arXiv:2602.20996v1 [math.OA] 24 Feb 2026

电压量子图与量子图的 Gross–Tucker 定理

BJÖRN SCHÄFER 和 MARIUSZ TOBOLSKI

摘要。电压图是一个有限有向图，其边由有限群 G 中的元素标记。Gross 和 Tucker 的一种经典构造，将每个顶点集为 V 的电压图与一个所谓的导出图相关联，该导出图的顶点集为 $V\times G$。我们将他们的构造推广到量子图和有限阿贝尔群。值得注意的是，从经典电压图出发，这一构造能够生成真正的量子图。在这种情况下，所得量子图与一个经典图量子同构。作为主要结果，我们还证明了 Gross–Tucker 定理的量子版本，它精确刻画了哪些图可以表示为电压图的导出图。

1. 引言

根据Erdős和Rényi的一项著名结果，几乎所有有限图都没有对称性 [13]。然而，我们在现实生活中遇到的大多数图都呈现出某种对称性，从循环图到更复杂的图，例如Petersen图。我们该如何利用这些对称性？20世纪70年代，Gross 和 Tucker 开发了一种富有洞见的方法，用较小的标记图来描述具有对称性的图 [16, 15]。他们理论的核心对象是所谓的电压˜图。电压图是一个二元组 $(\Gamma,\ \lambda)$，由一个有限图（不一定是简单图） Γ 及其边上的标记 λ 组成，该标记将边映射到某个有限群 G的元素。随后，他们将导出图 Γ^{λ} 定义为一个特殊的图，其顶点集为 $V_{\tilde{\Gamma}}\times G$ ，边由标记 λ决定。Gross 和 Tucker 的主要定理指出，图 Γ 同构于某个导出图 $\tilde{\Gamma}^{\lambda}$，当且仅当群 G 在 Γ上存在自由作用。例如，图1展示了 Petersen图 Γ 及其对应的一个电压图 $\tilde{\Gamma}$ ，使得 $\Gamma\cong\tilde{\Gamma}^{\lambda}$。电压图和导出图已应用于许多场景，例如用于生成图覆盖 [17], ，以及构造度数较小的大图

日期：2026年2月25日。

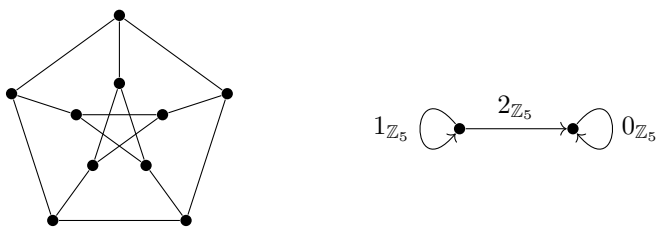


图 1. Petersen图是一个定义在群 $\mathbb{Z}_5$上的电压图的导出图。

和直径 [5] ，或提升图自同构 [23]。Kumjian 和 Pask 利用电压图将图 C*-代数分解为交叉积，且在稳定同构意义下成立 [20]。

本文将导出图和 Gross–Tucker 定理推广到量子图。量子图是经典图的一种最新推广，其中（有限）顶点集被任意有限维 C*-代数取代。根据 Gelfand 对偶，有限个 n 点对应于 C*-代数$\mathbb{C}^n$；本着这一理念，任何有限维 C*-代数都被视为（有限）量子集。不过，出于若干原因，量子集实际上是由有限维 C*-代数和特定泛函 ψ组成的一对（B, ψ）。例如，量子集（M_2,2Tr）上的（无向）量子图分类可见 [14, 26], ，其中 M_2 是由 2×2 复矩阵构成的 C*-代数。

Duan、Severini 和 Winter 在 2012 [12] 研究量子信道时引入了量子图（称为非交换图）。与此同时，Weaver 建立了量子关系理论，该理论也涵盖量子图 [33, 32]。后来，Musto、Reutter 和 Verdon [27]将量子图置于一个范畴框架中，其中还包括集合、（双射）函数等的量子版本。重要的是，量子图有三种不同的定义方式，但所有定义都导出等价的量子图概念，参见例如 [27, 11, 31]。量子图的其他应用包括 Wasilewski [31] 近期对量子 Cayley 图的定义，以及将所有有限量子群描述为量子图的量子自同构群[8]。此外，量子图还被用于定义量子 Cuntz–Krieger 代数 [7, 9]。

本文引入电压量子图及其导出量子图的概念（定义 4.1）。直观而言，电压量子图是一个以有限阿贝尔群G中的元素作为边标记的量子多重图。在经典情形下，电压图的导出图定义在电压图的顶点集与群 G的笛卡尔积上。在量子情形下，我们有更大的灵活性：电压量子图是一个以 G 为标记的量子邻接矩阵族 $\tilde{A} = (A_g)_{g\in G}$，这些矩阵为 $A = (A_g)_{g\in G}$，定义在一个量子集 (B, ψ) 上，并且相对于$\hat{\alpha}$作用于其上的对偶群 G 的作用 $\hat{\alpha}$。那么，导出量子图

$$A := \tilde{A} \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}$$

定义在交叉积量子集上（定义 3.1）

$$(\tilde{B}, \tilde{\psi}) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G} := (\tilde{B} \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}, \psi_{\rtimes}),$$

其中 $\psi_{\rtimes}$ 的定义方式恰当。据我们所知，文献中此前尚未研究过交叉积量子集。请注意，作用 $\hat{\alpha}$ 在 Gross 和 Tucker 的理论中没有对应概念。在特殊情形下，即 A 是经典邻接矩阵族且 $\hat{\alpha}$ 是平凡作用时，他们的电压图可由此得到 $\tilde{}$。为了获得适用于非阿贝尔群的更一般结果，我们计划在未来的工作中研究相对于量子群的电压量子图。

定义在形如（$\mathbb{C}^n$, ψ_n）（对于适当的 ψ_n）的量子集上的量子图，与定义在 n 个顶点上的经典图相对应。我们构造的一个显著特点是，可以从一个经典电压图 A 出发，得到一个定义在真正量子集上的量子图，即该量子集不对应于一个经典集合。例如，设 A 是一个定义在 2 个顶点上的经典电压图。如果 $\hat{\alpha}$ 是

ˆ 交换两个顶点的 $\mathbb{Z}_2$ 作用，那么交叉积量子集为

$$(\mathbb{C}^2, \psi_2) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{\mathbb{Z}}_2 \cong (M_2, 2\mathrm{Tr}).$$

˜ ˆ 因此，导出量子图 $A \rtimes_{\hat{\alpha}} \mathbb{Z}_2$ 是定义在量子集合 (M_2,2Tr) 上的量子图。事实上，根据 [26, 14] ，在 (M_2,2Tr) 上只有四种非同构的（无向、无环）量子图，而且它们都可以通过这种方式得到（命题 7.3）。

有趣的是，这四种定义在 (M_2,2Tr) 上的量子图都与四个顶点上的经典图量子同构 [26]。量子同构是比经典同构更弱的概念，其定义方式与量子集合和量子图完全相同。经典图之间的量子同构已得到广泛研究 [1, 24]。我们将 (M_2,2Tr) 上的量子图与 ($\mathbb{C}^4, \psi_4$) 上的量子同构作为一种更一般现象的特例重新推导出来。

˜ ˜ ˜ ˜**定理 A** (定理 5.2)。 若 $A = (A_g)_{g\in G}$ 是关于作用 ˆα的 (B, ψ) 上的电压量子图，则我们有一个量子同构

$$\tilde{A} \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G} \cong_q \tilde{A} \rtimes_{\mathrm{triv}} \hat{G},$$

其中，我们用 triv 表示 ˆG 在 $(\tilde{B}, \tilde{\psi})$ 上的平凡作用。

前一定理的一个主要成果是提供了一种构造大量经典图的“量子孪生图”的方法。所谓量子孪生图，是指与给定经典图 Γ量子同构的量子图。该方法分为三个步骤：

(a) 给定有限阿贝尔群 G 在 Γ上的一个自由作用，利用 Gross–Tucker 定理找出一个（经典）电压图 $(\tilde{\Gamma}, \lambda)$，使得 $\Gamma \cong \tilde{\Gamma}^{\lambda}$。 ˆ ˜(b) 找出 G 在 (Γ, λ) 上的一个非平凡作用 ˆα 。˜ ˆ (c) 利用定理 5.2 得出结论：$(\Gamma, \lambda) \rtimes_{\hat{\alpha}} G$ 是一个与 Γ量子同构的量子图。

˜在此，我们以一种自然的方式将经典电压图 (Γ， λ) 与电压量子图˜ ˜A =$(A_g)_{g\in G}$ 对应起来（参见命题 4.10）。

最后，本文的主要结果是将 Gross–Tucker 定理推广到量子图：在经典情形下，图 Γ 同构于导出图 $\tilde{\Gamma}^{\lambda}$ ，当且仅当 Γ 上存在 G 的自由作用，使得 $\tilde{\Gamma} \cong \Gamma/G$，也就是说，（未标记的）电压图同构于商图。推广该定理时遇到的首要问题，是为量子集上的自由作用寻找一个对应概念。Landstad 的一个定理 [22]给出了答案，该定理精确刻画了˜ ˆ 在何种条件下，给定的 C*-代数 B同构于交叉积代数 $B \rtimes_{\hat{\alpha}} G$。请注意，Landstad 定理中的条件强于单纯的自由作用；后者已通过多种方式推广到 C*-代数的情形 [28,30, 3]。

定理 B （定理 6.1）。 设 A: $B \to B$ 是定义在量子集（B， ψ）上的量子图，并设 α : $G \to \mathrm{Aut}(A)$ 是有限阿贝尔群 G 对 A 的一个作用，且满足以下性质：

(a) 存在对偶群 ˆG 的一个表示 $(u_\chi)_{\chi\in\hat{G}} \subset B$ ，使得

$$\alpha_g(u_\chi) = \chi(g)u_\chi$$

ˆ 对所有 $g \in G$ 和 $\chi \in G$ 均成立。

(b) 我们有

$$\psi \mathrm{Ad}(u_\chi) = \psi \quad \text{as well as} \quad \mathrm{Ad}(u_\chi) A = A \mathrm{Ad}(u_\chi)$$

ˆ对所有 $\chi \in G$。

˜ ˜则在 (B^α, ψ) 上存在电压量子图 A，使得

$$A \cong \tilde{A} \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G},$$

其中 $\hat{\alpha} : \hat{G} \to \mathrm{Aut}(B^\alpha, \tilde{\psi})$ 由 $\hat{\alpha}_\chi(b) = u_\chi b u_\chi^*$ 给出，对所有 $b \in B^\alpha$ 与 $\chi \in \hat{G}$，以及 $\tilde{\psi} = \frac{1}{|G|} \psi|_{B^\alpha}$。

最后，让我们更详细地讨论经典导出图与图 C*-代数之间的联系。图 C*-代数由 Kumjian、Pask 和 Raeburn 在 [21]中作为 Cuntz–Krieger代数[10]的推广而引入。图 C*-代数 $C^*(\Gamma)$ 与一个有向的非简单图 Γ 相关联，从而该 C*-代数的许多性质可以借助该图的组合性质来研究 Γ，参见例如 [29]。根据 Kumjian 与 Pask 的一个定理 [20]，导出图的图 C*-代数与一个交叉积 C*-代数稳定同构，即我们有如下形式的稳定同构

$$C^*(\Gamma^\lambda) \cong_{\mathrm{stably}} C^*(\Gamma) \rtimes G.$$

最近，量子 Cuntz-Krieger C*-代数被引入，作为特定图 C*-代数向量子图的一种推广 [7, 9]。我们计划研究 Kumjian 与 Pask 的结果能否推广到量子 Cuntz–Krieger 代数的情形。事实上，这正是本文最初的动机。

1.1. **概述**。 在接下来的**第 2 节**中，我们介绍有关量子图与交叉积 C*-代数的一些记号。在**第 3 节**中，我们讨论量子集上的作用如何产生交叉积量子集。随后，在**第 4 节**中，我们即可定义电压量子图与导出量子图。我们在**第 5 节**中证明，相对于对偶群的不同作用，导出量子图是量子同构的；然后在**第 6 节**中证明导出量子图的 Gross–Tucker 定理。本文最后在**第 7 节**给出若干例子。

1.2. **致谢**。 本研究是国际项目“图代数”的一部分，该项目由欧盟框架计划 HORIZON-MSCA-2021-SE-01 支持，资助编号为 101086394。该国际项目还通过波兰科学与高等教育部的资助 W24/HE/2023（Mariusz Tobolski）获得共同资助。作者谨向第20届“非交换概率、算子代数及相关主题与应用”研讨会的组织者致谢。研讨会于2025年7月在波兰本德莱沃的数学研究与会议中心举行，本项目的研究工作也由此启程。BS 也感谢 SFB-TRR 195，并感谢他的博士导师 Moritz Weber 的指导与支持。本研究是 BS 在萨尔兰大学博士论文的一部分。BS 也感谢弗罗茨瓦夫大学的盛情接待；MT 则感谢萨尔兰大学提供的热情接待和良好工作条件。

2. 预备知识

通常， B 表示一个 C*-代数， ψ 表示其上的一个泛函。如果 B 配备了一个忠实正泛函 ψ，那么这对数据通过 GNS构造产生一个希尔伯特空间$L^2(B)$。特别地，如果 B 是有限维的，那么$L^2(B)$作为集合，而内积由 $\langle a,\ b\rangle_\psi = \psi(a^*b)$给出。在我们的情形中， B 通常是有限维的，且其配备的泛函将会十分明确。此时我们不写作 $L^2(B)$，而是直接将 B 视为希尔伯特空间。我们将复 $n\times n$ 矩阵的 C*-代数记为 M_n。

进一步地，若 $\hat{G}$ 是 C*-代数 B 上的 G 个对偶群，且 $\hat{\alpha}$: $\hat{\alpha}$ 作用，则我们用 $B\rtimes_{\hat{\alpha}} G$ 表示交叉积 C*-代数。我们始终将 G 作用于其上的较小 C*-代数记作 B ，并将交叉积 C*-代数记作 B 。因此， $\tilde{B}$ 上的泛函通常记作 ψ，而 B 上的泛函记作 ψ。有时，我们也将 ψ 记作 $\psi_{\rtimes}$ ，以强调它定义在交叉积 C*-代数上。群的单位元总记作 1，具体所指的群由上下文确定。若 χ， ξ 是对偶群中的两个元素，则 $\delta_{\chi=\xi}$ 是克罗内克δ。若$u\in B$ 是 C*-代数中的一个酉元，则我们将由 $b\mapsto ubu^*$ 对所有 $b\in B$给出的B 的自同构记作 Ad(u)。

2.1. 量子集。 量子集由 Musto、Reutter 和 Verdon 提出于 [27] ，并伴随着一个涵盖量子函数和量子图的广泛范畴框架。简言之，量子集遵循 Gelfand 对偶的思想：经典有限集 X 可与交换 C*-代数 $C(X)$ 对应。将这一思想推广后，任意有限维 C*-代数 B 都能导出一个量子集。然而，出于若干原因，为 C*-代数 B 配备一个特定的泛函 ψ也很重要。由此便得到以下定义，它本质上归功于 Musto、Reutter 和 Verdon [27]。

定义 2.1。 量子集 (B,ψ) 是由有限维 C*-代数 B 和忠实正泛函 $\psi: B\to\mathbb{C}$ 组成的一对，使得

$$mm^* = \mathrm{Id}_B$$

乘法映射 m： $B\otimes B\to B$ 及其伴随 m^* 给出的关系$\langle m(a\otimes b)\ c\rangle_\psi = \langle a\otimes b, m^*(c)\rangle_{\psi\otimes\psi}$对所有 $a,b,c\in B$均成立。我们称具有此性质的任意泛函为 B上的量子集泛函 。

我们将 B 视为一个 C*-代数，同时也是配备由泛函 ψ诱导的内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\psi$ 的希尔伯特空间。涉及 B 的映射通常被视为具有附加性质的线性映射；因此，我们通常将两个 $*$-同态 φ_1,φ_2： $B\to B$ 的复合记作 $\varphi_1\varphi_2$ ，而非$\varphi_1\circ\varphi_2$。元素 $b\in B$ 被视为线性映射 $\mathbb{C}\to B, \lambda\mapsto\lambda b$，因此具有记作 $b^\dagger$的伴随。该伴随由下式给出

$$b^\dagger: B\to\mathbb{C},\qquad c\mapsto\langle b,c\rangle_\psi.$$

注 2.2. 另一种广泛使用的量子集定义要求泛函 ψ 是某个 $\delta>0$ 的 δ-形式，这意味着

$$m^*m = \delta^2\mathrm{Id}_{B\otimes B}$$

成立。该条件与上述定义的区别仅在于一个标量因子：每个量子集泛函都是一个经过缩放的 δ-形式，反之亦然。更多详情请参见[31] 。

泛函 ψ 称为 B上的余单位，而 m^* 称为 B上的余乘法。下面汇总它们的一些基本性质，这些性质广为人知，参见例如 [27]。

命题 2.3. 映射 ψ 和 m^* 具有以下性质：

(a) 伴随 ψ^* 是单位，具体而言， $\psi^*\colon\ \mathbb{C} \to B, \lambda \mapsto \lambda 1_B$。*(b)* 余乘法满足余结合律，即

$$(\mathrm{Id}_B \otimes m^*)m^* = (m^* \otimes \mathrm{Id}_B)m^*.$$

(c) 余乘法满足

$$(\psi \otimes \mathrm{Id}_B)m^* = \mathrm{Id}_B = (\mathrm{Id}_B \otimes \psi)m^*.$$

