arXiv:2602.20992v1 [math.AT] 24 Feb 2026

子群拓扑视角下同伦群上各种拓扑的比较

Naghme Shahami[1],Behrooz Mashayekhy[1,*]

伊朗马什哈德*91775*，邮政信箱*1159*号，马什哈德菲尔多西大学数学科学学院纯数学系。

摘要

通过在拓扑空间的同伦群上引入各种拓扑，一些研究者使代数拓扑中的这些著名概念更具实用性和效力。本文首先回顾并综述同伦群上的一些已知拓扑。随后，我们回顾同伦群的一些著名子群，并运用子群拓扑的概念，对这些拓扑进行比较，以期给出关于拓扑化同伦群的一些结果。

关键词：拓扑化同伦群、子群拓扑、紧开拓扑、Spanier拓扑、细须拓扑、高阶斯潘尼尔群。*2020*年数学主题分类：55Q05, 55Q07, 55Q52。

1. 引言与研究动机

过去二十年间，一些研究者发现，拓扑空间 X 的基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 和同伦群 $\pi_n(X, x_0)$ 上存在多种有用、有趣且具函子性的拓扑，这些拓扑使它们成为研究空间某些拓扑性质的有力工具（见 [1, 2, 5, 6, 7, 9, 10, 11,12, 13, 21, 23]）。最近，作者研究并综述了基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 上大多数已知的拓扑，并用一张示意图总结了基本群上各种拓扑之间的比较（见 [21]）。本文将研究并综述同伦群 $\pi_n(X, x_0)$ 上的一些拓扑，随后借助相对于某些邻域族的子群拓扑这一概念

*通讯作者电子邮箱：na.shahami@mail.um.ac.ir (Naghme Shahami), bmashf@um.ac.ir (Behrooz Mashayekhy)

对于同伦群 $\pi_n(X,\ x_0)$ 中一些著名子群，我们打算比较具有各种拓扑的拓扑化同伦群。

本文的组织结构如下。受基本群 $\pi_1(X,x_0)$ 的一些著名子群启发，一些研究者为同伦群 $\pi_n(X,x_0)$ 引入并定义了类似的子群（见 [5, 6]）。在第 2 节中，我们回顾这些子群，包括 n-小子群 $\pi_n^s(X,x_0)$、 n-小生成子群 $\pi_n^{sg}(X,x_0)$、 n-Spanier 子群 $\pi_n^{sp}(X,x_0)$、 n-厚 Spanier 子群 $\pi_n^{tsp}(X,x_0)$，以及 n-弱厚 Spanier 子群 $\pi_n^{wtsp}(X,x_0)$。此外，我们受 [22] 启发，定义 n-路径 Spanier 子群 $\widetilde{\pi}_n^{sp}(X,x_0)$，并将该子群与其他子群作如下比较（为避免混淆，从现在起，我们省略同伦群 $\pi_n(X,x_0)$ 子群的下标 n ）：

$$\pi^s(X,x_0) \leq \pi^{sg}(X,x_0) \leq \widetilde{\pi}^{sp}(X,x_0) \leq \pi^{sp}(X,x_0) \leq \pi^{tsp}(X,x_0) \leq \pi^{wtsp}(X,x_0$$

在第 3 节中，我们首先回顾已在同伦群上定义的各种拓扑。这些拓扑包括触须拓扑 [4], $\pi_n^{wh}(X,x_0)$、紧开商拓扑 [13, 14], $\pi_n^{qtop}(X,x_0)$、tau拓扑 [7],$\pi_n^{\tau}(X,x_0)$、lim拓扑 [14], $\pi_n^{lim}(X,x_0)$、Spanier拓扑 [6], $\pi_n^{Span}(X,x_0)$、厚 Spanier 拓扑 [6], $\pi_n^{tSpan}(X,x_0)$、弱厚 Spanier 拓扑 [6],$\pi_n^{wtSpan}(X,x_0)$、形状拓扑 [9], $\pi_n^{sh}(X,x_0)$, 以及伪度量拓扑[9], $\pi_n^{met}(X,x_0)$。然后，通过回顾 [8] 中引入的邻域族的子群拓扑概念，尤其是 [21] 中引入的相对于某个子群的一类子群拓扑，并考虑第 2 节中提到的同伦群的一些著名子群，我们在同伦群 $\pi_n(X,x_0)$ 上引入若干拓扑，例如路径 Spanier 拓扑 $\pi_n^{pSpan}(X,x_0)$、 n-小子群拓扑 $\pi^{\pi^s(X,x_0)_n}(X,x_0)$、 n-小生成子群拓扑 $\pi^{\pi^{sg}(X,x_0)_n}(X,x_0)$、 n-路径 Spanier 子群拓扑 $\pi^{\widetilde{\pi}^s(X,x_0)_n}(X,x_0)$、 n-Spanier 子群拓扑 $\pi^{\pi^{sp}(X,x_0)_n}(X,x_0)$、 n-厚 Spanier 子群拓扑$_{\pi^{\pi^{tsp}(X,x_0)_n}}(X,x_0)$、 n-弱厚 Spanier 子群拓扑 $\pi^{\pi^{wtsp}(X,x_0)_n}(X,x_0)$。

在第4节中，利用 [8, 21]中给出的子群拓扑的若干性质以及其他研究者的一些结果，我们将尽可能地相互比较上述同伦群上的拓扑。在若干结果中，我们证明

$$\pi_n^{sh}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_n^{wtSpan}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_n^{tSpan}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_n^{Span}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_n^{pSpan}(X,x_0),$$

and

$$\pi_n^{\tau}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_n^{qtop}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_n^{lim}(X,x_0) = \pi_n^{wh}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_n^{\pi^s(X,x_0)}(X,x_0),$$

其中 $A \preccurlyeq B$ 表示 B 比 A更细。我们还证明

$$\pi_n^{\pi^{wtsp}(X,x_0)}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_n^{\pi^{tsp}(X,x_0)}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_n^{\pi^{sp}(X,x_0)}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_n^{\widetilde{\pi}^{s}(X,x_0)}(X,x_0)$$

$$\preccurlyeq \pi_n^{\pi^{sg}(X,x_0)}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_n^{\pi^{s}(X,x_0)}(X,x_0).$$

此外，我们研究使上述某些不等式成为等式的若干条件。作为例子，我们对子群 $H \leq \pi_n(X,x_0)$定义在 x_0 处 n-半局部 H-连通的概念，并证明拓扑空间 X 在 x_0 处是n-半局部 H-连通的，当且仅当 H 是 $\pi_n^{wh}(X,x_0)$的开子群，这是 [1, 定理4.2]的推广。我们证明等式 $\pi_n^{wh}(X,x_0) =_{\pi^{s}(X,x_0)n} (X,x_0)$成立，当且仅当 X 在 x_0处是 n-半局部 H-连通的。最后，我们将本节的全部结果汇总于一张图中，以便比较同伦群上的各种拓扑。

