arXiv:2602.20922v1 [math.AG] 24 Feb 2026

三个变量中一类齐次多项式的强单值化猜想

DANIEL BATH 和 WILLEM VEYS

摘要。我们研究所有齐次、可能非约化的多项式 f，其对应的约化射影除子 $D_{\mathrm{red}} \subset \mathbb{P}^{n-1}$ 仅具有准齐次孤立奇点（至多如此）。对于任意数量的变量 n，并令 d 表示 f 的次数，我们利用涉及对数导子的初等数据，刻画 $-n/d$ 何时是多项式 f 的伯恩斯坦–佐藤多项式的根。当限于三个变量时，我们证明所得的多项式类满足强单值化猜想（在动机意义下）。

1. 引言

考虑一个非常数多项式 $f \in R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$。代数微分算子领域给出了 f 的伯恩斯坦–佐藤多项式 $b_f(s) \in \mathbb{C}[s]$。伯恩斯坦–佐藤多项式的根必定有限个，它们编码了 f 的奇点数据，涉及 Milnor 纤维、混合 Hodge 模、双有理几何等。动机积分领域则产生动机 zeta 函数 $Z_f^{\mathrm{mot}}(s) \in K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})[\mathbb{L}^{-1}][[\mathbb{L}^{-s}]]$。尽管所在的环不同，Denef 和 Loeser [16] 证明了动机 zeta 函数只有有限个“极点”，它们都是微妙的奇点不变量，包括但不限于对数正则阈值的负值。

强单值化猜想仍是一个悬而未决的问题，它有望在微分算子领域与动机积分领域之间建立一种精确的联系。该猜想认为：动机 zeta 函数的每个极点都是伯恩斯坦–佐藤多项式的根。这个猜想有许多版本，包括涉及 f 的芽的局部版本，以及一个更强的单值化猜想；后者还包含如下断言：“极点的阶至多等于它作为根的重数。”

在 $\mathbb{A}^2$ 中，强单值化猜想以及这一更强的变体均成立。1988年，Loeser [26] 证明了除非约化 f的阶/重数情形外的所有情形；2024年，Blanco [9] 完成了这一研究。

在 $\mathbb{A}^3$ 或更高维的情形下，除了少数例外，我们几乎一无所知。对于 $\mathbb{A}^3$ 中的超平面配置，综合 [12, 38, 46]的工作，这些猜想均成立（但关于非约化配置中阶与重数的关系这一结论除外，它仍是一个开放问题）。对于 n 个变量中的孤立半准齐次奇点，以及 n 个变量中满足非共振条件 [27]的某一类牛顿非退化多项式，这些猜想也成立 [10], 。

DB 获得了 FWO 项目 #1282226N 的资助。WV 获得了鲁汶大学项目 GYN-E4282-C16/23/010 的资助。1

将范围限定为三个变量中的齐次 f 后，例外情况是：除非 f 定义了超平面配置、齐次孤立奇点，或某种特殊类型的牛顿非退化多项式，否则我们一无所知。前两种情形是一个研究充分的齐次多项式类别中的极端实例：其所对应的约化射影除子 $D_{\mathrm{red}} \subset \mathbb{P}^2$ 仅有准齐次奇点。等价地说，在每个点的局部，Milnor数与D_{red} 的 Tjurina 数均相等，见 [35]。我们的主要结果是证明这一类多项式满足强单值化猜想。

定理 A. 设 $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3] \setminus \mathbb{C}$ 是齐次的，$D_{\mathrm{red}} \subset \mathbb{P}^2$ 是与之相关的约化射影曲线。假设 D_{red} 至多具有准齐次奇点。那么 f 满足强单值化猜想。此外，f 在 0 处满足局部强单值猜想。

约定 1.1. 在整篇手稿中，除非明确说明，否则我们不假设多项式或除子是约化的。特别地，定理 A 中的 f 可以是非约化的。

现在我们来说明我们的策略。首先，我们需要一个针对强单值化猜想的“实用”判据。虽然 $Z_f^{\mathrm{mot}}(s)$ 是用接触轨迹定义的，但 Denef 和 Loeser [16] 给出了一个以 Div(f) 的嵌入解消为基础的公式。这便导出了适用于某些 f的如下判据，该判据对专家而言或许已为人所知。（注：“此外”的陈述相当于引用先前已知的结果。）

命题 B. 设 $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \setminus \mathbb{C}$ 是次数为 d 的齐次多项式。设 $D \subset \mathbb{P}^{n-1}$ 为相伴除子，D_{red} 为其约化形式。假设 D_{red} 只有孤立奇点，且在这些点中的每一点，D 都满足局部强单值猜想。现在考虑以下条件：

$$\left[-\frac{n}{d} \in \mathrm{Poles}(Z_f^{\mathrm{mot}}(s)) \right] \implies \left[-\frac{n}{d} \in \mathrm{Zeroes}(b_f(s)) \right]. \tag{1.1}$$

若(1.1) 成立，则 f 满足强单值化猜想。类似地，若0 处的(1.1) 的局部版本成立，则 f 在0处满足局部强单值猜想。

此外，以下情形满足关于 D 的假设：n =3 且 D 任意；$n \geq 4$ 且 $D = D_{\mathrm{red}}$ 只有拟齐次孤立奇点。

因此，我们的任务很明确！

步骤 1.（在这一步中我们允许 $n \geq 3$。）对于次数为 d、含 n 个变量的齐次多项式，若其相伴的约化射影除子仅具有拟齐次孤立奇点，则给出 $-n/d$ 恰好不是伯恩斯坦–佐藤多项式的根的初等刻画。步骤2. 限制到三个变量，并显式写出上述所有满足 $-3/d$ 不是伯恩斯坦–佐藤多项式的根的多项式。步骤 3. 对这些特殊多项式，证明 $-3/d$ 不是动机 zeta 函数的极点。

设 $\mathbb{A}_n$ 为 $R = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ 的魏尔代数。f 的伯恩斯坦–佐藤多项式 $b_f(s)$ 是循环 $\mathbb{A}_n[s]$-模的 $\mathbb{C}[s]$-零化子

$$M_f = \frac{\mathbb{A}_n[s]}{\operatorname{ann}_{\mathbb{A}_n[s]} f^s + \mathbb{A}_n[s] \cdot f}.$$

在关于 $\mathrm{Div}(f)_{\mathrm{red}}$ 的某些几何假设下，Walther [46]（第一作者在 [2] 中将其推广到了多-s 情形）证明了 M_f 有一个良好的表示，作为 cokernel($\oplus \mathbb{A}_n[s] \to \mathbb{A}_n[s]$)，其中的映射本质上由 f 的偏导数的系综诱导。这些系综可以重新表述为对数导子模；当 f 是齐次多项式时，该模是分次的。不存在零次对数导子这一性质，有助于寻找伯恩斯坦–佐藤多项式的根，见 [46, 3, 4] 以及随后提出的新版本 [39]。

Granger 和 Schulze [22] 研究了半单、幂零和无迹对数导子的概念（尽管研究对象是形式幂级数环）。由于这种方法能够比记录其不存在更细致地刻画零次导子，因此我们可以期待它们能更精细地刻画伯恩斯坦–佐藤多项式。我们证明确实如此，并针对我们关注的一类齐次多项式，给出了判定 $-n/d$ 何时是伯恩斯坦–佐藤多项式的根的简明刻画。

为表述这一点，令 $b_D(s)$ 表示与我们的齐次 f 相联系的除子 $D \subset \mathbb{P}^{n-1}$ 的伯恩斯坦–佐藤多项式，参见定义 2.3。我们这样做有两个原因：$s(b_f(s))$ 总是整除 $b_D(s)$；当 $D = D_{\mathrm{red}}$ 具有拟齐次孤立奇点时，根集零点（$b_D(s)$）的公式是经典的。因此在我们的情形中，根零点（$b_f(s)$）$\setminus$ 零点（$b_D(s)$）是“容易”的，而根零点（$b_f(s)$）$\setminus$ 零点（$b_D(s)$）则并非如此。

定理 C. 设 $f \in R$ 是次数为 d 的齐次多项式，其对应的射影除子 $D \subset \mathbb{P}^{n-1}$ 不是锥。令 D_{red} 为与 D 相联系的约化除子。假设 D_{red} 至多具有拟齐次孤立奇点。考虑以下条件：

(a) $\frac{-n}{d} \notin$ 零点（$b_f(s)$）；***(b)*** $\frac{-n}{d} \notin$零点（$b_D(s)$）；***(c)*** 导$_R$（$-$对数$_0 f$）包含一个半单、非无迹的导子。

Then

$$\Big[\textit{(a) is true}\Big] \iff \Big[\textit{both (b) and (c) are true}\Big].$$

这就完成了步骤 1。对于步骤 2 中的枚举，我们必须将范围从 $\mathbb{A}^n$ 限制到 $\mathbb{A}^3$。出于完全不同的原因，du Plessis 和 Wall [18, 19, 17] 研究了他们称为 1-对称射影平面曲线的对象，这无非是要求存在一个半单导子。他们将这些对象枚举为 6 个族，但这些族并不算小：对于次数为 $\{3, 4, 5, 6\}$ 的情形，他们在 [18] 中给出了一些表格，其长度增长得惊人。我们对他们的枚举作了细化，并在命题 4.8 中证明，经过齐次线性坐标变换后，这种多项式只有一种半单标准形式，即下文给出的形式。

定义 D. 设 $f \in \mathbb{C}[x,y,z]$ 是次数为 d 的齐次多项式。若 f 满足半单标准形式，即 f 可分解为不可约因子，且

$$f = x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} \prod_{1 \le q \le m} \left(y^t + c_q x^u z^{t-u}\right)^{b_q}. \tag{1.2}$$

这里 $m,t,u \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$； $u < t$ 并且，若 $u \neq 0$，则 u 与 t 互素；$a_1,a_2,a_3,b_1,\ldots,b_m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$； $c_1,\ldots,c_m \in \mathbb{C}^\times$ 两两互异。注意 $d = a_1+a_2+a_3+t(b_1+\cdots+b_m)$。

此外，我们称这样的半单标准形式 f 满足非无迹条件，当

$$u(d-3a_3) \neq (t-u)(d-3a_1). \tag{1.3}$$

条件 (1.3) 颇为费解。由命题 4.9，它刻画了定义 D 中那些容许非无迹半单导子的非正规交叉多项式。利用它，我们完成步骤 2。

定理 E. 设 $f \in \mathbb{C}[x,y,z]$ 是次数为 d 的齐次多项式，使得其相伴射影除子 $D \subset \mathbb{P}^2$ 既不是锥，也不是正规交叉。设约化的 $D_{\mathrm{red}} \subset \mathbb{P}^2$ 至多具有拟齐次孤立奇点。考虑下列条件：

(a) $-\frac{3}{d} \notin$ 零点$(b_f(s))$***; (b)*** $-\frac{3}{d} \notin$ 零点$(b_D(s))$***; (c)*** 经过齐次线性坐标变换后，f 可写成满足(1.3)的半简标准形式（定义 *D*），并满足非无迹条件。

Then

$$\Big[(a)\ is\ true\Big] \iff \Big[both\ (b)\ and\ (c)\ are\ true\Big].$$

第 3 步中，动机 zeta 函数再次登场。三个变量中的齐次多项式 f 的除子的嵌入解消，可以从 $\mathbb{P}^2$中相伴除子的嵌入解消重构出来。随后，f 的动机 zeta 函数在 $-3/d$处的留数，可由非奇异射影曲面上的带标记正规交叉构型编码。第二作者已证明了此类构型的一个结构定理；虽然我们并未使用该定理，但它启发了我们对这一留数的计算。

我们可以证明，对于定义 D 中满足非无迹条件的一类多项式，强单值猜想加强版成立。

定理 F。 设 $f \in \mathbb{C}[x,y,z]$ 是次数为 d的齐次多项式，具有半单标准形式（定义 *D*），满足非无迹条件，且不定义超平面配置。假设所有 $\frac{1}{a_i}$ 和 $\frac{1}{b_i}$ 均不同于 $\frac{3}{d}$。则 $-\frac{3}{d}$不是 $Z_f^{\mathrm{mot}}(s)$ 的极点，也不是 $Z_{f\,0}^{\mathrm{mot}},(s)$的极点。此外，$f$满足强单值猜想加强版及其局部于$0$的版本。

最后，由命题 B、定理 E 和定理 F 可推出定理 A。

以下是路线图。在第 2 节中，我们定义伯恩斯坦–佐藤多项式和动机 zeta 函数，并给出相关背景。作为热身，我们证明命题 B。在第 3 节中，我们聚焦于伯恩斯坦–佐藤多项式并证明定理

C。在第 4 节中，我们转而讨论半单平面曲线的枚举，即命题 4.8，定理 E 由此得出。在第 5 节中，我们研究定理 F 中出现的特殊多项式的动机 zeta 函数。由此我们可以证明定理 F，并进而迅速推出定理 A。

致谢：我们感谢 Alexandru Dimca 慷慨地向我们介绍 du Plessis 和 Wall 的研究成果。我们也感谢 Guillem Blanco 在本项目筹备阶段与我们进行了富有帮助的交流。

2. 伯恩斯坦–佐藤多项式与动机 zeta 函数

设 $R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 和 $f \in R \setminus \mathbb{C}$。本节将定义 f 的伯恩斯坦–佐藤多项式以及 f的动机 zeta 函数，并陈述强单值化猜想。最后，我们给出一个充分条件，使 f 满足强单值化猜想：前提是 f 为齐次多项式，且其附带的约化射影除子 $D_{\mathrm{red}} \subset \mathbb{P}^{n-1}$ 至多具有孤立奇点。

2.1. 伯恩斯坦–佐藤多项式。 设 $\mathbb{A}_n$ 为 R 的魏尔代数，并且 $\mathbb{A}_n[s] = \mathbb{A}_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[s]$。对 $f \in R$引入形式符号 f^s，并将 $R[s, 1/f] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \cdot f^s$记为 $R[s, 1/f]f^s$。 $R[s, 1/f]$上自然的左 $\mathbb{A}_n[s]$-作用，通过令 R-导子按链式法则的形式应用作用于 f^s，延拓为 $R[s, 1/f]f^s$上的作用。由 $1 \otimes f^s$（相应地， $f \otimes f^s$）生成的 $\mathbb{A}_n[s]$-子模称为 $\mathbb{A}_n[s] \cdot f^s$（相应地， $\mathbb{A}_n[s] \cdot f^{s+1}$）。

定义 2.1. 设 $f \in R$。伯恩斯坦–佐藤多项式 $b_f(s) \in \mathbb{C}[s]$ 是满足函数方程的极小首一多项式

$$b_f(s) f^s \in \mathbb{A}_n[s] \cdot f^{s+1}. \tag{2.1}$$

$b_f(s)$ 的根记作 Zeroes($b_f(s)$)。

此外还有局部代数和局部解析 Bernstein–Sato 多项式：重复这一构造，但现在使用 $g \in \mathscr{O}_{X,\, x}$ 以及微分算子层的茎。 g 的局部 伯恩斯坦–佐藤多项式 是 $\mathbb{C}[s]$-多项式 $b_{g,\, x}(s)$，它满足函数方程 (2.1) 的茎版本。

伯恩斯坦–佐藤多项式的存在绝非显而易见：在整体代数情形中，这是 Bernstein [7]证明的；在局部解析情形中，则归功于 Bjork [8]。它最初是为回答 Gelfand 提出的一个问题而引入的，该问题涉及某个分布的亚纯延拓是否存在，以及其极点的位置。事实证明，它在奇点理论中无处不在：其根（及重数）通过跳跃数 [20]和有理奇点 [36], 出现在双有理几何中，也出现在混合 Hodge 模和 Hodge 过滤理论中（例如[29], 或 [5], , 后者给出了与本手稿所讨论情形密切相关的公式）。此外，它还与单值化有重要联系：如果$F_{f,\, p}$ 是 f 在$p \in f^{-1}(0)$ 附近的 Milnor 纤维，那么绕 $\mathbb{C}^\times$ 旋转会在$F_{f,\, p}$上诱导出几何单值化作用，从而在$F_{f,\, p}$的上同调上得到代数单值化作用。Malgrange[28] 和 Kashiwara [24] 证明，对局部伯恩斯坦–佐藤多项式 $b_{f,\, p}(s)$ 的根取指数，即可得到代数单值化的特征值。

从代数角度看，伯恩斯坦–佐藤多项式是某个 $\mathbb{A}_n[s]$-模的$\mathbb{C}[s]$-零化子（的首一生成元）：

$$(b_f(s)) = \operatorname{ann}_{\mathbb{C}[s]} \frac{\mathbb{A}_n[s] \cdot f^s}{\mathbb{A}_n[s] \cdot f^{s+1}} = \operatorname{ann}_{\mathbb{C}[s]} M_f,$$

其中

$$M_f := \frac{\mathbb{A}_n[s]}{\mathrm{ann}_{\mathbb{A}_n[s]} f^s + \mathbb{A}_n[s] \cdot f}.$$

若想进一步了解 Bernstein–Sato 多项式，尤其是从代数视角出发的相关内容，我们推荐综述 [45]。

注 2.2。(a) 若 $f = x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r} \in R$，则 $b_f(s) = \prod_{1 \le t \le r} \prod_{1 \le \ell \le a_t} (s + \frac{\ell}{a_t})$。(b) Bernstein–Sato 多项式不依赖于除子的定义方程的选择。此外，若 $f \in R$ 且 g 是芽 f 在 p处的解析定义方程，则 $b_{f,p}(s) = b_{g,p}(s)$。(c) 代数函数（或解析函数）在 p 处光滑，当且仅当 $b_{f,p}(s) = s + 1$.(d) 在代数和解析情形中，由于 $b_{g,p}(s)$ 是某个模的 $\mathbb{C}[s]$-零化子，不难证明，$b_{g,p}(s)$ 等于 g 在 $q \in U$处的局部 Bernstein–Sato 多项式的最小公倍式，其中 U 是一个足够小的开集。(e) 在 $f \in R$的代数情形下，可以证明 $b_f(s) = \mathrm{lcm}_{p \in \{f=0\}} b_{f,p}(s)$。(f) 由上述注记可推知，$-1$总是任意类型的 Bernstein–Sato 多项式的根。(g) 若 $f \in R$ 是齐次的，则由于等变的 $\mathbb{C}^\times$-作用，上述注记也意味着 $b_f(s) = b_{f,0}(s)$。

在本文中，我们主要关注齐次 f，对此我们知道$b_f(s) = b_{f,0}(s) = \mathrm{lcm}_{p \in \{f=0\}} b_{f,p}(s)$。由于很难确定 $b_f(s)$ 的哪些根是“唯一地”支撑在原点上的，我们作如下定义。

定义 2.3。设 $f \in R$ 是齐次的，$D \subset \mathbb{P}^{n-1}$ 是其相伴除子。D 的***Bernstein–Sato*** 多项式为

$$b_D(s) = \mathrm{lcm}_{q \in D} b_{g_q,q}(s),$$

其中，g_q 是 D 在 q处的局部定义方程。

注 2.4。设 $f \in R$ 是齐次的，其射影除子为 $D \subset \mathbb{P}^{n-1}$。(a) 由注 2.2 可得，$b_D(s) = \mathrm{lcm}_{p \in (\{f=0\} \setminus 0)} b_{f,p}(s)$。此外，$b_D(s)$ 整除 $b_f(s) = b_{f,0}(s)$。(b) 通常可以不失一般性地假设 D 不是锥。回顾一下，若 D 是锥，则经过恰当的坐标变换，D 对应于某个齐次 $g \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{n-1}] \subset R$的除子。特别地，$b_f(s) = b_D(s) = b_g(s)$。最终，我们将关注具有孤立奇点的 D_{red}；此时，若 D是锥，则意味着 $g_{\mathrm{red}} \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ 是一个在 0 处具有孤立奇点的齐次多项式。这是少数几个已知 $b_{g_{\mathrm{red}}}(s)$ 公式的情形之一。

2.2. **动机 zeta 函数**。动机 zeta 函数是 p-进 Igusa zeta 函数的一种“几何升级”。关于其动机和历史，请参阅 [31, 44] 及其中的参考文献。为了定义它，我们先简要介绍簇的 Grothendieck 环。

定义 2.5。 复代数簇的 *Grothendieck* 环 $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$ 是由符号 $[X]$生成的自由阿贝尔群对以下关系取商所得：其中 X 遍历所有复代数簇；若 $X \cong Y$，则有关系 $[X] = [Y]$；若 Y 是 X中的扎里斯基闭子簇，则有关系 $[X] = [Y] + [X \setminus Y]$。

我们始终将 $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$视为一个交换环，其乘法作用由 $[X]\cdot[Y] = [X \times Y]$诱导。我们定义 $\mathbb{L} := [\mathbb{A}^1]$ 以及 $\mathcal{M}_{\mathbb{C}} := K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})[\mathbb{L}^{-1}]$，后者是通过对 $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$中的 $\mathbb{L}$求逆得到的环。

Let $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \setminus \mathbb{C}$, such that $f(0) = 0$.