例 2.4. (a) 每个经典有限集 X 都给出一个量子集 $(C(X), \psi_X)$，其中 $\psi_X\colon\ C(X) \to \mathbb{C}$是由 $\psi_X(f) = \sum_{x\in X} f(x)$ 对所有 $f \in C(X)$ 给出的泛函。事实上，在此情形下，对所有 $x \in X$， $m^*(e_x) = e_x \otimes e_x$ 成立，因此 $mm^*(e_x) = m(e_x \otimes e_x) = e_x$。这里， e_x 表示在 $x \in X$处的指示函数。(b) 对于每个满足 $n \in \mathbb{N}$的矩阵代数 M_n ，通过在 M_n 上赋予泛函 $\psi := n\mathrm{Tr}$，可得到一个量子集，其中 Tr 是 M_n上的非归一化迹。事实上，这是 M_n上唯一的迹量子集泛函。

2.2. **量子图**。 经典有限集 $\{1, \dots, n\}$ 上的简单图由其邻接矩阵 $A \in \{0, 1\}^{n\times n}$给出。邻接矩阵可以解释为一个线性映射 $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ，它具有一个特殊性质：与自身逐项相乘后保持不变。这可以如下推广到量子集。

定义 2.5。 (a) 量子集 (B, ψ) 上的量子邻接矩阵 是一个线性映射 $A\colon\ B \to B$ ，它是 Schur幂等的并且保持 $*$，也就是说，它满足

$$m(A \otimes A)m^* = A \quad \text{and} \quad A(b^*) = A(b)^* \quad \text{for all } b \in B.$$

(b) (B, ψ) 上的量子图 由该量子集上的一个量子邻接矩阵给出。

这个定义本质上源自 Musto、Reutter 和 Verdon [27]。根据 Matsuda [26] ，第二个条件 $A(b^*) = A(b)^*$ 等价于要求 A 是完全正的。关于量子图的进一步讨论，参见例如 [11, 31]。

在本文中，我们将量子图与量子邻接矩阵视为同一概念，也就是说，我们将具有必要性质的矩阵 $A\colon\ B \to B$ 称为量子邻接矩阵，也称为量子图。

注 2.6. 需要指出的是，量子图也可以通过不同的方式定义。首先，经典图是 $V \times V$ 的一个子集，也就是由其边集给出。在量子推广中，量子图被定义为 $B \otimes B^{\mathrm{op}}$ 中的一个投影P，其中后者是反 C* 代数。此外，经典图可以用空间张成空间$(E_{ij}\colon\ i$与 j相邻$) \subset M_n$来描述，这种描述也可以推广到量子集。至关重要的是，这些不同的定义

量子图是等价的，参见例如 [27, 11, 31]。这表明上述定义确实是合理的。

例 2.7。对于所有 $n \in \mathbb{N}$，若对所有 $i \leq n$，有序对 $(\mathbb{C}^n, \psi_n)$ 连同 $\psi_n(e_i) = 1$ 都是一个量子集，见例 2.4。在这种情况下，运算 $m(\cdot \otimes \cdot)m^*$ 恰好得到两个矩阵的逐项乘积。因此，矩阵 $A \in M_n$ 是一个以 n 个顶点为顶点集的（简单有向）图的经典邻接矩阵，当且仅当A 是量子集 $(\mathbb{C}^n, \psi_n)$ 上的量子邻接矩阵。

稍后我们将利用这一对应关系，说明我们的定义和定理与电压图及导出图的经典理论相一致。偶尔，我们也将有限集 V 对应的量子集写作 $(\mathbb{C}^V, \psi_V)$。

2.3. **量子同构的定义**。让我们回顾量子集与量子图之间的同构和量子同构。我们主要遵循 Musto、Reutter 和 Verdon 的理论 [27]，不同之处在于，我们不从范畴论的角度看待量子集和量子图，而是使用显式的 C*-代数。

定义 2.8. 设 (B_1, ψ_1) 与 (B_2, ψ_2) 为量子集，并设 $A_1 \colon B_1 \to B_1$与 $A_2 \colon B_2 \to B_2$ 分别为 (B_1, ψ_1) 与 (B_2, ψ_2) 上的量子图。

(a) 两个量子集是同构的，如果存在一个 $*$-同构 φ: $B_1 \to B_2$ 使得 $\psi_2\varphi = \psi_1$。我们用 Aut(B, ψ) 表示量子集 (B, ψ) 的量子集自同构群。(b) 两个量子图是同构的，如果存在底层量子集的一个同构 $\varphi : B_1 \to B_2$ 使得 $\varphi A_1 = A_2\varphi$。我们用 Aut(A) 表示量子图A的量子图自同构群。(c) 两个量子集是量子同构的，记作 $(B_1, \psi_1) \cong_q (B_2, \psi_2)$，如果存在一个有限维希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 以及一个保单位 $*$-同态

$$\rho : B_1 \to B_2 \otimes B(\mathcal{H}),$$

使得映射

$$p : L^2(B_1) \otimes \mathcal{H} \to L^2(B_2) \otimes \mathcal{H}, \quad a \otimes \xi \mapsto \rho(a)(1 \otimes \xi)$$

作为希尔伯特空间之间的算子是酉的。

(d) 两个量子图是量子同构的，记作 $A_1 \cong_q A_2$，如果存在量子同构 $\rho : B_1 \to B_2 \otimes B(\mathcal{H})$，它作用于底层量子集并满足

$$\rho A_1 = (A_2 \otimes \mathrm{Id}_{B(\mathcal{H})})\rho$$

成立。

注 2.9. 前述定义是对 Musto、Reutter 和 Verdon 在 [27] 中给出的定义的改述。他们将从 (B_1, ψ_1) 到 (B_2, ψ_2) 的量子函数定义为一个线性映射

$$P : \mathcal{H} \otimes B_1 \to B_2 \otimes \mathcal{H},$$

它满足某些性质。他们的映射 P 在交换定义域中的张量因子后，对应于我们的映射 p；他们关于 P 的性质，则相当于要求相关映射 ρ 是一个 $*$-同态。

此外，Musto、Reutter 和 Verdon 还提出了一些额外性质，映射 P 必须满足这些性质才能称为双射。在 [27, 定理 4.8] 中，给出了双射量子函数的几种等价刻画。其中一种刻画要求映射 P 是酉的，这也是我们在定义量子同构时采用的性质。

最后提一下，上述量子同构的表述主要沿用了 Brannan 等人 [6] 的工作，唯一的区别是我们采用了不依赖基的视角。

记号 2.10. 将量子同构 $\rho: B_1 \to B_2 \otimes B(\mathcal{H})$ 视为从 B_1 到 B_2的映射会很方便。为此，我们采用以下记号约定。

(a) 若 $T: B_2 \to B_3$ 是一个线性映射，则记作

$$T\rho \text{ for the map } (T \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{H}})\rho : B_1 \to B_3 \otimes B(\mathcal{H}).$$

形如以下形式的方程

$$T\rho = S$$

对于某个 $S: B_1 \to B_3$，相应地应理解为

$$(T \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{H}})\rho = S \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}.$$

(b) 此外，我们以一种特殊方式理解张量积 $\rho \otimes \rho$。事实上，对任意 $x, y \in B_1$，元素 $\rho(x)$与 $\rho(y)$可解释为取值于 B_2 的矩阵，因为 $\mathcal{H}$ 是有限维的。我们将 $\rho(x)$的各项嵌入 $B_2 \otimes B_2$的左张量腿，并将 $\rho(y)$的各项嵌入 $B_2 \otimes B_2$的右张量腿。于是，$\rho(x)$与 $\rho(y)$是两个取值于 $B_2 \otimes B_2$的矩阵。这两个矩阵可按通常的矩阵乘法规则相乘。然后我们得到一个与先前大小相同、各项取值于 $B_2 \otimes B_2$的新矩阵。我们用$(\rho \otimes \rho)(x \otimes y)$来表示这个矩阵。更确切地说，我们写成

$$\rho \otimes \rho \text{ for the map } (\mathrm{Id}_{B_2} \otimes \mathrm{Id}_{B_2} \otimes m_{B(\mathcal{H})})\Sigma_{1,3,2,4}(\rho \otimes \rho),$$

其中 $\Sigma: B_2 \otimes B(\mathcal{H}) \otimes B_2 \otimes B(\mathcal{H}) \to B_2 \otimes B_2 \otimes B(\mathcal{H}) \otimes B(\mathcal{H})$交换中间的两个张量因子，而$m_{B(\mathcal{H})}: B(\mathcal{H}) \otimes B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$是 $B(\mathcal{H})$上的乘法映射。

(c) 因此，若 $T: B_2 \to B_3$ 和 $S: B_2 \to B_4$ 是线性映射，则我们记作

$(S \otimes T)(\rho \otimes \rho)$ 表示映射

$$(\mathrm{Id}_{B_3} \otimes \mathrm{Id}_{B_4} \otimes m_{B(\mathcal{H})})(S \otimes T \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}})\Sigma_{1,3,2,4}(\rho \otimes \rho).$$

需要强调的是，这些记号约定符合 Musto、Reutter 和 Verdon 关于量子函数与量子同构的计算理论。

以下命题总结了量子同构的一些基本性质。事实上，这些性质也可用于定义量子同构，参见 [27, 定理 4.8]。

命题 2.11. 设 $\rho: B_1 \to B_2 \otimes B(\mathcal{H})$ 是量子集 (B_1, ψ_1) 与 (B_2, ψ_2)之间的量子同构。那么，以下性质成立：

(a) $m_2(\rho \otimes \rho) = \rho m_1$,

(b) $\psi_2\rho = \psi_1$, *(c)* $(\rho \otimes \rho)$
$m_1^* = m_2^*\rho$, *(d)* $\rho\psi_1^* = \psi_2^*$,

其中， m_1 *(*m_2*)* 是 B_1 *(*B_2*)* 上的乘法映射。

证明。 第一个等式表明 ρ 是乘法的，而这必然成立，因为 ρ是一个 $*$-同态。第二个等式由 p是酉的这一事实推出，参见 [6, 引理 4.2]。最后两个等式本质上是 Musto、Reutter 和 Verdon 对量子函数为双射所要求的性质，参见 [27,定理 4.8]。 □

2.4. **交叉积**。 关于交叉积 C*-代数的一般参考资料，请参阅 Blackadar 的著作 [4] 。若 B 是有限维 C*-代数 $\hat{}\tilde{}$，且 $\hat{}\alpha : G \to$ Aut(B) 是有限群在 B上的群作用，则交叉积 $B \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{}G$ 仍是有限维 C*-代数。这正是本文余下部分将始终讨论的情形。我们总是考虑有限阿贝尔群的对偶群的作用，这一做法是为了使后续结果的记号更简洁。事实上，任意有限阿贝尔群都是另一个有限阿贝尔群的对偶群。我们将始终使用以下记号。

记号 2.12。 设 ($\tilde{B}, \tilde{\psi}$) 为一个量子集，且设 $\hat{}\alpha : \hat{}G \to$ Aut($\tilde{B}, \tilde{\psi}$) 是有限阿贝尔群 G 的对偶群的一个作用。此外，设

$$B := \tilde{B} \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}$$

为相应的交叉积 C*-代数。存在一个表示

$$(u_\chi)_{\chi\in\hat{G}} \subset B \quad \text{with} \quad \hat{\alpha}_\chi(b) = u_\chi b u_\chi^* \text{ for all } b \in \tilde{B}, \chi \in \hat{G},$$

使得 B 中的每个元素都可以唯一地写成

$$b = \sum_{\chi\in\hat{G}} b_\chi u_\chi \qquad \text{for suitable } b_\chi \in \tilde{B}.$$

此外， B 上的乘法和对合由下式确定:

$$(b_\chi u_\chi)(c_\xi u_\xi) = b_\chi \hat{\alpha}_\chi(c_\xi) u_{\chi\xi},$$
$$(b_\chi u_\chi)^* = \hat{\alpha}_{\chi^{-1}}(b_\chi^*) u_{\chi^{-1}}.$$

˜最后，存在一个线性映射 $E_\rtimes : B \to B$，其定义为

$$E_\rtimes \left(\sum_{\chi\in\hat{G}} b_\chi u_\chi \right) = n b_1,$$

其中 $n := |G| = \lceil G|$。这是从 B 到 B 的自然条件期望˜的一个缩放版本。选择这一缩放因子，是为了使其与我们将和 B 及 B 关联的量子集泛函˜相适配。

3. 交叉积量子集

˜假设给定一个有限维 C*-代数 B ，以及一个对偶群 $\hat{}\tilde{}$作用 $\hat{}\alpha : G \to$ Aut(B)，其中 G是有限阿贝尔群。交叉积构造是一种运算

$$\tilde{B} \mapsto B := \tilde{B} \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G},$$

它由一对 $(B,\hat{\alpha})$ 生成一个新的 C*-代数 $B = \tilde{B} \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}$，称为交叉积 C*-代数。

如果 B 配备了一个泛函 ψ，使得(B,ψ)是一个量子集，会发生什么？在本节中，我们讨论如何在交叉积C*-代数$B \rtimes_{\hat{\alpha}} G$ 上构造一个泛函 $\psi_{\rtimes}$，使得$(B \rtimes_{\hat{\alpha}} G, \psi_{\rtimes})$再次成为一个量子集。这为我们给出了一种运算

$$(\tilde{B},\tilde{\psi}) \mapsto (\tilde{B},\tilde{\psi}) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G} =: (B,\psi_{\rtimes}),$$

它由一个量子集(B,ψ)连同一个对偶群作用$\hat{\alpha}$产生一个新的量子集$(B,\psi_{\rtimes})$，我们称之为交叉积量子集。

定义 3.1. 设$(\tilde{B},\tilde{\psi})$为一个量子集，并设$\hat{\alpha} : \hat{G} \to \mathrm{Aut}(\tilde{B},\tilde{\psi})$为有限阿贝尔群 G的对偶群的一个作用。交叉积量子集 定义为

$$(\tilde{B},\tilde{\psi}) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G} := \left(\tilde{B} \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}, \psi_{\rtimes}\right),$$

其中 $\tilde{B} \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}$ 是交叉积 C*-代数，而 $\psi_{\rtimes}$ 是由下式给出的泛函

$$\psi_{\rtimes}\left(\sum_{\chi\in\hat{G}} b_\chi u_\chi\right) = n\tilde{\psi}(b_1)$$

其中 $n := |G| = |\hat{G}|$。

我们将继续验证上述定义是合理的，也就是说，验证 $\psi_{\rtimes}$ 确实是 C*-代数 $\tilde{B} \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}$ 上的量子集泛函。在证明一个有用的引理之前，我们先引入一些记号。

记号 3.2. 给定一个量子集 $(\tilde{B},\tilde{\psi})$ 以及如上所述的作用 $\hat{\alpha} : \hat{G} \to \mathrm{Aut}(\tilde{B},\tilde{\psi})$，我们记

- 为 $\tilde{m}$ 在 B 上的乘法映射，并将其关于由 ψ,$\tilde{}$ $\hat{}$ 诱导的内积的伴随记为 $\tilde{m}^*$
- 为 $m_{\rtimes}$ 在 $B \rtimes_{\hat{\alpha}} G$ 上的乘法映射，并将其关于由 $\psi_{\rtimes}$ 诱导的内积的伴随记为 $m^*_{\rtimes}$，
- 由 $E_{\rtimes}$ 线性映射

$$E_{\rtimes} : \tilde{B} \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G} \to \tilde{B}, \quad \sum_{\chi\in\hat{G}} b_\chi u_\chi \mapsto n b_1,$$

以及由 $E^*_{\rtimes}$ 其关于上述泛函 ψ 和 $\psi_{\rtimes}$ 所诱导的内积的伴随。

引理 3.3。设 $\hat{\alpha}$ 是上述量子集$(\tilde{B},\tilde{\psi})$ 上的$\hat{G}$ 作用。那么$\tilde{}$ $\hat{}$对所有 b、$c \in B$ 以及 χ、$\xi \in G$，以下公式均成立：

$$\langle bu_\chi, cu_\xi\rangle_{\psi_{\rtimes}} = n\delta_{\chi=\xi}\langle b,c\rangle_{\tilde{\psi}}, \tag{1}$$

$$m^*_{\rtimes}(bu_\chi) = \frac{1}{n}\sum_{\xi\in\hat{G}}\sum_i b_i^{(1)}u_\xi \otimes \hat{\alpha}_{\xi^{-1}}(b_i^{(2)})u_{\xi^{-1}\chi}, \tag{2}$$

$$E^*_{\rtimes}(b) = b, \tag{3}$$

其中在(2) 中，元素 $b_i^{(1)}$、$b_i^{(2)} \in \tilde{B}$ 满足 $\tilde{m}^*(b) = \sum_i b_i^{(1)} \otimes b_i^{(2)}$。