2. 同伦群的若干子群

为了回顾同伦群上一些类似于基本群中著名子群的子群，我们回顾来自[15]的若干概念与记号。 X 中位于 x_0 的环路是从 $I = [0,1]$ 到 X 的映射，它将边界 $\partial I = \{0,1\}$ 映到 x_0。基本群 $\pi_1(X,x_0)$由这类环路相对于 ∂I的所有同伦类组成，并具有自然且非常有用的群结构。这一概念推广如下。对每个正整数 n， $I^n = [0,1]^n = \{(s_1,...,s_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq s_i \leq 1, i = 1,...,n\}$ 称为 $\mathbb{R}^n$中的n 维立方体。 I^n 的边界 ∂I^n 由所有满足对 i的至少一个取值有 $s_i = 0$ 或 $s_i = 1$的$(s_1,...,s_n) \in I^n$ 组成。若 X 是拓扑空间且 $x_0 \in X$，则位于 x_0 的n-环路是满足 $\alpha(\partial I^n) = x_0$ 的连续映射 $\alpha : I^n \to X$ 。 X 中位于 x_0 的所有n-重环路的集合按相对于 ∂I^n的同伦被划分为等价类。包含n-环路 α 的等价类记为 $[\alpha]$。若 α 是 X中位于 x_0的n-环路，则对所有$(s_1,s_2,...,s_n) \in I^n$，由 $\alpha^{-1}(s_1,s_2,...,s_n) = \alpha(1-s_1,s_2,...,s_n)$定义 $\alpha^{-1} : I^n \to X$（见 [15, 第 136]页）。设 X为拓扑空间， $x_0 \in X$ 且$n \geq 2$ 为正整数。设 $\pi_n(X,x_0)$为 X中位于 x_0的n-重环路相对于∂I^n的所有同伦类的集合。对 $[\alpha]$, $[\beta] \in \pi_n(X,x_0)$，定义 $[\alpha]+[\beta] = [\alpha+\beta]$。于是，在此运算下， $\pi_n(X,x_0)$是阿贝尔群，其中单位元为$[c_{x_0}]$，任意 $[\alpha]$ 的逆元由 $[\alpha^{-1}]$ 给出（见 [15, 定理2.5.3]）。群$\pi_n(X,x_0)$称为 X 在 x_0处的n 阶同伦群。

我们知道，如果存在一条路径 $\sigma : I \to X$ 从 x_0 到 x_1，那么 $\pi_1(X, x_0)$ 和 $\pi_1(X, x_1)$ 是同构的。同伦群也存在类似的结果。令 $n \geq 2$,

定义 $\sigma_{\#}$： $\pi_n(X,\ x_1) \to \pi_n(X,\ x_0)$ 为 $\sigma_{\#}[\alpha] = [F_1]$，其中对于任意 $s \in I^n$ 和 F：$F_1(s) = F(s,\ 1)$；$I^n \times I \to X$ 是一个具有以下性质的同伦：

$$F(s,0) = \alpha(s); s \in I^n$$

$$F(s,t) = \sigma^{-1}(t); s \in \partial I^n, t \in I.$$

因此，根据 [15, 定理 2.5.6] $\sigma_{\#}$ 是一个定义良好的同构，且仅取决于 σ的路径同伦类；也就是说，若 $\sigma' \simeq \sigma$ rel $\{0,1\}$，则 $\sigma'_{\#} = \sigma_{\#}$。

在 [5, 6], Bahredar 等人定义了一些同伦群的子群，它们类似于基本群中的一些著名子群，定义如下。

1. **n-小子群**：若对于 x_0的每个开邻域 U，都存在一个以基点 x_0 为基点的 n-环路 f： $I^n \to X$，使得 $f(I^n) \subseteq U$ 且 $[\alpha] = [f]$ [5, 定义 4.5]，则称 n-环路 α：$(I^n,\ \partial I^n) \to (X,\ x_0)$ 是小的。x_0处的小 n-环路子群 记为 $\pi^s(X,\ x_0)$，它是 $\pi_n(X,\ x_0)$ 的一个子群，由 x_0 处所有小 n-环路的同伦类组成（见 [5]）。

2. **n-小生成子群**：集合 $\pi^{sg}(X, x_0) = \{\sigma_{\#}([\alpha]) | [\alpha] \in \pi^s(X, x_0)$ σ 是一个端点为 $x_0\}$ 的路径，是 $\pi_n(X, x_0)$ 的一个子群，称为 ***n-*** 小生成子群（参见 [5]）。

3. **n-Spanier子群**：设 $\mathcal{U}$ 是带基点空间 (X, x_0) 的一个开覆盖。那么，$\pi^{sp}(\mathcal{U}, x_0)$ 是 $\pi_n(X, x_0)$ 的一个子群，由形如 $\prod_{j=1}^{n} \sigma_{j\#}[v_j]$ 的所有同伦类生成，其中对每个 $1 \leq j \leq n, \sigma_j(0) = x_0$，且 n-环路 v_j 包含在某个邻域 $U_j \in \mathcal{U}$ 中。这个群称为关于 $\mathcal{U}$ 的 n-Spanier子群（参见 [5, 定义 3.1]）。相对于 X 的开覆盖所对应的 n-Spanier 子群的交集称为 ***n-Spanier*** 子群，记作 $\pi^{sp}(X, x_0)$（参见 [5]）。

4. n-厚 Spanier 子群：设 $\mathcal{U}$ 是带基点空间（X，x_0）的一个开覆盖。相对于 $\mathcal{U}$的 n-厚 Spanier 子群，是由形如 $\sigma_{\#}[f_1 \circledast f_2]$ 的元素生成的 π_n（X，x_0）的子群，其中若 $z \in S^n_+$，则 $f_1 \circledast f_2$（z）$= f_1$（z）；若 $z \in S^n_-$，f_1，f_2：则 $f_1 \circledast f_2$（z）$= f_2$（z）。$(D^n,\ s_0) \to (X,\ x_0)$ 是保基点连续映射，使得对于任意 $z \in \partial D^n$，f_1（z）$= f_2$（z），并且 $Imf_i \subseteq U_i$ 对某个$U_i \in \mathcal{U}$（$i = 1,\ 2$）成立。该子群记作 $\pi^{tSp}(\mathcal{U},\ x_0)$。相对于 X 的开覆盖所对应的 n-厚 Spanier 子群的交集称为 n-厚 Spanier 子群，记作 π^{tsp}（X，x_0）（见 [6]）。

5. **n-弱厚 Spanier 子群**：令 $\mathcal{U}$ 为带基点空间 (X, x_0) 的一个开覆盖。相对于 $\mathcal{U}$ 的 n-弱厚 Spanier 子群，是由形如 $\sigma_{\#}[\alpha]$ 的元素生成的 $\pi_n(X, x_0)$ 的子群，其中 $\alpha(I^n) \subseteq U_1 \cup U_2$ 对某个 $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ 成立，记作 $\pi^{wtsp}(\mathcal{U}, x_0)$。***n-*** 弱厚 ***Spanier***

子群 X 是相对于 X 的开覆盖的 n-弱厚 Spanier 子群的交集，记作 $\pi^{wtsp}(X,x_0)$（参见 [6]）。

6. **n-路径 Spanier 子群**：我们受 [22] 启发来定义 n-路径 Spanier 子群。带基点空间 (X,x_0) 的路径开覆盖是开覆盖$\mathcal{V}=\{V_\alpha|\alpha\in P(X,x_0)\}$，使得 $\alpha(1)\in V_\alpha$。然后我们将 $\widetilde{\pi}^{sp}(\mathcal{V},x_0)$ 定义为 $\pi_n(X,x_0)$ 的一个子群，它由所有形如 $\prod_{j=1}^{n}\alpha_{j\#}[v_j]$ 的同伦类生成，其中对每个 $1\leq j\leq n,\alpha_j(0)=x_0$，且 n-环路 v_j 位于 $V_{\alpha_j}\in\mathcal{V}$ 中。我们将该子群称为关于路径开覆盖 $\mathcal{V}$ 的 n-路径 Spanier 子群。相对于 X 的路径开覆盖的 n-路径 Spanier 子群的交集称为 *n*-路径 *Spanier* 子群，我们将其记为 $\widetilde{\pi}^{sp}(X,x_0)$。