定义 2.6. 用 $C_m(f)$表示 f的 m接触轨迹，它是 $\mathbb{C}^n$上 m-阶喷射空间的子簇，其中各点与Div(f)的接触阶恰为 m ； 用$C_{m,0}(f)$表示那些附着在原点的 m-阶喷射。 f 的动机 *zeta* 函数为

$$Z_f^{\mathrm{mot}}(s) := \sum_{m\geq 0} [C_m(f)]\, \mathbb{L}^{-mn} (\mathbb{L}^{-s})^m \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}[[\mathbb{L}^{-s}]], \tag{2.2}$$

其中 $\mathbb{L}^{-s}$ 是一个形式变量。 f的局部动机 ζ 函数 记作$Z_{f\,0}^{\mathrm{mot}}(s)$，其定义与类似公式相同，只需将 $[C_m(f)]$ 替换为 $[C_{m,0}(f)]$。

记号 $\mathbb{L}^{-s}$ 源于与 p-进情形的类比； p-进 Igusa ζ 函数由 p^{-s}中的一个类似级数给出。详情可参见例如 [16, 33] 。下文中我们实际上不会用到这个定义。

不妨暂且设想一个更简单的形式幂级数 $q(s) \in \mathbb{Q}[[s]]$。说$q(s) \in \mathbb{Q}(s) = \mathrm{Frac}(\mathbb{Q}[s])$, 等价于说存在有限个极点$p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{Q}$，使得 $q(s) \in \mathbb{Q}[s, \frac{1}{s-p_1}, \ldots, \frac{1}{s-p_m}]$。每个极点 p_k都有一个阶ℓ；它是满足 $(s-p_k)^\ell q(s) \in \mathbb{Q}[s, \frac{1}{s-p_1}, \ldots, \frac{1}{s-p_{k-1}}, \frac{1}{s-p_{k+1}}, \ldots, \frac{1}{s-p_r}]$ 的最小 ℓ。对于 $A[[s]]$中的形式幂级数，只要 A 是一个整环并且我们使用分式域 $\mathrm{Frac}(A[s])$，类似的结论也成立。对于 $Z_f^{\mathrm{mot}}(s) \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}[[\mathbb{L}^{-s}]]$，情况则大不相同：不仅 $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$ 不是整环[32], ，甚至 $\mathbb{L} \in K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$ 也是一个零因子 [11]。尽管如此，Denef 和 Loeser 证明了 [16] 存在一个有限集 $S \subset \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}_{>0}$，使得

$$Z_f^{\mathrm{mot}}(s) \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}\left[\left\{\frac{1}{\mathbb{L}^{a+bs}-1}\right\}_{(a,b)\in S}\right] \subset \mathcal{M}_{\mathbb{C}}[[\mathbb{L}^{-s}]]. \tag{2.3}$$

因此，动机 zeta 函数在某种意义上是“有理的”，由此引出了 $Z_f^{\mathrm{mot}}(s)$ 和 $Z_{f\,0}^{\mathrm{mot}}(s)$ 的极点及极点阶数的概念。

注 2.7. $Z_f^{\mathrm{mot}}(s)$ 和 $Z_{f\,0}^{\mathrm{mot}}(s)$ 的极点及极点阶数概念显然存在一些微妙之处。关于动机 zeta 函数的极点的精确定义（其中 s_0 是一个有理数）及其极点阶数，请参见 [34, 第 4]节 $\mathbb{L}^{-s_0}$ 。下文中，为简便起见，我们将直接说“s_0 是 $Z_f^{\mathrm{mot}}(s)$ 或 $Z_{f\,0}^{\mathrm{mot}}(s)$ 的一个极点”。

这些ζ函数可以用嵌入解消 $h : Y \to \mathbb{C}^n$ of Div(f) $\subset \mathbb{C}^n$表示为一个公式。这里的意思是， h 是一个适当双有理态射，Y是光滑的， h在 $\mathbb{C}^n \setminus f^{-1}\{0\}$上诱导一个同构，并且 $h^{-1}(f^{-1}\{0\}) = \cup_{j\in T} E_j$ 是一个简单正规交叉除子，即，不可约分支 E_j 是彼此横截相交的非奇异超曲面。

每个分支 E_j 的数值数据为（N_j, ν_j），其中 N_j 和 $\nu_j - 1$分别是 E_j 在由 $f \circ h$ 和 $h^*(dx \wedge \ldots \wedge dx_n)$定义的除子中的重数。也就是说，

$$\mathrm{Div}(f \circ h) = \sum_{j \in T} N_j E_j \quad \text{and} \quad K_Y = \mathrm{Div}(h^*(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n)) = \sum_{j \in T} (\nu_j - 1) E_j,$$

其中 $K_\bullet$ 表示典范除子。对于 T 的每个子集 I，我们也令 $E_I^\circ = \cap_{i \in I} E_i \setminus \cup_{k \notin I} E_k$。注意，$Y$ 是所有 E_I° 的不交并，$I \subset T$，并且 h 在 $E_\emptyset^\circ$ 与 $\mathbb{C}^n \setminus f^{-1}\{0\}$ 之间诱导出一个同构。

定理 2.8。*([16])* 使用上述记号，我们有

$$Z_f^{\mathrm{mot}}(s) = \mathbb{L}^{-n} \sum_{I \subset T} [E_I^\circ] \prod_{i \in I} \frac{\mathbb{L} - 1}{\mathbb{L}^{\nu_i + N_i s} - 1}$$

and

$$Z_{f,0}^{\mathrm{mot}}(s) = \mathbb{L}^{-n} \sum_{I \subset T} [E_I^\circ \cap h^{-1}(0)] \prod_{i \in I} \frac{\mathbb{L} - 1}{\mathbb{L}^{\nu_i + N_i s} - 1}.$$

还有其他与 f 相关联的 ζ 函数。其中一个是拓扑 ζ 函数，最早在 [15] 中引入。

定义 2.9。（局部）拓扑 ζ 函数 f 为

$$Z_{f,0}^{\mathrm{top}}(s) := \sum_{I \subset T} \chi(E_I^\circ \cap h^{-1}(0)) \prod_{i \in I} \frac{1}{\nu_i + N_i s} \in \mathbb{Q}(s), \tag{2.4}$$

其中 $\chi(.)$ 表示拓扑欧拉示性数。

此外还有 p-进 zeta 函数，不过我们不打算探讨这个方向。无论如何，拓扑 zeta 函数和 p-进 zeta 函数（除有限多个p外）都是动机 zeta 函数的特殊化 [16, 第 2], 节，因此，拓扑 zeta 函数的极点（分别是 p-进 zeta 函数极点的实部）都包含于动机 zeta 函数的极点之中。注意，这个包含关系可能是严格的。

对于这些 zeta 函数中的任何一种，要理解其极点都非常困难。尽管如此，当 $n = 2$ 时，第二作者在 [40, 定理 4.3] 中确定了拓扑（以及隐含地，动机）zeta 函数的所有极点。

定理 2.10. 设 $h : Y \to \mathbb{C}^2$ 是 $f^{-1}\{0\}$ 在 0 处的芽的最小嵌入解消。我们有，s_0 是 $Z_{f\,0\,,}^{\mathrm{top}}(s)$ 或 $Z_{f\,0\,,}^{\mathrm{mot}}(s)$ 的极点，当且仅当 $s_0 = -\frac{\nu_j}{N_j}$ 对于严格变换的某个分支 E_j，或对于与其他分量相交次数至少为三的某个例外分量 E_j 成立。

2.3. **强单值化猜想**。(局部) Bernstein–Sato 多项式的根和(局部)动机 zeta 函数的极点都是（芽）奇点不变量。强单值化猜想 指出这两组对象之间存在紧密联系。

猜想 2.11（（全局/局部）强单值化猜想）。设 $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \setminus \mathbb{C}$ 并假设 $f(0) = 0$。则：

(a) 极点$(Z_f^{\mathrm{mot}}(s)) \subset$ 零点$(b_f(s))$（全局版本）；*(b)* 极点$(Z_{f\,0\,,}^{\mathrm{mot}}(s)) \subset$零点$(b_{f,0}(s))$（在 0 处的局部版本）。

这一猜想有若干变体，它们都有全局版本和局部版本。可以减弱该包含关系：单值猜想 断言，在对根集和极点集同时取指数后，同样的包含关系仍然成立。这一较弱的猜想说明了其名称的由来，因为我们已经看到，对零点($b_{f,0}(s)$)取指数，可恢复 0 附近 Milnor 纤维的代数单值的特征值。也可以加强该包含关系：强单值猜想加强版 指出，若 s_0 是阶为 k 的极点，则 s_0 是重数至少为 k 的根。也可以用拓扑或p-进版本替换动机 zeta 函数。由于后者是前者的特殊化，你所关心的任一猜想的动机版本都将蕴含其拓扑或 p-进版本。

如引言所述，当 $n = 2$ 强单值化猜想成立时 [26, 9], ，否则它仍是一个完全开放的问题；即使我们将范围限制在“较容易”的情形—— $\mathbb{A}^3$中的齐次多项式，一般而言，我们也只有在超平面配置、孤立奇点以及某些特殊的牛顿非退化多项式中，才能确定该猜想成立。考虑齐次多项式的一个优点是，它们有自然的嵌入解消。由于后文将多次用到这一点，我们在此给出一些细节。

下文设 $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \setminus \mathbb{C}$ 为齐次多项式，其相伴除子为$D \subset \mathbb{P}^{n-1}$。对原点进行爆破，得到一个例外除子 $F \simeq \mathbb{P}^{n-1}$。记 D_0 为f的严格变换（计入重数）在 F上的限制，并注意到 $D_0 \simeq D$。现在对 $D_0 \subset F$取一个嵌入解消 $\pi\colon F_0 \to F$，并将 $\pi^{-1}(D_0)$的不可约分支记为 $\{E_j\}_{j\in T}$。这诱导出一个嵌入解消 $h\colon Y \to \mathbb{C}^n$，其对象为 Div($f$) $\subset \mathbb{C}^n$；其中，h^{-1} Div(f) 的不可约分支（不计重数）为 F_0 和 $\{F_j\}_{j\in T}$。对于所有 $j \in T$，F_j都是对应 E_j上的一个 $\mathbb{A}^1$-丛。对于这样的 $j \in T$，$\mathbb{A}^1$-丛结构意味着，相对于 h，F_j 的数值数据与相对于 π，E_j 的数值数据相同。

引理 2.12。设 $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \setminus \mathbb{C}$ 为次数为 d 的齐次多项式，并采用前述记号/构造。则

$$Z_f^{\mathrm{mot}}(s) = \mathbb{L}^{-n}\,\frac{(\mathbb{L}-1)\,\mathbb{L}^{n+ds}}{\mathbb{L}^{n+ds}-1}\sum_{I\subset T}[E_I^\circ]\prod_{j\in I}\frac{\mathbb{L}-1}{\mathbb{L}^{\nu_j+N_j s}-1}, \tag{2.5}$$

其中，对于 $j \in T$，$(N_j、\ \nu_j)$ 是分支 E_j 相对于 $\pi\colon F_0 \to F$的数值数据。

从 (2.5) 中删去因子 $\mathbb{L}^{n+ds}$，得到 $Z_{f\,0}^{\mathrm{mot}},(s)$的公式。

证明。以下三个事实是常规的。

(i) 若 $I \subset T$，则 $[F_I^\circ] = [F_{I\cup\{0\}}^\circ](\mathbb{L}-1) = [E_I^\circ](\mathbb{L}-1)$。（这包括 $I = \emptyset$的情形。）事实上，由于每个 F_j 都是其配对的 E_j，$[F_j] = [E_j \times \mathbb{A}^1] = [E_j]\,\mathbb{L}$上的 $\mathbb{A}^1$-丛，而 $I \subset T$也同样如此，该事实很容易得到。(ii) $\overline{1+\frac{1}{\mathbb{L}^{n+ds}-1}} = \overline{\frac{\mathbb{L}^{n+ds}}{\mathbb{L}^{n+ds}-1}}$。(iii) F_0的数值数据为（N_0，ν_0）=（d，n）。

现在将定理 2.8 中 $Z_f^{\mathrm{mot}}(s)$的公式分解为两项：一项枚举包含 0 的指标集 $I \subset T \cup \{0\}$，另一项枚举其余指标集。利用这三个事实即可证明关于 $Z_f^{\mathrm{mot}}(s)$ 的结论。对于 $Z_{f\,0}^{\mathrm{mot}},(s)$，论证更简单，因为在定理 2.8 关于$Z_{f\,0}^{\mathrm{mot}},(s)$的表达式中，只出现包含 0 的指标集 I。□

在我们关注的情形中，需要设法控制极点的杂乱分布。

命题 B. 设 $f \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n] \setminus \mathbb{C}$ 是次数为 d 的齐次多项式。设 $D \subset \mathbb{P}^{n-1}$ 为相伴除子，且 D_{red} 为其约化形式。假设 D_{red} 仅有孤立奇点，并且在这些点上，D 均满足局部强单值猜想。现在考虑以下条件：

$$\left[-\frac{n}{d} \in \mathrm{Poles}(Z_f^{\mathrm{mot}}(s))\right] \implies \left[-\frac{n}{d} \in \mathrm{Zeroes}(b_f(s))\right]. \tag{1.1}$$

若 (1.1) 成立，则 f 满足强单值化猜想。类似地，若 0 处的局部版本 (1.1) 成立，则 f 在 0 处满足局部强单值猜想。

此外，在以下情形中，关于 D 的假设成立： $n=3$ 且 D 任意； $n \geq 4$ 且 $D = D_{\mathrm{red}}$ 仅有准齐次孤立奇点。

证明。 我们将使用引理 2.12 及其记号。我们先证明全局结论。

因此，我们可以并且将假设， $\pi : F_0 \to F$对 $D_0 \simeq D$ 的嵌入解消在$D_{0,\mathrm{red}} \simeq D_{\mathrm{red}}$的奇异轨迹之外是一个同构。令$\{p_\ell\}_{\ell\in L}$ 为 D_{red} 的奇点构成的有限集，其对应的局部定义方程为$\{g_{p_\ell}\}_{\ell\in L}$。 记$D = \sum_{m\in M} a_m D_m$； 其不可约分支 D_m 与 π 的严格变换一一对应，因此 $M \subset T$ 枚举了这些变换。此外，若 $m \in M$，则 E_m 的数值数据为 $N_m = a_m$ 和 $\nu_m = 1$。因此

$$\begin{aligned}
&\sum_{I\subset T}[E_I^\circ]\prod_{i\in I}\frac{\mathbb{L}-1}{\mathbb{L}^{\nu_i+N_i s}-1}\\
&= E_\emptyset^\circ + \sum_{\ell\in L}\sum_{I\subset T}[E_I^\circ \cap \pi^{-1}(p_\ell)]\prod_{i\in I}\frac{\mathbb{L}-1}{\mathbb{L}^{\nu_i+N_i s}-1} + \sum_{\substack{M'\subset M\\ M'\neq\emptyset}}[E_{M'}^\circ]\prod_{m\in M'}\frac{\mathbb{L}-1}{\mathbb{L}^{\nu_m+N_m s}-1}\\
&= E_\emptyset^\circ + \sum_{\ell\in L}\mathbb{L}^{n-1}\, Z^{\mathrm{mot}}_{g_{p_\ell},p_\ell}(s) + \sum_{\substack{M'\subset M\\ M'\neq\emptyset}}[E_{M'}^\circ]\prod_{m\in M'}\frac{\mathbb{L}-1}{\mathbb{L}^{1+a_m s}-1}.
\end{aligned}$$

将此与（2.5）比较，我们可得

$$\begin{aligned}
Z_f^{\mathrm{mot}}(s) = \mathbb{L}^{-n}\,\frac{(\mathbb{L}-1)(\mathbb{L}^{n+ds})}{\mathbb{L}^{n+ds}-1}\Bigg([E_\emptyset^\circ] + \sum_{\ell\in L}\mathbb{L}^{n-1}\, Z^{\mathrm{mot}}_{g_{p_\ell},p_\ell}(s)\\
+ \sum_{\substack{M'\subset M\\ M'\neq\emptyset}}[E_{M'}^\circ]\prod_{m\in M'}\frac{\mathbb{L}-1}{\mathbb{L}^{1+a_m s}-1}\Bigg)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

并且

$$\mathrm{Poles}(Z_f^{\mathrm{mot}}(s)) \subset \{-\frac{n}{d}\} \cup \left(\bigcup_{\ell\in L}\mathrm{Poles}(Z^{\mathrm{mot}}_{g_{p_\ell},p_\ell}(s))\right) \cup \left(\bigcup_{m\in M}\{-\frac{1}{a_m}\}\right).$$

根据注 2.2， f 的伯恩斯坦–佐藤多项式是其所有局部 Bernstein–Sato 多项式的最小公倍式。这些局部 Bernstein–Sato 多项式包括 $b_{g_{p_\ell},\ p_\ell}(s)$，对所有 $\ell \in L$均如此。它们还包括 $b_{f_{q_m},\ q_m}(s) = (s+1/a_m)\cdots(s+(a_m-1)/a_m)(s+1)$，其中 q_m 是 D_m的一般点，见注 2.2。由于我们

假设 Poles($Z^{\mathrm{mot}}_{g_{p_\ell},\ p_\ell}(s)$) ⊂Zeroes($b_{g_{p_\ell},\ p_\ell}(s)$)，我们可知

$$\mathrm{Poles}(Z_f^{\mathrm{mot}}(s)) \setminus \{-\frac{n}{d}\} \subset \mathrm{Zeroes}(b_f(s)).$$

至此，全局强单值猜想的证明完成。

关于 0 处局部强单值猜想的相应断言，证明完全类似。由于从 (2.5) 中删去 $\mathbb{L}^{n+ds}$ 因子可得 $Z^{\mathrm{mot}}_{f\,0}(s)$，从 (2.6) 中删去同一因子也可得 $Z^{\mathrm{mot}}_{f\,0}(s)$。由于 $b_f(s) = b_{f,0}(s)$，关于极点与根的分析与前述完全相同。□

例 2.13. 可能出现这样的情况：$-n/d$ 是 $b_f(s)$的零点，却不是$Z^{\mathrm{mot}}_f(s)$的极点，即使满足命题 B 的所有假设。一个非约化的例子是 $f = xy(x-y)z^2(x-z)^4$, 见 [12, 附录，例 A.1]。

3. 关于伯恩斯坦–佐藤多项式的一个根

本节中，$R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 的无关理想为 $\mathfrak{m}$。除非另有说明，我们赋予 R 标准分次，其中对 $1 \le i \le n$，$\deg(x_i) = 1$，并在指代此分次时使用 deg(–)。R中次数为 $\le \ell$ 的元素记为 $R_{\le \ell}$；齐次度为 ℓ 的元素记为 R_ℓ。最后，$f \in R$ 专用于次数为 d的齐次多项式。我们将 f_{red} 设为 f的约化对应项。

受命题 B 启发，我们需要一个判定准则，以确定 $-n/d$ 是否为伯恩斯坦–佐藤多项式 f的根。当相应的约化射影除子至多具有孤立拟齐次奇点时，我们在定理 C 中完整刻画了 $-n/d$ 的根性。这种等价关系涉及 f的 Jacobian 理想的 Syzygy 数据；等价地，沿f的对数导子 。

3.1. 对数导子与一个引理。

R 上的 $\mathbb{C}$-线性导子模记作 Der_R。对于任意 $\delta \in \mathfrak{m}\cdot\mathrm{Der}_R$，我们有 $\delta \bullet \mathfrak{m}^k \subset \mathfrak{m}^k$。

定义 3.1。 设 $\delta \in \mathfrak{m}\cdot\mathrm{Der}_R$。我们称 $\delta^{(2)}$ 为向量空间的诱导 $\mathbb{C}$-映射

$$\delta^{(2)} : \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} \to \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}.$$

当 $\delta^{(2)}$ 为半单（分别为幂零）时，我们称 δ 为半单 （分别为幂零）。 δ 的迹 trace(δ)是 $\delta^{(2)}$的迹。

固定坐标 $\{x_i\}$ 及对偶坐标 $\{\partial_i\}$，得到一个同构 $\mathrm{Der}_R \simeq \bigoplus_i R\cdot\partial_i$。将 R 的分次提升为 Der_R的分次：规定所有 $\{\partial_i\}$ 的次数为 -1。我们用 $\mathrm{Der}_{R,\le\ell}$ （分别用 $\mathrm{Der}_{R,\ell}$）表示 Der_R中次数为 $\le \ell$ （分别为齐次度 ℓ）的元素，并用 deg(δ)表示一个导子的次数。（注意：我们所做的只是将 $\mathrm{Der}_R \simeq \bigoplus R$与$(-1)$作了识别。）

我们可以唯一地写成 $\mathrm{Der}_R \ni \delta = \sum_{-1\le k<\infty}\delta_k$，其中 δ_k 是次数为 k的齐次对象。我们尤其关注零次齐次部分。为简化记号，本文中均用 $[\boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$ 表示行矩阵，用 $[\boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}^T$表示列矩阵。于是

$$\delta_0 = \underline{[\boldsymbol{x}]}Q\overline{[\boldsymbol{\partial_x}]} \tag{3.1}$$

[1]关于其他正分次的讨论，请参见第3.2小节。

对于 $Q \in \mathrm{Mat}_{n,\ n}(\mathbb{C})$。此外，

$$\delta \in \mathfrak{m} \cdot \mathrm{Der}_R \text{ 是半单（分别为幂零）} \Longleftrightarrow \delta_0 \text{ 是半单（分别为幂零）} \Longleftrightarrow Q\text{是半单（分别为幂零）。}$$

此外：$\delta \in \mathfrak{m} \cdot$的迹等于 Q的迹。

由于 Q 具有 Jordan–Chevalley 分解，我们可以作如下定义。

定义 3.2。令 $\delta \in \mathfrak{m} \cdot \mathrm{Der}_R$，并写作 $\delta = \sum_{0 \le k < \infty} \delta_k$，其中 $\delta_0 = [\boldsymbol{x}]Q[\boldsymbol{\partial_x}]$。令 $Q = Q_S + Q_N$ 为 Q 的 Jordan–Chevalley 分解，其半单部分和幂零部分分别为.....定义导子 $\delta_S = [\boldsymbol{x}]Q_S[\boldsymbol{\partial_x}]$ 和 $\delta_N = \delta - \delta_S$。于是，$\delta$的弱 *Jordan–Chevalley* 分解 为 $\delta = \delta_S + \delta_N$。注意：$\delta_S$是半单的、零次齐次的；$\delta_N$ 是幂零的；$[\delta_S, \delta_{N,0}] = 0$。

注记 3.3。

(a) 我们称这种分解为弱分解，因为它实际上是 $\delta^{(2)}$ 的真正 Jordan–Chevalley 分解，只不过改用 δ 来表述。例如，没有理由认为 $[\delta_S, \delta_N] = 0$。不过，我们的弱 Jordan–Chevalley 分解是唯一的，因为 $\delta^{(2)}$ 的分解是唯一的。(b) 在整篇手稿中，每当我们选取 $\delta \in \mathfrak{m} \cdot \mathrm{Der}_R$ 时，通常都默认假设 $\delta \neq 0$。

