(\mathscr{I}_Y(m))&=0,\ \text{for } m\geq 2;\\ H^2(\mathscr{I}_Y(m))&=0,\ \text{for } m\geq -1.\end{aligned}$$

这些消失性与正合列 *(11)*

$$\begin{aligned}H^1(F(m))&=0,\ \text{for } m\geq 3;\\ H^2(F(m))&=0,\ \text{for } m\geq 0.\end{aligned}$$

F 的上同调的这些消失性使我们得到恒等式

$$H^i(F(4-i))=0,\ \text{for } i>0.$$

因此 F 是 *4*-正则的，所以 $F(4)$ 是整体生成的。应用 *Bertini* 型定理 *[5,*推论 *A.4],*，我们得到存在一个次数为 *7* 的余维一分布 $\mathscr{F}$，使得

$$T_{\mathscr{F}}\simeq(F(4))^\vee(1)\simeq F(-2).$$

那么 $T_{\mathscr{F}}$ 是一个不稳定的局部自由层，且为非分裂，并且具有 $t_{\mathscr{F}}=2$。

5 最后的说明

对数叶状结构是一类广为人知的余维一叶状结构，它们在每个余维一叶状结构空间中构成一个不可约分支，见 [4]。次数为d、定义在 $\mathbb{P}^3$ 上的余维一分布 $\mathscr{F}$，若由一个 1-形式给出，则称为类型为 $(d1\ldots,d_r)$ 的对数叶状结构

$$\omega = f_1 \ldots f_r \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{df_i}{f_i}. \tag{12}$$

使得

- $1 \leq d_1 \leq \cdots \leq d_r$;
- $\lambda i \in \mathbb{C}$ 和 $\sum \lambda i d i = 0$;
- f_i是次数为d_i的齐次多项式，且 $\sum d_i = d + 2$。

若此外还满足条件 $\lambda_i \neq 0$：对于每个i 以及每个D_i，$= \{f_i = 0\}$ 均处于一般位置，即彼此横截相交，则称 $\mathscr{F}$ 为一般对数叶状结构。在 [13, 定理 3.] 中，作者证明了：若 $\mathscr{F}$ 是由 (12) 给出的一般对数叶状结构，则

$$\mathrm{Sing}(\mathscr{F}) = C \cup U.$$

其中U 是长度为.....的零维分支

$$N(3,h) = \text{coefficient of } h^3 \text{ in } \frac{(1-h)^4}{(1-d_1h)\ldots(1-d_rh)}$$

且C 是由.....给出的一维分支

$$C = \bigcup_{i<j} (D_i \cap D_j).$$

利用该定理，我们可以得到此类叶状结构奇点不变量的显式公式

$$\deg(C) = \sum_{i<j} d_i d_j,$$

并可与定理 4.2 中得到的结果进行比较。

引理 5.1. 最大非稳定阶数的两个族中不存在一般对数叶状结构。

证明. 设 $\mathscr{F}$ 是一个类型为 $(d1,\ldots,d_r)$ 的一般对数叶状结构，并记 C为 $\mathscr{F}$ 的一维分支。则有

$$\deg(C) = \sum_{i<j} d_i d_j \leq \frac{r(r-1)}{2r^2}(d+1)^2.$$

但注意到

$$\frac{r(r-1)}{2r^2}(d+1)^2 < \frac{1}{2}(d+1)^2 < d^2 + i, \text{ for } d \geq 3,$$

其中 $i \in \{0,1\}$。这意味着 $\deg(C)$ 无法取到定理 4.2 中奇点的值，因此结论得证。

□

致谢。 作者谨向导师 Alan Muniz 和 Marcos Jardim 致谢，感谢他们就这项工作展开的深入讨论。本项目在巴里大学完成，由 Mauricio Cˆorrea 指导，作者感谢该校的热情接待与支持。作者获得巴西高等教育人员培训协调机构（CAPES）提供的博士奖学金（经费代码 001），并获得 CAPES–PDSE 项目的资助。