注 *2.1. (i)* 根据 *n-Spanier* 子群和 *n*-路径 *Spanier* 子群的定义，不难看出 $\widetilde{\pi}^{sp}(X,x_0)\leq\pi^{sp}(X,x_0)$。此外，设 $\mathcal{V}=\{V_\beta|\beta\in P(X,x_0)\}$ 是 X 的路径开覆盖，并设 $x_0\in V_{\beta_0}$。若 α 是 X 中基于 x_0 的一个小 *n*-环路，则存在一个 *n*-环路 $f:I^n\to X$，使得 $f(I^n)\subseteq V_{\beta_0}$ 且 $[f]=[\alpha]$，因此 $\sigma_\#([\alpha])=\sigma_\#([f])$，其中 $\sigma_\#([\alpha])\in\pi^{sg}(X,x_0)$，且 $\sigma_\#([f])\in\widetilde{\pi}^{sp}(\mathcal{V},x_0)$。因此，对于每个路径开覆盖 $\mathcal{V}$，都有 $\pi^{sg}(X,x_0)\subseteq\widetilde{\pi}^{sp}(\mathcal{V},x_0)$。因此，我们有

$$\pi^{sg}(X,x_0)\leq\widetilde{\pi}^{sp}(X,x_0)\leq\pi^{sp}(X,x_0).$$

(ii) 根据 *[5,* 命题 *4.6], [6,* 命题 *3.15]* 以及上述注释，我们得到 $\pi_n(X,x_0)$ 的以下子群链。

$$\pi^{s}(X,x_0)\leq\pi^{sg}(X,x_0)\leq\widetilde{\pi}^{sp}(X,x_0)\leq\pi^{sp}(X,x_0)$$

$$\leq\pi^{tsp}(X,x_0)\leq\pi^{wtsp}(X,x_0)\leq ker\Psi_X$$

其中 Ψ_X 是从第 n 同伦群到第 n 形状同伦群的典范映射（见 *[9]*）。

3. 同伦群上的一些拓扑

为了回顾并介绍同伦群上的一些拓扑，这些拓扑类似于基本群上的著名拓扑，我们回顾 [8] 中引入的邻域族的子群拓扑概念，尤其是 [21] 中引入的关于某个子群的一类子群拓扑。

Σ G 的子群族称为邻域族，如果对于任意$H,K\in\Sigma$，都存在一个子群 $S\in\Sigma$ 使得 $S\subseteq H\cap K$。由此性质，Σ 中各元素的所有左陪集构成了 G上的一个拓扑的基，该拓扑称为由 Σ 确定的子群拓扑，记作

G^{Σ}。由邻域族指定的群 G 上的子群拓扑在 [8, 第 2 节5] 中定义，近期一些研究者（如 [2, 23]）也对此进行了研究。由于 G 中元素的左平移确定了 G的自同胚，因此它们是齐性空间。Bogley 等人 [8]关注了子群拓扑的一些一般性质，并引入交集 $S_{\Sigma} = \cap\{H \mid H \in \Sigma\}$，称为邻域族 Σ的无穷小子群。他们证明，元素 $g \in G$ 的闭包是陪集 gS_{Σ}。

设 H 为群 G 的一个子群。然后我们如下定义 Σ^H

$$\Sigma^H = \{K \leqslant G \mid H \subseteq K\}.$$

容易看出， Σ^H 是一个邻域族。我们考虑由 Σ^H 决定的 G 上的子群拓扑，并将其记为 G^H。注意，邻域族 Σ^H 的无穷小子群是 H。我们已经比较了一个群上的两种子群拓扑。若 Σ 与 Σ' 是 G 上的两个邻域族，使得$G^{\Sigma} = G^{\Sigma'}$，则 $S_{\Sigma} = S_{\Sigma'}$ [21, 定理 2.3]。设 Σ 与 Σ' 是 G 上的两个邻域族，使得 $S_{\Sigma} \leq S_{\Sigma'}$ 且 $S_{\Sigma} \in \Sigma$，则 $G^{\Sigma'} \preccurlyeq G^{\Sigma}$。特别地，若$H \leq K \leq G$，则 $G^K \preccurlyeq G^H$。此外，在 [21] 中我们证明了 G^H 是离散的当且仅当 $H = 1$。同样， G^H 是粗糙的当且仅当 $H = G$。在 [8]中指出，尽管配备子群拓扑的群 G 一般未必是拓扑群（甚至可能不是拟拓扑群），因为由 G 的固定元素所作的右平移映射不必连续，但它具有拓扑群的某些性质（更多细节见[8]中的定理 2.9）。Wilkins [23, 引理 5.4] 表明，当Σ 中的所有子群都是正规子群时，由邻域族 Σ 决定的子群拓扑下的群 G 是拓扑群。此外，在 [2, 推论 2.2] 中证明了，配备子群拓扑的群是拓扑群当且仅当所有右平移映射都连续。利用这些事实，我们容易看出，若 H 是 G 的正规子群且 G/H 是阿贝尔群，则 G^H 是拓扑群。我们在 [21, 定理 2.2], 中极大地推广了这些结果：设 G 是一个群， Σ 是 G 上的一个邻域族，使得 $S_{\Sigma} \in \Sigma$，则 G^{Σ} 是拓扑群当且仅当 S_{Σ} 是 G的正规子群。特别地， G^H 是拓扑群当且仅当 H 是 G的正规子群。

利用上述子群拓扑，并考虑第 2 节中提到的同伦群的子群，我们可以在同伦群 $\pi_n(X, x_0)$ 上引入一些拓扑，例如 n-小子群拓扑， $\pi^{\pi^s(X,x_0)_n}(X, x_0)$， n-小生成子群拓扑， $\pi^{\pi^{sg}(X,x_0)_n}(X, x_0)$， n-路径 Spanier 子群拓扑， $\pi^{\widetilde{\pi}^{sp}(X,x_0)_n}(X, x_0)$， n-Spanier 子群拓扑， $\pi^{\pi^{sp}(X,x_0)_n}(X, x_0)$， n-厚 Spanier 子群拓扑， $\pi^{\pi^{tsp}(X,x_0)_n}(X, x_0)$，以及 n-弱厚 Spanier 子群拓扑

拓扑，$\pi^{\pi^{wtsp}(X,\ x_0)}{}_n(X, x_0)$。

下面我们回顾定义在同伦群 $\pi_n(X,\ x_0)$ 上的各种众所周知的拓扑。

1. **触须拓扑**：定义

$$\Sigma^{wh} = \{\pi_n(i)\pi_n(U, x_0) |\ U \text{ is an open subset of } X \text{ containing } x_0\}.$$

于是容易看出，Σ 是 $\pi_n(X,\ x_0)$ 上的一个邻域族。带基点拓扑空间 $(X,\ x_0)$ 的 n 次同伦群 $\pi_n(X,\ x_0)$ 上的触须拓扑是由邻域族 Σ^{wh} 确定的子群拓扑，记为 $\pi_n^{wh}(X,\ x_0)$；根据 [4, 命题 2.6] $\pi_n^{wh}(X,\ x_0)$ 对于 $n \geq 2$ 是一个拓扑群（见 [4]）。

2. 紧开商拓扑：设 (X, x_0) 是一个带基点拓扑空间，$\Omega^n(X, x_0)$ 表示以 x_0 为基点的 X 中 n-重环路空间。在 $\Omega^n(X, x_0)$ 上存在通常的紧开拓扑，它由子基集 $\langle K, U\rangle = \{\alpha \mid \alpha(K) \subseteq U\}$ 生成，其中 $K \subseteq I^n$ 为紧集，$U \subseteq X$ 为开集。考虑满射 q_n: $\Omega^n(X, x_0) \to \pi_n(X, x_0)$ $q(\alpha) = [\alpha]$，可以利用映射 $q_n : \Omega^n(X, x_0) \to \pi_n(X, x_0)$ 在 $\pi_n(X, x_0)$ 上赋予商拓扑，该拓扑记为 $\pi_n^{qtop}(X, x_0)$（见 [13, 14]）。

3. **tau拓扑**：在 [7], 中，注意到对于任意带有拓扑G的群，在群 G上存在一个最细的群拓扑，它比 G的拓扑更粗。由此得到的拓扑群记为 $\tau(G)$。通常可以方便地将 τ视为一个函子，它从G 的拓扑中移除尽可能少的开集，从而得到一个拓扑群。带有该拓扑的拟拓扑群 $\pi_n^{qtop}(X,\ x_0)$记为 $\pi_n^{\tau}(X,\ x_0)$。