我们还需要半单导子的以下特殊情形。

定义 3.4. 固定坐标 $(x; \partial_x)$。导子 δ 关于这些坐标是对角的，当且仅当 $\delta = \delta_0 = [\boldsymbol{x}]Q[\boldsymbol{\partial_x}]$，其中 Q 是对角矩阵。

注记 3.5。

(a) 导子是否半单或幂零与坐标的选取无关。导子的迹是其特征值之和，也与坐标的选取无关。导子是否对角则取决于坐标的选取。(b) 设 $y_1, \ldots, y_n$ 是无关理想$\mathfrak{m}$的齐次极小生成元。存在 $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 使得 $[\boldsymbol{y}] = A[\boldsymbol{x}]$。注意，$A$ 是雅可比矩阵 $\left[\partial y_i / \partial x_j\right]$。因此 $A^T[\boldsymbol{\partial_y}] = [\boldsymbol{\partial_x}]$。

令 $\delta \in \mathfrak{m} \cdot \mathrm{Der}_R$。令 $\delta_{(x;\partial_x)}$ 和 $\delta_{(x:\partial_y)}$ 分别表示 δ关于坐标 $(x;\ \partial_x)$ 和 $(y; \partial_y)$ 的表达式。δ 的零次部分可表示为：

$$[\delta]_{(x;\partial_x),0} = \underline{[\boldsymbol{x}]}Q\overline{[\boldsymbol{\partial_x}]} = \left(A^{-1}\overline{[\boldsymbol{y}]}\right)^T Q\left(A^T\overline{[\boldsymbol{\partial_y}]}\right) = \underline{[\boldsymbol{y}]}\left((A^{-1})^T Q A^T\right)\overline{[\boldsymbol{\partial_y}]} = [\delta]_{(y;\partial_y),0} \tag{3.2}$$

(c) 令 $E = \sum x_i \partial_i$ 为欧拉导子，$\delta \in \mathfrak{m} \cdot \mathrm{Der}_R$ 为半单导子。前一项表明，存在一组齐次坐标 $(y; \partial_y)$，使得 $E_{(y;\partial_y)} = \sum y_i \partial_y$ 和 $\delta_{(y;\partial_y),0}$ 均为对角形式。

我们实际关注的是 Der_R 的以下子模。

定义 3.6. 设 $h \in R$。h 上的对数导子模为

$$\mathrm{Der}_R(-\log h) = \{\delta \in \mathrm{Der}_R \mid \delta \bullet h \in (h)\}.$$

容易验证，$\mathrm{Der}_R(-\log\ h)$ 不依赖于 R-理想 (h) 的生成元选择。

我们还定义湮灭对数导子

$$\mathrm{Der}_R(-\log_0 h) = \{\delta \in \mathrm{Der}_R \mid \delta \bullet h = 0\}.$$

由于 $\mathbb{C}^\times$ 是 R中的唯一单位元，$\mathrm{Der}_R(-\log_0 h)$也不依赖于理想 $R \cdot h$的生成元的选择。

注 3.7。设 $h \in R$具有分解 $h = h_1^{m_1} \cdots h_r^{m_r}$，其中各因子均不可约；设$h_{\mathrm{red}} = h_1 \cdots h_r$是 h的约化形式。则

$$\mathrm{Der}_R(-\log h) = \cap_k \mathrm{Der}_R(-\log h_k^{m_k}) = \cap_k \mathrm{Der}_R(-\log h_k) = \mathrm{Der}_R(-\log h_{\mathrm{red}}).$$

$\mathrm{Der}_R(-\log_0 h)$与 $\mathrm{Der}_R(-\log_0 h_{\mathrm{red}})$之间不存在类似的对应关系。

注 3.8。设 $f \in R$ 是次数为 d的齐次多项式。

(a) 欧拉算子 $E = \sum x_i\partial_i \in \mathrm{Der}_R(-\log\ f)$ 并满足 $E \bullet f = df$。因此，$\mathrm{Der}_R(-\log\ f) = R \cdot E \oplus \mathrm{Der}_R(-\log_0 f)$。(b) 由于 f是齐次的，$\mathrm{Der}_R(-\log\ f) = \oplus_k \mathrm{Der}_R(-\log\ f)_k$。(c) 设 $D \subset \mathbb{P}^{n-1}$ 为相应的射影除子。下列条件等价：$\mathrm{Der}_R(-\log\ f) \subset \mathfrak{m} \cdot \mathrm{Der}_R$；$D$不是锥，即不存在坐标变换，也不存在 $g \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$，使得在所述坐标变换之后，$R \cdot f = R \cdot g$。详见 [22, 引理 3.2]。(d) 假设 $f = gh$ 且 $\delta \in \mathrm{Der}_R(-\log_0 gh)$ 是半单的。则存在 $\tau \in \mathrm{Der}_R(-\log_0 g)$ 是半单的。事实上，作坐标变换使得 $\delta \in \mathrm{Der}_R(-\log_0 gh)_0$ 为对角的。则 $\frac{\delta \bullet g}{E \bullet g} E - \delta \in \mathrm{Der}_R(-\log_0 g)$，且其次数为零的分支是对角的，因而为半单的。(e) 在固定坐标后，上述论证表明：若 $\overline{\delta} \in \mathrm{Der}_R(-\log_0 gh)_0$是对角的，则存在 $\tau \in \mathrm{Der}_R(-\log_0 g)_0$是对角的。(f) 第 (d) 项（相应地，第 (e) 项）蕴含 $\mathrm{Der}_R(-\log_0 f)$ 包含一个半单（相应地，对角）导子，当且仅当 $\mathrm{Der}_R(-\log_0 f_{\mathrm{red}})$ 包含一个半单（相应地，对角）导子。

我们的目标是证明，沿齐次 f 的对数导子与弱 Jordan–Chevalley 分解相容：也就是说，若 $\delta \in \mathrm{Der}_R(-\log\ f) \cap \mathfrak{m} \cdot \mathrm{Der}_R$，则 δ_S，$\delta_N \in \mathrm{Der}_R(-\log\ f) \cap \mathfrak{m} \cdot \mathrm{Der}_R$。这可由 [14,命题 3.2]，推出，它是形式幂级数中的对应版本。

设 $S = \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$，注意到 $R \subset S$。设 $\hat{\mathfrak{m}}$ 为 S 的极大理想，它正是将 $\mathfrak{m} \subset R$ 扩张到 S 所得的理想。S-导子 Der_S 包含 Der_R。$\widehat{\ }$ 为了确定各种导子的位置，我们用 $\zeta \in \mathrm{Der}_S$、$\delta \in \mathrm{Der}_R$、$\delta$ 分别表示 δ 在 S 中的像，以及 f 表示 $f \in R$ 在 S 中的像。任意 $\zeta \in \mathrm{Der}_S$ 都可以唯一写成 $\zeta = \sum_{-1 \le k < \infty} \zeta_\ell$，其中 $\zeta_\ell \in \mathrm{Der}_S$ 是次数为 ℓ 的齐次导子，而 Der_S 的加权方式与 Der_R 类似。最后，我们也可以定义形式对数导子：对于 $g \in S$，定义 $\mathrm{Der}_S(-\log\ g) = \{\zeta \in \mathrm{Der}_S \mid \zeta \bullet g \in S \cdot g\}$。

${}_S\mathrm{Der}$ 中半单元素和拓扑幂零元素的概念由 [21, 定理 1.5、2.2 和 2.3] 建立。我们不对这些概念作定义，但指出这些结果证明了 Der_S 存在 Jordan–Chevalley 分解定理：任意$\zeta \in \mathrm{Der}_S$ 都能唯一地写成 $\zeta = \zeta_S + \zeta_N$，其中 ζ_S 为半单元素，ζ_N 为拓扑幂零元素，并且 $[\zeta_S, \zeta_N] = 0$。我们关注该理论的以下应用。

命题 3.9. *([14, 命题 3.2])* 设 $g \in S$，且 $\zeta \in \mathrm{Der}_S(-\log\ g)$。设 $\zeta = \zeta_S + \zeta_N$ 是 ζ 的 *Jordan–Chevalley* 分解。那么 $\zeta_S,\ \zeta_N \in \mathrm{Der}_S(-\log\ g)$。

要为 $f \in R$ 齐次的多项式推出关于 $\mathrm{Der}_R(-\log\ f)$ 的同类结果并不困难。我们首先需要下面这个直接推论。

命题 3.10. 设 $\delta \in \mathfrak{m} \cdot \mathrm{Der}_R$ 和 $\delta \in \mathrm{Der}_S$ 是映射在 $\mathrm{Der}_R \subset \mathrm{Der}_S$ 下的像。设 $\delta = (\delta)_S + (\delta)_N$ 是 δ 的 *Jordan–Chevalley* 分解。那么

$$\delta = (\widehat{\delta})_{S,0} + \left((\widehat{\delta})_N + \sum_{1 \le k < \infty} (\widehat{\delta})_{S,k} \right)$$

这是 $\delta \in \mathrm{Der}_R$ 的弱 *Jordan–Chevalley* 分解：$(\delta)_{S,\ 0} = \delta_S \in \mathrm{Der}_R$ 以及 $(\delta)_N + \sum_{1 \le k < \infty} (\delta)_{S,\ k} = \delta_N \in \mathrm{Der}_R$。

证明。注意到 $(\delta)_S, 0,\ (\delta)_N + \sum_{1 \le k \le \infty} (\delta)_{S,k} \in \mathrm{Der}_R$，因为 $\delta \in \mathrm{Der}_R$ 和 $\mathrm{Der}_{S,0} \subset \mathrm{Der}_R$。根据 [14, 命题 3.1], ，我们知道 $\delta_0 = (\delta)_{S,0} + (\delta)_{N,0}$ 是 δ_0 的弱 Jordan–Chevalley 分解。特别地，$(\delta)_{S,0} \in \mathrm{Der}_R$ 是半单的，而 $(\delta)_{N,0} \in \mathrm{Der}_R$ 是幂零的。由于 $\mathfrak{m} \cdot \mathrm{Der}_R$ 中元素的幂零性由其零次部分决定，因此 $(\delta)_N + \sum_{1 \le k < \infty} (\delta)_{S,k} \in \mathrm{Der}_R$ 也是幂零的。□

我们达到了目标。

引理3.11。设 $f \in R$ 为齐次的。考虑 $\delta \in \mathrm{Der}_R(-\log\ f) \cap \mathfrak{m} \cdot \mathrm{Der}_R$ 及其弱 *Jordan–Chevalley* 分解 $\delta = \delta_S + \delta_N$。那么 $\delta_S, \delta_N \in \mathrm{Der}_R(-\log\ f)$。

此外，若 $\delta \in \mathrm{Der}_R(-\log_0 f)_0, ,$ 则 $\delta_S, \delta_N \in \mathrm{Der}_R(-\log_0 f)_0$ 也成立。

证明。由 [14, 命题 3.2], $(\delta)_S$，$(\delta)_N \in \mathrm{Der}_S(-\log\ f)$。由于 f 是齐次的，这意味着对于所有 k，$(\delta)_{S,k}$、$(\delta)_{N,k} \in \mathrm{Der}_R(-\log\ f)_k$。由于 $(\delta)_{S,0} = \delta_S \in \mathrm{Der}_R$ 和 $(\delta)_N + \sum_{-1 \le k < \infty} (\delta)_{S,k} = \delta_N \in \mathrm{Der}_R$ 是 $k \neq 0$ 齐次元素在 $\mathrm{Der}_R(-\log\ f)$ 中的有限和（命题 3.10），显然 $\delta_S, \delta_N \in \mathrm{Der}_R(-\log\ f)$。

现在假设 $\delta \in \mathrm{Der}_R(-\log_0 f)_0$。我们知道 $\delta_N \in \mathrm{Der}_R(-\log\ f)_0$，因此 $\delta_N \bullet f = \lambda f$。由 [22, 推论3.3], 可知 $\lambda = 0$。所以，若 δ_N 非零，则 $\delta_N \in \mathrm{Der}_R(-\log_0 f)_0$，结论得证。□

下面说明我们通常如何使用引理3.11：若 f 是齐次的，则存在 $\mathrm{Der}_R(-\log_0 f)$ 的一组基 $\{\delta_k\}$，使得每个 δ_k 要么是半单的，要么是幂零的。

我们已经定义了导子的迹，但尚未深入探讨这一概念。接下来的内容将略微揭示其重要性。

注3.12。考虑 $\mathrm{Der}_R \subset \mathbb{A}_n$，并将 $\delta = \sum_{-1 \le j < \infty} \delta_j$ 表示为其齐次分量之和。然后利用 $\mathbb{A}_n$ 中的关系，我们得到

$$\delta = \sum_{-1 \le j < \infty} \delta_j = \sum_{-1 \le j < \infty} \sum_{1 \le i \le n} a_{ji} \partial_i = \sum_{-1 \le j < \infty} \sum_{1 \le i \le n} (\partial_i a_{ji} - \partial_i \bullet a_{ji}).$$

特别地，若我们写作 $\delta_0 = \sum_{0 \le r,c \le n} q_{rc} x_r \partial_c = \underline{[\boldsymbol{x}]} Q \underline{[\boldsymbol{\partial_x}]}$，便可得出

$$\delta_0 = \underline{[\boldsymbol{\partial_x}]} Q^T \overline{[\boldsymbol{x}]} - \mathrm{trace}(\delta_0).$$

3.2. **局部拟齐次性与对称射影超曲面**。在我们的应用中，$\mathrm{Der}_R(-\log_0 f)$ 中的非无迹半单元素最为相关。本小节旨在说明半单对数导子的作用，帮助读者建立直观认识。

定义 3.13. 令 $f \in R$ 为齐次。我们称

$$f \text{ is } t\text{-symmetric when } \dim_{\mathbb{C}} \left(\mathrm{Der}_R(-\log_0 f)_0 \right) \geq t.$$

当等号成立时，我们称 f 恰为 t-对称。我们将 1-对称性的概念细化如下。我们称

- f 是 1-对称幂零的，其中 $\mathrm{Der}_R(-\log_0 f)_0 \ni \delta$；当 $\delta \neq 0$ 为幂零时，
- f 是 1-对称半单的，当 $\mathrm{Der}_R(-\log_0 f)_0 \ni \delta$ 具有 $\delta \neq 0$ 半单导子时；
- f 是 1-对称非无迹半单的，当 $\mathrm{Der}_R(-\log_0 f)_0 \ni \delta \neq 0$具有 δ 半单导子且满足 $\mathrm{trace}(\delta) \neq 0$时。

最后，若 f 是约化的，我们也可以说 $D_{\mathrm{red}} \subset \mathbb{P}^{n-1}$ 具有这些性质。

注释 3.14。

(a) 定义 3.13 中的性质是理想 (f) 的性质，而不是其任何特定生成元的性质。

(b) 设 $E = \sum x_i \partial_i$ 为欧拉算子。那么

$$\begin{aligned} \mathrm{Der}_R(-\log_0 f)_0 \oplus \mathbb{C} \cdot E &= \mathrm{Der}_R(-\log f)_0 \\ &= \mathrm{Der}_R(-\log f_{\mathrm{red}})_0 = \mathrm{Der}_R(-\log_0 f_{\mathrm{red}})_0 \oplus \mathbb{C} \cdot E. \end{aligned}$$

特别地，f 是 1-对称半单的，当且仅当 f_{red} 是 1-对称半单的。而且，f 是 1- 对称半单的，当且仅当 $\mathrm{Der}_R(-\log\ f)_0$ 包含两个线性无关的半单导子。

在我们的应用中，我们最关注具有孤立奇点的射影超曲面。这一几何假设限制了超曲面所能具有的对称性程度，正如 du Plessis 和 Wall 所证明的那样。

命题 3.15. *(*[19, 引理 2.7]*)* 设 $D_{\mathrm{red}} \subset \mathbb{P}^{n-1}$ 为约化的，且 $f \in R$ 是其仿射锥的定义方程。那么：

$$\left[D_{\mathrm{red}} \textit{ has (at worst) isolated singularities} \right] \textit{ and } \left[\deg(f) \geq 4 \right] \implies \dim_{\mathbb{C}} \left(\mathrm{Der}_R(-\log_0 f)_0 \right) \leq 1.$$

换句话说，如果 D_{red} 至多有孤立奇点，且 $\deg(D_{\mathrm{red}}) \geq 4$，那么它是 1-对称的，当且仅当它恰好是 1-对称的。

现在让我们将半单对数导子的存在与数学的其他领域联系起来。首先，对角导子对应于拟齐次性。向量 $\boldsymbol{w} = \{w_1, \ldots, w_n\} \in \mathbb{C}^n$ 在 R上诱导一个分次：x_i 的 $\boldsymbol{w}$-次数为 $\deg_{\boldsymbol{w}}(x_i) = w_i$。特别地，$R$ 的标准分次就是 1-分次。我们称该分次的 $\boldsymbol{w}$ 为其权重 。当 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n_{>0}$时，我们称 $\boldsymbol{w}$-分次为正分次。

定义 3.16. 我们称 $g \in R$ 为正权齐次或拟齐次，当存在正权重 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n_{>0}$ 使得 g 关于 R 的 $\boldsymbol{w}$-分次是齐次的。

多项式 g 是 $\boldsymbol{w}$-齐次的，当且仅当 $\delta = \sum w_i x_i \partial_i \in \mathrm{Der}_R(-\log\ g)$，此时 $\delta \bullet g = \deg_{\boldsymbol{w}}(g) g$。反之，假设 $\tau = \sum a_i x_i \partial_i \in \mathrm{Der}_R(-\log\ g)$，其中 $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$。对每个单项式 x^J，$\tau \bullet x^J = (\sum a_i j_i) x^J$。特别地，当 J 遍历 g 的单项式支撑中的所有单项式时，和 $(\sum w_i j_i)$ $\deg_{\boldsymbol{w}}(g)$ 不变。设其等于 λ。则 g 是 $\boldsymbol{w}$-齐次的，且 $\deg_{\boldsymbol{w}}(g) = \lambda$。

正如 $f \in R$ 的标准齐次性是 $f_{\mathrm{red}} \in R$的一个性质，$g \in R$的 $\boldsymbol{w}$-齐次性亦然。

引理 3.17. 将 $g = g_1^{m_1} \cdots g_r^{m_r} \in R$ 分解为不可约因子。下列各项等价：

(a) g 是 $\boldsymbol{w}$-齐次的；*(b)* 每个 g_k 是 $\boldsymbol{w}$-齐次的；*(c)* $g_{\mathrm{red}} = g_1 \cdots g_r$ 是 $\boldsymbol{w}$-齐次的。

证明. 令 $\delta = \sum w_i x_i \partial_i$。则 h 是 $\boldsymbol{w}$-齐次的当且仅当 $\delta \in \mathrm{Der}_R(-\log\ h)$。现在使用注 3.7。□

对角导子 $\delta = \sum w_i x_i \partial_i$ 在 $\mathbb{P}^{n-1}$上诱导一个 $\mathbb{C}^\star$ 作用：

$$\mathbb{C}^\star \times \mathbb{P}^{n-1} \ni (\lambda, [p_1 : \cdots : p_n]) \mapsto [\lambda^{w_1} p_1 : \cdots : \lambda^{a_n} w_n] \in \mathbb{P}^{n-1}\,.$$

对于 f齐次的情形，属于 $\delta \in \mathrm{Der}_R(-\log\ f)$ 意味着该作用固定了 D_{red}。这就是 du Plessis 和 Wall 所说的“对称射影超曲面”的由来：当存在一个保持 Z 的 $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$ 中的 t参数子群时，他们称射影超曲面 Z 是 t-对称的。

不难证明以下条件等价，其中 $f \in R$ 是齐次的，$D \subset \mathbb{P}^{n-1}$ 是其射影除子，而 f_{red} 和 D_{red} 是对应的约化形式：

- f 是半单 1-对称的；
- $f_{\text{约化}}$ 是半单 1-对称的；
- $\mathrm{Der}_R(-\log_0 f)$ 含有一个半单导子；
- $\mathrm{Der}_R(-\log_0 f_{\text{约化}})$ 含有一个半单导子；
- 经过某个齐次线性坐标变换后，f 相对于某些权重 $\boldsymbol{w}$是准齐次的；
- 经过某个齐次线性坐标变换后，$f_{\text{红色}}$ 相对于某些权重 $\boldsymbol{w}$是准齐次的；
- 经过某个齐次线性坐标变换后，$\mathbb{C}^\star$ 作用 $[p_1 : \cdots : p_n] \mapsto [\lambda^{w_1} p_1 \cdots : \lambda^{w_n} p_n]$ 保持 $D_{\text{红色}}$；
- 存在一个半单的 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$，使得 $A \in \mathrm{PGL}_n(\overline{\mathbb{C}})$ 固定 $D_{\text{红色}}$。

注记 3.18。 存在非无迹半单对数导子的情形更为微妙：上述许多等价关系不再成立。

例 3.19. Du Plessis 和 Wall [18, 第 123] 页证明，多项式 $f = x^e \prod_i (y^2 - 2xz + 4a_i x^2)$（其中 $a_i \in \mathbb{C}^\times$ 彼此不同且 $e \in \{0, 1\}$）枚举了三个变量中的所有 1-对称幂零多项式（在坐标变换意义下）。他们还证明，相应射影除子 $D \subset \mathbb{P}^2$ 的奇点集只有在 $\deg(f) \leq 4$时才是准齐次的。而当 $\deg(f) \geq 4$时，这些 f 不是半单的。

同样，在应用中，我们常常考虑具有（至多）准齐次孤立奇点的射影超曲面。因此，在每个奇点处，该超曲面都存在一个正权齐次的局部定义方程。这些齐次性现象已得到充分研究，之后也会与我们相关。

定义 3.20. 设 $G \subset X$ 是 X这个 n维Stein流形上的解析或代数除子。若存在 $\mathfrak{x} \in X$ 附近的局部解析坐标$(x,\ \partial_x)$以及 $\mathfrak{x}$处 G的局部定义方程 $g \in R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$，使得 g是正权齐次的，则称 G 在$\mathfrak{x} \in G$ 处是正权齐次的。如果 G 在所有 $\mathfrak{x} \in G$处都是正权齐次的，则称其为局部准齐次。最后，如果一个多项式或解析函数所对应的除子是局部准齐次的，则称该多项式或解析函数是局部准齐次。