证明。 第一条陈述可由

$$\langle bu_\chi, cu_\xi\rangle_{\psi_\rtimes} = \psi_\rtimes(u_\chi^* b^* cu_\xi) = n\delta_{\chi=\xi}\tilde{\psi}(\hat{\alpha}_{\chi^{-1}}(b^*c)) = n\delta_{\chi=\xi}\langle b, c\rangle_{\tilde{\psi}},$$

其中最后一步用到了 $\psi = \psi \circ \hat{\alpha}_\cdot$。利用 (1)，对于任意元素 $bu_\chi, cu_\rho, du_\sigma \in B \rtimes_{\hat{\alpha}} G$，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_\xi \sum_i \langle b_i^{(1)} u_\xi \otimes \hat{\alpha}_{\xi^{-1}}(b_i^{(2)}) u_{\xi^{-1}\chi}, cu_\rho \otimes du_\sigma\rangle_{\psi_\rtimes\otimes\psi_\rtimes} \\
&\qquad = \frac{1}{n}\sum_\xi\sum_i \langle b_i^{(1)}u_\xi, cu_\rho\rangle_{\psi_\rtimes}\,\langle \hat{\alpha}_{\xi^{-1}}(b_i^{(2)})u_{\xi^{-1}\chi}, du_\sigma\rangle_{\psi_\rtimes} \\
&\qquad = n\sum_\xi\sum_i \delta_{\xi=\rho}\langle b_i^{(1)}, c\rangle_{\tilde{\psi}}\,\delta_{\xi^{-1}\chi=\sigma}\langle \hat{\alpha}_{\xi^{-1}}(b_i^{(2)}), d\rangle_{\tilde{\psi}}.
\end{aligned}$$

由于 $\psi = \psi\circ\hat{\alpha}_\cdot$，我们有

$$\langle \hat{\alpha}_{\xi^{-1}}(b_i^{(2)}), d\rangle_{\tilde{\psi}} = \langle b_i^{(2)}, \hat{\alpha}_\xi(d)\rangle_{\tilde{\psi}}.$$

因此，我们可以从上面的计算继续得到

$$\begin{aligned}
\ldots &= n\delta_{\chi=\rho\sigma}\sum_i \langle b_i^{(1)}, c\rangle_{\tilde{\psi}}\,\langle b_i^{(2)}, \hat{\alpha}_\rho(d)\rangle_{\tilde{\psi}} \\
&= n\delta_{\chi=\rho\sigma}\langle m_\rtimes^*(b), c\otimes\hat{\alpha}_\rho(d)\rangle_{\tilde{\psi}\otimes\tilde{\psi}} \\
&= n\delta_{\chi=\rho\sigma}\langle b, \tilde{m}(c\otimes\hat{\alpha}_\rho(d))\rangle_{\tilde{\psi}} \\
&= \langle bu_\chi, m_\rtimes(cu_\rho\otimes du_\sigma)\rangle_{\psi_\rtimes}.
\end{aligned}$$

综上可得 $m_\rtimes^*(bu_\chi) = \frac{1}{n}\sum_{\xi\in\hat{G}}\sum_i b_i^{(1)} u_\xi \otimes \hat{\alpha}_{\xi^{-1}}(b_i^{(2)}) u_{\xi^{-1}\chi}$。

还需证明伴随 $E_\rtimes$ 的公式 (3)。为此，令 $b, c \in B$，并令 $\chi \in \hat{G}$，利用 (1) 可得

$$\langle E_\rtimes(bu_\chi), c\rangle_{\tilde{\psi}} = n\delta_{\chi=1}\langle b, c\rangle_{\tilde{\psi}} = \langle bu_\chi, c\rangle_{\psi_\rtimes} = \langle bu_\chi, E_\rtimes^*(c)\rangle_{\psi_\rtimes}.$$

□

命题 3.4. </style}映射 是 C*-代数 $\tilde{B}\rtimes_{\hat{\alpha}}G$ 上的量子集泛函，当且仅当 ψ 是 B上的量子集泛函。

证明。 利用引理 3.3 中的 (2)，注意到对于 $b \in \tilde{B}$ 和 $\chi \in \hat{G}$，

$$\begin{aligned}
m_\rtimes m_\rtimes^*(bu_\chi) &= \frac{1}{n}\sum_{\xi\in\hat{G}}\sum_i b_i^{(1)} u_\xi \hat{\alpha}_{\xi^{-1}}(b_i^{(2)}) u_{\xi^{-1}\chi} \\
&= \sum_i b_i^{(1)} b_i^{(2)} u_\chi
\end{aligned}$$

当且仅当 $\sum_i b_i^{(1)} b_i^{(2)} = b$ 成立时，等于 bu_χ。因此，我们有 $m_\rtimes m_\rtimes^* = \mathrm{Id}_{\tilde{B}\rtimes_{\hat{\alpha}}\hat{G}}$ 等价于 $\tilde{m}\tilde{m}^* = \mathrm{Id}_{\tilde{B}}$。显然，$\psi_\rtimes$ 是正且忠实的，当且仅当 ψ也具有相同性质。因此，前者是量子集泛函，当且仅当后者是量子集泛函。□

如果 $\hat{\alpha}$ 是平凡作用，那么众所周知，交叉积就是张量积。下面我们更详细地描述这种情形，为后续计算做准备。

例 3.5。 假设 $\hat{\alpha} : \hat{G} \to \mathrm{Aut}(\tilde{B}, \tilde{\psi})$ 是由下式给出的平凡作用

$$\hat{\alpha}_\chi(b) = b \quad \text{for all } b \in \tilde{B}, \chi \in \hat{G}.$$

$\tilde{}$ $\hat{}$ 那么交叉积 $B \rtimes_{\hat{\alpha}} G$ 实际上同构于张量积$\tilde{}$C*-代数 $B \otimes C(G)$，且一个同构由下式给出

$$\tilde{B} \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G} \to \tilde{B} \otimes C(G),$$
$$\sum_{\chi \in \hat{G}} b_\chi u_\chi \mapsto \sum_{\chi \in \hat{G}} b_\chi \otimes \tilde{u}_\chi,$$

其中 $\tilde{u}_\chi = (\chi(g))_{g \in G} \in C(G)$ 是定义在 G上的函数，其在$g \in G$处的取值为 $\chi(g)$。回忆一下例 2.4 中定义在 $C(G)$上的泛函 ψ_G ，它也可以等价地表示为

$$\psi_G(e_g) = 1 \text{ for all } g \in G \quad \text{or} \quad \psi_G(\tilde{u}_\chi) = n\delta_{\chi=1} \text{ for all } \chi \in \hat{G},$$

其中 $n = |G|$。上文的 C*-代数同构将泛函$\tilde{}$ $\tilde{\hat{}}$ $\psi_\rtimes$ 和 $\psi \otimes \psi_G$对应起来。事实上，对于每个 $b \in B$ 和 $\chi \in G$，我们都有

$$\psi_\rtimes(bu_\chi) = \delta_{\chi=1} n\tilde{\psi}(b),$$

以及

$$(\tilde{\psi} \otimes \psi_G)(b \otimes \tilde{u}_\chi) = \delta_{\chi=1} n\tilde{\psi}(b).$$

总而言之，如果 $\hat{\alpha}$ 是平凡作用，那么我们有一个量子.....的同构 m sets

$$(\tilde{B} \otimes C(G), \tilde{\psi} \otimes \psi_G) \cong (\tilde{B} \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}, \psi_\rtimes).$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$我们将左侧的量子集记为 $(B, \psi) \otimes (C(G)\ \psi_G)$，并称$\tilde{}$ $\tilde{}$其为 (B, ψ) 与 $(C(G)\ \psi_G)$ 的张量积量子集 。稍后我们将证明一个引人注目的事实：对于任意 作用 $\hat{\alpha}$（它不必是平凡的），都有$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\hat{}$ 一个量子 同构 $(B, \psi) \otimes (C(G)\ \psi_G) \cong (B, \psi) \rtimes_{\hat{\alpha}} G$。

3.1. **Landstad对偶**。 最后，我们来讨论运算 $(\tilde{B}, \tilde{\psi}) \mapsto (\tilde{B}, \tilde{\psi}) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}$ 如何求逆。因此，给定一个量子集 (B, ψ)，我们希望$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\hat{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$找到一个更小的量子集 (B, ψ)，以及一个作用 $\hat{\alpha} : G \to \mathrm{Aut}(B, \psi)$，使得

$$(B, \psi) \cong (\tilde{B}, \tilde{\psi}) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}.$$

对于 C*-代数，这个问题由 Landstad对偶定理 [22] 给出了答案。该定理适用于一般的 C*-代数和冯·诺伊曼代数，但我们这里只回顾有限维 C*-代数的特定版本，这已足以满足我们的目的。

定理 3.6 ([22, 定理 2])。 设 B 是一个有限维 C*-代数，且 $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(B)$ 是有限阿贝尔群 G 在 B 上的一个作用。那么，当且仅当存在一个酉表示 $(u_\chi)_{\chi \in \hat{G}} \subset B$ 时， B 同构$\hat{}$于一个由 G 的作用所构成的交叉积 C*-代数，使得

$$\alpha_g(u_\chi) = \chi(g) u_\chi$$

$\hat{}$对所有 $g \in G$、$\chi \in G$ 均成立。在这种情况下，有

$$B \cong B^\alpha \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G},$$

其中 $B^\alpha = \{b \in B \mid \alpha_g(b) = b$ 对所有 $g \in G\}$ 都是该不动点代数，而$\hat{}\hat{}\alpha : G \to \mathrm{Aut}(B^\alpha)$ 是由下式定义的作用

$$\hat{\alpha}_\chi(b) = u_\chi b u_\chi^*.$$

结合上述定理与我们对交叉积量子集的讨论，不难得到量子集版本的 Landstad对偶。

命题 3.7。 设 (B,ψ) 为一个量子集，且 $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(B,\psi)$ 为有限阿贝尔群 G 在 (B,ψ)上的一个作用，满足 *Landstad*对偶定理（定理 *3.6*）的条件。此外，假设

$$\psi = \psi \,\mathrm{Ad}(u_\chi) \tag{4}$$

对所有 $\chi \in \hat{}G$均成立，其中 $(u_\chi)_{\chi\in\hat{G}} \subset B$ 是 ***Landstad*** 定理中的酉表示。则有量子集的同构

$$(B,\psi) \cong (B^\alpha, \tilde{\psi}) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G},$$

其中 $\hat{}\alpha : \hat{}G \to \mathrm{Aut}(B^\alpha, \tilde{\psi})$ 是 ***Landstad*** 定理中的作用，而 $\tilde{\psi}$ 是定义在 B^α 上的量子集泛函，其定义为

$$\tilde{\psi} := \frac{1}{n}\psi|_{B^\alpha}$$

其中 $n := |G| = |\hat{}G|$。

˜证明。 根据 Landstad 定理，我们只需验证 ψ 是 B^α 上的量子集泛函，且在作用 $\hat{}\alpha$下保持不变，并且满足上一小节记号中的 $\psi = \psi_{\rtimes}$ 。

˜首先，我们验证 ψ 在 $\hat{}\alpha$ 下保持不变，即

$$\tilde{\psi} = \tilde{\psi}\hat{\alpha}_\chi$$

对所有 $\chi \in \hat{}G$均成立。由 **(4)** 可知，对所有 $b \in B^\alpha$ 和 $\chi \in \hat{}G$

$$\tilde{\psi}(\hat{\alpha}_\chi(b)) = \frac{1}{n}\psi(u_\chi b u_\chi^*) = \frac{1}{n}\psi(b) = \tilde{\psi}(b).$$

˜接下来，我们验证 $\psi = \psi_{\rtimes}$ ，其中 $\psi_{\rtimes}$ 由 ψ 按照定义 3.1 推导得出。因此，我们需要验证

$$\psi(bu_\chi) = n\delta_{\chi=1}\tilde{\psi}(b)$$

ˆ 对所有 $b \in B^\alpha$ 和 $\chi \in G$均成立。我们先证明这个等式。由于 α 是量子集（B，ψ）上的 ˆ 作用，对所有 $b \in B^\alpha$ 和 $\chi \in G$

$$\psi(bu_\chi) = \psi(\alpha_g(bu_\chi)) = \chi(g)\psi(bu_\chi)$$

对所有 $g \in G$均成立。因此，当 $\chi \neq 1$时，有 $\psi(bu_\chi) = 0$ 。由此直接得到

$$\psi(bu_\chi) = \delta_{\chi=1}\psi(b) = n\delta_{\chi=1}\tilde{\psi}(b)$$

ˆ 对所有 $b \in B^\alpha$ 和 $\chi \in G$均成立。

˜事实上，这已经证明了 ψ 是 B^α 上的量子集泛函：命题˜3.4 保证， ψ 是 B 上的量子集泛函，当且仅当 ψ 是 B^α 上的量子集泛函。□

注 3.8。若 G 是作用于有限集 X 上的有限群，则作为 G-空间有 $X \cong X/G \times G$，其中对 $X/G \times G$ 的作用是由群乘法作用于右侧分量给出的。这个事实在有限图的 Gross–Tucker 定理中起着关键作用。一般而言，若紧群 G 自由地作用于紧空间X，则 G-同胚 $X \cong X/G \times G$ 的存在并非自动成立，而是等价于 G-等变映射 $X \to G$ [18] 的存在。在非交换情形下，G-等变映射 $X \to G$ 对应于一个幺元保持的 G-等变 $*$-同态 $C(G) \to A$，其中 A 是一个含幺 C*-代数，它与平凡量子主丛 [2] 的概念相关。当 G 是阿贝尔群时，根据庞特里亚金对偶性，该条件等价于存在对偶群 G 的一个表示 $\hat{}$，如 Landstad 定理的假设所述。因此，为了得到 Gross–Tucker 定理的量子图版本，我们必须依赖定理 3.7。

4. 电压与导出量子图

类比 Gross 和 Tucker 的经典理论，我们引入**电压量子图** 及其关联的**导出量子图**的概念。电压量子图应被视为一种（不一定是简单的）量子图，其边由有限阿贝尔群 G 的元素标记。接着，导出量子图是在一个更大的交叉积量子集上构造的简单量子图，它由电压量子图以一种推广经典导出图构造的方式构造而成。

让我们把设定表述得更精确一些。在本节中，G 是一个有限阿贝尔群。此外，设 $\hat{\alpha} : \tilde{G} \to \mathrm{Aut}(B, \psi)$ 是对偶群 $\tilde{G}$ 在 (B, ψ) 上的一个 $\hat{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$作用，并设

$$(B, \psi_\rtimes) := (\tilde{B}, \tilde{\psi}) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G} \quad \text{with} \quad B = \tilde{B} \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}$$

为相应的交叉积量子集（见定义 3.1）。回顾记号 3.2 中的线性$\tilde{}$映射 $E_\rtimes : B \to B$，以及记号 2.12 中的酉元 $(u_\chi)_{\chi \in \hat{G}} \subset B$。

定义 4.1. 设 $(\tilde{B}, \tilde{\psi})$、$\hat{\alpha} : \hat{G} \to \mathrm{Aut}(\tilde{B}, \tilde{\psi})$、$(B, \psi_\rtimes)$ 与 $(u_\chi)_{\chi \in \hat{}_G} \subset B$ 如上所述。

(a) 对每个 $g \in G$，设 $X_g := \frac{1}{n} \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) u_\chi u_\chi^\dagger$，即

$$X_g : B \to B, \quad b \mapsto \frac{1}{n} \sum_{\chi \in \hat{G}} \overline{\chi(g)} \langle u_\chi, b \rangle_{\psi_\rtimes} u_\chi.$$

(b) 关于群作用 $\hat{\alpha} : \hat{G} \to \mathrm{Aut}(\tilde{B}, \tilde{\psi})$，定义在量子集 (B, ψ) 上的**电压量子图** 是一个由 G 索引的量子邻接矩阵族 $\tilde{A} = (\tilde{A}_g)_{g \in G}$，并满足

$$\tilde{A}_g \hat{\alpha}_\chi = \hat{\alpha}_\chi \tilde{A}_g \tag{5}$$

$\hat{}$ 对所有 $g \in G$ 和 $\chi \in G$ 均成立。

(c) **导出量子图** $\tilde{A} \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}$：$B \to B$ 在 $(B, \psi_\rtimes)$ 上则由下式给出

$$\tilde{A} \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G} := \sum_{g \in G} m(X_g \otimes E_\rtimes^* \tilde{A}_g E_\rtimes) m^*,$$

其中（在此处以及本节的其余部分），我们把 m 记为 B上的乘法映射，即 $m = m_{\rtimes}$。

本节其余部分致力于证明该定义是良定义的。在此之前，让我们更详细地讨论平凡作用的情形。

例 4.2. 假设 $\hat{\alpha} : \hat{G} \to \mathrm{Aut}(\tilde{B}, \tilde{\psi})$ 是平凡作用，即

$$\hat{\alpha}_\chi = \mathrm{id}_{\tilde{B}} \quad \text{for all } \chi \in \hat{G}.$$