4. **lim拓扑**：设$\Omega^n(X, x_0)$是 x_0的和一个开邻域，并且 $U = \{[f] \mid f \text{ 设 } U \text{ 是 } x_0 \text{ 的和一个开邻域}\}$。由于 $\pi_n(X,\ x_0)$是一个阿贝尔群，对于 $n \geq 2$，滤子基 $\widehat{\ }\{U\}$ 构成单位元$[c_{x_0}]$的基本邻域系，因此带有该拓扑的 $\pi_n(X,\ x_0)$成为一个拓扑群，记为$\pi_n^{lim}(X,\ x_0)$（见 [14]）。

5. **Spanier拓扑**：Bahredar 等人在 [6, 命题 4.2] 中证明，$\Sigma^{Span} = \{\pi^{sp}(\mathcal{U}, x_0) |\ \mathcal{U}$是 $X\}$ 的一个开覆盖，是$\pi_n(X, x_0)$上的一个邻域族；他们将由 Σ^{Span} *Spanier*拓扑 （见 [6]）决定的 $\pi_n(X, x_0)$上的子群拓扑称为.....

6. **厚 Spanier 拓扑**：Bahredar 等人在 [6, 命题 4.2]中证明，$\Sigma^{tSpan} = \{\pi^{tsp}(\mathcal{U},\ x_0) |\ \mathcal{U}$是 $X\}$ 的一个开覆盖，也是 $\pi_n(X,\ x_0)$ 上的一个邻域族。他们将由 Σ^{tSpan}所厚 *Spanier* 拓扑 决定的 $\pi_n(X,\ x_0)$ 上的子群拓扑称为该拓扑（见 [6]）。

7. **弱厚 Spanier 拓扑**：Bahredar 等人在 [6,命题 4.2]中证明， $\Sigma^{wtSpan} = \{\pi^{tsp}(\mathcal{U}, x_0) | \mathcal{U}$是 $X\}$ 的一个开覆盖，也是 $\pi_n(X, x_0)$ 上的一个邻域族。他们将由 Σ^{wtSpan} 所弱厚 *Spanier* 拓扑 决定的 $\pi_n(X, x_0)$ 上的子群拓扑称为该拓扑（见 [6]）。

8. **路径 Spanier 拓扑**：容易看出

$$\Sigma^{pSpan} = \{\widetilde{\pi}^{sp}(\mathcal{V}, x_0) | \ \mathcal{V} \text{ is a path open cover of } X \ \}$$

是 $\pi_n(X, x_0)$ 上的一个邻域族。因此，我们称由 Σ^{pSpan} 确定的 $\pi_n(X, x_0)$ 上的子群拓扑为路径 *Spanier* 拓扑。

9. 形状拓扑：令 $cov(X)$ 为由二元组 $(\mathcal{U}, U_0)$ 组成的有向集，其中$\mathcal{U}$是 X 的一个局部有限开覆盖， U_0 是$\mathcal{U}$中包含x_0的一个指定元素。这里， $cov(X)$ 按加细关系构成有向集。给定 $(\mathcal{U}, U_0) \in cov(X)$，令 $N(\mathcal{U})$ 为 $\mathcal{U}$的神经所构成的抽象单纯复形。特别地，$\mathcal{U}$ 是 U的顶点集，并且 n 个顶点 $U_1, ..., U_n$ 张成一个 n-单形，当且仅当 $\cap_{i=1}^{n} U_i \neq \varnothing$。几何实现 $|N(\mathcal{U})|$是一个多面体，因此 $\pi_n(|N(\mathcal{U})|, U_0)$ 可自然地视为一个离散群，例如，当赋予其商拓扑时。给定一对 $(\mathcal{V}, V_0)$，它加细 $(\mathcal{U}, U_0)$，可通过将顶点 $V \in \mathcal{V}$ 映到某个满足 $V \subseteq U$ 的 $U \in \mathcal{U}$（特别是，V_0 映到 U_0），并作线性延拓，构造一个单纯映射 $p_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$: $|N(\mathcal{V})| \to |N(\mathcal{U})|$。映射 $p_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$ 在同伦意义下唯一，因此诱导出唯一的同态 $p_{\mathcal{U}\mathcal{V}\sharp}$: $\pi_n(|N(\mathcal{V})|, V_0) \to \pi_n(|N(\mathcal{U})|, U_0)$。由离散群构成的逆系统 $(\pi_n(|N(\mathcal{U})|, U_0), p_{\mathcal{U}\mathcal{V}\sharp}, cov(X))$ 是第 n 个 pro-同伦群，而其逆极限 $\check{}\pi_n(X, x_0)$（赋予通常的逆极限拓扑）是第 n 个形状同伦群。诱导的连续同态$p_{\mathcal{U}\sharp}$: $\pi_n(X, x_0) \to \pi_n(|N(\mathcal{U})|, U_0)$ 满足$p_{\mathcal{U}\sharp} \circ p_{\mathcal{U}\mathcal{V}\sharp} = p_{\mathcal{V}\sharp}$，只要 $(\mathcal{V}, V_0)$ 加细 $(\mathcal{U}, U_0)$。因此，存在一个典范的连续同态 Ψ_n: $\pi_n(X, x_0) \to \check{}\pi_n(X, x_0)$ 到第 n 个形状同伦群，由 $\Psi_n([\alpha]) = ([p_{\mathcal{U}} \circ \alpha])_{\mathcal{U}}$ 给出。

$\pi_n(X, x_0)$ 上的形状拓扑是关于第一个形状同态 Ψ_n: $\pi_n(X, x_0) \to \check{}\pi_n(X, x_0)$ 的初始拓扑。令 $\pi_n^{sh}(X, x_0)$ 表示赋予形状拓扑的 $\pi_n(X, x_0)$，它是一个拓扑群（见 [9, 定义 3.1]）。

10. 伪度量拓扑：设 (X, d) 是一个道路连通度量空间，并考虑 $\Omega^n(X, x_0)$ 上的一致度量 $\mu(\alpha, \beta) = sup\ \{d(\alpha(t)\ \beta(t))\}$。那么$^{t\in[0,1]^n}$函数 ρ: $\pi_n(X, x_0) \times \pi_n(X, x_0) \to [0, \infty)$， $\rho(a, b) = inf\mu(\alpha, \beta) | \alpha \in a, \ \beta \in b$ 是 $\pi_n(X, x_0)$ 上的伪度量 [9, 定理 4.5]。令 $\pi_n^{met}(X, x_0)$ 表示赋予由伪度量 ρ 诱导的拓扑的 n 阶同伦群。Brazas 和 Fabel 将此拓扑称为伪度量拓扑（由 d 诱导）（见 [9]）。

一些研究者尝试对上述拓扑进行如下比较。Ghane等人在 [14, 第 263] 页证明，$\pi_n^{qtop}(X, x_0)$比$\pi_n^{lim}(X, x_0)$更粗。

Babaee等人在 [4, 第 1441] 页提到， $\pi_n^{lim}(X,x_0)$与触须拓扑 $\pi_n^{wh}(X,x_0)$一致。 [9, 命题3.2] 证明， $\pi_n^{sh}(X,x_0)$的形状拓扑比 $\pi_n^{\tau}(X,x_0)$的形状拓扑更粗。注意，由 [6] 可以证明， $\pi_n^{Span}(X,x_0)$比 $\pi_n^{tSpan}(X,x_0)$更细。根据 $\pi_n^{qtop}(X,x_0)$和 $\pi_n^{\tau}(X,x_0)$的定义，容易看出 $\pi_n^{qtop}(X,x_0)$比 $\pi_n^{\tau}(X,x_0)$更细。在 $\pi_n(X,x_0)$上，Spanier拓扑总是比形状拓扑更细，见 [3, 注5.5]。Brazas和Fabel证明，若 X 是紧度量空间，则 $\pi_n^{met}(X,x_0)$的拓扑至少与 $\pi_n^{sh}(X,x_0)$的拓扑一样细，见 [9, 命题5.2]。