引理 3.21. 设 $g \in R$ 及其约化形式为 g_{red} ；设 $G \subset \mathbb{C}^n$ 是与 g 关联的除子，$G_{\mathrm{red}} \subset \mathbb{C}^n$ 是与 f_{red}关联的除子。则以下条件等价：

(a) g 是局部准齐次的；*(b)* g_{red} 是局部准齐次的；*(c)* D 是局部准齐次的；*(d)* D_{red} 是局部准齐次的。

证明。 逐点应用命题3.17。 □

注 3.22。 设 $D \subset X$ 是解析或代数除子。

(a) 除子 D 在 $D_{\mathrm{red,reg}}$中的任意点处都是正权齐次的。(b) 假设 Z 是约化的，且在 $\mathfrak{x}$处有一个孤立奇点。那么，当且仅当 Z 在 $\mathfrak{x}$处的 Milnor 数与 Tjurina数相等时，Z 在 $\mathfrak{x}$处是正权齐次的。(c) 假设 $Z \subset \mathbb{P}^{n-1}$ 是约化的，且具有准齐次孤立奇点。那么，仿射锥 $C(Z) \subset \mathbb{C}^n$ 是局部准齐次的。显然，$C(Z)$在原点 0 处是正权齐次的：考虑其标准齐次定义方程。对于其他点，考虑标准去齐次化图。在这样的图上，该超曲面与 $\mathbb{C} \times (D_{\mathrm{red}} \cap \{x_i = 1\})$同构。由于 $D_{\mathrm{red}} \cap \{x_i = 1\}$ 只有孤立奇点，且这些奇点全都是正权齐次的，因此我们也可知，$C(D_{\mathrm{red}})$在原点以外是正权齐次的。(d) 考虑 $D \subset \mathbb{P}^{n-1}$ ，使得 D_{red} 至多具有孤立准齐次奇点。那么，仿射锥 $C(D) \subset \mathbb{C}^n$ 是局部准齐次的。这可由前一项和引理3.21推出。

3.3. **刻画** $-n/d$**的根性**。 我们回到伯恩斯坦–佐藤多项式。对于任意齐次 $f \in R$ ，我们可以运用半单非无迹对数导子的语言，约束 $b_f(s)$ 中不是 $b_D(s)$ 的根的那些根。特别地，我们得到了一个判据，用以判断 $-n/d \notin$Zeroes$(b_f(s)) \setminus$ Zeroes$(b_D(s))$。

回忆一下，$M_f = \frac{\mathbb{A}_n[s]}{\mathbf{ann}_{\mathbb{C}[s]} f^s + \mathbb{A}_n[s] \cdot f}$，并且 f 的伯恩斯坦–佐藤多项式 $b_f(s)$ 是 M_f 的 $\mathbb{C}[s]$-零化子（的首一生成元）。

命题 3.23。 设 $f \in R$ 是次数为 d、对应射影除子为 $D \subset \mathbb{P}^{n-1}$的齐次多项式。对于每个 $\delta \in \mathrm{Der}_R(-\text{对数}_0\, f)_0$，，考虑以下子空间

R_p的:

$$\Xi_{p,\delta} = \{\sum \mathbb{C}\cdot Q \mid Q \in R_p, \delta \in \mathrm{Der}_R(-\log Q), \delta \bullet Q \neq -\mathrm{trace}(\delta)Q\}.$$

特别地,

$$\Xi_{0,\delta} = \begin{cases} \mathbb{C}\cdot 1 \ \textit{if}\ 0 \neq \mathrm{trace}(\delta) \\ 0 \ \textit{if}\ 0 = \mathrm{trace}(\delta). \end{cases}$$

还考虑由 R_p 的所有这些子空间张成的空间:

$$\Xi_p = \sum_{\delta \in \mathrm{Der}_R(-\log_0 f)_0} \Xi_{p,\delta},$$

其中约定，当 $\Xi_p = 0$ 导数$_R(-$ 对数$_0 f)_0 = 0$ 时。

定义

$$\beta(s) = \prod_{\substack{0 \leq p < (d-1)n \\ \Xi_p \neq R_p}} (s + \frac{p+n}{d}).$$

于是我们得到以下涉及 *Bernstein–Sato* 多项式的整除性结论:

$$b_D(s) \mid b_f(s) \mid b_D(s)\cdot\beta(s).$$

注 3.24。 假设 $\mathrm{Der}_R(-\log_0 f)_0$ 包含一个半单非无迹导子 τ。那么 $\Xi_{0,\ \tau} = \mathbb{C}\cdot 1$ 且 $-n/d \notin$ Zeroes($\beta(s)$)。在此情形下，命题 3.23 表明等价关系 $-3/d \in$ Zeroes($b_f(s)$) $\iff -3/d \in$ Zeroes($b_D(s)$) 成立。

证明。 考虑 $\mathbb{A}_n[s]$-子模 $N_f = b_D(s)\cdot M_f \subset M_f$。回顾一下，我们将$M_f$定义为商 $\mathbb{A}_n[s] \twoheadrightarrow M_f$。对于 $P(s) \in \mathbb{A}_n[s]$, 令 $P(s) \in M_f$表示它在此映射下的像。因此， M_f 由 1 循环生成，而 N_f 由 $b_D(s)$ 循环生成。令 $\mathfrak{m} \subset R$为无关理想；我们将 $\mathfrak{m}^q$ 到 $\mathbb{A}_n[s]$ 的左理想扩张记为 $(\mathfrak{m}^q)^e$。根据构造， N_f 支撑在 0 处（见注 2.2），因此对任意 $P(s) \in \mathbb{A}_n[s]$，存在 $N_{P(s)} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$使得 $\mathfrak{m}^{N_{P(s)}}\cdot P(s)b_D(s) = 0$。特别地，存在$N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$使得 $(\mathfrak{m}^N)^e \cdot b_D(s) = 0$属于 N_f。

对于 $0 \leq q \leq N-1$，定义

$$\beta_q(s) = \prod_{\substack{q \leq p \leq N-1 \\ \Xi_p \neq R_p}} (s + \frac{p+n}{d}).$$

我们声称

$$\frac{\beta_q(s)}{\beta_{q+1}(s)} \cdot (\mathfrak{m}^q)^e \cdot \overline{b_D(s)} \subset (\mathfrak{m}^{q+1})^e \cdot \overline{b_D(s)}. \tag{3.3}$$

证明 (3.3) 即可完成证明。事实上，通过归纳应用 (3.3), $\overline{\beta_0(s)\cdot b_D(s)} = 0$。由于 N_f 由 $b_D(s)$ 循环生成，且 $\mathbb{C}[s] \subset \mathbb{A}_n[s]$ 是中心元，所以 $\beta_0(s)$ 消去 N_f。因此， $b_D(s)\beta_0(s)$ 消去 M_f，也就是说， $b_f(s)$ 整除$b_D(s)\beta_0(s)$。由于 $b_f(s)$ 的零点位于 $(-n, 0)$ [23, 37],，我们得出 $b_f(s)$ 整除 $b_D(s)\beta(s)$。

因此我们必须证明 (3.3)。首先，固定 $\delta = \sum a_i\partial_i \in \mathrm{Der}_R(-\log_0 f)_0$（从而 $a_i \in R_1$）以及 $Q \in R_q$。假设 $\delta \in \mathrm{Der}_R$(–log Q)。由于所有对象的 1-分次，存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $\delta \bullet Q = \lambda Q$。

注意到：

$$
\begin{aligned}
(3.4)\quad (\mathfrak{m}^{q+1})^e\cdot\overline{b_D(s)}\ni\left((\sum_i\partial_i a_i)Q\right)\cdot\overline{b_D(s)}&=\left(b_D(s)\sum_i\partial_i a_i\right)\cdot\overline{Q}\\
&=b_D(s)\left(\sum_i a_i\partial_i+\operatorname{trace}(\delta)\right)\cdot\overline{Q}\\
&=b_D(s)\cdot\overline{(\delta+\operatorname{trace}(\delta))Q}\\
&=b_D(s)\cdot\overline{Q(\delta+\lambda+\operatorname{trace}(\delta))}\\
&=\left(b_D(s)Q(\delta+\lambda+\operatorname{trace}(\delta))\right)\cdot\overline{1}\\
&=\left(b_D(s)Q(\lambda+\operatorname{trace}(\delta))\right)\cdot\overline{1}\\
&=\left((\lambda+\operatorname{trace}(\delta))Q\right)\cdot\overline{b_D(s)}.
\end{aligned}
$$

注意，$\delta\cdot f^s=0$属于 M_f，也就是说，$\delta\cdot 1=0$属于 M_f^-。因此，倒数第三个等式成立。

完全类似的论证，现在令$E=\sum_i x_i\partial_i$ 和 $Q\in R_q$ 任意，可得：

$$
\begin{aligned}
(3.5)\qquad (\mathfrak{m}^{q+1})^e\cdot\overline{b_D(s)}\ni\left((\sum_i\partial_i x_i)Q\right)\cdot\overline{b_D(s)}&=\left(b_D(s)\sum\partial_i x_i\right)\cdot\overline{Q}\\
&=\left(b_D(s)(E+\operatorname{trace}(E))\right)\cdot\overline{Q}\\
&=\left(b_D(s)(E+n)Q\right)\cdot\overline{1}\\
&=\left(b_D(s)Q(E+q+n)\right)\cdot\overline{1}\\
&=\left(b_D(s)Q(ds+q+n)\right)\cdot\overline{1}\\
&=\left((ds+q+n)Q\right)\cdot\overline{b_D(s)}.
\end{aligned}
$$

这里倒数第二个等式利用了$(E-ds)\cdot f^s=0$属于 M_f，由此可得$(E-ds)\cdot 1=0$。

一方面，（3.5）意味着（因为在（3.5）中，$Q\in R_q$ 的选择是任意的）

$$(ds+q+n)(\mathfrak{m}^q)^e\cdot\overline{b_D(s)}\subset(\mathfrak{m}^{q+1})^e\cdot\overline{b_D(s)}.$$

因此，只要 $\Xi_q\neq R_q$，（3.3）就成立。还需证明

$$(3.6)\qquad \left[\Xi_q=R_q\right]\implies\left[(\mathfrak{m}^q)^e\cdot\overline{b_D(s)}\subset(\mathfrak{m}^{q+1})^e\cdot\overline{b_D(s)}\right].$$

因此，假设 $\Xi_q=R_q$。我们可以找到 R_q 的一个基 $\{Q_u\}$，它具有以下性质：对于每个 Q_u，都存在 $\delta_u\in\mathrm{Der}_R(-\log_0 f)_0$ 和 $\lambda_u\in\mathbb{C}$，且不等于$-\operatorname{trace}(\delta_u)$，使得 $\delta_u\bullet Q_u=\lambda_u Q_u$。根据(3.4)，每个这样的基元素都满足$Q_u\cdot b_D(s)\in(\mathfrak{m}^{q+1})^e\cdot b_D(s)$。因此 $R_p\cdot b_D(s)=\{\sum\mathbb{C}\cdot Q_u\}\cdot b_D(s)\subset(\mathfrak{m}^{q+1})^e\cdot b_D(s)$，从而得到 (3.6)。□

我们希望得到一个反向蕴含：一个关于 f 的判据，能够迫使 $-n/d$ 成为 $b_f(s)$ 的根。为此，我们需要一个额外的假设。

回顾一下，魏尔代数带有一个规范的、穷尽且递增的过滤，称为阶过滤 $P_\bullet^{\mathrm{ord}}\mathbb{A}_n$。总阶过滤$F_\bullet^\sharp\mathbb{A}_n[s]$在 $\mathbb{A}_n[s]$ 上定义为

$$F_k^\sharp\mathbb{A}_n[s] = \sum_{0\le t\le k} P_t^{\mathrm{ord}}\mathbb{A}_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[s]_{\le k-t},$$

其中 $\mathbb{C}[s]_{\le k-t}$ 是次数至多为 $k-t$ 的元素。该过滤同样是穷尽且递增的。

定义 3.25。我们称 $g\in R$ 为 微分线性型，如果

$$\mathrm{ann}_{\mathbb{A}_n[s]}\, g^s = \mathbb{A}_n[s]\cdot\left(\mathrm{ann}_{\mathbb{A}_n[s]}\, g^s \cap F_1^\sharp\mathbb{A}_n[s]\right).$$

注记 3.26。可以验证

$$\mathrm{ann}_{\mathbb{A}_n[s]}\, g^s \cap F_1^\sharp\mathbb{A}_n[s] = \{\delta - s\frac{\delta\bullet g}{g} \mid \delta\in \mathrm{Der}_R(-\log g)\}.$$

微分线性型条件最早在 [13] 中被提出。关于相关主题的（较早）综述，见 [30]；关于已知满足该假设的最大一类除子，见 [46, 定理 3.26]；关于其多-s 推广，见 [2, 推论 2.30]。下面说明该条件与$-n/d$的根性之间的关联。以下论证改进了 [46, 定理 5.13], ，尽管所用技巧类似。

命题 3.27. 设 $f\in R$ 是次数为 d 的齐次多项式，其对应的射影除子 $D\subset\mathbb{P}^{n-1}$ 不是锥。假设 f 是微分线性型，且 $\mathrm{Der}_R(-\text{对数}_0\, f)$ 不包含半单非无迹对数导子。那么

$$-\frac{n}{d}\in \mathrm{Zeroes}(b_f(s)).$$

证明. 我们断言，假设条件保证存在一个左 $\mathbb{A}_n[s]$-模满射

$$M_f = \frac{\mathbb{A}_n[s]}{\mathrm{ann}_{\mathbb{A}_n[s]}\, f^s + \mathbb{A}_n[s]\cdot f} \twoheadrightarrow L := \frac{\mathbb{A}_n[s]}{\mathbb{A}_n[s]\cdot\mathfrak{m} + \mathbb{A}_n[s]\cdot(n+ds)}.$$

在证明这个满射之前，先注意到 $\mathrm{ann}_{\mathbb{C}[s]}\, L = \mathbb{C}[s]\cdot(n+ds)$ 和 $L\neq 0$。确实，检查可知 $\mathbb{C}[s]\cdot(n+ds)\subset \mathrm{ann}_{\mathbb{C}[s]}\, L$。当且仅当 $\mathrm{ann}_{\mathbb{C}[s]}\, L = \mathbb{C}[s]$ 时等式不成立，换言之，当且仅当 $L=0$。但是，作为环，$L\simeq \mathbb{A}_n/\mathbb{A}_n\cdot\mathfrak{m}\neq 0$。

现在我们证明这个满射。由于 f 是微分线性型，$\mathrm{ann}_{\mathbb{A}_n[s]}\, f^s = \mathbb{A}_n[s]\cdot(E-ds) + \sum \mathbb{A}_n[s]\cdot\delta$，其中 $E=\sum_i x_i\partial_i$ 是欧拉导子，第二个直和项遍历 $\mathrm{Der}_R(-\text{对数}_0\, f)$ 的一个齐次生成集 $\{\delta\}$。

考虑属于这样一个生成集的 $\delta = \sum_i a_i\partial_i \neq 0$。那么 $\delta\notin \mathrm{Der}_R(-\log_0 f)_{-1}$。因为如果这种情况发生，经过恰当的坐标变换，就能使 $\partial_i\bullet f = 0$，从而将 D 实现为一个锥。现在假设 $\delta\in \mathrm{Der}_R(-\log_0 f)_0$。利用注记3.12将所有 ∂_i 移到左侧，我们在 $\mathbb{A}_n[s]$ 中得到等式 $\delta = (\sum_i \partial_i a_i) - \text{迹}(\delta)$。类似地，$E = (\sum_i \partial_i x_i) - n$。现在假设 $\delta\in \mathrm{Der}_R(-\log_0 f)_{\ge 1}$，因此每个非零的 a_i 都是次数至少为二的齐次元素。在 $\mathbb{A}_n[s]$ 中进行计算，我们有等式 $\delta = \sum_i(\partial_i a_i - (\partial_i\bullet a_i))$，并且

因此 $\delta \in \mathbb{A}_n[s]\cdot\mathfrak{m}$。由于 f 属于微分线性型，将这些计算结合起来可知，以下命题等价：

$$\left[\operatorname{ann}_{\mathbb{A}_n[s]} f^s \subset \mathbb{A}_n[s]\cdot\mathfrak{m} + \mathbb{A}_n[s]\cdot(n+ds)\right]$$
$$\iff \left[\operatorname{Der}_R(-\log_0 f)_0 = \bigoplus_k \mathbb{C}\cdot\delta_k \text{ where each } \delta_k \text{ is traceless}\right]$$
$$\iff \left[\operatorname{Der}_R(-\log_0 f) \text{ contains no semi-simple non-traceless derivations}\right].$$

（注：我们已经知道 $L\neq 0$，因此 $\mathbb{A}_n[s]\cdot\mathfrak{m}+\mathbb{A}_n[s]\cdot(n+ds) \neq \mathbb{A}_n[s]$。）由于我们假设 $\mathsf{Der}_R(-\log_0 f)$ 不包含非无迹的半单对数导子，因此确实有满射 $M_f \twoheadrightarrow L_f$。

这个满射基本上完成了证明。由于 $\mathbb{C}[s]$ 的零化子包含于 M_f 的任意子商的 $\mathbb{C}[s]$ 零化子中，而 M_f 位于其中，因此我们看到

$$\mathbb{C}[s]\cdot b_f(s) = \operatorname{ann}_{\mathbb{C}[s]} M_f \subseteq \operatorname{ann}_{\mathbb{C}[s]} L = \mathbb{C}[s]\cdot(n+ds).$$

□

我们迎来了本节的主要成果：刻画在何种情况下，$-n/d$ 是 f 的伯恩斯坦–佐藤多项式的根；前提是相应的约化射影除子至多具有准齐次孤立奇点。关键在于，这样的 f 属于微分线性型。

定理 C. 设 $f\in R$ 是次数为 d的齐次多项式，其对应的射影除子 $D\subset\mathbb{P}^{n-1}$ 不是锥。设 D_{red} 是附属于 D的约化除子。假设 D_{red} 至多具有拟齐次孤立奇点。考虑以下条件：

(a) $\frac{-n}{d}\notin$ 零点$(b_f(s))$; ***(b)*** $\frac{-n}{d}\notin$零点$(b_D(s))$; ***(c)*** $\operatorname{Der}_R(-\text{对数}_0 f)$ 包含一个半单非无迹导子。

Then

$$\left[(a)\ is\ true\right] \iff \left[both\ (b)\ and\ (c)\ are\ true\right].$$

注 3.28. 当 $\deg(f_{\mathrm{red}}) = \deg(D_{\mathrm{red}}) \geq 4$ 时，命题 3.15 和注 3.7 表明，(b) 等价于 $\mathsf{Der}_R(-\text{对数}_0 f)_0 = \mathbb{C}\cdot\tau$，其中 τ是一个半单非无迹对数导子。

证明。$(a) \implies (b)$ 是标准结论，参见注 2.2。条件 (c) 保证半单非无迹导子 τ 的存在。回顾命题 3.23 及其记号，(c) 蕴含 $\Xi_{0,\ \tau} = 0$，因此 $-n/d \notin$ 零点$(\beta(s))$。于是 (b) 和 (c) 合起来蕴含 (a)。为完成证明，我们必须确认 $(a) \implies (c)$。若 f 是微分线性型，这便是命题 3.27。

我们将证明 f 是微分线性型。判据见 [46, 定理 3.26]。因此（沿用上述文献中的术语），只需验证仿射锥$C(D) \subset \mathbb{C}^n$ 是 Saito 全纯、温和且局部准齐次的。（局部准齐次比上述文献中出现的“强欧拉齐次”条件更强。）根据注 3.22.(d)，$C(D)$是局部准齐次的。Saito 全纯性和温和性只涉及约化结构 $C(D)_{\mathrm{red}}$。因此

只需证明：若 $Z \subset \mathbb{P}^{n-1}$ 是约化的，且至多只有孤立奇点，那么 $C(Z) \subset \mathbb{C}^n$ 就是 Saito 全纯且温和的。Saito 全纯意味着对数分层局部有限。而 $C(Z)$ 具有局部有限的对数分层。事实上，其对数层为： $\{0\}$； $\{\cup_{p\in Z\setminus Z_{\mathrm{reg}}} C(p) \setminus 0\}$ 其中$C(p) \subset \mathbb{C}^n$ 是 $p \in \mathbb{P}^{n-1}$的锥；正则轨迹 $C(Z)^{\mathrm{reg}}$。[2] $C(Z)$是温和的这一点由 [6, 推论 1.4]得出。□

注3.29。如果 $g \in R$ 是约化的正权齐次多项式，且具有孤立奇点，那么关于 $b_g(s)$ 有一个众所周知的公式，该公式完全由 Milnor代数 $R/(g,\ \partial_1 \bullet g,\ \ldots\ldots,\ \partial_n \bullet g)$ 的次数序列表示。因此，对于定理 C 中的约化f 和 D ，计算 Zeroes($b_D(s)$) 是“常规操作”。

4. 半单对称射影平面曲线及其伯恩斯坦–佐藤多项式。

全文中， $f \in R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 是次数为 d 的齐次多项式， $D \subset \mathbb{P}^{n-1}$ 是其相应的射影除子。我们已经看到， $-n/d$ 是否为 f 的伯恩斯坦–佐藤多项式的根，与 $\mathrm{Der}_R(-\log_0 f)_0$ 中是否存在半单无迹导子有关。特别地，当 D_{red} 至多具有拟齐次孤立奇点时，这类导子与 $b_D(s)$ 一起，刻画了何时 $-n/d \in$Zeroes($b_{f(s)}$)。

我们的目标是为所有满足以下条件的 $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ 给出明确的定义方程： C 不是锥； $D_{\mathrm{red}} \subset \mathbb{P}^2$ 至多具有准齐次（必然孤立的）奇点； $-3/d$ 不是 $b_f(s)$的根。

我们的枚举建立在 du Plessis 和 Wall [18]的工作之上，并对其作出了显著改进。他们得出了六族分类，但没有找到一种能够“有限地”枚举所有族成员的方法。我们用一个单一定义方程（在齐次坐标变换意义下）枚举所有半单对称平面曲线。随后，我们在定理 E 中指出哪些族成员的 $-3/d$不是$b_f(s)$的根。