则条件 (5) 对 (B, ψ) 上任意一族量子邻接矩阵 $(A_g)_{g \in G}$ 均成立。此外，在 C*-代数一侧，交叉积同构于张量积，即

$$B = \tilde{B} \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G} \cong \tilde{B} \otimes C(G).$$

由例 2.7 可知，有限集 V 上的经典图对应于量子集 $(\mathbb{C}^V, \psi_V)$ 上的量子图。若 $(\tilde{B}, \tilde{\psi})$ 是这种形式的量子集，则 (B, ψ) 上相对于有限阿贝尔对偶群 G 的平凡作用 $\hat{\alpha}$ 的电压量子图，可等同于 Gross 和 Tucker 意义下的经典电压图。我们将在下一节更详细地讨论这一点。

注 4.3。 上述定义具有非常直观的解释，我们稍后将针对 $(\tilde{B}, \tilde{\psi}) = (\mathbb{C}^V, \psi_V)$ 为经典集合且 $\hat{\alpha}$ 为平凡作用的情形作更详细的讨论。目前，我们只指出，运算

$$(X_g, E_{\rtimes}^* \tilde{A}_g E_{\rtimes}) \mapsto m(X_g \otimes E_{\rtimes}^* \tilde{A}_g E_{\rtimes}) m^* \tag{6}$$

可以解释为取两个量子图 X_g 和 $E_{\rtimes}^* A_g E_{\rtimes}$的交集。如果 (B, ψ) 和 $(B, \psi_{\rtimes})$ 都是经典集合，且 X_g和 $E_{\rtimes}^* A_g E_{\rtimes}$都是经典图，那么该运算总会产生一个新图（或者更确切地说，一个新邻接矩阵）；当且仅当 X_g 和$E_{\rtimes}^* A_g E_{\rtimes}$ 都包含某条特定的边时，两个顶点之间才有边。然而，在真正的量子情形下，两个量子邻接矩阵经由 (6) 未必会产生一个新的量子邻接矩阵。这与以下事实相似且相关：在非交换 C*-代数中，两个投影的乘积不一定仍是投影。

我们接着证明，前一定义中的映射 X_g 与 A 是确实是量子集 $(B, \psi_{\rtimes})$ 上的量子邻接矩阵。

引理 4.4. 对每个 $g \in G$ 与 $bu_\chi \in B$，我们有

$$X_g(bu_\chi) = \overline{\chi(g)} \tilde{\psi}(b) u_\chi, \tag{7}$$

$$m(X_g \otimes E_{\rtimes}^* \tilde{A}_g E_{\rtimes}) m^*(bu_\chi) = \overline{\chi(g)} \tilde{A}_g(b) u_\chi, \tag{8}$$

$$m(X_g \otimes E_{\rtimes}^* \tilde{A}_g E_{\rtimes}) m^* = m(E_{\rtimes}^* \tilde{A}_g E_{\rtimes} \otimes X_g) m^*. \tag{9}$$

证明。 对于第一个方程， X_g 的定义给出

$$X_g(bu_\chi) = \frac{1}{n} \sum_{\xi \in \hat{G}} \overline{\xi(g)} u_\xi \, u_\xi^\dagger(bu_\chi),$$

其中由 (1) 可知 $u_\xi^\dagger(bu_\chi) = \langle u_\xi, bu_\chi\rangle_{\psi_\rtimes} = n\delta_{\xi=\chi}\tilde{\psi}(b)$。因此，对 ξ 的求和发生坍缩，我们得到

$$X_g(bu_\chi) = \overline{\chi(g)}\tilde{\psi}(b)u_\chi.$$

接下来，我们使用定理 3.3 中的公式 m^* from (2) 来计算 (8) 的左端。对于任意 $b \in B$ 和 $\chi \in \hat{G}$，可得

$$\begin{aligned} m(X_g \otimes E_\rtimes^* \tilde{A}_g E_\rtimes) m^*(bu_\chi) &= \frac{1}{n}\sum_{\xi\in\hat{G}} X_g(b_i^{(1)}u_\xi) E_\rtimes^* \tilde{A}_g E_\rtimes(\hat{\alpha}_{\xi^{-1}}(b_i^{(2)})u_{\xi^{-1}\chi}), \\ &= \frac{1}{n}\sum_{\xi\in\hat{G}} \overline{\xi(g)}\tilde{\psi}(b_i^{(1)})u_\xi\, E_\rtimes^* \tilde{A}_g E_\rtimes(\hat{\alpha}_{\xi^{-1}}(b_i^{(2)})u_{\xi^{-1}\chi}). \end{aligned}$$

其中 $\tilde{m}^*(b) = \sum_i b_i^{(1)} \otimes b_i^{(2)}$，并将关于 i 的求和视为隐含求和。第二步使用上文的 (7)。记号 3.2 和引理 3.3 中 $E_\rtimes$ 和 $E_\rtimes^*$ 的定义给出

$$E_\rtimes^* \tilde{A}_g E_\rtimes(\hat{\alpha}_{\xi^{-1}}(b_i^{(2)})u_{\xi^{-1}\chi}) = n\delta_{\xi=\chi}\tilde{A}_g(\hat{\alpha}_{\chi^{-1}}(b_i^{(2)})).$$

因此，关于 ξ 的求和消去后，剩下

$$m(X_g \otimes E_\rtimes^* \tilde{A}_g E_\rtimes) m^*(bu_\chi) = \overline{\chi(g)}u_\chi\, \tilde{\psi}(b_i^{(1)})\, \tilde{A}_g(\hat{\alpha}_{\chi^{-1}}(b_i^{(2)})).$$

由于根据假设，A_g 在群作用 $\hat{\alpha}$ 下保持不变，这个表达式等于

$$\overline{\chi(g)}\tilde{\psi}(b_i^{(1)})\tilde{A}_g(b_i^{(2)})u_\chi = \overline{\chi(g)}\tilde{A}_g(b)u_\chi,$$

因为余乘法的首要性质之一是，对于任意线性映射 $T\colon B \to B$，都有 $\psi(b_i^{(1)})T(b_i^{(2)}) = T(b)$。

要完成证明，只需证明 $m(E_\rtimes^* A_g E_\rtimes \otimes X_g)m^*$ 可以用相同的公式表示，即

$$m(E_\rtimes^* \tilde{A}_g E_\rtimes \otimes X_g)m^*(bu_\chi) = \frac{1}{n}\overline{\chi(g)}\tilde{A}_g(b)u_\chi.$$

这可以按照上述完全相同的步骤完成，只需互换 X_g 和 $E_\rtimes^* A_g E_\rtimes$的角色。□

命题 4.5。前一定义中的映射 $X_g : B \to B$ 和 $A : B \to B$ 是量子集 $(B, \psi_\rtimes)$上的量子邻接矩阵。

证明。我们先固定某个 $g \in G$，并证明 X_g 是一个量子邻接矩阵。对于任意 $\chi, \xi \in G$，有

$$(u_\chi^\dagger \otimes u_\xi^\dagger)m^* = (m(u_\chi \otimes u_\xi))^\dagger = u_{\chi\xi}^\dagger.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned} m(X_g \otimes X_g)m^* &= \frac{1}{n^2}\sum_{\chi,\xi\in\hat{G}} \overline{\chi(g)}\,\overline{\xi(g)}\, m\left((u_\chi \otimes u_\chi^\dagger) \otimes (u_\xi \otimes u_\xi^\dagger)\right) m^* \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{\chi,\xi\in\hat{G}} \overline{\chi(g)}\,\overline{\xi(g)}\, u_{\chi\xi} \otimes u_{\chi\xi}^\dagger \\ &= X_g, \end{aligned}$$

这表明 X_g 是Schur幂等的。此外，容易看出，一个非常类似的计算给出

$$m(X_g \otimes X_h)m^* = 0$$

ˆ若 $g \neq h$。接下来需要证明 X_g 保持 $*$。对于任意 $b \in B$ 和 $\chi \in G$，首先注意到

$$u_\chi^\dagger(b^*) = \langle u_\chi, b^* \rangle_{\psi_\diamond} = \overline{\langle u_\chi^*, b \rangle_{\psi_\diamond}} = \overline{u_{\chi^{-1}}^\dagger(b)}.$$

由此得到

$$\begin{aligned} X_g(b^*) &= \frac{1}{n} \sum_{\chi \in \hat{G}} \overline{\chi(g)} u_\chi \, u_\chi^\dagger(b^*) = \frac{1}{n} \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi^{-1}(g) u_{\chi^{-1}}^* \, \overline{u_{\chi^{-1}}^\dagger(b)} \\ &= \left(\frac{1}{n} \sum_{\chi \in \hat{G}} \overline{\chi^{-1}(g)} u_{\chi^{-1}} \, u_{\chi^{-1}}^\dagger(b) \right)^* = X_g(b)^*, \end{aligned}$$

这正是所需的性质。因此， X_g 是一个量子邻接矩阵。

最后，我们证明 A 是一个量子邻接矩阵。利用 m 的（余）结合性（以及 m^* 的（余）结合性），并结合引理 4.4，可得

$$\begin{aligned} m(A \otimes A)m^* &= \frac{1}{n^2} \sum_{g,h \in G} m(m(X_g \otimes X_h)m^* \otimes m(E_\diamond^* \tilde{A}_g E_\diamond \otimes E_\diamond^* \tilde{A}_h E_\diamond))m^* \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{g \in G} m(X_g \otimes m(E_\diamond^* \tilde{A}_g E_\diamond \otimes E_\diamond^* \tilde{A}_g E_\diamond)m^*)m^*, \end{aligned}$$

因为 $m(X_g \otimes X_h)m^* = \delta_{g=h} X_g$。不难看出 $m(E_\diamond^* \otimes E_\diamond^*) = E_\diamond^* m$。此外，还有

$$(E_\diamond \otimes E_\diamond)m^* = m^* E_\diamond$$

因为对所有 $bu_\chi \in B$，它都是

$$\begin{aligned} (E_\diamond \otimes E_\diamond)m^*(bu_\chi) &= \frac{1}{n} \sum_{\xi \in \hat{G}} E_\diamond(b_i^{(1)} u_\xi) \otimes E_\diamond(\hat{\alpha}_{\xi^{-1}}(b_i^{(2)}) u_{\xi^{-1}\chi}) \\ &= n\delta_{\chi=1} b_i^{(1)} \otimes b_i^{(2)} \\ &= n\delta_{\chi=1} m^*(b) \\ &= m^* E_\diamond(bu_\chi). \end{aligned}$$

因此，我们有

$$m(E_\diamond^* \tilde{A}_g E_\diamond \otimes E_\diamond^* \tilde{A}_g E_\diamond)m^* = E_\diamond^* m(\tilde{A}_g \otimes \tilde{A}_g)m^* E_\diamond = E_\diamond^* \tilde{A}_g E_\diamond,$$

˜这里我们利用了 A_g 是一个量子邻接矩阵这一点。综上所述，˜可知 A 是Schur幂等的。由于 X_g 和映射 $E_\diamond^* A_g E_\diamond$ 都
$*$保持不变，因此可以得到 A也保持不变。□

4.1. 导出量子图的性质。本节将研究导出量子图 $A \rtimes_{\hat{\alpha}} G$ 相对于电压量子图 A的三项性质：无环、无向以及对某个 $d \geq 0$ 而言为 d-正则。这些性质的定义在文献中广为人知，参见例如 [27, 26]。如果 ψ 是非迹泛函，那么无向性的定义存在歧义，但我们将沿用迹情形中的定义。另一种定义见 [31], ，另请参见 [11]。

定义 4.6. 设 A 是量子集（B, ψ）上的量子图。我们称该量子图

(a) 若 $m(A \otimes \mathrm{Id})m^* = 0$，则称其无环；(b) 若 $A = A^*$，则称其无向，其中伴随是相对于由 ψ诱导的内积定义的；(c) 若存在某个 $d \geq 0$ 使得 $A(\mathbf{1}) = d$，则称其为 d-正则。

若电压量子图 $A = (A_g)_{g \in G}$ 具有这些性质，则称其满足相应的相同方程。

尽管 $\sum_{g \in G} A_g$ 不是量子邻接矩阵，但将该矩阵视为量子多重图的邻接矩阵是有意义的。此处我们不对这一概念作精确定义，而是请参阅 [14, 第 2] 节中的讨论。关于正则量子图的更多信息，请参阅 [25]。

下面的命题将导出量子图的性质与 $\tilde{A} \rtimes_{\hat{\alpha}}$ G 其底层电压量子图 A的性质联系起来。

命题 4.7. 设 $A = (A_g)_{g \in G}$ 是量子集$(\tilde{B}, \tilde{\psi})$ 上的一个电压量子图，其对应于有限阿贝尔群 α 的作用G。那么，导出量子图 $A \rtimes_{\hat{\alpha}} G$ 满足

(a) 若 A_1 无环，则其也无环；*(b)* 若对所有 $g \in G$, $A_g^* = A_{g^{-1}}$ 成立，则其为无向图；*(c)* 若 A 是 d-正则的，即若 $\sum_{g \in G} A_g(\mathbf{1}) = d$，则其为 d-正则图。

证明。令 $A := A \rtimes_{\hat{\alpha}} G$.

证明 (a)。根据 A 的定义，结合 m 的余结合性和 (9)，可得

$$m(A \otimes \mathrm{Id})m^* = \sum_{g \in G} m(E_{\rtimes}^* \tilde{A}_g E_{\rtimes} \otimes m(X_g \otimes \mathrm{Id})m^*)m^*.$$

利用余乘公式 (2)进行简单计算，可得对于 $b \in B$ 和 $\chi \in G$，有

$$\begin{aligned} m(X_g \otimes \mathrm{Id})m^*(bu_\chi) &= \frac{1}{n} \sum_{\zeta \in \hat{G}} X_g(b_i^{(1)} u_\zeta) \hat{\alpha}_{\zeta^{-1}}(b_i^{(2)}) u_{\zeta^{-1}\chi} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\zeta \in \hat{G}} \overline{\zeta(g)} \tilde{\psi}(b_i^{(1)}) b_i^{(2)} u_\chi = \delta_{g=1} b u_\chi. \end{aligned}$$

因此，上述表达式变为

$$m(A \otimes \mathrm{Id})m^* = m(E_{\rtimes}^* \tilde{A}_1 E_{\rtimes} \otimes \mathrm{Id})m^*.$$

再次使用公式 (2)，可类似地得到

$$\begin{aligned} m(E_{\rtimes}^{*}\tilde{A}_1 E_{\rtimes}\otimes \mathrm{Id})m^{*}(bu_\chi) &= \tilde{A}_1(b_i^{(1)})b_i^{(2)}u_\chi \\ &= \tilde{m}(\tilde{A}_1\otimes \mathrm{Id})\tilde{m}^{*}(b)u_\chi. \end{aligned}$$

该结论可直接得出。

关于 (b)。首先，容易看出 $X_g^{*}=X_{g^{-1}}$，因为

$$X_g^{*}=\frac{1}{n}\sum_{\chi\in\hat{G}}(\overline{\chi(g)}u_\chi u_\chi^{\dagger})^{*}=\frac{1}{n}\sum_{\chi\in\hat{G}}\chi(g)u_\chi u_\chi^{\dagger}=X_{g^{-1}}.$$

于是我们有

$$A^{*}=\sum_{g\in G}m(X_g^{*}\otimes E_{\rtimes}^{*}\tilde{A}_g^{*}E_{\rtimes})m^{*},$$

˜ ˜这表明，对于所有 $g\in G$，$A_g^{*}=A_{g^{-1}}$ 蕴含 $A^{*}=A$。

关于 (c)。利用引理 4.4 中的 (8)，容易看出

$$A(1)=\sum_{g\in G}\tilde{A}_g(1)=d$$

˜当 A是 d-正则时成立。 □

4.2. **与 Gross 和 Tucker 的构造的联系**。 现在让我们将电压量子图及其导出量子图的定义与 Gross 和 Tucker 的经典理论进行比较。由例 2.7 可知，顶点集为 V 的经典（简单有向）图对应于量子集 $(\mathbb{C}^V,\psi_V)$ 上的量子图。我们将看到，同理，关于 G 的平凡作用，$(\mathbb{C}^V,\psi_V)$ ˆ 上的电压量子图对应于经典电压图，而其导出量子图对应于 Gross 和 Tucker 的导出图。

经典有向（不一定简单）图 Γ 由（有限）顶点集 V 和（有限）边集 E 以及映射 $s,t:E\to V$ 构成，这些映射分别为每条边指定其起始顶点和终止顶点。若 $s(e)=t(e)$，则边 e 是一个环。若 $s(e)=v\in V$ 且 $t(e)=u\in V$，我们可以直观地写作$e:v\to u$。下面回顾 Gross 和 Tucker 给出的以下定义。

定义 4.8 ([15, 第 2.1 节1])。 电压图 是一个二元组 (Γ,λ)，由一个（不一定是简单的）有限有向图 Γ（其顶点集为 V、边集为 E）以及一个标记 $\lambda\colon E\to G$ 组成，该标记将 Γ 的边映射到有限群G的元素。