4. 同伦群上的拓扑比较

本节中，我们将利用 [8, 21] 中介绍的子群拓扑的一些性质以及其他研究者的一些结果，尽可能比较第 3 节中提到的各种同伦群上的拓扑。

在下述定理中，我们比较同伦群上的 Spanier拓扑与由 n-Spanier子群诱导的子群拓扑。

定理 *4.1. (i)* 若 $H=\pi^{sp}(X,x_0)$，则 $\pi_n^{Span}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_n^{H}(X,x_0)$。*(ii)* 若 $\pi_n^{Span}(X,x_0) = \pi_n^{K}(X,x_0)$，且 K 是 $\pi_n(X,x_0)$ 的子群，则 $K=\pi^{sp}(X,x_0)$。

证明。(*i*) 已知 $\pi_n^{Span}(X,x_0)$ 关于 $\Sigma^{Span} = \{K \leqslant \pi_n(X,x_0)$ 具有子群拓扑，| K 是一个 n-Spanier子群 $\}$（见 [6]）。由于 $H = \pi^{sp}(X,x_0)$， $\Sigma^H = \{K \leqslant \pi_n(X,x_0) \mid \pi^{sp}(X,x_0) \subseteq K\}$，且 $\pi^{sp}(X,x_0) = \cap_{K\in\Sigma^{Span}} K$，我们得到 $\Sigma^{Span} \subseteq \Sigma^H$。因此 $\pi_n^{Span}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_n^{H}(X,x_0)$。(*ii*) 由 [21, 定理 2.3] 可得。 □

注 4.2. *Bahredar* 等人在 *[6]* 中指出，若 $\mathcal{U}$ 是 X的一个开覆盖，则 $\pi^{sp}(\mathcal{U},x_0) \subseteq \pi^{tsp}(\mathcal{U},x_0) \subseteq \pi^{wtsp}(\mathcal{U},x_0)$。此外，容易看出，若 $\mathcal{V}$是 X的一个路径开覆盖，则 $\widetilde{\pi}^{sp}(\mathcal{V},x_0) \subseteq \pi^{sp}(\mathcal{V},x_0)$。因此，类似于上述定理的证明，我们得到同伦群上的若干拓扑之间的如下比较。

(i) 若 $H=\pi^{tsp}(X,x_0)$，则 $\pi_n^{tSpan}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_n^{H}(X,x_0)$。*(ii)* 若 $\pi_n^{tSpan}(X,x_0) = \pi_n^{K}(X,x_0)$，其中 K是 $\pi_n(X,x_0)$ 的子群，则 $K=\pi^{tsp}(X,x_0)$。*(iii)* 若 $H=\pi^{wtsp}(X,x_0)$，则 $\pi_n^{wtSpan}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_n^{H}(X,x_0)$。*(iv)* 若 $\pi_n^{wtSpan}(X,x_0) = \pi_n^{K}(X,x_0)$，其中 K是 $\pi_n(X,x_0)$ 的子群，则 $K=\pi^{wtsp}(X,x_0)$。*(v)* 若 $H=\widetilde{\pi}^{sp}(X,x_0)$，则 $\pi_n^{pSpan}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_n^{H}(X,x_0)$。*(vi)* 若 $\pi_n^{pSpan}(X,x_0) = \pi_n^{K}(X,x_0)$，其中 K是 $\pi_n(X,x_0)$ 的子群，则 $K=\widetilde{\pi}^{sp}(X,x_0)$。*(vii)* $\pi_n^{wtSpan}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_n^{tSpan}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_n^{Span}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_n^{pSpan}(X,x_0)$。

注 4.3。 (i) 在 *[6,* 命题 *3.15],* 中，*Bahredar* 等人证明，对于任意带基点空间(X, x_0)， $\pi^{wtsp}(X, x_0) \leq ker\Psi_X$，其中 Ψ_X 是从 n 次同伦群到第 n 形状同伦群的典范映射。显然， $ker\Psi_X \leq kerp_{\mathcal{U}_\sharp}$另一方面，*Brazas* 和 *Fabel* 在 *[9]* 中提到，同伦群上的形状拓扑由形如 $kerp_{\mathcal{U}_*}$ 的子群的左陪集生成。因此，我们得到以下结果，它细化了 *[9]*中的推论 *5.7*。

对于任意带基点空间（X, x_0），我们有

$$\pi_n^{sh}(X, x_0) \preccurlyeq \pi_n^{wtSpan}(X, x_0) \preccurlyeq \pi_n^{tSpan}(X, x_0) \preccurlyeq \pi_n^{Span}(X, x_0) \preccurlyeq \pi_n^{pSpan}(X, x_0).$$

(ii) 如果 X 是 T_1 且为仿紧空间，那么 $\pi^{sp}(X, x_0) = \pi^{tsp}(X, x_0) = \pi^{wtsp}(X, x_0)$。因此 $\pi^{\pi^{wtsp}(X,x_0)_n}(X, x_0) = \pi^{\pi^{tsp}(X,x_0)_n}(X, x_0) = \pi^{\pi^{sp}(X,x_0)_n}(X, x_0)$。此外，当 X 可度量化或为道路连通拓扑群时，这个恒等式也成立（见 *[6,* 定理 *3.11*、定理 *3.12]*）。

定义 4.4. 设 X 是一个拓扑空间， H 是 $\pi_n(X, x_0)$ 的一个子群。如果存在 x_0 的一个开邻域 U，使得 $\pi_n(i)(\pi_n(U, x_0)) \leq H$，则称$X$ 在 x_0 处是 n-半局部 H-连通的。

Abdullahi 等人在 [1, 定理 4.2] 中证明，若 $H \leq \pi_1(X, x_0)$，则 X 在 x_0 处半局部 H-连通，当且仅当 H 在 $\pi_1^{wh}(X, x_0)$中是开集。现在我们将这一结果推广到同伦群，如下所示。

定理 4.5. 设 $H \leq \pi_n(X, x_0)$，则 X 在 x_0 处是 n-半局部 H-连通的，当且仅当 H 是 $\pi_n^{wh}(X, x_0)$ 的开子群。

证明。设 X 在 x_0 处是 n-半局部 H-连通的，则存在 x_0 的一个开邻域 U，使得 $\pi_n(i)(\pi_n(U, x_0)) \leq H$。根据定义，我们有 $\pi_n(i)(\pi_n(U, x_0)) \in \Sigma^{wh}$，因此 H 在 $\pi_n^{wh}(X, x_0)$ 中是开集。反过来，如果 H 是 $\pi_n^{wh}(X, x_0)$ 的开子群，则存在 x_0 的一个开邻域 U，使得 $\pi_n(i)(\pi_n(U, x_0)) \leq H$。因此， X 在 x_0 处是 n-半局部 H-连通的。 □

利用上述定理和触须拓扑的定义，我们得到以下结果。

推论 4.6. 设 $H \leq \pi_n(X, x_0)$，则 X 在 x_0 处 n-半局部 H-连通，当且仅当 $\pi_n^H(X, x_0) \preccurlyeq \pi_n^{wh}(X, x_0)$。

设 $[\alpha] \in \cap\{\pi_n(i)(\pi_n(U, x_0))| U$ 是 $x_0\}$ 的一个开邻域，则 α 在 x_0 的任意开邻域中都有一个同伦代表，即 α 是 x_0 处的一个小 n-环路。因此， $\pi_n^{wh}(X, x_0)$ 的无穷小子群等于 $\pi^s(X, x_0)$。