4.1.半单1-对称射影平面曲线的枚举。在本小节中（仅限此处），我们用 $f_d \in \mathbb{C}[x, y, z]$ 表示次数为 $\deg(f_d) = d$的约化齐次多项式。

首先，将 f_d 的单项式支撑记为 $\mathrm{supp}(f_d) \subset \mathbb{Z}^3_{\geq 0}$。齐次性使 $\mathrm{supp}(f_d)$ 位于超平面 $x + y + z = d$ 内，因此 $\mathrm{supp}(f_d)$ 中的每个单项式都具有形式 $x^{t_1} y^{t_2} z^{d-(t_1+t_2)}$。定义

$$\phi_d : \mathbb{Z}^3_{\geq 0} \to \mathbb{Z}^2 \quad \text{where} \quad \phi_d(a, b, c) = (-b, d - a).$$

我们用坐标 (u, v) 表示 $\mathbb{Z}^2$。考虑三角形

$$T_d = \{(u, v) \in \mathbb{Z}^2 \mid -d \leq u \leq 0,\ 0 \leq v \leq d,\ 0 \leq u + v\}.$$

它位于第二象限内，斜边连接 $(-d, d)$ 和 $(0, 0)$。并且 ϕ_d 将 $\mathrm{supp}(f_d)$ 双射到 T_d:

$$\phi_d(t_1, t_2, d - t_1 - t_2) = (-t_2, d - t_1) \in T_d.$$

由于后续论证涉及对 T_d 的操作，我们在图1中绘出了 T_d，并附上一些额外数据。

[2]事实上，任何局部准齐次除子都自动是 Saito 全纯的，参见 [6, 引理 1.6]。

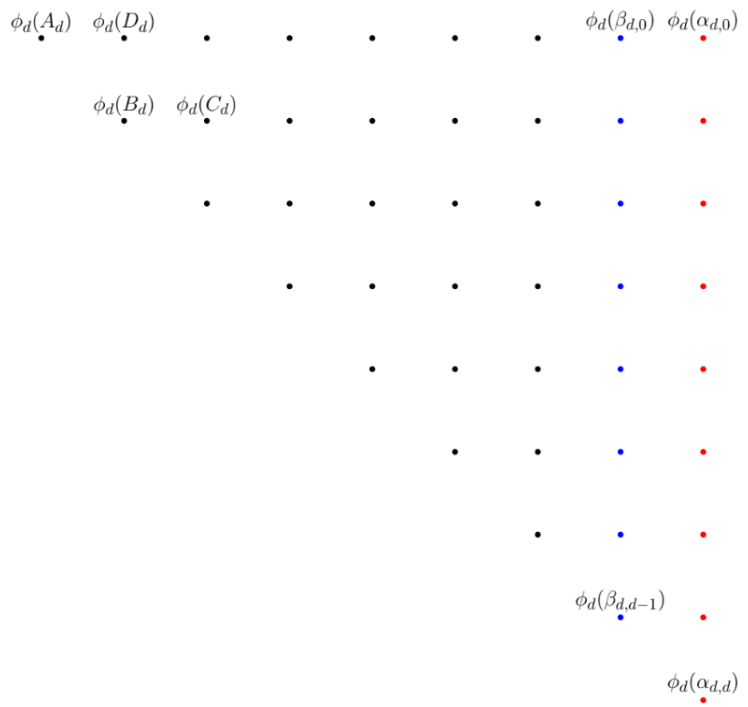

图1. 三角形区域 T_d的整点。左上角点为$(-d, d)$，右上角为$(0, d)$，右下角为原点。图中绘制了许多尚待命名的整点。点 $\phi_d(A_d)$ $\phi_d(B_d)$ $\phi_d(C_d)$, 和 $\phi_d(D_d)$标注在左上方。点 $\{\phi_d(\alpha_{d,r})\}_r$ 是直线 $u = 0$ 上的整点，呈红色。点 $\{\phi_d(\beta_{d,r})\}_r$ 是直线 $u = -1$ 上的整点，呈蓝色。

命题4.1。 用上述语言表述，以下各项等价：

(a) 存在一个对角 $\delta \in \mathrm{Der}_R(-\log_0 f_d)_0$；*(b)* $\phi_d(\mathrm{supp}(f_d))$ 包含在一条直线中。

证明. 将对角 δ 写成 $w_1 x\partial_x + w_2 y\partial_y + w_3 z\partial_z$。则supp($f_d$)中的任意单项式$x^{t_1}y^{t_2}z^{d-(t_1+t_2)}$ 满足 $w_1t_1+w_2t_2+w_3(d-t_1-t_2) = 0$，也就是说 $\phi_d(t_1, t_2, d-(t_1-t_2)) = (-t_2, d-t_1)$位于直线 $w_1v+w_2u = w_1d+w_3(v+u)$上。

反之，若 ϕ_d(supp(f_d)) 位于直线 $v = mu + b$ 上，则 supp(f) 中的每个单项式$x^{t_1}y^{t_2}z^{d-t_1-t_2}$ 都满足 $d - t_1 = -mt_2 + b$。因此，对角导子 $(x\partial_x - my\partial_y) - (d-b)E$属于 $\mathrm{Der}_R(-\log_0 f_d)_0$。类似地，若 ϕ_d(supp(f_d)) 位于直线 $u = 0$ 上，则 supp(f_d) $\subseteq \{x^{t_1}y^0z^{d-t_1}\}_{0\le t_1\le d}$，因此 $(d - t_1)x\partial_x - t_1z\partial_z$消去 f_d。□

若 f_d 定义了一个 1-对称半单 $Z \subset \mathbb{P}^2$，则经过齐次坐标变换后，我们可以假设 f_d 存在一个非零对角导子 $\delta \in \mathrm{Der}_R(-\log_0 f_d)$。固定这些坐标。由前一个命题可知，$\phi_d$(supp($f_d$)) 位于 T_d中的一条直线上。令 L表示包含ϕ_d(supp(f_d))的最小线段。我们假设 L 不是一个点，因为若它是一个点，则 f_d 是一个单项式。

对于三角形 T_d的每条边， L 都存在一个端点，其到该边的距离为 ≤ 1 。例如，考虑斜边 $\{u+v=0\}$。当且仅当 $c \geq 2$时，单项式 $x^a y^b z^c$落在区域 $u+v \geq 2$ 中。因此

$$\left[\phi_d(\mathrm{supp}(f_d)) \subset \left(\{u+v \geq 2\} \cap T_d\right)\right] \iff \left[z^2 \text{ divides } f_d\right].$$

由于 f_d 是约化的， L 的一个端点必定位于 $u+v \leq 1$ 内部。检查 L 与区域 $\{u \leq 1\}$ 和 $\{v \geq d-1\}$ 的邻近情况也类似。根据鸽巢原理， L 的一个端点到 T_d 的两条边的距离为 ≤ 1 。如果这两条边确定了 T_d 最左上方的角点，那么对应的 L 端点由以下某一种情形得到：

(a) $A_d = (0,d,0) \overset{\phi_d}{\longmapsto} (-d,d)$;
(b) $B_d = (1,d-1,0) \overset{\phi_d}{\longmapsto} (-(d-1),d-1)$
(c) $C_d = (1,d-2,1) \overset{\phi_d}{\longmapsto} (-(d-2),d-1)$
(d) $D_d = (0,d-1,1) \overset{\phi_d}{\longmapsto} (-(d-1),d)$.

如果这两条边确定的是 T_d 的另一个角点，那么对 $\{x,y,z\}$ 进行置换后，我们可以假设这两条边确实确定了 T_d 最左上方的角点。注意，这一过程保留了 f_d 具有对角导子 $\delta \in \mathrm{Der}_R(-\log_0 f_d)$ 这一性质。因此，我们将假定已经进行了这一坐标变换。

L 的另一个端点到 T_d 的边 $\{u=0\}$ 的距离必为 ≤ 1 。我们可以认为该点由以下某种 ϕ_d 的应用得到：

(a) $\alpha_{d,r} = (r,0,d-r) \overset{\phi_d}{\longmapsto} (0,d-r)$ for $0 \leq r \leq d$;
(b) $\beta_{d,r} = (r,1,d-r-1) \overset{\phi_d}{\longmapsto} (-1,d-r)$ for $0 \leq r \leq d-1$.

定义 4.2. 设 $p \in \{A_d, B_d, C_d, D_d\}$ 和 $q \in \{\alpha_{d,r}, \beta_{d,r}\}$ 取上述所述的合法值。假设 $p \neq q$。我们稍微滥用一下记号，将pq 记为 T_d 中连接 $\phi_d(p)$与 $\phi_d(q)$的线段。我们用 h_{pq} 表示一个次数为 d 的约化齐次多项式，使得 $\phi_d(\mathrm{supp}(h_{pq})) \subseteq pq$ 且 $p, q \in \phi_d(\mathrm{supp}(h_{pq}))$。

根据上述分析，我们知道，若 $Z \subset \mathbb{P}^2$ 是半单 1-对称的，则 $C(Z)$ 的锥有一个定义方程，该方程是单项式（当 L 是一个点时即如此），或者是一个满足 $p \in \{A_d, B_d, C_d, D_d\}$ 且 $q \in \{\alpha_r, \beta_r\}$ 的定义方程 h_{pq}。（对于 $\alpha_{d,r}$，我们必须有 $0 \leq r \leq d$；对于 $\beta_{d,r}$，我们必须有 $0 \leq r \leq d-1$。）因此，我们给出了涵盖所有此类 Z 的八个族。这实质上重复了 [18]，中的六族枚举，不过他们通过去除一些平凡的冗余，将八个族化为六个族。（此时，他们对六个族的分类已足以按欧拉示性数进行分类，见同上引文；我们将在后文重新讨论这一分类。）

现在我们继续讨论 [18] 之后的内容。我们需要以下引理。

引理 4.3. 我们有如下多项式分解：

- $h_{A_d,\beta_{d,r}} = y h_{A_{d-1},\alpha_{d-1,r}}$;
- $h_{B_d,\beta_{d,r}} = y h_{B_{d-1},\alpha_{d-1,r}}$;
- $h_{C_d,\beta_{d,r}} = y h_{C_{d-1},\alpha_{d-1,r}}$;
- $h_{D_d,\beta_{d,r}} = y h_{D_{d-1},\alpha_{d-1,r}}$。

证明。设 $p \in \{A_d, B_d, C_d, D_d\}$。在所有情况下， y 都整除 $h_{p,\beta_d,r}$。由于 $h_{p,\beta_d,r}$ 具有对角 $\delta \in \mathrm{Der}_R(-\log_0 h_{p,\beta_d,r})_0$，，所以 $h_{p,\beta_d,r}$ 的任意因子也具有对角，见注 3.8.(e)。根据命题4.1， $\phi_{d-1}(\mathrm{supp}(\frac{1}{y}h_{p,\beta_d,r})$ 包含于 T_{d-1}. 内部的一条线段中。检查所有情况即可得出结果。例如， $A_{d-1},\alpha_{d-1},r \in \mathrm{supp}(\frac{1}{y}h_{A_d,\beta_d,r})$。将 ϕ_{d-1} 应用于这些点，必定得到包含 $\phi_{d-1}(\mathrm{supp}(\frac{1}{y}h_{A_d,\beta_d,r}))$ 的线段的端点。□

引理 4.4. 我们有如下等式，其中 c_1、 $c_2 \in \mathbb{C}^\star$:

- $h_{B_d,\alpha_{d,0}} = c_1 x y^{d-1} + c_2 z^d$;
- $h_{C_d,\ \alpha_{d,\ d}} = x(c_1 y^{d-2} z + c_2 x^{d-1})$;
- $h_{D_d\alpha_{d,\ d}} = c_1 y^{d-1} z + c_2 x^d$.

证明。 在所有情况下， T_d 中的相关线段恰好包含两个点。 □

引理 4.5。 我们有如下多项式分解:

- 如果 $r > 0$ 那么 $h_{B_d\alpha_{d,\ r}} = x h_{A_{d-1},\ \alpha_{d-1,\ r-1}}$;
- 如果 $r < d$，那么 $h_{C_d\alpha_{d,\ r}} = z h_{B_{d-1},\ \alpha_{d-1,\ r}}$;
- 如果 $r < d$，那么 $h_{D_d\alpha_{d,\ r}} = x h_{A_{d-1},\ \alpha_{d-1,\ r}}$。

证明。 通过检查 T_d 中相应的线段即可得出整除性结论。其余论证与引理 4.3 完全类似。□

引理 4.6。 多项式 $h_{A_d,\alpha_{d,0}}$ 在 $\mathbb{C}[y,z]$ 中定义一个超平面配置，而 $h_{A_d,\alpha_{d,d}}$ 在 $\mathbb{C}[x,y]$ 中定义一个超平面配置。

证明。 利用齐次性，要证明第一个结论，只需证明 $h_{A_d,\alpha_{d,0}} \in \mathbb{C}[y,z]$。线段 $A_d, \alpha_{d,0}$ 上的整点为 $\{(-t,d) \mid 0 \le t \le d\}$。因此 $\mathrm{supp}(h_{A_d,\alpha_{d,0}}) \subset \{y^t z^{d-t} \mid 0 \le t \le d\}$。第二个结论完全类似: 线段 $A_d, \alpha_{d,0}$ 上的整点为 $\{(-t,t) \mid 0 \le t \le d\}$，因此 $\mathrm{supp}(h_{A_d,\alpha_{d,d}}) \subset \{x^{d-t}y^t \mid 0 \le t \le d\}$。□

引理 4.7. 考虑形如 $h_{A_d,\alpha_{d,r}}$ 的多项式，其中 $1 \le r \le d-1$。令 m 为 d 与 r 的最大公约数。则存在 $\lambda \in \mathbb{C}^\star$，使得该多项式可以因式分解为不可约多项式

$$h_{A_d,\alpha_{d,r}} = \prod_{1 \le q \le m} h_{A_{\frac{d}{m}},\alpha_{\frac{d}{m},\frac{r}{m}}} = \lambda \cdot \prod_{1 \le q \le m} \left(y^{\frac{d}{m}} + c_q x^{\frac{r}{m}} z^{\frac{d-r}{m}} \right),$$

其中 $c_q \in \mathbb{C}^\star$ 两两不同。此外， $h_{A_d,\alpha_{d,r}}$ 及其每个不可约因子 $h_{A_{\frac{d}{m}},\alpha_{\frac{d}{m},\frac{r}{m}}}$ 都具有半单消灭对数导子 $\frac{r-d}{m} x\partial_x + \frac{r}{m} z\partial_z$。

证明。 由于 $\mathrm{Der}_R(\log_0 h_{A_d,\alpha_{d,r}})_0$, 中存在非零对角导子，因此 $\mathrm{supp}(h_{A_d,\alpha_{d,r}})$中的每个单项式都满足相同的线性关系。因此， $\mathrm{supp}(h_{A_d,\alpha_{d,r}})$位于 $\mathbb{R}^3$中的某个平面上，即由向量 A_d 和 $\alpha_{d,r}$张成的平面。将这些向量的叉积编码为导子 $d(d-r)x\partial_x - rdz\partial_z$，可推得该导子属于 $\mathrm{Der}_R(-\log_0 h_{A_d,\alpha_{d,r}})_0$。

提取最大公约数后，我们得到 $\delta = \frac{r-d}{m} x\partial_x + \frac{r}{m} z\partial_z \in \mathrm{Der}_R(-\log_0 h_{A_d,\ \alpha_{d,\ r}})_0$，，显然它是半单的。因此，任意 $x^a y^b z^c$ in

$\mathrm{supp}(h_{\overline{A_d,\alpha_{d,r}}})$ 都满足 $\frac{r-d}{m}\cdot a+\frac{r}{m}c=0$。由于 $\frac{r-d}{m}$ 和 $\frac{r}{m}$ 互素，a（分别地，c）是 $\frac{r}{m}$（分别地，$\frac{r-d}{m}$）的倍数。由此我们推得

$$h_{\overline{A_d,\alpha_{d,r}}}=\sum_{0\le q\le m} e_q(y^{\frac{d}{m}})^{m-q}(x^{\frac{r}{m}}z^{\frac{d-r}{m}})^q,$$

其中，对所有 q 和 e_0，$e_m\neq 0$. 令 $\alpha=y^{\frac{d}{m}}$ 和 $\beta=x^{\frac{r}{m}}z^{\frac{d-r}{m}}$。将 $h_{\overline{A_d,\alpha_{d,r}}}$ 视为 $\mathbb{C}[\alpha,\beta]$ 内的元素。这里它是一个二元齐次多项式，因此可分解为线性因子。将其乘以 $\lambda\in\mathbb{C}^\star$，使 $y^d\in\mathrm{supp}(h_{\overline{A_d,\alpha_{d,r}}})$ 的系数等于 1 后，我们推得

$$h_{\overline{A_d,\alpha_{d,r}}}=\lambda\cdot\prod_{1\le q\le m}\left(y^{\frac{d}{m}}+c_q x^{\frac{r}{m}}z^{\frac{d-r}{m}}\right),$$

其中 $c_q\in\mathbb{C}^\star$ 两两不同。$y^{\frac{d}{m}}+c_q x^{\frac{r}{m}}z^{\frac{d-r}{m}}$ 的不可约性等价于去齐次化后的 $y^{\frac{d}{m}}+c_q x^{\frac{r}{m}}\in\mathbb{C}[x,y]$ 的不可约性；由于 $\frac{d}{m}$ 和 $\frac{r}{m}$ 互素，这一点显然成立。

δ 消去每个 $y^{\frac{d}{m}}+c_q x^{\frac{r}{m}}z^{\frac{d-r}{m}}$，这一点显而易见。 □

考虑以下多项式。

定义 D. 设 $f\in\mathbb{C}[x,y,z]$ 是次数为 d 的齐次多项式。若 f 可分解为不可约因子，形式如下，则称 f 为半单标准形式

$$f=x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3}\prod_{1\le q\le m}\left(y^t+c_q x^u z^{t-u}\right)^{b_q}. \tag{1.2}$$

其中 m、t、$u\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$；$u<t$，并且若 $u\neq 0$，则 u 与 t 互素；a_1、a_2、a_3、b_1、……、$b_m\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$；c_1、……、$c_m\in\mathbb{C}^\times$ 两两不同。注意，$d=a_1+a_2+a_3+t(b_1+\cdots+b_m)$。

此外，若这样的半单标准形式 f 满足非无迹条件，则称其满足该条件

$$u(d-3a_3)\neq(t-u)(d-3a_1). \tag{1.3}$$

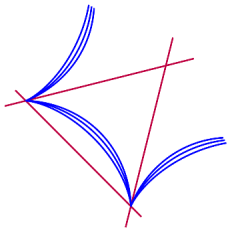

图 2. 半单标准形式下多项式 $a_1a_2a_3\neq 0$ 和 $2\le u<t$ 的射影零点轨迹示意图。坐标超平面为红色，其他分支为蓝色，交点为 $[0:0:1],[0:1:0],[1:0:0]$。当 $u=1$（分别为 $t-1$）时，图形类似，但每个蓝色分支在 $[0:0:1]$（分别在 $[1:0:0]$）处光滑。当 $u=0$ 时，f 定义了一个可分解超平面配置，图形则有所不同：蓝色分支是超平面，它们唯一的公共点为 $[1:0:0]$.