(Γ,λ) 的（右）导出图 Γ^{λ} 的顶点集为 $V\times G$，边集为 $E\times G$。若 $e\in E$ 是 Γ 中一条从 u 指向 v 的边，且 $g\in G$ 是一个群元素，则边 (e,g) 从 (u,g) 指向 $(v,g\lambda(e))$，属于 Γ^{λ}，即

$$e:u\to v \text{ in } \Gamma \text{ and } g\in G \quad\Longrightarrow\quad (e,g):(u,g)\to(v,g\lambda(e)) \text{ in } \Gamma^{\lambda}.$$

在上述定义中，电压图和导出图都不必是简单图。不过，我们对电压量子图的定义经过专门设计，使导出量子图始终是简单的，也就是说，导出量子图由单个量子邻接矩阵给出。这样做是为了减少技术性复杂问题，因为人们通常更关注简单量子图。然而，Gross 和 Tucker 的构造并未作出类似的安排。因此，我们只能期望在导出图是简单图的情况下

恢复他们的构造。下一个命题将刻画何时满足这一条件。

引理 4.9。 电压图 (Γ, λ) 的导出图 Γ^λ 是简单图，当且仅当对于任意两个顶点 u、$v \in V$ 及群元素 $g \in G$，至多有一条边e： $u \to v$ 由 g标记。

证明。 假设 Γ^λ 不是简单图，并设 (e, g)， (f, h) 是 Γ^λ中具有相同起始顶点和相同终止顶点的两条边。不难验证，这意味着 $g = h$，并且 e 和 f 在 Γ 中也具有相同的起始顶点和相同的终止顶点。此外，它们必定由相同的群元素标记。因此，逆否命题成立。□

如果电压图满足命题 4.9 的假设，我们称其为预简单的 。

命题 4.10。 设 G 为有限阿贝尔群，且 $(\mathbb{C}^V, \psi_V)$ 为某个有限集 V对应的例 *2.7* 中的量子集。

给定一个预简单电压图(Γ, λ)，其定义在 V 上，标记为 $\lambda: E \to G$。令$\tilde{A}_g : \mathbb{C}^V \to \mathbb{C}^V$ 为 Γ 的（简单有向）子图的邻接矩阵，该子图包含 Γ 中所有标记为 g 的边。那么映射

$$(\Gamma, \lambda) \mapsto \tilde{A} = (\tilde{A}_g)_{g \in G}$$

是在 V 上的 G-标记预简单电压图与关于$(\mathbb{C}^V, \psi_V)$上的平凡作用的$(\mathbb{C}^V, \psi_V)$ 上的电压量子图之间的一一对应。

证明。 如例 4.2 所示，关于˜平凡作用的电压量子图不过是某个量子集上的量子邻接矩阵族 $(A_g)_{g \in G}$。根据例 2.7，$(\mathbb{C}^V, \psi_V)$ 上的量子邻接矩阵与 V 上的（简单有向）图的邻接矩阵相同。因此，显然每个预简单经典电压图都可以解释为陈述中所述的、定义在 $(\mathbb{C}^V, \psi_V)$ 上的电压量子图，反之亦然。□

引理 4.11. 设$(\mathbb{C}^V, \psi_V)$ 是例 *2.7* 中的量子集。此外，设G 是一个有限阿贝尔群，其在$\mathrm{triv} : \hat{}G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^V, \psi_V)$上的作用为平凡作用。以下结论成立：

(a) 将 $\mathbb{C}^V \rtimes_{\mathrm{triv}} \hat{}G$ 的生成元映到 $C(V \times G)$ 中的如下赋值

$$e_v \mapsto \sum_{g \in G} e_{v,g}, \qquad u_\chi \mapsto \sum_{v \in V, g \in G} \chi(g) e_{v,g}$$

可延拓为一个同构

$$(\mathbb{C}^V, \psi_V) \rtimes_{\mathrm{triv}} \hat{G} \cong (\mathbb{C}^{V \times G}, \psi_{V \times G}),$$

其中，右侧的量子集如例 *2.7* 中那样与经典有限集 $V \times G$ 相对应，并且我们分别用 e_v，$e_{v,g}$ 表示 $C(V)$ 和 $C(V \times G)$中的示性函数。

(b) 定义 *4.1* 中的量子图 X_g： $B \to B$，其 $g \in G$ 对应于 $V \times G$ 上的经典图，该图包含所有形式为以下形式的边

$$(v, h) \to (w, hg) \qquad \textit{for } v, w \in V \textit{ and } h \in G.$$

(c) 定义 *4.1* 中的量子图 $E_{\rtimes}^{*}A_gE_{\rtimes}$： $B\to B$ 对应于 $V\times G$ 上的经典图，该图包含所有形式为以下形式的边

$$(v,h)\to(w,k)\qquad for\ v\xrightarrow{\tilde{A}_g}w\in V\ \ and\ h,k\in G,$$

其中 $v\xrightarrow{A_g}w$ 表示在与邻接矩阵 A_g对应的经典图中，存在一条从 v 到 w 的边。

(d) 设 A_1、A_2 是两个量子邻接矩阵，按照例 *2.7* 的意义，它们分别对应于定义在 $V\times G$ 上的经典图 Γ_1、Γ_2。那么，映射

$$A_3:=m(A_1\otimes A_2)m^*$$

仍是一个量子邻接矩阵，并且它对应于经典图

$$\Gamma_3:=\Gamma_1\cap\Gamma_2,$$

该图是 Γ_1 与 Γ_2的交集，即 Γ_3 的顶点集为 $V\times G$，其边集是 Γ_1 与 Γ_2的边集的交集。

证明。 对于第一个结论，只需回顾例 3.5 中的结果：

$$(\mathbb{C}^V,\psi_V)\rtimes_{\mathrm{triv}}\hat{G}\cong(\mathbb{C}^V\otimes C(G),\psi_V\otimes\psi_G),$$

其中同构由下式给出

$$e_vu_\chi\mapsto\sum_{g\in G}\chi(g)e_{v,g}.$$

对于 (b)，我们根据上述同构将 u_χ 与 $\sum_{g\in G}\chi(g)e_{v,g}$ 等同。于是，对所有 $\chi\in G,v\in V$和 $h\in G$，有

$$u_\chi^\dagger(e_{v,h})=\langle u_\chi,e_{v,h}\rangle_{\psi_{V\otimes G}}=\left\langle\sum_{w\in V,k\in G}\chi(k)e_{w,k},e_{v,h}\right\rangle_{\psi_{V\otimes G}}=\overline{\chi(h)}.$$

由此可得

$$X_g(e_{v,h})=\frac{1}{n}\sum_{\chi\in\hat{G}}\overline{\chi(g)}u_\chi\,u_\chi^\dagger(e_{v,h})=\frac{1}{n}\sum_{\chi\in\hat{G}}\sum_{w\in V,k\in G}\overline{\chi(gh)}\chi(k)e_{w,k}=\sum_{w\in V}e_{w,hg},$$

其中我们在最后一步用到：若 $k=hg$，则 $\sum_{\chi\in\hat{}G}\chi(h^{-1}g^{-1}k)=n$，否则为 0。该结论直接由此得出。

接下来，我们证明 (3)。只需简短的计算即可验证

$$E_{\rtimes}(e_v\otimes e_h)=e_v,\quad\text{and}\quad E_{\rtimes}^{*}(e_v)=e_v\otimes1_{C(G)}=\sum_{k\in G}e_v\otimes e_k,$$

其中 $E_{\rtimes}$ 和 $E_{\rtimes}^{*}$ 如记号 3.2 中所述。由此可得

$$E_{\rtimes}^{*}\tilde{A}_gE_{\rtimes}(e_v\otimes e_h)=\tilde{A}_g(e_v)\otimes1_{C(G)}=\sum_{w\sim_{\tilde{A}_g}v}\sum_{k\in G}e_w\otimes e_k,$$

至此，证明完毕。

最后，(4) 可通过简单计算得出。事实上，设 A_1，A_2 是量子集 $(\mathbb{C}^V, \psi_V)$ 上分别对应经典图 Γ_1，Γ_2 的量子邻接矩阵。那么，对于任意 $v \in V$，都有

$$A_3(e_v) = m(A_1 \otimes A_2)m^*(e_v) = A_1(e_v)A_2(e_v) = \sum_{w \sim_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2} v} e_w,$$

因为根据例 2.4，$\mathbb{C}^V$ 上的余乘法定义为 $m^*(e_v) = e_v \otimes e_v$。 □

现在，我们可以看到，我们的导出量子图构造推广了由预简单电压图得到的经典构造。

命题 4.12。在命题 *4.10* 的情形下，对于预简单˜ ˜电压图 (Γ, λ) 及其关联的电压量子图 $A = (A_g)_{g \in G}$，有如下导出图的对应关系：

$$\Gamma^\lambda = \tilde{A} \rtimes_{\mathrm{triv}} \hat{G}$$

其中，Γ^λ 是 *Gross* 和 *Tucker* 的导出图，$\tilde{A} \rtimes_{\mathrm{triv}} \hat{} G$ 是定义 *4.1* 中的导出量子图；根据例 *2.7*，我们将$V \times G$ 上的经典图与 $(\mathbb{C}^V, \psi_V) \rtimes_{\mathrm{triv}} \hat{} G$ 上的量子图对应起来。

˜ ˆ证明。显然，导出量子图 $A \rtimes_{\mathrm{triv}} G$ 定义在量子集 $(\mathbb{C}^V, \psi_V) \rtimes_{\mathrm{triv}} \hat{} G$，上。由引理 4.11 (a)，该量子集与 $(C(V \times G)\ \psi_{V \times G})$ 同构。因此，导出量子图对应于集合 $V \times G$ 上的某个经典图（依据例 2.7）。接下来只需验证该经典图恰好是 Gross 和 Tucker 的导出图 Γ^λ。

回顾定义 4.1，

$$\tilde{A} \rtimes_{\mathrm{triv}} \hat{G} = \sum_{g \in G} m \left(X_g \otimes E_{\rtimes}^* \tilde{A}_g E_{\rtimes} \right) m^*.$$

根据引理 4.11，对于任意固定的 $g \in G$，映射

$$m \left(X_g \otimes E_{\rtimes}^* \tilde{A}_g E_{\rtimes} \right) m^*$$

对应于 $V \times G$ 上的经典图，其中包含所有形如

$$(v, h) \to (w, hg) \qquad \text{for } v \xrightarrow{\tilde{A}_g} w \in V \text{ and } h \in G.$$

˜ ˆ 由此立即可知，导出量子图 $A \rtimes_{\mathrm{triv}} G$ 对应于 $V \times G$ 上的经典图，其中包含所有形如

$$(v, h) \to (w, h\lambda(e)) \qquad \text{for } e : v \to w \in \Gamma \text{ and } h \in G,$$

而这正是 Gross 和 Tucker 的导出图 Γ^λ。 □

最后，让我们用一个具体例子来说明前面的命题。

例 4.13. 考虑图 Γ，它有一个顶点 v 和一个以v为基点的环 e。我们用群 $\mathbb{Z}_3 = \{0_{\mathbb{Z}_3}, 1_{\mathbb{Z}_3}, 2_{\mathbb{Z}_3}\}$的生成元 $1_{\mathbb{Z}_3}$ 来标记该环。因此，我们得到一个电压图 (Γ, λ)，其中 $\lambda(e) = 1_{\mathbb{Z}_3}$。然后，导出图 Γ^λ有三个顶点 v_0, v_1, v_2，对应于 $\mathbb{Z}_3$ 的元素，以及三条边，如图 2 所示。

如上所述，具有 n 个顶点的经典图对应于量子集 $(\mathbb{C}^n, \psi_n)$ 上的量子图。电压图 (Γ, λ) 与 $(\mathbb{C}, \psi_1)$ 上的电压量子图相对应，该电压量子图由一族 $(A_g)_{g \in \mathbb{Z}_3}$ 量子

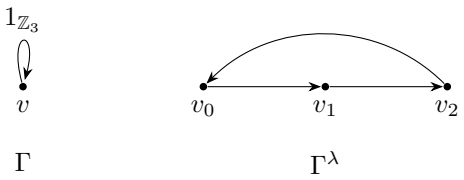


图 2。电压图 $(\Gamma,\ \lambda)$ 及其导出图 Γ^λ。

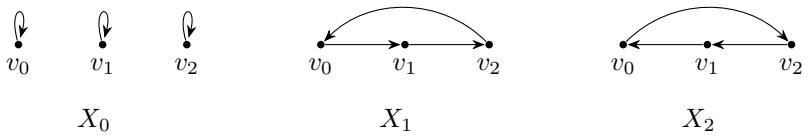
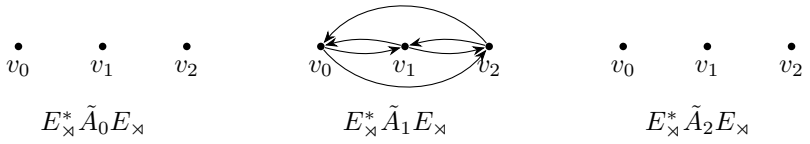


图 3。与邻接矩阵 X_g 对应的图。



˜图 4。与邻接矩阵 $E_{\rtimes}^* A_g E_{\rtimes}$ 对应的图。

邻接矩阵构成，定义在 $(\mathbb{C},\ \psi_1)$ 上。由于 Γ 只有一条标记为 $1_{\mathbb{Z}_3}$ 的边，因此不难验证 $(\Gamma,\ \lambda)$ 对应于由下式给出的一族 $A = (A_g)_{g\in\mathbb{Z}_3}$

$$\tilde{A}_{0_{\mathbb{Z}_3}} = 0, \quad \tilde{A}_{1_{\mathbb{Z}_3}} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}, \quad \tilde{A}_{2_{\mathbb{Z}_3}} = 0.$$

˜一般来说，我们需要检查 $(A_g)_{g\in\mathbb{Z}_3}$ 是否满足定义 4.1 中的条件，才能将其视为电压量子图。不过，在本例中，我们将 $(A_g)_{g\in\mathbb{Z}_3}$ˆ 视为相对于 $\mathbb{Z}_3$ 在 $\mathbb{C}$ 上的平凡作用 triv 而言的电压量子图；因此，无需进行检查（见例 4.2）。

什么是导出量子图？首先，回顾一下 $\tilde{A} \rtimes_{\mathrm{triv}} \hat{\mathbb{Z}}_3$ 导出量子图定义在交叉积量子集上

$$(\mathbb{C}, \psi_1) \rtimes_{\mathrm{triv}} \hat{\mathbb{Z}}_3.$$

根据引理 4.11 (a)，这个量子集同构于 $(\mathbb{C}^3, \psi_3)$，而 $(\mathbb{C}^3, \psi_3)$ 上的量子图对应于具有三个顶点的经典图。

接下来，根据定义 4.1，导出量子图 $A :=$ $\tilde{A} \rtimes_{\mathrm{triv}}$ ˆ $\mathbb{Z}_3 : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$在 $(\mathbb{C}^3, \psi_3)$ 上由公式给出

$$A = \sum_{g\in\mathbb{Z}_3} m(X_g \otimes E_{\rtimes}^* \tilde{A}_g E_{\rtimes}) m^*.$$

˜根据引理 4.11 (b) 和 (c)，量子图 X_g 和 $E_{\rtimes}^* A_g E_{\rtimes}$ 分别对应于图 3 和图 4 中定义在集合 $\{v_0, v_1, v_2\}$ 上的经典图。根据引理 4.11(d)，该项

$$m(X_g \otimes E_{\rtimes}^* \tilde{A}_g E_{\rtimes}) m^*$$

返回由图 3 和图 4 中的图取交集所得的经典图的邻接矩阵。因此，只有 $g = 1_{\mathbb{Z}_3}$ 对应的项对导出量子图 A有贡献，我们有

$$A = m(X_1 \otimes E_{\rtimes}^* \tilde{A}_1 E_{\rtimes}) m^*.$$

不难看出，这个图恰好是图 2 中的导出图 Γ^{λ} 。

5. 量子同构

在例 3.5 中，我们讨论了关于平凡作用的交叉积量子集这一特殊情形。在这种情况下，存在一个量子集的同构

$$(\tilde{B}, \tilde{\psi}) \rtimes_{\mathrm{triv}} \hat{G} \cong (\tilde{B}, \tilde{\psi}) \otimes (C(G), \psi_G)$$

介于交叉积量子集与张量积量子集之间。

现在我们将证明，任意 交叉积量子集都是量子同构 c 到一个张量积量子集，也就是说，

$$(\tilde{B}, \tilde{\psi}) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G} \cong_q (\tilde{B}, \tilde{\psi}) \otimes (C(G), \psi_G).$$

此外，我们将证明，电压量子 图 $A = (A_g)_{g \in G}$ 的导出量子图 $A \rtimes_{\hat{\alpha}} G$ 与关于平凡作用的导出量子图 $A \rtimes_{\mathrm{triv}} G$ 量子同构，也就是说，

$$\tilde{A} \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G} \cong_q \tilde{A} \rtimes_{\mathrm{triv}} \hat{G}.$$

请注意，右侧的量子图定义在张量积 量子集 $(B, \psi) \otimes (C(G)\ \psi_G)$ 上。

因此，在推论 5.3 中，我们得到了一种为许多经典图构造量子同构量子图的方法。具体如何实现? 假设经典图 A 可以写作 $A \rtimes_{\mathrm{triv}} G$ ，其中某个电压量子图为 $A = (A_g)_{g \in G}$。若 A 在 G 的非平凡作用 $\hat{\alpha}$ 下保持不变，则 A 与导出量子图 $A \rtimes_{\hat{\alpha}} G$ 量子同构，而后者通常是非经典量子图。