因此， $\pi_n^{wh}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_n^{\pi^s(X,x_0)}(X,x_0)$。注意，该等式一般并不成立。通过考虑原点 θ 处的 n 维夏威夷耳环 $\mathbb{HE}^n$，我们有 $\pi^{\pi^s(\mathbb{HE}^n,\theta)_n}(\mathbb{HE}^n,\theta)$ 是离散的，但 $\pi_n^{wh}(\mathbb{HE}^n,\theta)$ 不是离散的（见 [4, 例 4.6]）。下面我们给出该等式成立的一个等价条件。

推论 4.7. 设 (X,x_0) 为带基点拓扑空间，则

$$\pi_n^{wh}(X,x_0 \preccurlyeq \pi_n^{\pi^s(X,x_0)}(X,x_0).$$

另外，我们有 X 在 x_0 处是n-半局部 $\pi^s(X,x_0)$-连通的，当且仅当 $\pi_n^{wh}(X,x_0) = \pi^{\pi^s(X,x_0)}{}_n(X,x_0)$。此外，若对 $\pi_n(X,x_0)$的一个子群 K 有 $\pi_n^{wh}(X,x_0) = \pi_n^K(X,x_0)$，则 $K = \pi^s(X,x_0)$。

证明。由于 $\pi_n^{wh}(X,x_0)$的无穷小子群等于$\pi^s(X,x_0)$，我们有$\pi_n^{wh}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_n^{\pi^s(X,x_0)}(X,x_0)$。设 X在 x_0处是n-半局部 $\pi^s(X,x_0)$-连通的。则由推论 4.6，$\pi^{\pi^s(X,x_0)_n}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_n^{wh}(X,x_0)$。因此我们有 $\pi_n^{wh}(X,x_0) = \pi^{\pi^s(X,x_0)_n}(X,x_0)$。其逆命题由推论 4.6成立。由 [21, 定理 2.3]，若对 $\pi_n(X,x_0)$的一个子群 K有$\pi_n^{wh}(X,x_0) = \pi_n^K(X,x_0)$，则 $K = \pi^s(X,x_0)$。 □

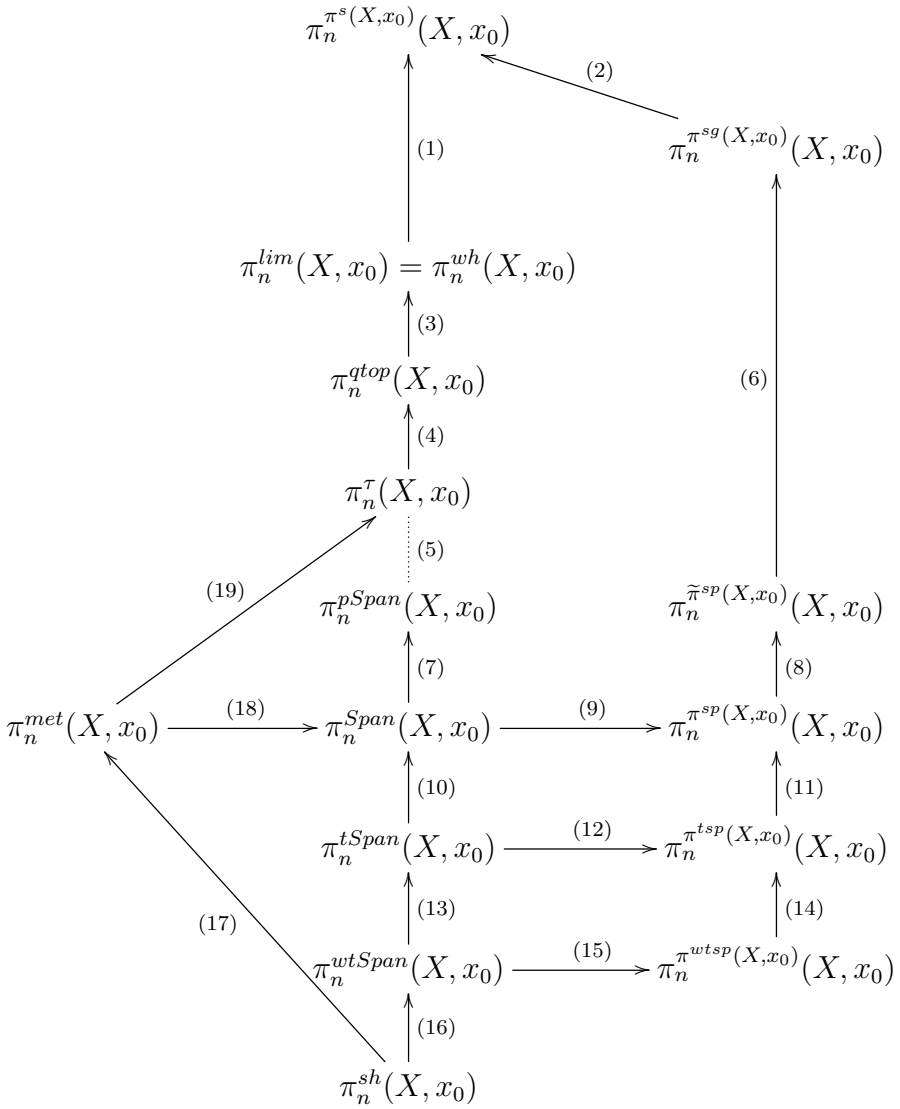
注*4.8*。 (i) 注意，由 *[9,* 命题*3.2]* 可知 $\pi_n^{sh}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_n^{\tau}(X,x_0)$。此外，由 *[3,* 引理*3.10]* 可知 $\pi_n^{sh}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_n^{Span}(X,x_0)$。注意，由 *[3,* 引理*5.1]* 可知，当 X 是仿紧、豪斯多夫且为 LC^{n-1} 空间时，等式成立。若对于每个 x的邻域 U，都存在 x 的一个邻域V，使得 $V \subseteq U$，并且对于所有 $0 \leq k \leq n$ （若 $n = \infty$，则$k < \infty$），每个映射 $f\colon \partial\Delta_{k+1} \to V$都可延拓为映射 $g\colon \triangle_{k+1} \to U$ （参见 *[3,* 定义*4.3]*），则称空间 X在 $x \in X$ 处为 LC^n。

(ii) 注意，$\pi_n^{qtop}(X,x_0)$比 $\pi_n^{lim}(X,x_0)$更粗（见 *[14,* 第 *263]* 页）。此外，根据 *[4,*第 *1441]* π_n^{lim} 页，$X(x_0,X)$与触须拓扑 $\pi_n^{wh}(X,x_0)$一致。
(iii) 根据 *[9,* 命题 *4.13]*，$\pi_n^{qtop}(X,x_0)$ 和 $\pi_n^{\tau}(X,x_0)$ 至少与 $\pi_n^{met}(X,x_0)$的拓扑一样精细。此外，根据 *[9,*推论 *5.12]*，$\pi_n^{met}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_n^{Span}(X,x_0)$。
(iv) 由于对每个 $n \geq 2$，根据 *[21,* 定理 *2.2]*，$\pi_n(X,x_0)$ 都是阿贝尔群，因此对于 $\pi_n(X,x_0)$ 的任意子群 H，拓扑化同伦群 $\pi_n^H(X,x_0)$ 都是拓扑群，。

(v) 在 *[21,* 定理 *2.4]* 中，作者证明了如果 $H \leq K \leq G$，那么 $G^K \preccurlyeq G^H$。因此我们有

$$\pi_n^{\pi^{wtsp}(X,x_0)}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_n^{\pi^{tsp}(X,x_0)}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_n^{\pi^{sp}(X,x_0)}(X,x_0)$$
$$\preccurlyeq \pi_n^{\widetilde{\pi}^{sp}(X,x_0)}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_n^{\pi^{sg}(X,x_0)}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_n^{\pi^s(X,x_0)}(X,x_0).$$