下一个命题表明，多项式 (1.2) 枚举了所有半单的 1-对称约化平面曲线。

命题 4.8。设 $Z \subset \mathbb{P}^2$ 是一个次数为 d 的约化半单1对称除子， $C(Z) \subset \mathbb{C}^3$ 是其仿射锥。那么，经过对 $\mathbb{C}^3$进行齐次线性坐标变换后，我们可以假设 $C(Z)$由一个处于半单标准形式（定义 *D*）的约化齐次次数为 d的多项式 $f \in \mathbb{C}[x,y,z]$ 定义。

此外：

(a) Z 是局部准齐次的，且 奇点集$(Z) \subseteq \{[1:0:0],[0:1:0],[0:0:1]\}$；

(b) Z 是有理曲线的并；***(c)*** 若 Z 不是超平面配置，即若 $u>0$，则

$$\chi(Z) = \begin{cases} 2 & if\ a_1 = a_2 = 0 \\ 3 & otherwise, \end{cases}$$

其中 χ表示拓扑欧拉示性数。

证明。由本节开头的讨论可知，对任意这样的 Z ，存在齐次线性坐标变换，使得 $C(Z)$具有形如 h_{pq}的定义方程，其中 $p \in \{A_d, B_d, C_d, D_d\}$ 与 $q \in \{\alpha_{d,r}, \beta_{d,r}\}$（其中 r 是合法选取的），见定义 4.2。利用引理 4.3、4.4、4.5，可见我们的定义方程可取为$x^{e_1}y^{e_2}z^{e_3}h_{A_{d-e},\alpha_{d-e,r'}}$的形式，其中 $e = e_1+e_2+e_3$ 与 $r' \leq d-e$。（对这些引理进行演算会导致某些退化情形，例如那些终止于引理 4.4 的情形。再经过一次坐标变换后，这些多项式可化为上述形式。）若 $1 \leq r' \leq d-e-1$，则用引理 4.7 将 f 分解为不可约因子，即得所需的半单标准形式。若 $r'=0$ 或 $r'=d-e$，则用引理 4.6 并（可能）再做一次坐标变换，即可得到所需形式。

现在讨论“此外”部分的断言。所有情形下，直接检查即可确认 Z 是局部准齐次的。事实上，最初使用较粗略的枚举方法证明这一点，见 [18, 第 121]页。设 Γ_q 是由 $y^t + c_q x^u z^{t-u}$定义的射影曲线。那么，Sing$(\Gamma_q) \subseteq \{[1:0:0],[0:0:1]\}$；并且若 $q \neq q'$，则 $\Gamma_q \cap \Gamma_{q'} = \{[1:0:0],[0:0:1]\}$。关于Sing$(Z)$的断言很容易得出。

显然，当 $u=0$时，(b)成立，也就是说，此时 Z 是一个超平面配置。对于 $u>0$ ，只需证明与$y^t - x^u z^{t-u} = 0$ 对应的射影曲线 $C \subseteq \mathbb{P}^2$ 是有理的。这很简单： $a \mapsto (a^t,\ a^u)$参数化了仿射曲线 $\{y^t - x^u = 0\}$。

为证明 (c)，令 $u>0$ ，并考虑 $\mathbb{P}^2$ 上的 $\mathbb{C}^\times$-作用

$$(\mathbb{C}^\star, \mathbb{P}^2) \ni (\lambda, [p_1:p_2:p_3]) \mapsto [\lambda^{t-u}p_1 : p_2 : \lambda^{-u}p_3] \in \mathbb{P}^2\,.$$

不动点为 $\{[1:0:0],[0:1:0],[0:0:1]\}$。并且 Z在此作用下是稳定的。（这本质上是由构造得到的，因为 $(t-u)x\partial_x - uz\partial_z \in \mathrm{Der}_R(-\log f)$。）因此 $\chi(Z) = \sum \chi(p)$，其中求和遍历 Z 中的不动点。□

下一个命题解释了非无迹条件 (1.3)。

命题 4.9。设 $f \in \mathbb{C}[x,y,z] \setminus \mathbb{C}$ 为齐次多项式，其相伴除子为 $D \subset \mathbb{P}^2$。假设 D 不是正规交叉除子。那么， f 存在半单非无迹湮灭导子，当且仅当经过齐次线性

坐标变换后， f 可以写成满足 (1.3)（非无迹条件）的半单标准形式（定义 *D*）。

证明。 假设 f 具有一个半单非无迹湮灭导子。根据命题 4.8，我们可以改变坐标，将 f 表示为 p，其中 p 为半单标准形式，并证明关于 p的结论。令 $g = x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3}$、 $h = \frac{p}{g}$ 和 $\delta = (u-t)x\partial_x + uz\partial_z$。显然 $\delta \bullet h = 0$。定义

$$\tau := \frac{a_1(u-t)+a_3u}{d}E - \delta \neq 0.$$

于是 $\tau \in \mathrm{Der}_R(-\log_0 p)_0$，且它是对角的，因此是半单的。而且， τ无迹当且仅当

$$0 = 3\left(\frac{a_1(u-t)+a_3u}{d}\right) - \Big((u-t)+u\Big) = \frac{1}{d}\Big((u-t)(3a_1)+u(3a_3)+(u-t)d+ud\Big).$$

因此，非无迹条件等价于半单导子 $\tau \in \mathrm{Der}_R(-\log_0 p)_0$ 非无迹。

若能证明 $\mathrm{Der}_R(-\log_0 p)_0$ 具有一个 $\mathbb{C}$-基，其中包含 τ，并且可能还包含一些幂零导子，则证明即告完成。

情形 *1*： p 切出一个超平面配置。注意， p 是一个可分解配置： $p = x^{a_1}p'$，其中 $p' = y^{a_2}z^{a_3}h \in \mathbb{C}[y,z]$。因此，$\mathrm{Der}_R(-\log p) = \mathrm{Der}_R(-\log p_{\mathrm{red}})$ 由 $x\partial_x$、$y\partial_y + z\partial_z$ 以及 $\mathrm{Der}^{\mathbb{C}[y,z]}(-\log_0 p'_{\mathrm{red}})$ 的一组基生成。后者由 $(\partial_z \bullet p'_{\mathrm{red}})\partial_y - (\partial_y \bullet p'_{\mathrm{red}})\partial_z$ 循环生成，因为 p'_{red} 的偏导数构成一个正则序列。由于 p 不是正规交叉，$\deg(p') \geq 3$，由此得出 $\mathrm{Der}_R(-\log_0 p)_0 = \mathbb{C}\cdot\tau$。

情形 *2*：$\deg(p_{\mathrm{red}}) \geq 4$。命题 3.15 蕴含 $\mathrm{Der}_R(-\log_0 p) = \mathbb{C}\cdot\tau$。

情形 *3*： $\deg(p_{\mathrm{red}}) = 3$。我们可以假设 p 不是超平面配置。因此 $p_{\mathrm{red}} \in \{y^3+xz^2, y^3+x^2z, x(y^2+xz)\ y(y^2+xz)\ z(y^2+xz)\}$。在第一种和第四种情形中，直接计算可知 $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Der}_R(-\log p_{\mathrm{red}})_0) = 2$，因此 $\mathrm{Der}_R(-\log_0 p_{\mathrm{red}})_0) = \mathbb{C}\cdot\tau$，问题得证。在第三种情形中，$\mathrm{Der}_R(-\log_0 p)_0 = \mathbb{C}\cdot\tau \oplus \mathbb{C}\cdot\tau'$，其中 $\tau' = x\partial_y - 2y\partial_z$总是幂零的。第二种（分别地，第五种）情形与第一种（分别地，第三种）情形对称。

情形 *4*： $\deg(p_{\mathrm{red}}) = 2$。我们可以假设 p 不是超平面配置。因此$p = (y^2+xz)^b$。计算表明，$\mathrm{Der}(-\log_0 p)_0 = \mathrm{Der}(-\log_0 p_{\mathrm{red}})_0$ 有三个线性无关的生成元： τ 以及两个幂零导子。□

4.2.射影平面曲线的伯恩斯坦–佐藤多项式与锥。现在，我们可以兑现承诺，给出所有满足以下条件的显式定义方程：$f \in \mathbb{C}[x,y,z]$ 具有（至多）拟齐次（必为孤立）奇点，且 $-3/d$ 不是 f的伯恩斯坦–佐藤多项式的根。

定理 E。 设 $f \in \mathbb{C}[x,y,z]$ 是次数为 d的齐次多项式，且其对应的射影除子 $D \subset \mathbb{P}^2$ 既不是锥，也不是正规交叉。设约化的 $D_{\mathrm{red}} \subset \mathbb{P}^2$ 具有（至多）拟齐次孤立奇点。

考虑以下条件：

(a) $-\frac{3}{d} \notin$ 零点$(b_f(s))$; ***(b)*** $-\frac{3}{d} \notin$ 零点$(b_D(s))$; ***(c)*** 经过齐次线性坐标变换， f 可写成满足(1.3)（非无迹条件）的半单标准形式（定义 *D*）。

Then

$$\Big[\textit{(a) is true}\Big] \iff \Big[\textit{both (b) and (c) are true}\Big].$$

证明。 命题 4.9 表明，(c) 等价于 f 存在一个半单、非无迹的湮灭导子。现在使用定理 C。□

注 4.10。

(a) 若 f 是约化的且处于半单标准形式，则条件 $-3/d \notin$Zeroes($b_D(s)$) 完全由 t 和 u 的数值、 a_1、 a_2、 a_3 可能为零的情况，以及数值 m 决定。非约化情形则更为微妙。(b) 假设定理 E 中的 $t = 2$ 和 $u = 1$ 满足条件，使得 D_{red} 是直线与圆锥曲线的（特殊）并。那么，非无迹条件等价于$a_1 \neq a_3$。因此，当等号成立时， $-3/d \in$ Zeroes($b_f(s)$)。(c) 假设 f 是约化的、处于半单标准形式且没有线性因子。那么，非无迹条件等价于 $t \neq 2u$ ；并且（回忆一下，u、t 互素）当且仅当 $t = 2$ 和 $u = 1$ 时不成立。(d) 假设 $f = y^t + x^u z^{t-u}$ 处于半单标准形式且满足 $u \neq 0$。因此，$1 \leq u < t$，且数对 u、t 以及 $t-u$、t 互素。我们断言， $-3/t \in$Zeroes($b_f(s)$) 当且仅当非无迹条件不成立或 $t = 3$。根据上述内容，这等价于说 $[-3/t \in$ Zeroes($b_f(s)$)$] \iff [t \in \{2, 3\}]$.

根据伯恩斯坦–佐藤多项式的加性 Thom–Sebastiani 结果[37, 命题 0.7，定理 0.8], $b_f(s)$ 由 y^t 和 $x^u z^{t-u}$的伯恩斯坦–佐藤多项式的数据决定。在此情形下，令 e, ℓ_1, ℓ_2表示整数,

$$\mathrm{Zeroes}(b_f(s)) = \{-1\} \cup \bigcup_{\substack{1\leq e\leq t-1\\ 1\leq \ell_1\leq u-1}} \{-(\frac{e}{t} + \frac{\ell_1}{u})\} \cup \bigcup_{\substack{1\leq e\leq t-1\\ 1\leq \ell_2\leq t-u-1}} \{-(\frac{e}{t} + \frac{\ell_2}{t-u})\}.$$

假设 $\frac{e}{t} + \frac{\ell_1}{u} = \frac{3}{t}$。那么 $(3-e)u = \ell_1 t$。由于我们对 u 和 t的限制，这只有在 $u = 1$ 且 $t = 2$时才可能。对称地推理可知，若 $\frac{e}{t} + \frac{\ell_2}{t-u} = \frac{3}{t}$，则 $t - u = 1$ 且 $\bar{t} = \overline{2}$。因此，确实有 $[-3/t \in$零点($b_f(s)$)$] \iff [t \in \{2, 3\}]$。

5. 定理 F 和定理 A

本节主要证明定理 F。结合定理 E，可迅速推出我们的主要结果——定理 A。我们先回顾目标。

定理 F。 设 $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ 是次数为 d 的齐次多项式，且其处于半单标准形式（定义 *D*），满足非无迹条件，并且不定义超平面配置。假设所有 $\frac{1}{a_i}$ 和 $\frac{1}{b_i}$ 都不同于 $\frac{3}{d}$。那么， $-\frac{3}{d}$ 既不是 $Z_f^{\mathrm{mot}}(s)$ 的极点，也不是 $\overline{Z_{f\,0}^{\mathrm{mot}}(s)}$ 的极点。此外， $\bar{f}$ 满足强单值猜想加强版以及在0 处的局部变体。

由于处于半单标准形式， f 可以写成

$$f = x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} \prod_{1\leq q\leq m} \left(y^t + c_q x^u z^{t-u}\right)^{b_q}. \tag{5.1}$$

这里 m，t，$u \in \mathbb{Z}_{>0}$； $u < t$和 u与 t互素； $b_1 \in \mathbb{Z}_{>0}$和a_1，a_2，a_3，b_2，……，$b_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$； c_1，……，$c_m \in \mathbb{C}^\times$两两不同。注意，

$d = a_1 + a_2 + a_3 + t(b_1 + \cdots + b_m)$。（我们知道 $1 \leq u < t$，且至少一个 b_q 非零，因为 f 不是超平面配置。）

还要回顾一下，这样的 f 满足非无迹条件，当

$$u(d - 3a_3) \neq (t - u)(d - 3a_1). \tag{5.2}$$

定理 F 的证明分布在以下几个小节中。除非另有说明，我们固定 f，其定义如定理 F 所述。

5.1. 初步化简。首先，要证明定理 F，只需证明 $-3/d$ 不是动机 zeta 函数（无论在全局还是局部情形下）的极点。为此，假设 $s_0 \neq -3/d$ 是 $Z_f^{\mathrm{mot}}(s)$ 的另一个极点，阶为 $m_0 \geq 1$。一如既往，$D \subset \mathbb{P}^2$ 是与 $\mathrm{Div}(f)$ 关联的射影除子。由 (2.6)，有两种可能：s_0 是某点 p 处与 D 关联的某个局部 zeta 函数的阶为 m_0 的极点，其中 p 位于 D_{red} 的奇异轨迹中；$s_0 = -1/\ell$ 是阶为 1 的极点，其中 ℓ 是 D 的某个分支的重数。在前一种情形下，[9, 定理 D] 指出 s_0 是相应局部 Bernstein–Sato 多项式的一个根，其重数至少为 m_0；在后一种情形下，注 2.2 表明，D 在该分支一般点处的局部 Bernstein–Sato 多项式是 $1 + \ell s$ 的倍数。由于 D 的所有局部 Bernstein–Sato 多项式都整除 $b_D(s)$，而后者又整除 $b_f(s)$，我们由此得出，s_0 是 $b_f(s)$ 的一个根，其重数至少为 m_0。关于 $Z_{f,0}^{\mathrm{mot}}(s)$ 和 $b_{f,0}(s)$ 的类似论述完全相同：一方面，$b_{f,0}(s) = b_f(s)$；另一方面，根据引理 2.12，$Z_f^{\mathrm{mot}}(s)$ 与 $Z_{f,0}^{\mathrm{mot}}(s)$ 仅相差一个因子 $\mathbb{L}^{3+ds}$。

此外，我们将看到，证明 $-3/d$ 不是极点的方法是计算 $-3/d$ 处的留数，并证明它为零。引理 2.12 意味着，对于全局 $Z_f^{\mathrm{mot}}(s)$ 或局部 $Z_{f,0}^{\mathrm{mot}}(s)$，这些留数相同。

因此，接下来我们只需证明 $-3/d$ 不是全局动机 zeta 函数 $Z_f^{\mathrm{mot}}(s)$ 的极点。

5.2. **准备工作**。记 $V := \{xyz \prod_{1 \leq q \leq m} (y^t + c_q x^u z^{t-u}) = 0\}$。（因此 $\mathrm{Div}(f)_{\mathrm{red}} \subset V$，且当且仅当 $a_1 a_2 a_3 \neq 0$ 时等号成立。）

我们以显而易见的方式构造 $V \subset \mathbb{C}^3$ 的嵌入解消 h。首先，我们对原点进行爆破，得到一个例外曲面 $F \cong \mathbb{P}^2$。令 V_0 表示 F 与 V 的严格变换的交（因此 V_0 由与 V 相同的方程给出，只不过现在 x，y，z 是 $\mathbb{P}^2$ 上的齐次坐标）。然后，我们构造 $V_0 \subset F$ 的最小嵌入解消 $\pi\colon F_0 \to F$，并将 $\pi^{-1}(V_0)$ 的不可约分支记为 E_j，$j \in T$，。显然，所有例外 E_j 都与 $\mathbb{P}^1$ 同构；在我们的情形中，所有 E_j 都具有这一性质，因为 V_0 的所有分支都是有理的。

这诱导出 V 的嵌入解消 $h\colon Y \to \mathbb{C}^3$；$h^{-1}V$ 的不可约分量为 F_0，以及在每条曲线 E_j 上的一个 $\mathbb{A}^1$-丛 F_j。

每个分支的数值数据 $F_j, j \in \{0\} \cup T$, 记为（N_j, ν_j）；因此

$$\mathrm{Div}(f \circ h) = dF_0 + \sum_{j \in T} N_j F_j \tag{5.3}$$

and

$$K_Y = \mathrm{Div}(h^*(dx \wedge dy \wedge dz)) = 2F_0 + \sum_{j \in T} (\nu_j - 1) F_j, \tag{5.4}$$

因为（N_0, ν_0） ＝（d,3）。此外，当 F_j是F的严格变换的一个分支时，我们有 $\nu_j = 1$，而 N_j 是表达式（5.1）中的相应幂 a_i 或 b_q。

记 $E_I^\circ = \cap_{i\in I} E_i \setminus \cup_{k\notin I} E_k$为每个 T的子集 I，我们回顾一下， F_0是所有 E_I°、$I \subset T$的不交并。为简化记号，设 $E_i^\circ = E_{\{i\}}^\circ$。

约定 5.1。 图 3 和图4假定 $u \notin \{1, t-1\}$。否则，图示会略有错误：若 $u = 1$，则 E_x 与 E 相交，并且会缺少一条由有理曲线构成的黑色“链”；若 $u = t-1$，则 E_z与 E'相交，并且会缺少另一条由有理曲线构成的黑色“链”。

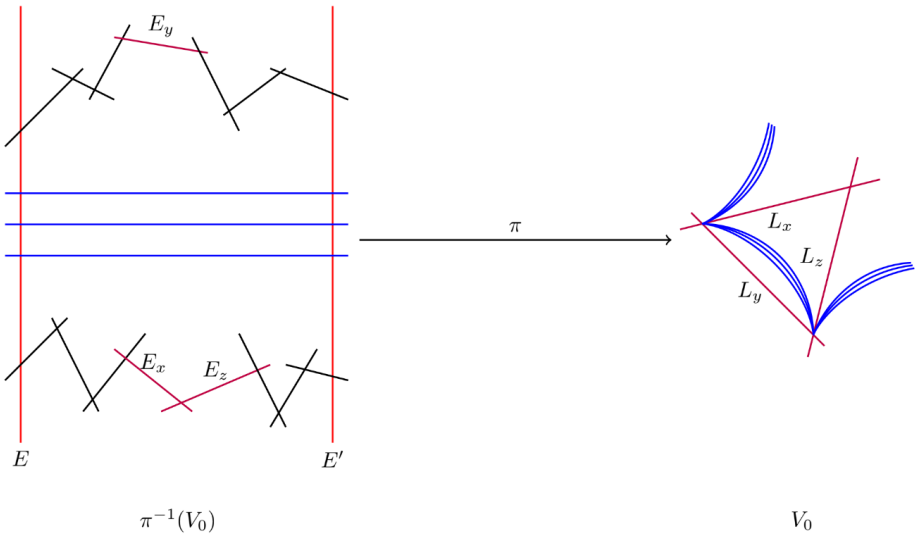

图 3。 $V_0 \subset F \simeq \mathbb{P}^2$ 的嵌入解消 π： $F_0 \to F$ 以及 π^{-1} V_0 L_x L_y L_z $\{x=0\}$ $\{y=0\}$ $\{z=$的各分支（）；,,是超平面,,, E_x E_y E_z $0\} \subset \mathbb{P}^2$ 相应的严格变换为,,。

对于齐次多项式，其动机 zeta 函数的公式 (2.2) 可化简为用相伴射影超曲面的嵌入解消来表述的公式，在我们的情形中即用 $\pi : F_0 \to F \cong \mathbb{P}^2$ 来表述。与引理 2.12 比较即得如下结论。

命题 5.2. 采用上述记号，我们有

$$Z_f^{\mathrm{mot}}(s) = \mathbb{L}^{-3} \cdot \frac{(\mathbb{L}-1)\,\mathbb{L}^{3+ds}}{\mathbb{L}^{3+ds}-1} \left([E_\emptyset^\circ] + \sum_{j\in T} [E_j^\circ] \frac{\mathbb{L}-1}{\mathbb{L}^{\nu_j+N_j s}-1} + \sum_{i\neq j\in T} [E_i \cap E_j] \frac{(\mathbb{L}-1)^2}{(\mathbb{L}^{\nu_i+N_i s}-1)(\mathbb{L}^{\nu_j+N_j s}-1)} \right).$$

局部版本 $Z_{f\,0}^{\mathrm{mot}},(s)$ 由相同的公式去掉因子 $\mathbb{L}^{3+ds}$ 得到。

稍微滥用一下记号，我们将 F_0 中与其他分支相交三次的两条例外曲线 E_j 重新命名为 E 和 E'，如图 3 所示。通过经典计算可得

$$(N = tu\sum_{i=1}^{m} b_i + ta_1 + ua_2,\ \nu = t + u)$$

and

$$(N' = t(t-u)\sum_{i=1}^{m} b_i + ta_3 + (t-u)a_2,\ \nu' = 2t - u).$$

直接计算可得非无迹条件的如下双有理内容。

引理 5.3. 以下各项等价：

(a) 非无迹条件 (5.2) 成立；*(b)* $\frac{\nu}{N} \neq \frac{3}{d}$；

(c) $\frac{\nu'}{N'} \neq \frac{3}{d}$。

现在我们开始证明定理 F。我们讨论一般情形，即所有 $a_i > 0$。注意此时 $V_0 = D$ 和 $\chi(\mathbb{P}^2 \setminus D_{\mathrm{red}}) = 0$。其他情形将很快由这一情形（及其证明）推出。我们引入以下记号。

记号 5.4. 首先，对于嵌入曲面中的 C_ℓ 某条射影曲线，我们将其在该曲面上的自交数（取相反数）记为

$$\kappa_\ell = -\deg(C_\ell \cdot C_\ell).$$

其次，给定一个具有不可约分支 $\{G_k\}, k \in K$,˜的嵌入解消，固定一些数值数据 $(N, \tilde{\nu})$。然后，对于 $k \in K$，我们定义

$$\alpha_k = \nu_k - (\tilde{\nu}/\tilde{N})N_k.$$

在我们的 $\{E_j\}, j \in T$ 情形下，我们通常（但并非总是）使用 α-项和 κ-项。˜在这种情形下，如果未指定数值数据 $(N, \tilde{\nu})$，则它们为 $(d, 3)$，且对应于 F_0。注意，此时 $\alpha_j = 0 \iff \nu_j/N_j = 3/d$，并且在 $s_0 = -3/d$ 处对$\mathbb{L}^{\nu_j + sN_j}$ 进行“求值”可得 $\mathbb{L}^{\alpha_j}$。

我们的证明需要处理 α-项之间的数值关系，因此需要以下引理。

引理 5.5。

(a) 对于 $j \in T$，记 $\alpha_j := \nu_j - (3/d)N_j$。那么 $K_{F_0} = \sum_{j\in T}(\alpha_j - 1)E_j$。

(b) 固定 E_j、$j \in T$，它们与另外两条曲线相交，记作 E_{j_1} 和 E_{j_2}。记 $\kappa_j := -\deg(E_j \cdot E_j)$，作为 F_0 上的曲线。*(1)* 那么 $\kappa_j\alpha_j = \alpha_{j_1} + \alpha_{j_2}$。*(2)* 进一步假设 E_j 是 π 的一条例外曲线。那么 $\kappa_j N_j = N_{j_1} + N_{j_2}$ 且 $\kappa_j\nu_j = \nu_{j_1} + \nu_{j_2}$。

证明。 (a) 由于任意有理函数的除子在 Pic(Y) 中为零，表达式 (5.4) 和 (5.3) 推得

$$\begin{aligned} K_Y &= 2F_0 + \sum_{j\in T}(\nu_j - 1)F_j - \frac{3}{d}(dF_0 + \sum_{j\in T} N_j F_j) \\ &= -F_0 + \sum_{j\in T}(\alpha_j - 1)F_j \end{aligned}$$