参考文献

[1] C. Araujo 和 S. Druel. 关于 Fano 叶状结构。《数学进展》238 (2013), 70–118.[2] P. Baum 和 R. Bott. 全纯叶状结构的奇点。《微分几何学杂志》7 (1972), 第 3–4 期, 279–342.[3] F. Bogomolov 和 M. McQuillan. 叶状簇上的有理曲线。载于《代数几何中的叶状结构理论》，第 21–51 页。施普林格，2016.[4] O. Calvo-Andrade. 全纯叶状结构空间的不可约分支。《数学年刊》299 (1994), 第 1 期, 751–767.[5] O. Calvo-Andrade、M. Corrˆea 和 M. Jardim. 三维射影空间上的余维一全纯分布。《国际数学研究通知》 2020 (2020), 第 23 期, 9011–9074.[6] O. Calvo-Andrade、M. Corrˆea、M. Jardim 和 J. Seade. 关于全纯叶状结构奇异集的连通性。预印本，arXiv:2506.08942 [math.AG], 2025. https://arxiv.org/abs/2506.08942.[7] D. Cerveau 和 A. Lins Neto. $\mathbb{CP}^n$ 上二次全纯叶状结构空间的不可约分支，$n \geq 3$。《数学年刊》143 (1996), 第 3 期, 577–612.[8] R. Constant da Costa、R. Lizarbe 和 J. Vit´orio Pereira. 射影空间上的三次余维一叶状结构。《数学科学通报》174 (2022), 103092. ´R. Constant da Costa. 切层局部自由的全纯分布的分裂性质。预印本, arXiv:2405.[9] math.CV17415 [.], 2024. https://arxiv.org/abs/2405.17415M. Corrˆea Jr.、M. Jardim 和 R. Vidal Martins. 关于分裂叶状结构的奇异概形。《印第安纳大学数学杂志》64 (2015), 第 5 期, 1359–1381.[10] M. Corrˆea、M. Jardim 和 S. Marchesi. 三维射影空间上低次数曲线叶状结构不变量的分类。《伊比利亚美洲数学杂志》39 (2023), 第 5 期, 1641–1680.[11] M. Corrˆea 和 A. Muniz. 任意维数的二次全纯叶状结构。预印本, arXiv:2207. ´math.AG[12] .12880 [.], 2022F. Cukierman、M. G. Soares 和 I. Vainsencher. 对数叶状结构的奇点。《组合数学》142 (2006), 第 1 期, 131–142. https://arxiv.org/abs/2207.12880H. Galeano、M. Jardim 和 A. Muniz. 三维射影空间上的二次余维一分布。《纯粹与应用代数杂志》226 (2022), 第 2 期, 106840.[13] R. Hartshorne. 代数几何。数学研究生教材，第 52 卷。施普林格，1977.[14] R. Hartshorne. 稳定自反层。《数学年刊》254 (1980), 第 2 期, 121–176.

[17] R. Hartshorne. 稳定自反层。II. 数学新进展 66 (1982), 第 1 期, 165–190.[18] D. Huybrechts 和 M. Lehn.《层模空间的几何》。剑桥大学出版社，2010.[19] J.-P. Jouanolou. ´代数 Pfaff 方程。数学讲义，第 708 卷。施普林格，1979. ´F. Loray、J. Vit[20] orio Pereira 和 F. Touzet. 具有平凡典范类的奇异叶状结构。数学新进展 213 (2018), 第 3 期, 1327–1380. ´W. Mendson 和 J. Vit[21] orio Pereira. 正特征下的余维一叶状结构。《朱修斯数学研究所杂志》23 (2024), 第 4 期, 1705–1750. ´D. Mumford.《代数曲面上的曲线讲义》。数学年刊研究丛书，第 59 号。普林斯顿大学出版社，1966.[22] S. Nollet. 三次曲线的希尔伯特概形。《法国高等师范学院科学年刊》(4) 30 (1997), 第 3 期, 367–384.[23] C. Okonek、M. Schneider 和 H. Spindler.《复射影空间上的向量丛》。数学进展，第 3 卷。Birkh ´auser，1980. ´F. Quallbrunn. 对偶下的分布族与 Pfaff 系统。《奇点期刊》11 (2015), 164–189. DOI: 10.5427/jsing.2015.11g.[24] T. Sauer. ¨上的非稳定自反层。《美国数学会会刊》281 (1984), 第 2 期, 633–655. (Pedro Pfarrius Barbassa) IMECC-UNICAMP，数学系，R. S[25] ergio Buarque de Holanda，651 - Cidade Universit[26] aria，坎皮纳斯 - SP，13083-859，巴西。电子邮箱：$\mathbb{P}^3$