最后，我们在下图中总结本节的所有结果，以比较同伦群上的各种拓扑（注意，$A \longrightarrow B$表示 $A \preccurlyeq B$）。



下面我们按照上图中的编号，为每个箭头提供参考文献和补充说明。

(1) 参见推论 4.7。根据定理 4.5，当且仅当 X 在 x_0 处是 n-半局部 $\pi^s(X, x_0)$-连通的，等式才成立。由于 $\pi^s(\mathbb{HE}^n, \theta) = 1$，对原点处的 $\mathbb{HE}^n$ 严格不等式成立 θ （参见 [4,例 4.6]）。

(2) 参见注4.8（v）。根据定理2.3], 当且仅当 $\pi^{s}(X,x_0) = \pi^{sg}(X,x_0)$, 等式才成立。（3）参见注4.8（$ii$）。（4）参见定义 3。当且仅当 $\pi_n^{qtop}(X,x_0)$ 是拓扑群时, 等式才成立。由于 $\pi_n^{qtop}(X,p)$ 不是拓扑群, 空间 X 中严格不等式成立。（5）根据注4.8（i）, 若 X 是仿紧、豪斯多夫且 LC^{n-1} 空间, 则 $\pi_n^{pSpan}(X,x_0) = \pi_n^{Span}(X,x_0) = \pi_n^{sh}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_n^{\tau}(X,x_0)$。我们猜想, 在温和条件下, $\pi_n^{\tau}(X,x_0)$ 比 $\pi_n^{pSpan}(X,x_0)$ 更精细。（6）参见注4.8（v）。根据定理2.3], 当且仅当 $\widetilde{\pi}^{sp}(X,x_0) = \pi^{sg}(X,x_0)$, 等式才成立。（7）参见注4.3（$i$）。根据定理2.4] , 若 $\widetilde{\pi}^{sp}(X,x_0) = \pi^{sp}(X,x_0)$, 且$\pi^{sp}(X,x_0)$ 在 $\pi^{Span}(X,x_0)$ 中是开集, 则等式成立。此外, 根据定理2.3] , 若等式成立, 则 $\widetilde{\pi}^{sp}(X,x_0) = \pi^{sp}(X,x_0)$。（8）参见注4.8（$v$）。根据定理 2.3、2.4], 当且仅当 $\widetilde{\pi}^{sp}(X,x_0) = \pi^{sp}(X,x_0)$, 等式才成立。（9）参见定理 4.1。根据定理2.4] , 若 $\pi^{sp}(X,x_0)$ 在 $\pi^{Span}(X,x_0)$ 中是开集, 则等式成立。（10）参见注4.3（i）。根据定理2.4] , 若 $\pi^{sp}(X,x_0) = \pi^{tsp}(X,x_0)$, 且$\pi^{tsp}(X,x_0)$ 在 $\pi^{tSpan}(X,x_0)$ 中是开集, 则等式成立。此外, 根据定理2.3] , 若等式成立, 则 $\pi^{sp}(X,x_0) = \pi^{tsp}(X,x_0)$。（11）参见注4.8（$v$）。根据定理 2.3、2.4], 当且仅当 $\pi^{sp}(X,x_0) = \pi^{tsp}(X,x_0)$, 等式才成立。（12）参见注4.2（$i$）。根据定理 2.4] , 若 $\pi^{tsp}(X,x_0)$ 在 $\pi^{tSpan}(X,x_0)$ 中是开集, 则等式成立。（13）参见注4.3（i）。根据定理2.4] , 若 $\pi^{wtsp}(X,x_0) = \pi^{tsp}(X,x_0)$, 且$\pi^{wtsp}(X,x_0)$ 在 $\pi^{wtSpan}(X,x_0)$ 中是开集, 则等式成立。此外, 根据定理2.3] , 若等式成立, 则 $\pi^{wtsp}(X,x_0) = \pi^{tsp}(X,x_0)$。（14）参见注4.8（$v$）。根据定理 2.3、定理 2.4], 当且仅当 $\pi^{tsp}(X,x_0) = \pi^{wtsp}(X,x_0)$, 等式才成立。

(15) 参见注4.2（iii）。根据 [21, 定理 2.4]，若 $\pi^{wtsp}(X,\ x_0)$ 在$\pi^{wtSpan}(X,\ x_0)$ 中是开集，则等式成立。

(16) 参见注4.3（i）。

(17) 根据 [9, 命题 5.2]，该结论对紧度量空间成立。若 X 是路径连通的紧度量空间，则以下两种情形下等式成立：

（i）若 X 是 LC^{n-1}（ii）若 $X = \varprojlim_{j\in\mathbb{N}}(X_j,\ r_{j+1,\ j})$ 是有限多面体的逆极限，且粘结映射 $r_{j+1,\ j} : X_{j+1} \to X_j$ 是收缩映射（参见 [9, 定理 1.1]）。

(18) 参见注4.8（iii）。

(19) 参见注4.8（iii）。

为了进一步研究上面的图示，我们在下文提出一些问题，并希望找到答案（这些问题的编号与图中相应箭头的编号对应）。

(Q2) 是否存在一个空间 X，使得当 $n \geq 2$ 时，严格不等式 $\pi^{\pi^{sg}(X,x_0)_n}(X, x_0) \prec \pi^{\pi^{s}(X,x_0)_n}(X, x_0)$ 成立？注意，当$n = 1$ 时，对于 $\mathbb{HA}$，在 $b \neq 0$ 处，由于 $\pi^s(\mathbb{HA}, b) = 1$ 且 $\pi^{sg}(\mathbb{HA}, b) = \pi_1(\mathbb{HA}, b)$，该严格不等式成立（参见[1,例 3.12]）。

(Q3) 当 $n \geq 2$ 时，关于 X 是否存在一个充要条件，使等式 $\pi_n^{qtop}(X, x_0) = \pi_n^{wh}(X, x_0)$ 成立？注意，若 X 局部道路连通，则当且仅当 X 在 x_0 处是 SLT 时，该等式成立（见 [18, 推论 3.3]）。此外，是否存在一个空间 X，使得当 $n \geq 2$ 时，严格不等式 $\pi_n^{qtop}(X, x_0) \prec \pi_n^{wh}(X, x_0)$ 成立？注意，当 $n = 1$ 时，对于 $\mathbb{HE}$，该严格不等式成立（见 [2,例 3.25]）。

（Q5） $\pi_n^{pSpan}(X,\ x_0) \preccurlyeq \pi_n^{\tau}(X,\ x_0)$ 是否成立？

Nasri 等人在 [17, 定理 2.1] 中证明了 $\pi_n^{qtop}(X, x_0) \cong \pi_{n-k}^{qtop}(\Omega^k(X, x_0)\ e_{x_0})$，其中 e_{x_0} 是 X 在 x_0 处的一个常值 k-环路。他们还给出了以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \Omega^n(X, x_0) & \xrightarrow{\phi} & \Omega^{n-k}(\Omega^k(X, x_0), e_{x_0}) \\ \downarrow q & & \downarrow q \\ \pi_n^{qtop}(X, x_0) & \xrightarrow{\phi_*} & \pi_{n-k}^{qtop}(\Omega^k(X, x_0), e_{x_0}) \end{array}$$

其中， ϕ: $\Omega^n(X,x_0) \to \Omega^{n-k}(\Omega^k(X,x_0)\ e_{x_0})$ 由 $\phi(f) = f^\sharp$ 给出，它是一个同胚，其逆元为 $g \mapsto g^\flat$，其意义见 [20]。由于 q 是商映射，齐性同态 ϕ_* 是拟拓扑同伦群之间的同构。根据上面的图，如果我们能证明 $\phi_*(\widetilde{\pi}_n^{sp}(\mathcal{V},x_0)) = \widetilde{\pi}_{n-1}^{sp}(\mathcal{V}',e_{x_0})$，那么就可以得出结论： $\pi_n^{pSpan}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_n^{\tau}(X,x_0)$。