在 Pic(Y) $\otimes\,\mathbb{Q}$ 中。于是，对 $F_0 \subset Y$ 的伴随公式给出（在 Pic(F_0) $\otimes\,\mathbb{Q}$ 中）

$$K_{F_0} = (K_Y + F_0)\cdot F_0 = \sum_{j\in T}(\alpha_j - 1)F_j \cdot F_0 = \sum_{j\in T}(\alpha_j - 1)E_j.$$

(b)(1) 再次应用伴随公式，这次针对 $E_j \subset F_0$，得到

$$K_{E_j} = (K_{F_0} + E_j)\cdot E_j = \alpha_j E_j \cdot E_j + (\alpha_{j_1} - 1)E_{j_1}\cdot E_j + (\alpha_{j_2} - 1)E_{j_2}\cdot E_j,$$

然后由取次数可得 $-2 = -\kappa_j\alpha_j + (\alpha_{j_1} - 1) + (\alpha_{j_2} - 1)$。

(b)(2) 这是众所周知的；例如参见 [44, 引理 4.1]。 □

下面给出一个有用的推论。

引理 5.6. 不存在两个 E_j 与 E_{j_1}，满足 j、$j_1 \in T$，使得 $E_j \cap E_{j_1} \neq \emptyset$ 且 $\alpha_j = 0 = \alpha_{j_1}$。

证明. 假设存在这样的 E_j 与 E_{j_1}。称下列分支为无害的：E, E'，以及任何使得相应的 F_k 为 h的严格变换的 E_k。由引理 5.3 以及我们对 a_i 与 b_q的假设，任何无害分支都具有非消失的 α项。因此 E_j 并非无害。特别地， E_j 恰好与两个分支相交： E_{j_1} 与 E_{j_2}。利用引理 5.5，我们得到 $\alpha_{j_2} = 0$，从而 E_{j_2}并非无害。以 E_{j_2} 代替 E_j 并重复此论证，便将 α项的消失性传播至图 3 的各个分支，直至最终到达一个无害分支，这是一个矛盾。□

注记 5.7. 我们有 $\alpha_E + \alpha_{E'} = 0$。由上文给出的对（$N, \nu$）与（$N', \nu'$）的显式计算，可得一个初等证明。

5.3. **极点阶数至多为一**。首先，我们声称 $-3/d$不可能是 $Z_f^{\mathrm{mot}}(s)$ 的三阶或二阶极点。若它是三阶极点，则必定存在某个 $i, i_1 \in T$,使得 $E_i \cap E_{i_1} \neq \emptyset$ 和 $\alpha_i = 0 = \alpha_{i_1}$。但引理 5.6 排除了这种情况。

因此，假设 $-3/d$ 是 $Z_f^{\mathrm{mot}}(s)$ 的一个二阶极点。那么必定存在某个 E_i，满足 $i \in T$，使得 $\alpha_i = 0$ 与 E_i 恰好相交于两个分支 E_{i_1}、E_{i_2}。如果 E_i 见证了 $-3/d$ 是一个二阶极点，那么下面的和必须见证 $-3/d$ 是

一个一阶极点。然而，

(5.5)

$$
\begin{aligned}
[E_i^\circ]\frac{\mathbb{L}-1}{\mathbb{L}^{\nu_i+N_is}-1}+[E_{\{i,i_1\}}^\circ]\frac{\mathbb{L}-1}{\mathbb{L}^{\nu_i+N_is}-1}\frac{\mathbb{L}-1}{\mathbb{L}^{\nu_{i_1}+N_{i_1}s}-1}+[E_{\{i,i_2\}}^\circ]\frac{\mathbb{L}-1}{\mathbb{L}^{\nu_i+N_is}-1}\frac{\mathbb{L}-1}{\mathbb{L}^{\nu_{i_2}+N_{i_2}s}-1}&\\
=\frac{(\mathbb{L}-1)^2}{\mathbb{L}^{\nu_i+N_is}-1}\cdot\left(1+\frac{1}{\mathbb{L}^{\nu_{i_1}+N_{i_1}s}-1}+\frac{1}{\mathbb{L}^{\nu_{i_2}+N_{i_2}s}-1}\right)&\\
=\frac{(\mathbb{L}-1)^2}{\mathbb{L}^{\nu_i+N_is}-1}\cdot\frac{\mathbb{L}^{\nu_{i_1}+\nu_{i_2}+N_{i_1}s+N_{i_2}s}-1}{(\mathbb{L}^{\nu_{i_1}+N_{i_2}s}-1)(\mathbb{L}^{\nu_{i_1}+N_{i_2}s}-1)}&\\
=\frac{(\mathbb{L}-1)^2}{\mathbb{L}^{\nu_i+N_is}-1}\cdot\frac{\mathbb{L}^{\kappa_i(\nu_i+N_is)}-1}{(\mathbb{L}^{\nu_{i_1}+N_{i_2}s}-1)(\mathbb{L}^{\nu_{i_1}+N_{i_2}s}-1)}&\\
=\frac{(\mathbb{L}-1)^2\sum_{e=0}^{\kappa_i-1}\mathbb{L}^{e(\nu_i+N_is)}}{(\mathbb{L}^{\nu_{i_1}+N_{i_2}s}-1)(\mathbb{L}^{\nu_{i_1}+N_{i_2}s}-1)}.&
\end{aligned}
$$

倒数第二个等式用到了引理 5.5。根据引理 5.6， α_{i_1} 和 α_{i_2}均不为零。因此，(5.5)在 $-3/d=-\nu_i/N_i$处没有极点，进而 $-3/d$ 不是 $Z_f^{\mathrm{mot}}(s)$的二阶极点。

这里值得注意的是，对于图 3 中不同于 E 和 E'的某个 E_i ， $3/d$ 可以 等于 ν_i/N_i 。在这种情况下， $-3/d$ 起初是 $Z_f^{\mathrm{mot}}(s)$的二阶候选极点，但由于 E_i 与图 3 中另外两个分支相交，我们已经看到，它最终只能是一个一阶极点，或者不是极点。

例 5.8。事实上，上述情况相当常见，即使对于约化的 f也是如此。我们举两个次数较小的例子，一个涉及三个坐标超曲面，另一个涉及不可约的 f。

(1) 设 $f=xyz(y^3-x^2z)$。那么在图 3 中，分支 E_i 与 E_x 相交，左侧分支 E_i 与 E_y 相交，二者都关联着 $\nu_i/N_i=3/d=1/2$。

(2) 设 $f=y^5-x^3z^2$。那么在图 3 中，分支 E_i 与 E_x 相交，并关联着 $\nu_i/N_i=3/d=3/5$。（注意，在此情形下，嵌入解消可通过删除图 3 中的曲线 E_x， E_y，和 E_z 来表示。）

因此，总体思路如下。我们考虑命题 5.2 括号中的和，根据 (5.5)，可将其改写为

$$
\sum_{I\subset T,\forall i\in I:\alpha_i\neq 0}[E_I^\circ]\prod_{i\in I}\frac{\mathbb{L}-1}{\mathbb{L}^{\nu_i+N_is}-1}+\sum_{i\in T,\alpha_i=0}\frac{(\mathbb{L}-1)^2\sum_{e=0}^{\kappa_i-1}\mathbb{L}^{e(\nu_i+N_is)}}{(\mathbb{L}^{\nu_{i_1}+N_{i_2}s}-1)(\mathbb{L}^{\nu_{i_1}+N_{i_2}s}-1)},
$$

其中，对任意满足 $i\in T$ 的 $\alpha_i=0$ ， E_{i_1} 和 E_{i_2} 是与 E_i 相交的唯一分支。我们在 $s_0=-3/d$ 处计算此表达式，以得到 $Z_f^{\mathrm{mot}}(s)$ 的 留数$-3/d$ 关于：

$$
\sum_{I\subset T,\forall i\in I:\alpha_i\neq 0}[E_I^\circ]\prod_{i\in I}\frac{\mathbb{L}-1}{\mathbb{L}^{\alpha_i}-1}+\sum_{i\in T,\alpha_i=0}\kappa_i\frac{(\mathbb{L}-1)^2}{(\mathbb{L}^{\alpha_{i_1}}-1)(\mathbb{L}^{\alpha_{i_2}}-1)}. \tag{5.6}
$$

（严格来说，我们从留数中删去了一个无关紧要的 $\mathbb{L}^{-3}(\mathbb{L}-1)$ 因子。）我们的任务是证明该留数为零，从而确认 $-3/d$ 不是$Z_f^{\mathrm{mot}}(s)$的极点。

若全部 $\alpha_i\neq 0$，则将下文的定理 5.9 应用于 F_0，便可立即推出：$-3/d$ 不是 $Z_f^{\mathrm{mot}}(s)$ 的极点。

定理 5.9。 *([43])* 设 M 是一个三维非奇异簇，且 $f : M \to \mathbb{C}$ 是一个非常值正则函数。设 $r : Y \to M$ 是 $\{f = 0\}$的一个嵌入解消。记 $F_j, j \in J$为 $r^{-1}\{f = 0\}$ 的不可约分支，并设 N_j, ν_j和 F_J°如设定 *5.2* 中所述。固定一个射影例外曲面 F_j，并记 $J_j := \{i \in J \setminus \{j\} \mid F_i \cap F_j \neq \emptyset\}$。假设对于所有 $i \in J_j$， $\nu_j/N_j \neq \nu_i/N_i$成立（或者等价地，所有 $\alpha_i := \nu_i - (\nu_j/N_j)N_i \neq 0$均成立）。

记

$$R_{F_j} := [F_j^\circ] + \sum_{\emptyset \neq I \subset J_j} [F_I^\circ] \prod_{i \in I} \frac{\mathbb{L} - 1}{\mathbb{L}^{\alpha_i} - 1}, \tag{5.7}$$

是‘ F_j 对 $Z_f^{\mathrm{mot}}(s)$ 的留数$-\nu_j/N_j$ 的贡献’（相差一个非零常数因子）。

再记 $C := \cup_{i \in J_j}(F_i \cap F_j)$ 。假设 C 是连通的，并且 $F_j \setminus C$不包含一条（-1）曲线（即一条可以吹下的光滑有理射影曲线）。如果 $\chi(F_j^\circ) \leq 0$，那么 $R_{F_j} = 0$。

5.4. 消失项的策略。遗憾的是，在我们的设定下，这些 α_i 确实可能有一个或多个为零（回想例 5.8）。现在我们假设，对于至少一个 E_i，有 $\alpha_i = 0$ 。

我们将借鉴定理 5.9 证明中的一些想法，并证明其结论在此处仍然成立。我们强调，这一般并不成立！我们将大量利用 $V_0 \subset \mathbb{P}^2$的（最小）嵌入解消的具体图。（参见例 5.15，其中定理 5.9 的结论不成立。）

考虑有理映射 $\psi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1 = B : [x : y : z] \to [y^t : x^u z^{t-u}]$。解消 ψ 的不定点所需的最小爆破解析序列，恰好是最小嵌入解消映射 $\pi : F_0 \to F \cong \mathbb{P}^2$。令 $\tilde{\psi} : F_0 \to B$ 表示由此得到的态射。

我们有 F_0 中所有曲线和 $y^t - \lambda x^u z^{t-u}$映射到 $B \setminus \mathbb{C}^*$的严格变换。两个特殊纤维分别位于 0 和 ∞上，是图4中的 $\mathbb{P}^1$链，分别包含 E_y 和 $E_x \cup E_z$。

一般纤维为 $\tilde{\psi}$ 为 $\mathbb{P}^1$，众所周知 ψ 可分解为 $p \circ g$，其中$p : \Sigma \to B$是一个丛曲面，而 $g : F_0 \to \Sigma$ 是一系列吹下，将两个特殊纤维收缩为一个 $\mathbb{P}^1$。参见图4。

受定理 5.9 证明的启发，我们的策略如下。

（1）更一般地，对于具有“多数”标记$\alpha_i \neq 0$的非奇异曲面上的任意带标记正规交叉除子，我们引入一个表达式 R，将（5.7）推广到这种情形；这样，在我们的设定中存在某些 $\alpha_i = 0$ 时， $Z_f^{\mathrm{mot}}(s)$ 的候选极点 $-3/d$ 的实际留数恰好就是这样的一个表达式。

（2）我们证明，在除子“内部”进行吹起或吹下时，该表达式不发生变化。

（3）我们验证，对于 Σ 中的末端构型，该表达式为零。

（事实上，只要假设所有 $\alpha_i \neq 0$，实现这一切并不困难。）

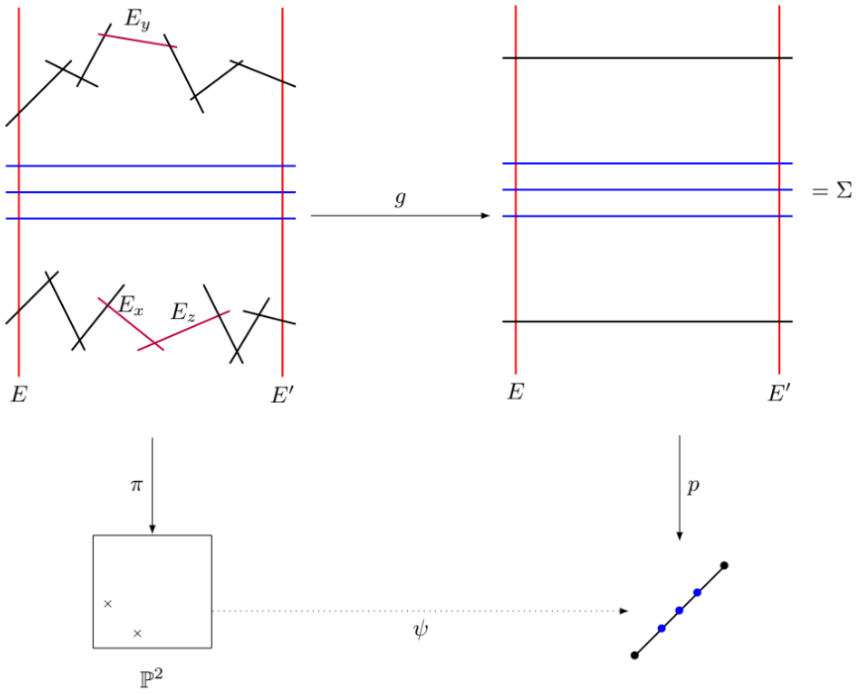

图4。底行中出现有理映射 $\psi\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1 = B$；标记为 $\times$ 的点表示其不定点集。这里，$\pi\colon F_0 \to \mathbb{P}^2$ 消解了不定点集，从而诱导出 $\tilde{\psi}\colon F_0 \to \mathbb{P}^1$。蓝色的 $\mathbb{P}^1$ 是 $\tilde{\psi}$ 的一些一般纤维，它们被映到 $\mathbb{P}^1$ 中的蓝色点；$\mathbb{P}^1$ 的链是 $\tilde{\psi}$ 的特殊纤维，它们被映到 $\mathbb{P}^1$ 中的黑色点（并表示 0 和 ∞）。注意，E 和 E' 双射到 $\mathbb{P}^1$。最后，$g\colon F_0 \to \Sigma$ 将这些 $\mathbb{P}^1$ 的链收缩为两个单独的 $\mathbb{P}^1$，从而得到丛曲面 $p\colon \Sigma \to \mathbb{P}^1$。

5.5. **“留数”的广义表达式**。在 [43], 中引入了一个R 广义表达式R，允许某些 α_i 为零。毫不意外，恰恰是这一项

$$\kappa_i \frac{(\mathbb{L}-1)^2}{(\mathbb{L}^{\alpha_{i_1}}-1)(\mathbb{L}^{\alpha_{i_2}}-1)}. \tag{5.8}$$

将会出现。事实上，若存在 E_i 且满足 $\alpha_i = 0$，它恰好与另外两个分支相交，记为 E_{i_1} 和 E_{i_2}；而 (5.8) 正是 E_i 对留数 (5.6) 的贡献。这里我们只提及所引文献中我们将用到的（特殊）情形。

定义 5.10。

(a) 设 S 是一个非奇异射影曲面，$C = \cup_{i\in T} C_i$ 是 S 上的一条简单正规交叉曲线，$A = \sum_{i\in T}(\beta_i - 1)C_i$ 是 S 上的一个 $\mathbb{Q}$-除子，且它是 K_S 的一个代表。（注意，当 $\beta_i = 1$ 时，分支 C_i 不包含在 A 的支撑中。）若对于满足 $\beta_i = 0$ 的$i \in T$，有 (i) C_i 是有理的，(ii) 恰有两条曲线 C_{i_1} 和 C_{i_2} 与 C_i 相交，且 $\beta_{i_1} \neq 0 \neq \beta_{i_2}$，则称对 $(C,\ A)$ 为 允许 对。

(b) 设 $(C,\ A)$ 是 S 上的一个允许对。与前面一样，对于 $I\subset T$，我们置 $C_I^\circ:=(\bigcap_{i\in I}C_i)\setminus(\bigcup_{\ell\notin I}C_\ell)$，并记 $\kappa_i:=-\deg(C_i\cdot C_i)$。我们将不变量与 $(C,\ A)$ 相关联:

$$R_S(C,A):=\sum_{I\subset T,\forall i\in I:\beta_i\neq 0}[C_I^\circ]\prod_{i\in I}\frac{\mathbb{L}-1}{\mathbb{L}^{\beta_i}-1}+\sum_{i\in T,\beta_i=0}\kappa_i\frac{(\mathbb{L}-1)^2}{(\mathbb{L}^{\beta_{i_1}}-1)(\mathbb{L}^{\beta_{i_2}}-1)}. \tag{5.9}$$

注记 5.11。 在上面的 (a)(i) 中，我们有 $\beta_{i_1}+\beta_{i_2}=0$ （由伴随公式 $(K_S+C_i)\cdot C_i=K_{C_i}$ 以及 $\beta_i=0$ 这一事实可得）。

这些广义表达式 $R_S(C,\ A)$ 结果表明，在我们的情形中，它们在吹起下保持不变!

引理 5.12。 *([43, 引理 5.1])* 设 S 是一个非奇异射影曲面。设 $C=\cup_{i\in T}C_i$ 是 S 上的一条简单正规交叉曲线，且 $A=\sum_{\ell\in T}(\beta_\ell-1)\tilde{C_\ell}$ 是 K_S 的一个代表元。考虑一个吹起 $b:\ S\to S$，其中心为 C 中两条曲线的一个交点。则

(a) (C,A) 在 S 上允许，当且仅当 $(b^{-1}C,K_{\tilde{S},S}+b^*A)$ 在 $\tilde{S}$ 上允许；*(b)* 在这种情况下，我们有 $R_{\tilde{S}}(b^{-1}C,K_{\tilde{S},S}+b^*A)=R_S(C,A)$。

这里 $K_{\tilde{S},S}=K_{\tilde{S}}-b^*K_S$ 表示相对典范除子。

5.6. 定理 F，一般情形。 定理 *F* 在 $a_1a_2a_3\neq 0$ 时的证明。 现在我们可以完成定理 F 一般情形的证明。 $-3/d$ 的留数（相差一个非零常数因子）是 F_0 上曲线构型对应的 (5.9) 形式的表达式。构成 g 的所有吹起的中心都是曲线构型中两条曲线的交点；因此根据引理 5.12，该留数等于 Σ 上曲线构型对应的表达式 $R_\Sigma(C,A)$。

因此我们必须证明 $R_\Sigma(C,\ A)\ =\ 0$。对于我们的两个 $\Sigma\to B$ 截面，保留名称 E （分别为 E'）；根据构造，它们的装饰没有改变，仍为 α（分别为 α'）。用名称 G_1、...、G_{m+2} 表示 C 的其他分支。每个 G_i 都是 $\Sigma\to B$ 的一个纤维，因此 $G_i\cdot G_i=0$。特别地，

$$\begin{aligned}R_\Sigma(C,A)=[\Sigma\setminus C]+[E^\circ]\frac{\mathbb{L}-1}{\mathbb{L}^{\alpha}-1}+[(E')^\circ]\frac{\mathbb{L}-1}{\mathbb{L}^{\alpha'}-1}\\+\sum_{\substack{1\le i\le m+2\\ \beta_i\neq 0}}\frac{\mathbb{L}-1}{\mathbb{L}^{\beta_i}-1}\left([G_i^\circ]+\frac{\mathbb{L}-1}{\mathbb{L}^{\alpha}-1}+\frac{\mathbb{L}-1}{\mathbb{L}^{\alpha'}-1}\right).\end{aligned}$$

由于 C 的每个分支都是有理的，$[G_i^\circ]=\mathbb{L}-1$ 和 $[E^\circ]=[(E')^\circ]=\mathbb{L}-m-1$。由于 $\Sigma\to B\simeq\mathbb{P}^1$ 是一张丛曲面，$[\Sigma\setminus(\cup_iG_i)]=[\mathbb{P}^1](\mathbb{L}-m-1)$，因此 $[\Sigma\setminus C]=(\mathbb{L}-m-1)(\mathbb{L}-1)$。我们得到

$$R_\Sigma(C,A)=\left(1+\frac{1}{\mathbb{L}^{\alpha}-1}+\frac{1}{\mathbb{L}^{\alpha'}-1}\right)\left((\mathbb{L}-m-1)(\mathbb{L}-1)+\sum_{\substack{1\le i\le m+2\\ \beta_i\neq 0}}\frac{(\mathbb{L}-1)^2}{\mathbb{L}^{\beta_i}-1}\right).$$

最后，利用 $\alpha+\alpha'=0$，很容易验证第一个乘数因而整个表达式恒等于零。□

注记 5.13。 上述推理还给出了一个更具概念性的证明，证明$\alpha+\alpha'=0$。这个思路让人想起我们如何在引理 5.5 中利用伴随公式找出 α-项之间的关系；不过现在我们使用引理 5.12，并将伴随公式应用于丛曲面 Σ 的典范除子。

注记 5.14。

(a) 为了证明定理 5.9，必须扩展定义 5.10 中的允许对这一概念，允许具有 $\alpha_i = 0$ 的曲线与任意数量的曲线相交，见 [43, 1.4]。这一更一般的概念仍然“几乎总是”在吹起下保持不变：存在一种例外情形，使得广义表达式 $R_S(C, A)$ 会发生变化；更准确地说，当膨胀中心是一个位于具有 $\alpha_i = 0$ 的分支上、但不在任何其他分支上的点时，见 [43, 引理 1.5]。