在陈述量子集的量子同构结果之前，我们先回顾一些记号。对于一个（有限阿贝尔）群 G，C*-代数 $C(G)$ 有两个规范的基：第一，基 $(e_g)_{g \in G}$ 由示性函数给出；第二，基 $(\tilde{u}_\chi)_{\chi \in \hat{G}}$ 由满足 $\tilde{u}_\chi(g) = \chi(g)$（对所有 $g \in G$）的函数给出。当赋予泛函 ψ_G 时，代数$C(G)$ 成为一个量子集，等价地，

$$\psi_G(e_g) = 1 \text{ for all } g \in G, \quad \text{or} \quad \psi_G(\tilde{u}_\chi) = n\delta_{\chi=1} \text{ for all } \chi \in \hat{G},$$

其中 $n = |G| = |\hat{G}|$ 和 $1 \in \hat{G}$ 是平凡特征，另见例 2.4。此外，泛函 ψ_G 在 $C(G)$上诱导出一个内积，使后者成为一个希尔伯特空间，记作 $L^2(G)$。 $B(L^2(G))$ 中的元素可与 G阶矩阵对应，而这些矩阵的一组基由标准矩阵单位 $E_{\xi,\zeta}$ （其中 $\xi, \zeta \in G$）给出。为使记号更易读，当将 e_χ视为希尔伯特空间 $L^2(G)$中的元素时，我们将其记作 $\tilde{u}_\chi \in C(G)$。不过，我们提醒读者，对于所有 $\chi, \xi \in G$，都有 $\langle e_\chi, e_\xi \rangle = \psi_G(\tilde{u}_\chi^* \tilde{u}_\xi) = n\delta_{\chi=\xi}$。

命题 5.1. 设 $\hat{\alpha} : \hat{G} \to \mathrm{Aut}(\tilde{B}, \tilde{\psi})$ 是有限阿贝尔群 G 的对偶群在量子集 $(\tilde{B}, \tilde{\psi})$上的一个作用，并设 $\mathcal{H} := L^2(G)$。那么，映射

$$\rho : \begin{cases} \tilde{B} \otimes C(G) \to \left(\tilde{B} \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}\right) \otimes B(\mathcal{H}), \\ \qquad b \otimes \tilde{u}_\chi \mapsto \sum_{\zeta \in \hat{G}} u_\zeta b u_\zeta^* u_\chi \otimes E_{\zeta, \chi^{-1}\zeta} \end{cases}$$

是一个量子同构

$$(\tilde{B}, \tilde{\psi}) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G} \cong_q (\tilde{B}, \tilde{\psi}) \otimes (C(G), \psi_G).$$

证明. 为证明 ρ 是 $*$-同态，我们通过张量积的泛性质来构造它。设$(\hat{u}_\chi)_{\chi \in \hat{G}}$ 是$\hat{G}$在$\mathcal{H}$ 上的自然表示，由下式给出

$$\hat{u}_\chi e_\xi = e_{\chi\xi} \quad \text{for all } \chi, \xi \in \hat{G},$$

并考虑这些映射

$$\rho_1 : \tilde{B} \to \left(\tilde{B} \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}\right) \otimes B(\mathcal{H}), \qquad b \mapsto \sum_{\chi \in \hat{G}} u_\chi b u_\chi^* \otimes E_{\chi,\chi},$$

$$\rho_2 : C(G) \to \left(\tilde{B} \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}\right) \otimes B(\mathcal{H}), \qquad \tilde{u}_\chi \mapsto u_\chi \otimes \hat{u}_\chi.$$

不难看出， ρ_1 与 ρ_2 是单位 $*$-同态。此外，˜ ˆ它们具有交换值域，因为对所有 $b \in B$ 与 $\chi \in G$,

$$\begin{aligned} \rho_2(\tilde{u}_\chi)\rho_1(b)\rho_2(\tilde{u}_\chi)^* &= \sum_{\xi \in \hat{G}} u_\chi u_\xi b u_\xi^* u_\chi^* \otimes \hat{u}_\chi E_{\xi,\xi} \hat{u}_\chi^* \\ &= \sum_{\zeta \in \hat{G}} u_\zeta b u_\zeta^* \otimes E_{\zeta,\zeta} = \rho_1(b). \end{aligned}$$

因此，C*-代数的张量积的泛性质给出一个唯一的单位 $*$-同态

$$\rho : \tilde{B} \otimes C(G) \to \left(\tilde{B} \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}\right) \otimes B(\mathcal{H}),$$

使得 $\rho|_{\tilde{B}} = \rho_1$ 和 $\rho|_{C(G)} = \rho_2$。经过简短计算可确认，这个 $*$-同态就是陈述中给出的映射 ρ。

剩下要证明的是，与之相关的映射

$$p : L^2(\tilde{B} \otimes C(G)) \otimes \mathcal{H} \to L^2(\tilde{B} \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}) \otimes \mathcal{H}$$

根据定义 2.8 得到的映射是酉的。首先，我们来证明 p 的伴随为

$$p^* : \begin{cases} L^2(\tilde{B} \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}) \otimes \mathcal{H} \to L^2(\tilde{B} \otimes C(G)) \otimes \mathcal{H}, \\ \qquad b_\chi u_\chi \otimes e_\xi \mapsto u_\xi^* b_\chi u_\xi \otimes \tilde{u}_\chi \otimes e_{\chi^{-1}\xi}. \end{cases} \tag{10}$$

˜ ˆ确实，对于所有 $c \in B$ 和 $\alpha, \beta \in G$，我们有

$$p(c \otimes \tilde{u}_\alpha \otimes e_\beta) = \sum_{\gamma \in \hat{G}} u_\gamma c u_\gamma^* u_\alpha \otimes E_{\gamma, \alpha^{-1}\gamma} e_\beta = u_{\alpha\beta} c u_\beta^* \otimes e_{\alpha\beta}.$$

~ ^ 因此，对于所有 $b_\chi \in B$ 和 $\chi,\xi \in G$,

$$\begin{aligned}\langle b_\chi u_\chi \otimes e_\xi, p(c \otimes \tilde{u}_\alpha \otimes e_\beta)\rangle_{\psi_\rtimes \otimes \psi_G} &= \langle b_\chi u_\chi \otimes e_\xi, u_{\alpha\beta} c u_\beta^* \otimes e_{\alpha\beta}\rangle_{\psi_\rtimes \otimes \psi_G} \\ &= n\delta_{\xi=\alpha\beta}\langle b_\chi u_\chi, u_{\alpha\beta} c u_\beta^*\rangle_{\psi_\rtimes}.\end{aligned}$$

将公式 (1) 用于 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\psi_\rtimes}$，前面的表达式变为

$$\langle b_\chi u_\chi \otimes e_\xi, p(c \otimes \tilde{u}_\alpha \otimes e_\beta)\rangle_{\psi_\rtimes \otimes \psi_G} = n^2 \delta_{\xi=\alpha\beta}\delta_{\chi=\alpha}\langle b_\chi, \hat{\alpha}_{\alpha\beta}(c)\rangle_{\tilde{\psi}}. \tag{11}$$

另一方面，对于 (10) 中的映射 p^*，我们计算得

$$\begin{aligned}\langle p^*(b_\chi u_\chi \otimes e_\xi), c \otimes \tilde{u}_\alpha \otimes e_\beta\rangle_{\tilde{\psi}\otimes\psi_G\otimes\psi_G} &= \langle u_\xi^* b_\chi u_\xi \otimes \tilde{u}_\chi \otimes e_{\chi^{-1}\xi}, c \otimes \tilde{u}_\alpha \otimes e_\beta\rangle_{\tilde{\psi}\otimes\psi_G\otimes\psi_G} \\ &= \langle u_\xi^* b_\chi u_\xi, c\rangle_{\tilde{\psi}}\langle \tilde{u}_\chi, \tilde{u}_\alpha\rangle_{\psi_G}\langle e_{\chi^{-1}\xi}, e_\beta\rangle_{\psi_G} \\ &= n^2\delta_{\chi=\alpha}\delta_{\chi^{-1}\xi=\beta}\langle u_\xi^* b_\chi u_\xi, c\rangle_{\tilde{\psi}}.\end{aligned}$$

~ ~利用 $\psi \circ \hat{\alpha}_\xi = \psi$，不难看出

$$\langle u_\xi^* b_\chi u_\xi, c\rangle_{\tilde{\psi}} = \tilde{\psi}(u_\xi^* b_\chi^* u_\xi c) = \tilde{\psi}(b_\chi^* u_\xi c u_\xi^*) = \langle b_\chi, \hat{\alpha}_\xi(c)\rangle_{\tilde{\psi}}.$$

由于 $\chi^{-1}\xi = \beta$ 和 $\chi = \alpha$ 推出 $\xi = \alpha\beta$，我们得到

$$\langle p^*(b_\chi u_\chi \otimes e_\xi), c \otimes \tilde{u}_\alpha \otimes e_\beta\rangle_{\tilde{\psi}\otimes\psi_G\otimes\psi_G} = n^2\delta_{\chi=\alpha}\delta_{\xi=\alpha\beta}\langle b_\chi, \hat{\alpha}_{\alpha\beta}(c)\rangle_{\tilde{\psi}}. \tag{12}$$

这与 (11) 中的表达式相同；因此，p^* 确实是映射 p的伴随。

最后，我们可以证明 p 是酉映射了。只需证明 ~^ ^$pp^* = \mathrm{Id}$。为此，令 $b_\chi u_\chi \in B \rtimes_{\hat{\alpha}} G$ 和 $\xi \in G$，并注意到

$$\begin{aligned}pp^*(b_\chi u_\chi \otimes e_\xi) &= p\left(u_\xi^* b_\chi u_\xi \otimes \tilde{u}_\chi \otimes e_{\chi^{-1}\xi}\right) \\ &= \sum_{\gamma\in\hat{G}} u_\gamma u_\xi^* b_\chi u_\xi u_\gamma^* u_\chi \otimes E_{\gamma,\chi^{-1}\gamma} e_{\chi^{-1}\xi} \\ &= b_\chi u_\chi \otimes e_\xi.\end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

定理 5.2。 设 $(\tilde{B}, \tilde{\psi})$、$\hat{\alpha} : \hat{G} \to \mathrm{Aut}(\tilde{B}, \tilde{\psi})$ 以及 $(\tilde{B} \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}, \psi_\rtimes)$ 如上所述。~ ~ ~ ~此外，设 $A = (A_g)_{g\in G}$ 是关于^作用 $\hat{\alpha}$ 的 G 上的电压量子图。那么我们有一个量子同构

$$\tilde{A} \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G} \cong_q \tilde{A} \rtimes_{\mathrm{triv}} G$$

该同构由命题 *5.1* 中的映射 $\rho\colon \tilde{B} \otimes C(G) \to (\tilde{B} \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}) \otimes B(\mathcal{H})$ 给出。

证明。 我们需要证明

$$(\tilde{A} \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G})\rho = \rho(\tilde{A} \rtimes_{\mathrm{triv}} \hat{G})$$

成立，其中左侧按记号 2.10 的方式理解。首先，回顾

$$\begin{aligned}\tilde{A} \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G} &= \sum_{g\in G} m_\rtimes (X_g^\rtimes \otimes E_\rtimes^* \tilde{A}_g E_\rtimes) m_\rtimes^* \\ \tilde{A} \rtimes_{\mathrm{triv}} \hat{G} &= \sum_{g\in G} m_\otimes (X_g^\otimes \otimes E_\otimes^* \tilde{A}_g E_\otimes) m_\otimes^*,\end{aligned}$$

这里，我们分别用上标和下标 $\rtimes$ 和 $\otimes$ 来区分交叉积量子集 $\tilde{B} \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}$ 和 $\tilde{B} \otimes C(G) \cong \tilde{B} \rtimes_{\mathrm{triv}} \hat{G}$ 上的结构映射 m, E, X_g。我们将证明，对于任意固定的 $g \in G$，

$$(m_{\rtimes}(X_g^{\rtimes} \otimes E_{\rtimes}^* \tilde{A}_g E_{\rtimes}) m_{\rtimes}^*)\rho = \rho(m_{\otimes}(X_g^{\otimes} \otimes E_{\otimes}^* \tilde{A}_g E_{\otimes}) m_{\otimes}^*)$$

成立。由命题 2.11 可知以下等式

$$\rho m_{\otimes} = m_{\rtimes}(\rho \otimes \rho) \quad \text{and} \quad m_{\rtimes}^* \rho = (\rho \otimes \rho) m_{\otimes}^*.$$

因此，我们只需证明

$$X_g^{\rtimes} \rho = \rho X_g^{\otimes} \quad \text{and} \quad E_{\rtimes}^* \tilde{A}_g E_{\rtimes} \rho = \rho(E_{\otimes}^* \tilde{A}_g E_{\otimes}).$$

为了证明第一个等式，我们需要考虑 $b \in B$ 和 $\xi \in G$，

$$X_g^{\rtimes} \rho(b \otimes \tilde{u}_\xi) = \frac{1}{n} \sum_{\chi \in \hat{G}} \overline{\chi(g)} u_\chi \psi_{\rtimes}(u_\chi^* \rho(b \otimes \tilde{u}_\xi)).$$

对于固定的 $\chi \in G$，最后一个因子可计算为

$$\begin{aligned} \psi_{\rtimes}(u_\chi^* \rho(b \otimes \tilde{u}_\xi)) &= \sum_{\zeta \in \hat{G}} \psi_{\rtimes}(u_\chi^* u_\zeta b u_\zeta^* u_\xi) E_{\zeta, \chi^{-1}\zeta} \\ &= \sum_{\zeta \in \hat{G}} n \delta_{\chi=\xi} \tilde{\psi}(b) E_{\zeta, \chi^{-1}\zeta} \\ &= n \delta_{\chi=\xi} \tilde{\psi}(b) \hat{u}_\chi, \end{aligned}$$

其中，$u_\chi \in B(L^2(G))$ 是命题 5.1 的证明中给出的算子，对所有 $\zeta \in G$ 均有 $u_\chi e_\zeta = e_{\chi\zeta}$。由此可得

$$X_g^{\rtimes} \rho(b \otimes \tilde{u}_\xi) = \overline{\xi(g)} \tilde{\psi}(b) u_\xi \otimes \hat{u}_\xi. \tag{13}$$

另一方面，我们计算得

$$\begin{aligned} \rho X_g^{\otimes}(b \otimes \tilde{u}_\xi) &= \rho \left(\frac{1}{n} \sum_{\chi \in \hat{G}} \overline{\chi(g)} (1 \otimes \tilde{u}_\chi)(\tilde{\psi} \otimes \psi_G)(b \otimes \tilde{u}_\chi^* \tilde{u}_\xi) \right) \\ &= \rho \left(\overline{\xi(g)} \tilde{\psi}(b)(1 \otimes \tilde{u}_\xi) \right) \\ &= \overline{\xi(g)} \tilde{\psi}(b) u_\xi \otimes \hat{u}_\xi. \end{aligned} \tag{14}$$

比较式（13）和（14）即可得出所需的第一个等式。

接下来只需证明第二个等式。我们再次考虑固定的 $b \in B$ 和 $\xi \in G$。一方面，我们有

$$\begin{aligned} E_{\rtimes}^* \tilde{A}_g E_{\rtimes} \rho(b \otimes \tilde{u}_\xi) &= \sum_{\zeta \in \hat{G}} E_{\rtimes}^* \tilde{A}_g E_{\rtimes}(u_\zeta b u_\zeta^* u_\xi \otimes E_{\zeta, \xi^{-1}\zeta}) \\ &= n \delta_{\xi=1} \sum_{\zeta \in \hat{G}} \tilde{A}_g(u_\zeta b u_\zeta^*) \otimes E_{\zeta,\zeta} \\ &= n \delta_{\xi=1} \sum_{\zeta \in \hat{G}} u_\zeta \tilde{A}_g(b) u_\zeta^* \otimes E_{\zeta,\zeta}, \end{aligned} \tag{15}$$

˜（其中最后一步使用了 A_g 与作用ˆα可交换这一事实），另一方面

$$\begin{aligned}\rho(E_{\otimes}^{*}\tilde{A}_g E_{\otimes})(b\otimes\tilde{u}_\xi) &= \rho\left(n\delta_{\xi=1}\tilde{A}_g(b)\otimes\tilde{u}_1\right)\\ &= n\delta_{\xi=1}\sum_{\zeta\in\hat{G}} u_\zeta\tilde{A}_g(b)u_\zeta^{*}\otimes E_{\zeta,\zeta}.\end{aligned}\tag{16}$$

比较式 (15) 和 (16) 即完成证明。 □

˜ ˆ 如果定理 5.2 中的导出量子图 $A\rtimes_{\mathrm{triv}} G$ 是经典图，那么前一定理就给出了一种方法，可为给定的经典图构造量子版本，即与原经典图量子同构的量子图。