(Q6) 是否存在一个空间 X，使得当 $n \geq 2$ 时，严格不等式 $\pi^{\widetilde{\pi}^{sp}}(X,x_0)_n\ (X,x_0) \prec_{\pi^{sg}(X,x_0)_n\ (X,x_0)}$ 成立？注意，对于例 2.5] 中的空间 RX，当$n=1$ 时，严格不等式成立（见例 2]）。(Q7) 是否存在一个空间 X，使得严格不等式 $\pi_n^{Span}(X,x_0) \prec \pi_n^{pSpan}(X,x_0)$ 成立？(Q8) 是否存在一个空间 X，使得严格不等式 $\pi^{\pi^{sp}}(X,x_0)_n\ (X,x_0) \prec_{\pi^{\widetilde{\pi}^{sp}}(X,x_0)_n\ (X,x_0)}$ 成立？(Q9) 是否存在一个空间 X，使得严格不等式 $\pi_n^{Span}(X,x_0) \prec \pi^{\pi^{sp}}(X,x_0)_n\ (X,x_0)$ 成立？(Q10) 是否存在一个空间 X，使得严格不等式 $\pi_n^{tSpan}(X,x_0) \prec \pi_n^{Span}(X,x_0)$ 成立？(Q11) 是否存在一个空间 X，使得严格不等式 $\pi^{\pi^{tsp}}(X,x_0)_n\ (X,x_0) \prec_{\pi^{\pi^{sp}}(X,x_0)_n\ (X,x_0)}$ 成立？(Q12) 是否存在一个空间 X，使得严格不等式 $\pi_n^{tSpan}(X,x_0) \prec_{\pi^{\pi^{tsp}}(X,x_0)_n\ (X,x_0)}$ 成立？(Q13) 是否存在一个空间 X，使得严格不等式 $\pi_n^{wtSpan}(X,x_0) \prec \pi_n^{tSpan}(X,x_0)$ 成立？(Q14) 是否存在一个空间 X，使得严格不等式 $\pi^{\pi^{wtsp}}(X,x_0)_n\ (X,x_0) \prec_{\pi^{\pi^{tsp}}(X,x_0)_n\ (X,x_0)}$ 成立？(Q15) 是否存在一个空间 X，使得严格不等式 $\pi_n^{wtSpan}(X,x_0) \prec_{\pi^{\pi^{wtsp}}(X,x_0)_n\ (X,x_0)}$ 成立？(Q16) 关于 X，等式 $\pi_n^{sh}(X,x_0) = \pi_n^{wtSpan}(X,x_0)$ 是否存在充要条件？是否存在一个空间 X，使得严格不等式 $\pi_n^{sh}(X,x_0) \prec \pi_n^{wtSpan}(X,x_0)$ 成立？

(Q17) 是否存在一个紧度量空间 X，使得严格不等式 $\pi_n^{sh}(X,x_0) \prec \pi_n^{met}(X,x_0)$ 成立? (Q18) 关于 X，等式 $\pi_n^{met}(X,x_0) = \pi_n^{Span}(X,x_0)$ 是否存在充要条件? 是否存在一个空间 X，使得严格不等式 $\pi_n^{met}(X,x_0) \prec \pi_n^{Span}(X,x_0)$ 成立? (Q19) 关于 X，等式 $\pi_n^{met}(X,x_0) = \pi_n^{\tau}(X,x_0)$ 是否存在充要条件? 是否存在一个空间 X，使得严格不等式 $\pi_n^{met}(X,x_0) \prec \pi_n^{\tau}(X,x_0)$ 成立?

利益声明

作者声明，他们不存在已知的竞争性经济利益或可能被视为影响本文所报告工作的个人关系。

参考文献

[1] M. Abdullahi Rashid, B. Mashayekhy, H. Torabi, S.Z. Pashaei，关于拓扑化基本群的子群与广义覆盖，伊朗数学会通报，43(7)，2349-2370，（2017年）。[2] M. Abdullahi Rashid, N. Jamali, B. Mashayekhy, S.Z. Pashaei, H. Torabi, 关于基本群上的子群拓扑，哈杰泰佩数学与统计杂志，49(3)，935-949，（2020年）。[3] J. Aceti, J. Brazas，无法通过多面体逼近检测到的高阶同伦群元素，太平洋数学杂志，322(2)，221-242，（2023）。[4]A. Babaee, B. Mashayekhy, H. Mirebrahimi, H. Torabi, M.A. Rashid, S.Z. Pashaei，关于拓扑同伦群及其与夏威夷群的关系，哈杰泰佩数学与统计杂志，49(4)，1437-1449，（2020年）。[5] A.A. Bahredar, N. Kouhestani, H. Passandideh，n维Spanier群，*Filomat*，35(9)，3169-3182，（2021）。[6] A.A. Bahredar, N. Kouhestani, H. Passandideh，关于nth同伦群上的（厚、弱厚）Spanier拓扑，*Filomat*，38(12)，4381–4394，（2024年）。[7] J. Brazas，作为拓扑群的基本群，拓扑学及其应用，160，170-188（2013）。

[8]W.A. Bogley, A.J. Sieradski，普遍路径空间，
http://people.oregonstate.edu/~bogleyw/research/ups.pdf[9] J. Brazas, P. Fabel，度量空间同伦群上的自然伪度量，格拉斯哥数学杂志，**66**，162-174，（2024年）。[10] J.S. Calcut, J.D. McCarthy，拓扑基本群的离散性与齐性，拓扑学论文集，**34**，339–349，（2009年）。[11] P. Fabel，夏威夷耳环群中的乘法不连续（商拓扑），波兰科学院数学通报，**59 (1)**，77–83，（2011年）。[12] P. Fabel，乘法不连续的紧生成拟拓扑同伦群，拓扑学论文集，**40**，303–309，（2012年）。[13] F.H. Ghane, Z. Hamed, B. Mashayekhy 和 H. Mirebrahimi，拓扑同伦群，比利时数学学会 *Simon Stevin* 通报，**15**，455-464，（2008年）。[14] F.H. Ghane, Z. Hamed, B. Mashayekhy 和 H. Mirebrahimi，关于n-夏威夷类空间的拓扑同伦群，拓扑学论文集，**36**，255-266，（2010年）。[15] G . Naber，拓扑、几何与规范场，基础，*Addison-Wesley* 出版公司，美国，*INC*，*1961*年。[16] T. Nasri, B. Mashayekhy, H. Mirebrahimi，关于逆极限空间的拟拓扑同伦群，拓扑学论文集，**46**，145-157，（2015年）。[17] T. Nasri, H. Mirebrahimi, H. Torabi，拟拓扑同伦群的一些结果，*Ukrainian Math. J.*，**72(12)**，1663-1668，（2020年）。[18] S.Z. Pashaei, B. Mashayekhy, H. Torabi, M. Abdullahi Rashid，关于基本群子群的小环传递空间，拓扑学及其应用，**232**，242-255，（2017年）。[19] H. Passandideh, F.H. Ghane 和 Z. Hamed，关于可分度量空间的同伦群，拓扑学及其应用，**158**，1607-1614，（2011年）。[20] J.J. Rotman，代数拓扑导论 施普林格出版社，*GTM 119*，纽约，*1988*年。[21] N. Shahami, B. Mashayekhy，从子群拓扑的角度比较基本群上的拓扑，斯洛伐克数学杂志，**75(1)**，189-204，（2025年）。

[22] H. Torabi、A. Pakdaman、B. Mashayekhy，关于 Spanier 群、覆盖空间和半覆盖空间，*arXiv:1207.4394v1.*

[23] J. Wilkins，测地空间的修正一致基本群和万有覆盖空间，拓扑学及其应用，**160**，812–835，（2013）。