arXiv:2602.21024v1 [math.AG] 24 Feb 2026

Stein 代数的布劳尔群

奥利维耶·伯努瓦和詹姆斯·霍奇基斯

摘要。我们研究有限维 Stein 空间 S上的全纯函数环$\mathcal{O}(S)$的布劳尔群。我们给出了该群的纯拓扑计算，并由此得出 Spec($\mathcal{O}(S)$) 的 étale 上同调与 S 的奇异上同调在 2 次时的比较定理。此外，我们证明了当 S 非奇异时的纯度定理，并研究$\mathcal{O}(S)$的布劳尔群中各类的指标。

1. 引言

1.1. Stein 空间及其 Stein 代数。Stein 空间是仿射代数簇的复解析类比。它们在所有复空间 S 中可由以下性质刻画：对于任意离散子集 $T \subset S$，限制映射 O(S) $\to$ O(T) 均为满射；或者等价地，对于 S 上的任意凝聚层 F 及任意 $k > 0$， H^k (S,F) 均消失（例如参见 [GR79]）。Stein 代数是某个 Stein 空间 S上的全纯函数的 $\mathbb{C}$-代数 O(S)。

在代数几何中，仿射代数簇 V与域 K 上的有限生成 K代数 R之间存在一种对应（范畴等价）（由 $R = \mathcal{O}(V)$ 和 $V = \mathrm{Spec}(R)$ 给出）。通过这种对应， V 的几何性质可以转化为 R 的代数性质，反之亦然。

在复解析几何中也存在类似的范畴等价：一方面是 Stein 空间与全纯映射，另一方面是 Stein 代数与 $\mathbb{C}$-代数态射（结合 [For67，Satz 1] 以及 [For66，Theorem 5] 中关于有限维 Stein 空间的结果；一般情形见 [Ben24b，Theorem 0.1] ）。

与代数情形的一个重大区别在于，从交换代数的角度来看，Stein 代数十分复杂（例如，它们通常不是诺特的）。因此，要将其代数性质与相应 Stein 空间的解析或拓扑性质联系起来，就更加困难。在这一方向上，一项颇具影响力的工作是 Forster 的 [For67], ，该文研究了 Stein 空间上的凝聚层 S 与 Stein 代数上的模 $\mathcal{O}(S)$ 之间的关系。

本文旨在通过研究 Stein 代数的布劳尔群，进一步推进这一研究方向。关于$\mathcal{O}(S)$纯代数性质的定理（例如定理 1.6、1.8 和 1.10）是通过利用关于 $\mathcal{O}(S)$ 的交换代数与 S 的几何或拓扑之间关系的结果证明的（例如推论 1.3 或定理 1.5）。

1.2. **代数与拓扑布劳尔群**。 我们的第一个结果表明，Stein 代数的布劳尔群具有拓扑性质。

定理 1.1 (命题3.1和3.2)。 自然态射

$$\mathrm{Br}(\mathcal{O}(S)) \to \mathrm{Br}_{\mathrm{top}}(S) \tag{1.1}$$

对于任意有限维 *Stein* 空间 S，都是一个同构。

回顾一下，环 R 的布劳尔群 Br(R) 由 Auslander 和 Goldman [AG60] 定义为 R 上阿祖马亚代数的 Morita 等价类集合，并赋予由张量积诱导的群运算；这推广了域 K 的布劳尔群的定义，即 K 上中心单代数的 Morita 等价类集合（见 [Gro68、CTS21]）。拓扑空间 S 的拓扑布劳尔群 $\mathrm{Br}^{\mathrm{top}}(S)$ 以类似方式在 [Gro68, I, §§1.1–1.2], 中定义，使用 S 上拓扑阿祖马亚代数的 Morita 等价类（见 §2.1）。

为了证明 (1.1) 是一个同构，我们利用基于全纯 Azumaya 代数的 S 的解析布劳尔群（参见 [HS03, §2], [Sch05, §1] 或 §2.1）。借助 Grauert 的 Oka 原理 [Gra58], ，我们将 S 的拓扑布劳尔群与解析布劳尔群相识别；再根据 Forster 的上述结果 [For67] ，并按 [Ben24a, 命题 2.5，注 2.6] 中的阐述，将 S 的解析布劳尔群与 O(S) 的代数布劳尔群相识别。论证的前半部分已见于文献（例如参见 [AW14a, 推论 4.3] 或 [Sri25]）；后半部分则是新的。

定理 S 中的有限维假设1.1对于 (1.1) 的单射性和满射性都至关重要3.8和 3.10）。

1.3.**布劳尔群的上同调诠释**。Grothendieck 构造了一个典范单射

$$\mathrm{Br}(R) \hookrightarrow H^2_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(R), \mathbb{G}_m) \tag{1.2}$$

从环的布劳尔群 R 到 $\mathrm{Spec}(R)$的第二 étale 上同调群，其中系数可逆（参见 [Gro68, I,(2.1)]）。Gabber 将（1.2）的像确定为 $H^2_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(R)\ \mathbb{G}_m)$ ([Gab81, 第 II 章，定理 1],另见更一般的 [dJ03]）。由此便得到了（1.1）左侧的上同调诠释。