推论 5.3。假设 Γ^{λ} 是定义在顶点集 V 上的电压图(Γ,λ) 相对于有限阿贝尔群 G 的经典导出图。那么对于对偶群在电压图上的任意ˆ作用 ˆα : $G\to\mathrm{Aut}(\Gamma,\lambda)$ ，我们都能得到一个量子同构

$$\Gamma^{\lambda}\cong_q \Gamma\rtimes_{\hat{\alpha}}\hat{G},$$

其中，我们将右侧的 Γ 解释为定义在 $(\mathbb{C}^V,\psi_V)$ 上的电压量子图，如例 *4.2* 所示。

这里，所谓 ˆG 在 (Γ,λ) 上的作用，是指一个作用 ˆ$\alpha:\hat{}G\to\mathrm{Aut}(V)$ ，它ˆ使 Γ 中的 χ- 着色边集在所有 $\chi\in G$ 下保持不变。

6. 量子 Gross–Tucker 定理

哪些量子图是定义 4.1 中电压量子图的导出量子图？在经典情形中，Gross 和 Tucker 证明，每当一个图 Γ 容许有限群 G 的自由作用 α : $G\to$Aut(Γ) 时，则存在商图 Γ/G 的一个合适的 G-标记 λ ，使得

$$\Gamma\cong(\Gamma/G)^{\lambda},$$

即 Γ 是电压图 $(\Gamma/G,\lambda)$ 的导出图 [15, 定理 2.2.2]。在本节中，我们证明该结果的一个量子版本。

因此，设定如下：给定量子集 (B,ψ) 上的一个量子图 $A:B\to B$，以及有限阿贝尔群 G 在量子图 A 上的一个作用 α : $G\to$ Aut(A)。这意味着 α 是 G 在 C*-代数 B 上的一个作用，它满足

$$\psi=\psi\alpha_g \quad\text{and}\quad \alpha_g A=A\alpha_g$$

对所有 $g\in G$。

Gross 和 Tucker 要求图上的作用是自由的，而我们假设作用 α 满足 Landstad 定理的假设，其中包括命题 3.7 中量子集版本的附加条件。因此，我们还要求存在对偶群 G 在 B 内的酉表示 $(u_\chi)_{\chi\in\hat{G}}\subset B$ ，使得

$$\alpha_g(u_\chi)=\chi(g)u_\chi \quad\text{and}\quad \psi=\psi\mathrm{Ad}(u_\chi)$$

ˆ 对所有 $g \in G$ 和 $\chi \in G$ 均成立。此外，量子图 A 也必须在 Ad(u_χ) 下保持不变，即我们还要求

$$\mathrm{Ad}(u_\chi)A = A\mathrm{Ad}(u_\chi). \tag{17}$$

那么，根据命题 3.7，量子集 (B,ψ) 是一个交叉积量子集

$$(B,\psi) = (B^\alpha, \tilde{\psi}) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}.$$

特别地，

- $B = B^\alpha \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}$，
- 每个 B 的元素都可以唯一地写成 $b = \sum_{\chi\in\hat{G}} b_\chi u_\chi$，其中$b_\chi \in B^\alpha$、
- ˜ ˆ
- $\psi(b_\chi u_\chi) = \delta_{\chi=1}\psi(b_\chi) = n\delta_{\chi=1}\psi(b_\chi)$ 对所有满足$n = |G|$的 $\chi \in G$ 和 $b_\chi \in B^\alpha$ 都成立。

注意，我们始终沿用记号 3.2 中关于交叉积˜量子集的记号，其中以 B^α 代替 B ；同时也沿用 Landstad 定理（定理 3.6 ）和命题 3.7 中的记号。

定理 6.1. 设 $A: B \to B$ 是量子集 (B,ψ) 上的量子图，且 $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(A)$ 是有限阿贝尔群 G 在 A 上的一个作用，它满足量子集的 *Landstad* 定理（命题 *3.7*）的假设以及附加假设 (17)。则以下结论成立：

˜ ˜*(a)* 族 $A{:=}(A_g)_{g\in G}$，其中

$$\tilde{A}_g = m^*(X_g \otimes A)m|_{B^\alpha}$$

˜是关于群作用 ˆα 的电压量子图，定义在 (B^α,ψ) 上，其中 $X_g = \frac{1}{n}\sum_{\chi\in\hat{G}} \chi(g)u_\chi u_\chi^\dagger$，而 $n = \overline{|G|}$ 是定义 *4.1* 和命题 *4.5* 中的量子邻接矩阵。

(b) 有

$$A \cong \tilde{A} \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G},$$

˜即，可按照定义 *4.1*，将 A 恢复为 A 的导出图。

注 6.2。(a) 声称 $\tilde{A}$ 是电压量子图，意味着每个单映射 $\tilde{A}_g$ 映射到 $B^\alpha \subset B$。这一点并非显而易见因为映射 m和 m^* 定义在更大的代数 B上。

(b) 我们再次指出，运算

$$(A_1, A_2) \mapsto m(A_1 \otimes A_2)m^*$$

直观上表示取量子图的交集，如注 4.3 中所述。

在证明定理之前，我们将考察映射˜A_g的一些性质。首先，我们回到前一条注释中提到的问题，并证明˜映射 A_g 作为从 B^α 到 B^α的映射是定义良好的。

˜**命题 6.3.** 映射 A_g 是良定义的，即对所有 $g \in G$，均有

$$m(X_g \otimes A)m^*(B^\alpha) \subset B^\alpha.$$

证明。只需证明对所有 $h \in G$, $m(X_g \otimes A)m^* \alpha_h = \alpha_h m(X_g \otimes A)m^*$。显然, $m(\alpha_h \otimes \alpha_h) = \alpha_h m$ 成立，因为 α_h 是一个 $*$-自同构。此外，很容易验证，关于由 ψ诱导的内积, $\alpha_h^* = \alpha_{h^{-1}}$ 成立。取伴随后，前一个恒等式推出对所有 $h \in G$, $(\alpha_h \otimes \alpha_h)m^* = m^* \alpha_h$。另外，由假设可知 $\alpha_h \in \mathrm{Aut}(A)$，因此 $A\alpha_h = \alpha_h A$ 成立。

只需证明对所有 $h \in G$, $X_g \alpha_h = \alpha_h X_g$ 成立。经过简单计算可得

$$u_\chi^\dagger \alpha_h = \chi(h) u_\chi^\dagger$$

对所有 $\chi \in \hat{G}$ 和 $h \in G$均成立。（回忆一下 $u_\chi^\dagger = \psi(u_\chi^* \cdot)$。）因此，我们有

$$X_g \alpha_h = \frac{1}{n} \sum_{\chi \in \hat{G}} \overline{\chi(g)} u_\chi u_\chi^\dagger \alpha_h = \frac{1}{n} \sum_{\chi \in \hat{G}} \overline{\chi(g)} \chi(h) u_\chi u_\chi^\dagger = \alpha_h X_g,$$

因为对所有 $\chi \in \hat{G}$, $\alpha_h(u_\chi) = \chi(h) u_\chi$ 均成立。综上，我们得到恒等式$m(X_g \otimes A)$ $m^* \alpha_h = \alpha_h m(X_g \otimes A)m^*$，如所需。□

˜下一个引理建立了映射 A_g 与一族映射 ˜ $A_\chi : B^\alpha \to B^\alpha$ 之间的联系; 在某种傅里叶变换下，它们看起来相当于 A_g。这些映射具有方便的代数性质，并给出映射 A_g 的一种 ˜ 替代定义。

˜**引理 6.4**。存在如下线性映射 $A_\chi : B^\alpha \to B^\alpha$

$$A\left(\sum_{\chi \in \hat{G}} b u_\chi\right) = \sum_{\chi \in \hat{G}} \tilde{A}_\chi(b) u_\chi \tag{18}$$

ˆ对所有 $b \in B^\alpha$, $\chi \in G$均成立。因此，对于所有 $b \in B^\alpha$, $g \in G$ 以及 χ, $\zeta \in G$，有:

$$\tilde{A}_\chi \hat{\alpha}_\zeta = \hat{\alpha}_\zeta \tilde{A}_\chi, \tag{19}$$

$$\tilde{A}_\chi(b) = \frac{1}{n} \sum_{\zeta \in \hat{G}} \tilde{A}_\zeta \left(b_i^{(1)}\right) \tilde{A}_{\zeta^{-1}\chi} \left(b_i^{(2)}\right), \tag{20}$$

$$\tilde{A}_\chi(b)^* = \tilde{A}_{\chi^{-1}}(b^*), \tag{21}$$

$$\tilde{A}_g(b) = \frac{1}{n} \sum_{\zeta \in \hat{G}} \zeta(g) \tilde{A}_\zeta(b). \tag{22}$$

其中，在第二行中, $\tilde{m}^*(b) = \sum_i b_i^{(1)} \otimes b_i^{(2)}$，并对 i 隐式求和。

证明。回顾一下, α 以如下意义保持量子邻接矩阵 A : 对于所有 $g \in G$, $A\alpha_g = \alpha_g A$ 成立。由此立即可得, A 保持子代数 $B^\alpha u_\chi$，即

$$A(B^\alpha u_\chi) \subset B^\alpha u_\chi$$

对所有 $\chi \in \hat{G}$ 均成立。因此，式 (18) 中的映射 $\tilde{A}_\chi$ 存在。

关于 (19)。根据.....的定义 $\tilde{A}_\chi$ 并且对所有 $b \in B^\alpha$ 计算 $A\hat{\alpha}_\zeta = \hat{\alpha}_\zeta A$

$$\tilde{A}_\chi\left(\hat{\alpha}_\zeta(b)\right) = A(\hat{\alpha}_\zeta(b) u_\chi) u_{\chi^{-1}} = \hat{\alpha}_\zeta\left(A(b u_\chi)\right) u_{\chi^{-1}} = \hat{\alpha}_\zeta\left(\tilde{A}_\chi(b)\right).$$

根据（20）。由于 A 是量子邻接矩阵，我们有 $m(A\otimes A)m^*=A$。利用 B 上余乘法的公式（2），我们得到对所有 $b\in B^\alpha,\ \chi\in\hat{G}$,

$$\begin{aligned}A(bu_\chi)&=\frac{1}{n}\sum_{\zeta\in\hat{G}}A\left(b_i^{(1)}u_\zeta\right)A\left(\hat{\alpha}_{\zeta^{-1}}\left(b_i^{(2)}\right)u_{\zeta^{-1}\chi}\right)\\&=\frac{1}{n}\sum_{\zeta\in\hat{G}}\tilde{A}_\zeta\left(b_i^{(1)}\right)\tilde{\alpha}_\zeta\left(\tilde{A}_{\zeta^{-1}\chi}\left(\hat{\alpha}_{\zeta^{-1}}\left(b_i^{(2)}\right)\right)\right)u_\zeta u_{\zeta^{-1}\chi}\\&=\frac{1}{n}\sum_{\zeta\in\hat{G}}\tilde{A}_\zeta\left(b_i^{(1)}\right)\tilde{A}_{\zeta^{-1}\chi}\left(b_i^{(2)}\right)u_\chi,\end{aligned}$$

其中第二步中我们使用了 $A_{\zeta^{-1}\chi}\hat{\alpha}_{\zeta^{-1}}=\hat{\alpha}_{\zeta^{-1}}A_{\zeta^{-1}\chi}$。将其与 (18) 比较，即得所需公式。

关于 (21)。由于 A 是量子邻接矩阵，因此它是 $*$-保持的，即对所有 $b\in B^\alpha$ 和 $\chi\in\hat{G}$，均有 $A\left((bu_\chi)^*\right)=A(bu_\chi)^*$ 成立。根据 $\tilde{A}_\chi$ 的定义，可得

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{\chi^{-1}}(\hat{\alpha}_{\chi^{-1}}(b^*))u_{\chi^{-1}}&=A(\hat{\alpha}_{\chi^{-1}}(b^*)u_{\chi^{-1}})=A\left((bu_\chi)^*\right)\\&=A(bu_\chi)^*=\left(\tilde{A}_\chi(b)u_\chi\right)^*=\hat{\alpha}_{\chi^{-1}}\left(\tilde{A}_\chi(b)^*\right)u_{\chi^{-1}}.\end{aligned}$$

该结论由使用并在两边应用 $\hat{\alpha}_{\chi^{-1}}$ 关于 (22)。利用 A_g 的定义以及余乘法在 B 上的公式 (2) 和 (7)，可得

$$\begin{aligned}\tilde{A}_g(b)&=m(X_g\otimes A)m^*(b)\\&=\frac{1}{n}\sum_{\zeta\in\hat{G}}X_g(b_i^{(1)}u_\zeta)A\left(\hat{\alpha}_{\zeta^{-1}}\left(b_i^{(2)}\right)u_{\zeta^{-1}}\right)\\&=\frac{1}{n}\sum_{\zeta\in\hat{G}}\overline{\zeta(g)}\tilde{\psi}(b_i^{(1)})u_\zeta A\left(\hat{\alpha}_{\zeta^{-1}}\left(b_i^{(2)}\right)u_{\zeta^{-1}}\right).\end{aligned}$$

由于 A 与作用 $\hat{\alpha}$ 可交换，B 上的余乘法性质表明，此表达式等于

$$\frac{1}{n}\sum_{\zeta\in\hat{G}}\overline{\zeta(g)}\tilde{\psi}(b_i^{(1)})A_{\zeta^{-1}}\left(b_i^{(2)}\right)=\frac{1}{n}\sum_{\zeta\in\hat{G}}\overline{\zeta(g)}\tilde{A}_{\zeta^{-1}}(b).$$

通过变量替换即可得出该结论。 □

现在我们可以证明本节的主要定理，该定理已在前文作为定理 6.1 陈述。

定理 *6.1* 的证明。 我们首先证明，每个 A_g 都是 $(B^\alpha,\ \psi)$上的量子邻接矩阵，并且在作用 $\hat{\alpha}$下保持不变。首先，让我们验证$\tilde{A}_g$ 是 Schur幂等的。利用前一个引理中的公式 (22)，我们得到

所有 $b \in B^{\alpha}$,

$$\tilde{m}\left(\tilde{A}_g \otimes \tilde{A}_g\right)\tilde{m}^*(b) = \frac{1}{n^2}\sum_{\chi,\xi\in\hat{G}} \chi(g)A_\chi(b_i^{(1)})\xi(g)A_\xi(b_i^{(2)}) = \frac{1}{n^2}\sum_{\eta\in\hat{G}}\eta(g)\sum_{\chi,\xi:\chi\xi=\eta} A_\chi(b_i^{(1)})A_\xi(b_i^{(2)}).$$

由 (20) 可得 $\frac{1}{n}\sum_{\chi,\ \xi:\ \chi\xi=\eta} A_\chi(b_i^{(1)})A_\xi(b_i^{(2)}) = A_\eta(b)$，对所有 $\eta \in \hat{G}$ 均成立。因此，上式等于

$$\frac{1}{n}\sum_{\eta\in\hat{G}}\eta(g)A_\eta(b) = \tilde{A}_g(b).$$

接下来，我们证明 A_g 是 $*$-保持的。利用 (21) 以及前一个引理中的公式 (22)，可得对所有 $b \in B^{\alpha}$ 和 $g \in G$,

$$\begin{aligned}\tilde{A}_g(b^*) &= \frac{1}{n}\sum_{\zeta\in\hat{G}}\zeta(g)\tilde{A}_\zeta(b^*)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{\zeta\in\hat{G}}\zeta(g)\tilde{A}_{\zeta^{-1}}(b)^*\\ &= \left(\frac{1}{n}\sum_{\zeta\in\hat{G}}\zeta^{-1}(g)\tilde{A}_{\zeta^{-1}}(b)\right)^*\\ &= \tilde{A}_g(b)^*,\end{aligned}$$

如所需。总之，可知 A_g 是一个量子邻接矩阵。若要使 A 成为电压图，我们还需要对所有 $\chi \in G$ 满足 $A_g\hat{\alpha}_\chi = \hat{\alpha}_\chi A_g$。然而，结合 (19) 和 (22) 即可立即得到这一点。

尚需证明 $A = A \rtimes_{\hat{\alpha}} G$，即

$$A = \sum_{g\in G} m(X_g \otimes E_{\rtimes}^* \tilde{A}_g E_{\rtimes})m^*$$

利用余乘法的公式 (2) 以及 (3)，可立即得到对于所有 $b \in B^{\alpha}$ 和 $\chi \in G$，

$$\begin{aligned}m(X_g \otimes E_{\rtimes}^* \tilde{A}_g E_{\rtimes})m^*(bu_\chi) &= \frac{1}{n}\sum_{\zeta\in\hat{G}} X_g\left(b_i^{(1)}u_\zeta\right)\, n\delta_{\zeta^{-1}\chi=1}\tilde{A}_g\left(\hat{\alpha}_{\zeta^{-1}}(b_i^{(2)})\right)\\ &= X_g\left(b_i^{(1)}u_\chi\right)\tilde{A}_g\left(\hat{\alpha}_{\chi^{-1}}(b_i^{(2)})\right)\\ &= \overline{\chi(g)}\tilde{\psi}\left(b_i^{(1)}\right)\tilde{A}_g\left(b_i^{(2)}\right)u_\chi,\end{aligned}$$