(b) 定理 5.9 的证明以一个结构定理为基础 [42, 定理 3.5] ，该定理针对有理光滑射影曲面 S上的正规交叉曲线构型，且其补集的欧拉示性数非正。其大意是：存在一列吹胀 b ，随后是一列吹下 g，全部都在“曲线构型内部”进行，从而将 S 变为丛曲面 Σ，并得到三种可能的终端构型，其中包括上文 Σ所示的一种。

利用这一结构定理，定理 5.9 证明中的要点是证明 (a) 中的例外吹起/吹下不会发生在结构定理中的 b 或 g 内部。特别是，证明例外情形不会发生在 g内部时，关键用到了 S 上的所有 $\alpha_i \neq 0$ 这一事实！

5.7. **定理 F，所有情形**。定理 F 的证明。最后，我们处理一个或多个 a_i 为零的特殊情形，也就是说，并非所有坐标超平面都属于 $f = 0$的支撑，或者等价地，并非所有坐标直线都属于 D的支撑。

然后，我们考虑同一个映射 $\pi\colon F_0 \to F$，它显然是 D的嵌入解消。我们还考虑与之前相同的 F_0 上的曲线构型，即将缺失的 E_x、 E_y 或 E_z 添加到 D_{red} 的全逆像中。将值 $\alpha_j = 1$ 赋给这些曲线后， $-3/d$ 作为 $Z_f^{\mathrm{mot}}(s)$的候选极点时，其留数（相差一个非零常数因子）由曲面 F_0的类似表达式$R_S(C, A)$给出。也就是说，我们可以将这些情形视为一般情形的特殊情况，其中某些 α值等于 1。□

例 5.15. 设 $f = (yz - x^2)(yz - x^2 + y^2)$，则相应的射影曲线 $D \subset \mathbb{P}^2 \cong F$ 由两条圆锥曲线组成，它们交于一点。因此注意到，欧拉示性数 $\chi(\mathbb{P}^2 \setminus D) = 0$。

$\pi\colon F_0 \to F$ 的最小嵌入解消 D 由连续四次吹起组成，其例外曲线为 E_1， E_2, E_3， E_4。见图5。在 $\{f = 0\}$的诱导嵌入解消 $h\colon Y \to \mathbb{C}^3$ 中，严格变换的两个分支的数值数据为 (1，1)，而数值数据为 (N_i, ν_i) 的例外分支 F_i 为 F_0(4，3)、 F_1(2，2) 、 F_2(4， 3) 、 F_3(6， 4) 、 F_4(8， 5)。像之前一样记作 $\alpha_i = \nu_i - (\nu_0/N_0)N_i$，特别地，我们有 $\alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = -1/2$。

因此， $s_0 = -3/d = -3/4$ 是 $Z_f^{\mathrm{mot}}(s)$的一个二阶候选极点，经过简单计算可知它实际上是一个一阶有效极点。然而，除了 $\alpha_2 = 0$这一事实外，定理 5.9 的所有条件都满足。（请注意，这种圆锥曲线构型在这个领域是一个“标准例子”；另见 [1,例 2.14]。）

注记 5.16。 定理 F 关于拓扑 ζ 函数 $Z_{f\,0}^{\mathrm{top}}$，(s) 的结论可以通过初等证明得到。我们在 $a_1a_2a_3 \neq 0$ 的情形下对此作一概述。

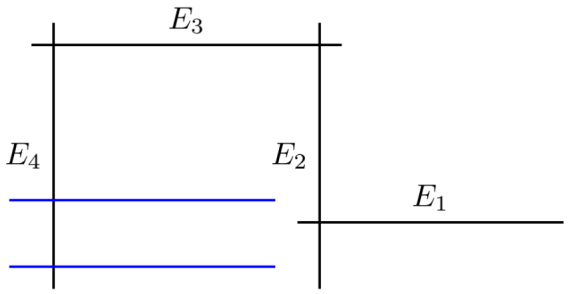

图5. 两条圆锥曲线 $D \subseteq \mathbb{P}^2 \simeq F$ 的最小嵌入解消。例外曲线为黑色，标记为 E_1, E_2, E_3, E_4；而两条严格变换为蓝色且未标记。

首先注意到，拓扑 ζ 函数的命题 5.2 的类似结论是

$$Z_f^{\mathrm{top}}(s) = Z_{f,0}^{\mathrm{top}}(s) \tag{5.10}$$
$$= \frac{1}{3+ds}\left(\chi(E_\emptyset^\circ) + \sum_{j\in T}\frac{\chi(E_j^\circ)}{\nu_j + N_j s} + \sum_{i\neq j\in T}\frac{\chi(E_i\cap E_j)}{(\nu_i+N_i s)(\nu_j+N_j s)}\right).$$

策略是改用 [41]，中一个简洁得多的公式，其中例外曲线链 E_i 的总贡献，更确切地说，图 3 中四条“黑色链”各自的总贡献，都只由一个简单项给出。这实际上具有几何意义：我们可以将每条这样的链（视为 F_0 上的一条曲线）收缩为一个点，而该点在所得曲面 F 上是一个循环商奇点¯。（所得曲面就是所谓的相对对数典范模型，即这对 $(F,\ V)$ 的相对对数典范模型。）图6显示了 F 中其余¯分支的像，以及四个商奇点，它们以黑色圆点标出。（注意：当 $u=1$ 或 $u=t-1$ 时，会缺少一条“黑色链”。这并无妨碍，因为此时有一条链从未被收缩，对应点处的“商奇点”实际上是光滑的。）

一般来说，设收缩链 E_ℓ、 $\ell \in C(\subset T)$，的端曲线分别与曲线 E_i 和 E_j相交，并令 Δ 表示该链中曲线 E_ℓ 的交矩阵行列式绝对值。于是，根据 [41] ，该链 C 对 (5.10) 的总贡献为

$$\frac{1}{3+ds}\left(\sum_{\ell\in C}\frac{\chi(E_\ell^\circ)}{v_\ell+N_\ell s} + \sum_{k\in T,\ell\in C,k\neq\ell}\frac{\chi(E_k\cap E_\ell)}{(v_k+N_k s)(v_\ell+N_\ell s)}\right),$$

is

$$\frac{1}{3+ds}\cdot\frac{\Delta}{(\nu_i+N_i s)(\nu_j+N_j s)}. \tag{5.11}$$

在我们的设定中，这些行列式是众所周知的，并标注在图6中。因此，点 P_y、 P_x、 P'_y、 P'_z的贡献分别为 $1/(3+ds)$倍

$$\frac{t}{(\nu+Ns)(1+a_2 s)},\ \frac{u}{(\nu+Ns)(1+a_1 s)},\ \frac{t}{(\nu'+N's)(1+a_2 s)}\ \frac{t-u}{(\nu'+N's)(1+a_3 s)},$$

。因此，利用 (5.11)，我们可以简化 (5.10)：

$$(3+ds)Z_f^{\mathrm{top}}(s) = \frac{1}{\nu+Ns}\Big(-m+\frac{t}{1+a_2s}+\frac{u}{1+a_1s}+\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{1+b_js}\Big)$$
$$+\frac{1}{\nu'+N's}\Big(-m+\frac{t}{1+a_2s}+\frac{t-u}{1+a_3s}+\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{1+b_js}\Big)+\frac{1}{(1+a_1s)(1+a_3s)}.$$

这里我们利用了嵌入解消图的特定形状：由于每个E_j都是有理的，如果 $E_j \neq E$, E'，那么 $\chi(E_j^\circ) = 0$，因为带有两个穿孔的 $\mathbb{P}^1$ 的欧拉示性数为零。我们还利用了 V_0的特定形状： $\chi(E_\emptyset^\circ) = 0$，因为 $a_1a_2a_3 \neq 0$。

根据我们对 a_i 和 b_j的假设，现在显然 $-3/d$要么是一个一阶极点，要么不是极点。接下来，我们通过反复利用 $\alpha+\alpha' = 0$来计算 Z_f^{top} (s)在 $-3/d$ 处的留数：

$$\frac{1}{\alpha}\Big(-m+\frac{t}{\alpha_y}+\frac{u}{\alpha_x}+\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\alpha_j}\Big)+\frac{1}{\alpha'}\Big(-m+\frac{t}{\alpha_y}+\frac{t-u}{\alpha_z}+\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\alpha_j}\Big)+\frac{1}{\alpha_x\alpha_z}$$
$$=\frac{u}{\alpha\alpha_x}+\frac{t-u}{\alpha'\alpha_z}+\frac{1}{\alpha_x\alpha_z}=\frac{\alpha_z u-(t-u)\alpha_x+\alpha}{\alpha\alpha_x\alpha_z}.$$

现在可以验证这个留数为零。一种方法是利用 α_x、 α_z和 α 的显式表达式进行初等计算（我们此前已计算过（N， ν）。

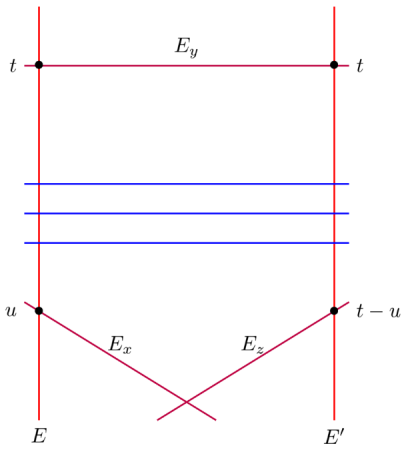

图6。曲面 $\tilde{F}$上剩余的分支，由收缩图 3 中的黑色“链”得到。四个黑点表示循环商奇点$\{P_y, P_x, P_y', P_z'\}$，每个奇点旁都标注了相应的行列式 Δ。

可以设想，利用这一策略来证明动机 zeta 函数。事实上，对于上述 [25] 链的贡献，确有一个简洁公式，其特化后得到 (5.11)，但分子要复杂得多，

分子是若干 $\mathbb{L}$次幂之和，其中涉及变量 s、下取整函数以及商奇点的精确结构。对于任意的 t 和 u，我们尚不清楚如何用这种方法证明留数为零。

注意，当 $a_1a_2a_3 \neq 0$ 时，也可以使用 [1, 定理 2.15]，通过验证 D 是文献所述意义下的一个“坏”除子，从而得出拓扑 ζ 函数的定理 F。这需要确认 $-3/d$ 在 $D_{\mathrm{red},\ \mathrm{Sing}}$ 中任意一点都不是拓扑 ζ 函数的极点；我们（隐含地）利用 α 项之间的关系以及嵌入解消的具体形式得出了这一结论。此外，还需要 $\chi(\mathbb{P}^2 \setminus D_{\mathrm{red}}) \leq 0$，这取决于哪些 a_1，a_2，a_3 消失。 [1, 定理 2.15] 的证明用到了有理曲线铅笔的一个非平凡分类。

无论如何，存在这样的例子：动机 zeta 函数有一些极点，而拓扑 ζ 函数无法检测到这些极点。因此，在拓扑情形下对定理 F 的任何证明，都不必然意味着在动机情形下定理 F 成立。

5.8. **定理 A.** 由此可得我们的主定理。

定理 A. 设 $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3] \setminus \mathbb{C}$ 是齐次的，$D_{\mathrm{red}} \subset \mathbb{P}^2$ 是其对应的约化射影曲线。假设 D_{red} 至多具有准齐次奇点。那么 f 满足强单值化猜想。此外，f 在 0 处满足局部强单值猜想。

证明.我们不妨假设 f 不是正规交叉，因为若是如此，结论显然成立。现在假设 f 是可分解超平面配置，即经过某个齐次坐标变换后，我们可以将 $f = x^\ell f'$ 写成 $f' \in \mathbb{C}[y, z]$。（这包括 f 是一个锥的情形，因为我们允许 $\ell = 0$。）这种乘积结构意味着，$Z_f^{\mathrm{mot}}(s)$和$Z_{f\,0}^{\mathrm{mot}}(s)$的候选极点为 $-\ ^2\deg(f')$ 和$\{-\frac{1}{m_q}\}_q$，其中 q 遍历 $\{f = 0\}$ 的所有不可约分支，而 m_q 表示它们的重数。考察每个不可约分支的一般点，我们确认$-\frac{1}{m_q}$ 是伯恩斯坦–佐藤多项式 $b_f(s)$的一个根，见注 2.2。我们断言 $-\ ^2\deg(f')$ 也是$b_f(s)$的一个根。由于乘积结构，$b_{f'}(s)$整除 $b_f(s)$。命题 3.27 确认 $-\ ^2\deg(f') \in$ 属于$b_{f'}(s)$的零点集。

因此，我们可以假设 f 不是可分解超平面配置。特别地，它既不是锥，也不是正规交叉。命题 B 与定理 E 将我们的任务归结为证明以下命题：若 f 处于半单标准形式，不是超平面配置，并且满足非无迹条件；且若 $-3/d \notin$ Zeroes($b_D(s)$)，则 $-3/d$ 既不是 $Z_f^{\mathrm{mot}}(s)$ 的极点，也不是 $Z_{f\,0}^{\mathrm{mot}}(s)$。注意，$-3/d \notin$ Zeroes($b_D(s)$) 意味着所有 $\frac{1}{a_i}$ 和 $\frac{1}{b_i}$ 都不等于 $\frac{3}{d}$。因此，由定理 F 即可得证。□

注记5.17。本手稿表明，半单非无迹对数导子的存在显然具有一定意义，尤其是对于 Bernstein–Sato 多项式而言，而这由非无迹条件 (5.2) 加以刻画，参见命题 4.9。然而，这个非无迹条件对我们来说仍然很神秘。它确实具有「某种」双有理内容：根据引理 5.3，在我们选定的 V_0 嵌入解消中，恰有两个分支 E，E' 属于 $\pi^{-1}(V_0)$，它们（可能）与三个分支相交，而非无迹条件等价于 $\alpha_E \neq 0 \neq \alpha_{E'}$。我们在证明定理 F 时关键地用到了这一点。

若能找到一般情形下非无迹对数导子的双有理解释，将会非常有趣。

参考文献

[1] E. Artal Bartolo、P. Cassou-Noguès、I. Luengo 和 A. Melle Hernández。若干曲面奇点的单值猜想。高等师范学校科学年刊（第 4 辑），35(4):605–640，2002年。[2] D. Bath。伯恩斯坦–佐藤簇与幂的湮灭。美国数学会会刊，373(12):8543–8582，2020年。[3] D. Bath。温和自由配置的伯恩斯坦–佐藤理想的组合确定零点。《奇点集》，20:165–204，2020年。[4] D. Bath。 $\mathbb{C}^3$中局部准齐次除子的伯恩斯坦–佐藤多项式。《组合数学》，161(4):859–915，2025年。[5] D. Bath 和 H. Dakin。Hodge 过滤与参数素因子。arXiv 电子预印本，文章编号 arXiv:2408.02601，2024年8月。[6] D. Bath 和 M. Saito。正权齐次因子的扭曲对数复形。《代数几何杂志》，34(3):447–487，2025年。[7] I. N. Bernšteĭn。关于参数的广义函数的解析延拓。《泛函分析及其应用》，6(4):26–40，1972年。[8] J.-E. Björk。微分算子代数上模的维数。载于《多变量解析函数与复分析》（CNRS 国际研讨会，第 208 号，巴黎，1972年），《Agora 数学》第 1 卷，第 6–11 页。Gauthier-Villars 出版社，巴黎—布鲁塞尔—蒙特利尔，1974年。[9] G. Blanco。平面曲线伯恩斯坦–佐藤多项式的拓扑根。arXiv 电子预印本，文章编号 arXiv:2406.09034，2024年6月。[10] G. Blanco、N. Budur 和 R. van der Veer。半准齐次超曲面的单值猜想。《数学新闻》，296(4):1394–1403，2023年。[11] L. A. Borisov。仿射直线的类是簇的 Grothendieck 环中的零因子。《代数几何杂志》，27(2):203–209，2018年。[12] N. Budur、M. Saito 和 S. Yuzvinsky。某些超平面配置的局部ζ函数与 b函数。《伦敦数学会杂志》（第 2 辑），84(3):631–648，2011年。附录由 Willem Veys 撰写。[13] F. Calderón-Moreno 和 L. Narváez-Macarro。局部准齐次自由因子的模 $\mathscr{D}f^s$。《组合数学》，134(1):59–74，2002年。[14] A. Del Valle Rodríguez。关于自由因子的欧拉齐次性。《奇点集》，27:112–127，2024年。[15] J. Denef 和 F. Loeser。欧拉–庞加莱特征、局部ζ函数与解析修改。《美国数学会杂志》，5(4):705–720，1992年。[16] J. Denef 和 F. Loeser。动机伊古萨ζ函数。《代数几何杂志》，7(3):505–537，1998年。[17] A. A. du Plessis。射影超曲面的全变性质。载于《实与复奇点》，《数学趋势》，第 289–298 页。比克豪泽出版社，巴塞尔，2007年。[18] A. A. du Plessis 和 C. T. C. Wall。具有一维对称性的 P^2(C) 中的曲线。《马德里康普顿斯数学评论》，12(1):117–132，1999年。[19] A. A. du Plessis 和 C. T. C. Wall。具有单参数对称群的 P^n(C) 中的超曲面。《伦敦皇家学会会刊 A 辑：数学、物理与工程科学》，456(2002):2515–2541，2000年。[20] L. Ein、R. Lazarsfeld、K. E. Smith 和 D. Varolin。乘子理想的跳跃系数。《杜克数学杂志》，123(3):469–506，2004年。[21] R. Gérard 和 A. Levelt。关于多变量情形下具有正则奇点的联络。《巴黎科学院报告 A-B 辑》，280:Aii，A1137–A1139，1975年。[22] M. Granger 和 M. Schulze。关于对数向量场的形式结构。《组合数学》，142(3):765–778，2006年。[23] M. Kashiwara。 B函数与全纯系统。 B函数根的有理性。《数学发明》，38(1):33–53，1976/77年。[24] M. Kashiwara。消失循环层与微分方程的全纯系统。载于《代数几何》（东京／京都，1982年），《数学讲义》第 1016 卷，第 134–142 页。施普林格，柏林，1983年。[25] E. León-Cardenal、J. Martín-Morales、W. Veys 和 J. Viu-Sos。$\mathbb{Q}$-Gorenstein 簇上的动机ζ函数。《数学进展》，370:107192，34，2020年。

[26] F. Loeser。p p-进伊古萨函数与伯恩斯坦多项式。《美国数学杂志》，110(1):1–21，1988年。[27] F. Loeser。p p-进伊古萨函数、伯恩斯坦多项式与 Newton 多面体。《纯粹与应用数学杂志》，412:75–96，1990年。[28] B. Malgrange。Bernstein–Sato 多项式与消失上同调。载于《奇异空间上的分析与拓扑》第二、三卷（吕米尼，1981年），《Astérisque》第 101–102 卷，第 243–267 页。法国数学会，巴黎，1983年。[29] M. Mustaţă 和 M. Popa。 $\mathbb{Q}$-除子的 Hodge 理想、 V-过滤与最小指数。《Forum Math. Sigma》，8:论文编号 e19，共 41 页，2020年。[30] L. Narváez Macarro。自由因子的 Jacobian 理想的线性条件与对数-亚纯比较。载于《奇点 I》，《当代数学》第 474 卷，第 245–269 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2008年。[31] J. Nicaise。 p-进与动机ζ函数及单值猜想导论。载于《ζ函数与 L函数的代数与解析方面》，《日本数学会回忆录》第 21 卷，第 141–166 页。日本数学会，东京，2010年。[32] B. Poonen。簇的 Grothendieck 环不是整环。《数学研究快报》，9 497，2002 4 493( ): –。[33] N. Potemans 和 W. Veys。 p-进伊古萨ζ函数导论。载于《 p-进分析、算术与奇点》，《当代数学》第 778 卷，第 71–102 页。美国数学会， [普罗维登斯], 罗得岛州， [2022] ©2022年。[34] B. Rodrigues 和 W. Veys。正规曲面上的ζ函数极点。《伦敦数学会会刊》（第 3 辑），87(1):164–196，2003 年。[35] K. Saito。超曲面的拟齐次孤立奇点。《数学发明》，14:123–142，1971年。[36] M. Saito。关于 b函数、谱与有理奇点。《数学年刊》，295(1):51–74，1993年。[37] M. Saito。关于微局部 b函数。《法国数学会通报》，122(2):163–184，1994年。[38] M. Saito。超平面配置的伯恩斯坦–佐藤多项式。《精选数学》（新辑），22(4):2017–2057，2016年。[39] M. Saito。具有加权齐次孤立奇点的射影超曲面的伯恩斯坦–佐藤多项式。arXiv 电子预印本，文章编号 arXiv:1609.04801 v11，2025年11月。[40] W. Veys。曲线拓扑 ζ 函数极点的确定。《数学手稿》，87(4):435–448，1995年。[41] W. Veys。曲线的ζ函数与对数典范模型。《伦敦数学会会刊》（第 3 辑），74(2):360–378，1997年。[42] W. Veys。具有非正欧拉示性数的有理开曲面的结构。《数学年刊》，312(3):527–548，1998年。[43] W. Veys。曲面上柯西主值积分的消失。《纯粹与应用数学杂志》，598:139–158，2006年。[44] W. Veys。单值猜想导论。载于《奇点几何与拓扑手册 VII》，第 721–765 页。施普林格，查姆， [2025] ©2025年。[45] U. Walther。关于 D-模 f^s的综述。载于《交换代数与非交换代数几何》，第 I 卷，《数学科学研究所出版物》第 67 卷，第 391–430 页。剑桥大学出版社，纽约，2015年。附录由 Anton Leykin 撰写。[46] U. Walther。Jacobian 模、Milnor 纤维以及由 f^s 生成的 D-模。《数学发明》，207(3):1239–1287，2017年。

Daniel Bath，数学系，鲁汶大学，3001 鲁汶，比利时电子邮箱：dan.bath@kuleuven.be

Willem Veys，数学系，鲁汶大学，3001 鲁汶，比利时电子邮箱：
wim.veys@kuleuven.be