其中最后一步用到了（7）。由于 $\left(\tilde{\psi}\otimes \mathrm{Id}_{B^\alpha}\right)\tilde{m}^* = \mathrm{Id}_{B^\alpha}$，上式可化简为

$$\overline{\chi(g)}\tilde{A}_g(b)u_\chi.$$

˜对所有 $g \in G$ 求和，并使用 A_g 的公式（22），可得

$$\sum_{g\in G} m^*(X_g \otimes E^*_{\searrow}\tilde{A}_g E_{\searrow})m(bu_\chi) = \frac{1}{n}\sum_{g\in G}\sum_{\zeta\in\hat{G}} \overline{\chi(g)}\zeta(g)A_\zeta(b)u_\chi$$
$$= A_\chi(b)u_\chi,$$

对于 $\sum_{g\in G}\chi(g)\zeta(g) = n\delta_{\zeta=\chi}$。证明至此结束。 □

备注 6.5. 如果 A 实际上是经典图（也就是某个有限集 V 上的量子图 $(\mathbb{C}^V, \psi_V)$），那么作用 $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(A)$ 满足 Landstad 定理的条件，当且仅当它是自由作用。此外，众所周知的算子 $\mathrm{Ad}(u_\chi)$ 在 $\mathbb{C}^V$ 上是平凡的，因此附加条件

$$\psi_V = \psi_V \,\mathrm{Ad}(u_\chi) \quad \text{and} \quad A\,\mathrm{Ad}(u_\chi) = \mathrm{Ad}(u_\chi)A$$

˜定理 6.1 的条件自动满足。量子集 (B^α, ψ) 显然同构于 $(\mathbb{C}^{V/G}, \psi_{V/G})$，且诱导作用 $\hat{}\alpha$ 是平凡的。因此，在经典情形下，我们的 Gross–Tucker 定理就是说，有限阿贝尔群在图 A 上的自由作用会在商图 A/G 上产生一种电压图结构，使得导出图同构于 A。这恰好重新得到经典的 Gross–Tucker 定理。

7. M_2 上的量子图作为导出量子图

量子空间 M_2 上的量子图已得到广泛研究 [26,14, 19]。我们回顾一下无向无环图在 $(M_2, 2\mathrm{Tr})$ 上的分类，该分类由 Matsuda [26] 和 Gromada [14]独立发现。

命题 7.1 （[14, 命题 3。14]）。 在同构意义下，$(M_2, 2\mathrm{Tr})$ 上有三个非空的无向无环量子图，其量子邻接矩阵如下：

(a) $A = P_3$, *(b)*
$A = P_3 + P_2$, *(c)*
$A = P_3 + P_2 + P_1$,

其中

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

这些矩阵是相对于 M_2的标准基给出的。

注 7.2。 值得注意的是，上述命题中 (a)–(c) 各点对应的量子邻接矩阵分别等于 $\sigma_3 \otimes \sigma_3^*$、 $\sigma_2 \otimes \sigma_2^* + \sigma_3 \otimes \sigma_3^*$ 和 $\sigma_1 \otimes \sigma_1^* + \sigma_2 \otimes \sigma_2^* + \sigma_3 \otimes \sigma_3^*$，其中

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

是泡利矩阵。

本节中，我们将证明，在 $(M_2(\mathbb{C}),\mathrm{2Tr})$ 上的三个非同构（非空、无向、无环）量子图，都可以由具有两个顶点的经典（有向）电压图导出。我们强调，经典和量子电压图都不必是简单无环图，这为我们提供了更大的灵活性。事实上，我们的最后一个例子将在顶点之间同时包含自环和重边。本节中，我们用 $\{0,1\}$ 表示 $\mathbb{Z}_2$ 的元素，用 $\{\chi_0,\chi_1\}$表示其对偶群 $\mathbb{Z}_2$。提醒读者，元素 1 不再是单位元。

命题 7.3。 在同构意义下，（M_2，2Tr）上的所有无向无环量子图，都可以表示为两个顶点上的经典 $\mathbb{Z}_2$-电压图的导出量子图。特别地，它们与四个顶点上的经典图量子同构。

证明。 首先，我们将 $(M_2$，2Tr) 写成交叉积量子集。为此，考虑如例 2.7 中的量子集 $(\mathbb{C}^2,\ \psi_2)$。存在一个自然的作用 $\hat{}\alpha$，由自同构给出：$\hat{}\ \mathbb{Z}_2$ 在 $\mathbb{C}^2$ 上的作用

$$\hat{\alpha}_{\chi_1}:\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}z_2\\z_1\end{pmatrix},\qquad z_1,z_2\in\mathbb{C}.$$

注意，ψ_2 在此作用下保持不变。回顾一下，交叉积代数$\mathbb{C}^2\rtimes_{\hat{\alpha}}\hat{}\mathbb{Z}_2$ 通过以下赋值所诱导的同构与 M_2 同构

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\qquad u_{\chi_1}\longmapsto\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

此外，$(\mathbb{C}^2\rtimes_{\hat{\alpha}}\hat{}\mathbb{Z}_2,\ \psi_{\rtimes})$ 和 $(M_2(\mathbb{C}),\ \mathrm{2Tr})$ 作为量子集同构。

关于作用 $\hat{}\alpha$ 的经典 $\mathbb{Z}_2$-电压图不过是一个二元组 $A=(A_0,\ A_1)$，其中 A_0 和 A_1 是定义在两个顶点上的邻接矩阵，满足

$$\tilde{A}_0\hat{\alpha}_{\chi_1}=\hat{\alpha}_{\chi_1}\tilde{A}_0\qquad\text{and}\qquad\tilde{A}_1\hat{\alpha}_{\chi_1}=\hat{\alpha}_{\chi_1}\tilde{A}_1\,. \tag{23}$$

于是，在 $(\mathbb{C}^2\rtimes_{\hat{\alpha}}\hat{}\mathbb{Z}_2,\ \psi_{\rtimes})$ 上的导出量子图的量子邻接矩阵（其中 $\psi_{\rtimes}$ 如定义 3.1 所述）由公式给出

$$A=m(X_0\otimes E_{\rtimes}^*\tilde{A}_0E_{\rtimes})m^*+m(X_1\otimes E_{\rtimes}^*\tilde{A}_1E_{\rtimes})m^*$$

其中 $E_{\rtimes}$ 是缩放条件期望（见记号 3.2），并且

$$X_0=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\qquad\text{and}\qquad X_1=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&-1&-1&0\\0&-1&-1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

（详见定义 4.1。）

为证明该命题，我们首先注意到，$(M_2$，2Tr) 上的空图是由一个具有两个顶点且没有边的图所导出的量子图。接下来，命题 7.1 中的三个量子图可如下恢复：

(a) 考虑图 5 中从左数第一个电压图。采用此标记，我们有

$$\tilde{A}=\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right).$$

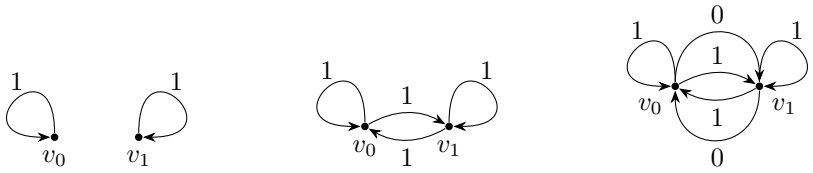


图 5. 导出 $M_2(\mathbb{C})$上分别具有一条、两条和三条量子边的量子图的电压图。

导出量子图的量子邻接矩阵为

$$A = m(X_1 \otimes E_{\rtimes}^* \tilde{A}_1 E_{\rtimes}) m^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

所得量子图是$(M_2,2\mathrm{Tr})$上的量子图，其量子邻接矩阵为 P_3，见命题 7.1。

(b) 考虑图 5 中从左数第二个电压图。在此标记下，该图的邻接矩阵分解如下

$$\tilde{A} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

导出量子图的邻接矩阵为

$$A = m(X_1 \otimes E_{\rtimes}^* \tilde{A}_1 E_{\rtimes}) m^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

所得量子图是$(M_2,2\mathrm{Tr})$上邻接矩阵为 $P_3 + P_2$的量子图，见命题 7.1。

(c) 考虑图 5 中从左数第三个电压图。采用这一标记后，该图的邻接矩阵可分解如下

$$\tilde{A} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

˜注意，在此例中， A_0 分量非零。导出量子图的邻接矩阵为

$$A = m(X_0 \otimes E_{\rtimes}^* \tilde{A}_0 E_{\rtimes} + X_1 \otimes E_{\rtimes}^* \tilde{A}_1 E_{\rtimes}) m^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

所得量子图是定义在 $(M_2,2\mathrm{Tr})$ 上、邻接矩阵为 $P_3 + P_2 + P_1$ 的量子图，见命题 7.1。

最后，该命题的最后一条结论由定理 5.2 得出。 □

˜**注7.4.** 设 (Γ, λ) 是一个有两个顶点˜ ˆ的预简单经典 $\mathbb{Z}_2$-电压图，并假设 (Γ, λ) 在由交换˜ ˆ顶点给出的 $\mathbb{Z}_2$ 的作用α 下保持不变。那么，导出量子图 $(\Gamma, \lambda) \rtimes_{\hat{\alpha}} \mathbb{Z}_2$ 同构于一个

定义在 $(M_2,2\mathrm{Tr})$ 上的无向无环量子图。事实上，按照命题 7.3 的˜ ˜ ˜证明进行推导，可得任何来自关于作用ˆα 的预简单经典 $\mathbb{Z}_2$-电压图的 $A = (A_0, A_1)$ 都具有如下形式

$$\tilde{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & b_0 \\ b_0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}, \qquad b_0, a_1, b_1 \in \{0, 1\}.$$

经过简单计算，可得相应导出量子图的邻接矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -a_1 & -a_1 & 0 \\ 0 & b_0 - b_1 & b_0 - b_1 & 0 \\ b_0 + b_1 & 0 & 0 & b_0 + b_1 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

由命题 4.7 可推知， A 是无向且无环的。

参考文献

[1] Albert Atserias、Laura Mančinska、David E. Roberson、Robert Šámal、Simone Severini 和 Antonios Varvitsiotis。“量子图同构与非信号图同构”。载于：《组合理论杂志 *B*辑》136 (2019年)，第 289–328 页。doi: 10.1016/j.jctb.2018.11.002。[2] Paul F. Baum、Ludwik Dabrowski 和 Piotr M. Hajac。“非交换博苏克–乌拉姆型猜想”。载于：从泊松括号到普适量子对称性。第 106 卷。Banach Center Publ. Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2015，第 9–18 页。doi: 10.4064/bc106-0-1。[3] Paul F. Baum、Kenny De Commer 和 Piotr M. Hajac。“紧量子群在含单位元的 C^*代数上的自由作用”。载于：*Doc. Math.* 22 (2017)，第 825–849 页。[4] Bruce Blackadar。算子代数：*C**-代数与冯·诺伊曼代数理论。数学科学百科全书，算子代数与非交换几何，第 122 卷。第 3 版。柏林；纽约：Springer，2006。[5] Ljiljana Brankovic、Mirka Miller、Ján Plesník、Joseph F. Ryan 和 Jozef Širáň。“小度数和小直径的大图：电压赋值方法”。载于：*Australas. J Comb.* 18 (1998)，第 65–76 页。[6] Michael Brannan 、 Alexandru Chirvasitu 、 Kari Eifler 、 Samuel Harris、Vern Paulsen、Xiaoyu Su 和 Mateusz Wasilewski。“双伽罗瓦扩张与图同构博弈”。载于：数学物理通讯375.3 (2020)，第 1777–1809 页。doi: 10.1007/s00220-019-03563-9。[7] Michael Brannan、Kari Eifler、Christian Voigt 和 Moritz Weber。“量子 Cuntz–Krieger 代数”。载于：美国数学会汇刊 *B*辑9.26 (2022)，第 782–826 页。doi: 10.1090/btran/88。[8] Michael Brannan、Daniel Gromada、Junichiro Matsuda、Adam Skalski 和 Mateusz Wasilewski。“量子 Frucht 定理与量子 Cayley 图的量子自同构”。载于：伦敦数学学会会刊131.5 (2025)，e70102。doi: https://doi.org/10.1112/plms. 70102。[9] Michael Brannan、Mitch Hamidi、Lara Ismert、Brent Nelson 和 Mateusz Wasilewski。“量子边对应与量子 Cuntz–Krieger 代数”。载于：伦敦数学学会杂志107.3 (2023)，第 886–913 页。doi: https://doi.org/10.1112/jlms.12702。

[10] Joachim Cuntz 和 Wolfgang Krieger。“一类 C*-代数与拓扑马尔可夫链”。载于：《数学新进展》56.3 (1980)，第 251–268 页。doi: 10.1007/BF01390048。[11] Matthew Daws。“量子图：不同视角、同态与量子自同构”。载于：美国数学会通讯 4.5 (2024年)，第 117–181 页。doi: 10.1090/cams/30。[12] Duan Runyao、Simone Severini 和 Andreas Winter。“通过量子信道、非交换图和量子 Lovász 数实现零错误通信”。载于：《*IEEE* 信息论汇刊》59.2 (2013)，第 1164–1174 页。doi: 10.1109/TIT.2012.2221677。[13] P. Erdős 和 A. Rényi。“非对称图”。载于：《匈牙利科学院数学学报》14.3-4 (1963)，第 295–315 页。doi: 10.1007/BF01895716。[14] Daniel Gromada。“量子图的一些例子”。载于：《数学物理通讯快报》112.6 (2022)，第 122 页。doi: 10.1007/s11005-022-01603-5。[15] Jonathan L Gross 和 Thomas W. Tucker。拓扑图论。纽约：Wiley，1987。[16] Jonathan L. Gross。“电压图”。载于：《离散数学》9.3 (1974)，第 239–246 页。doi: 10.1016/0012-365X(74)90006-5。[17] Jonathan L. Gross 和 Thomas W. Tucker。“通过置换电压赋值生成所有图覆盖”。载于：《离散数学》18.3 (1977)，第 273–283 页。doi: https://doi.org/10.1016/0012-365X(77)90131-5。[18] Dale Husemoller。纤维丛。第三版。第 20 卷。《数学研究生教材》。Springer-Verlag，纽约，1994，第 xx+353 页。doi: 10.1007/978-1- 4757-2261-1。[19] Nina Kiefer 和 Björn Schäfer。*M2* 上有向量子图的完整分类。版本号：2。2025年。doi: 10.48550/ARXIV.2507.15534。[20] Alex Kumjian 和 David Pask。“有向图的 C*-代数与群作用”。载于：《遍历论与动力系统》19.6 (1999)，第 1503–1519 页。doi: 10.1017/S0143385799151940。[21] Alex Kumjian、David Pask、Iain Raeburn 和 Jean Renault。“图、群胚

，

与 Cuntz–Krieger 代数”。载于：泛函分析杂志 144.2（1997年），第 505–541 页。doi: 10.1006/jfan.1996.3001.[22] Magnus B. Landstad。“共变系统的对偶理论”。载于：美国数学会汇刊 248.2（1979年），第 223–267 页。doi: 10.1090/S0002-9947-1979-0522262-6.[23] Aleksander Malnič、Roman Nedela 和 Martin Škoviera。“通过电压赋值提升图自同构”。载于：欧洲组合学杂志 21.7（2000年），第 927–947 页。doi: https://doi.org/10.1006/eujc. 2000.0390.[24] Laura Mančinska 和 David E. Roberson。“量子同构等价于来自平面图的同态计数相等”。载于：*2020 IEEE* 第 *61* 届计算机科学基础年度研讨会（*FOCS*）（2019年），第 661–672 页。[25] Junichiro Matsuda。“量子图的代数连通性与二部性”。载于：数学物理通讯 405.8（2024年），第 185 页。doi: 10.1007/s00220-024-05046-y.

[26] Junichiro Matsuda。“M2 上量子图的分类及其量子自同构群”。载于：《数学物理杂志》63.9（2022），第 092201 页。doi: 10.1063/5.0081059.[27] Benjamin Musto、David Reutter 和 Dominic Verdon。“量子函数的组合式方法”。载于：《数学物理杂志》59.8（2018），第 081706 页。doi: 10.1063/1.5020566.[28] N. Christopher Phillips。等变 K理论与群作用在 C^*代数上的自由性。第 1274 卷。数学讲义。Springer-Verlag，柏林，1987年，第 viii$+$371 页。doi: 10.1007/BFb0078657.[29] Iain Raeburn。*Graph Algebras*。CBMS 区域会议数学丛书第 103 卷。普罗维登斯：美国数学会，2005年。[30] Marc A. Rieffel。“群在 C^*代数上的真作用”。载于：算子代数映射（费城，宾夕法尼亚州，*1988*年）。第 84 卷。数学进展丛书。Birkhäuser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1990年，第 141–182 页。[31] Mateusz Wasilewski。“论量子 Cayley 图”。载于：*Documenta Mathematica* 29.6（2024年），第 1281–1317 页。doi: 10.4171/dm/987.[32] Nik Weaver。“作为量子关系的量子图”。载于：《几何分析杂志》31（2015），第 9090–9112 页。[33] Nik Weaver。“量子关系”。载于：美国数学会纪要 215.1010（2012年）。doi: 10.1090/S0065-9266-2011-00637-4。