在拓扑方面，Serre 证明有限 CW 复形 $\mathrm{Br}^{\mathrm{top}}(T)$的拓扑布劳尔群 T 自然同构于 $H^3(S,\ \mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}$ （参见 [Gro68, I, 推论 1。7]）。为给出（1.1）右侧的拓扑诠释，我们将 Serre 的计算推广到有限维 CW 复形。

定理 1.2 (定理3.3)。 设 T 是一个有限维 *CW* 复形。那么典范态射 $\mathrm{Br}^{\mathrm{top}}(T) \to H^3(T, \mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}$ 是一个同构。

定理 1.2 中的有限维假设不可省略（参见 [AW14a，推论 5。10]或 [HS15]）。结合定理 1.1 和 1.2 可知，Stein 代数的布劳尔群可以纯粹通过拓扑方法计算。

定理 1.3 (定理3.5)。 自然态射

$$\mathrm{Br}(\mathcal{O}(S)) \to H^3(S, \mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}$$

对于任意有限维 *Stein* 空间 S，它都是一个同构。

1.4. **次数 2 有限系数上同调**。 下面介绍定理 1.1 和 1.2的一个应用。对于任意 Stein 空间 S、任意 $k \geq 0$以及任意 $n \geq 1$，都可以考虑比较态射

$$H^k_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}(S)), \mathbb{Z}/n) \to H^k(S, \mathbb{Z}/n) \tag{1.3}$$

之间的 étale 上同调 谱($\mathcal{O}(S)$)与 S的奇异上同调。关于当 1.3) 是同构这一问题，在 S 为有限维时，已在 [Ben24a，注 6.7 (v)] 中提出，并在 $k = 0$ 或 $k = 1$ (另见

[Ben25，定理 1。5] 针对 Stein 紧空间这一较简单但相关的情形中所有 $k \geq 0$ 给出了肯定答案。我们针对 $k = 2$回答了这一问题。

定理 1.4 (定理4.2)。 自然态射

$$H^2_{\text{ét}}(\text{Spec}(\mathcal{O}(S)), \mathbb{Z}/n) \to H^2(S, \mathbb{Z}/n) \tag{1.4}$$

对于任意有限维 *Stein* 空间 S 以及任意 $n \geq 1$，它都是同构。

为了从定理 1.1 推出定理 1.4，我们将 (1.4) 的左侧与 n-挠元类在 布劳尔群 $(\mathcal{O}(S))$ 联系起来，并将 (1.4) 的右侧与 n-挠元类在 布劳尔群$^{\text{top}}(S)$联系起来。为此，我们分别使用 Gabber 定理（即单射 (1.2) 的像是挠元类子群）和定理 1.2。

定理 1.4 最初促使我们研究 Stein 代数的布劳尔群。我们不知道有何种证明不依赖于借助阿祖马亚代数对次数2 上同调类的几何体现。

1.5. **次数 2 上同调与可逆系数**。 对于任意 Stein 空间 S 和任意 $k \geq 0$，也可以考虑一种类似于 (1.3) 的比较态射，但采用可逆系数：

$$H^k_{\text{ét}}(\text{Spec}(\mathcal{O}(S)), \mathbb{G}_m) \to H^k(S, \mathcal{O}_S^\times). \tag{1.5}$$

态射 (1.5) 对于 $k = 0$显然是同构。当 $k = 1$ 且 S 有限维时，它也是同构（见引理4.1）。因此，自然会问，当 S 有限维时，(1.5) 是否总是同构。注意，利用库默尔正合列，这将意味着态射 (1.3) 本身是同构。

当 $k = 2$ 时，我们证明单射性成立，尽管一般而言满射性不成立。

定理 1.5 (定理4.5 和推论5.4)。 自然态射

$$H^2_{\text{ét}}(\text{Spec}(\mathcal{O}(S)), \mathbb{G}_m) \to H^2(S, \mathcal{O}_S^\times) \tag{1.6}$$

对任意有限维 *Stein* 空间 S都是单射。存在一个连通 *Stein* 流形，使得 (1.6) 不是满射。

为了证明定理 1.5 中关于单射性的断言，我们再次依赖于对二次上同调类的几何解释。布劳尔群不足以实现这一目的，因为它只能反映 $H^2_{\text{ét}}$(Spec(O(S)) $\mathbb{G}_m$) 中的挠元类（若 S 是奇异的，该群可能不是挠群，见命题 4.9）。为克服这一困难，我们采用 Taylor 和 Raeburn [Tay82, RT85] 提出的环 R 的更大的布劳尔群 Br(R)（经 Caenepeel 和 Grandjean [CG98, Cae98]，修正；另见 [Sch03, HS 09]），它基于可能非含幺的中心可分 R-代数（而非仅基于阿祖马亚代数），并满足 Br(R) $\xrightarrow{\sim} H^2_{\text{ét}}$(Spec($R$) $\mathbb{G}_m$)（见 [CG98，定理 3.4]）。我们遵循 Heinloth 和 Schröer [HS09] 的观点（见 §4.2）。关于定理 1.5 前半部分在复代数几何中的对应结果，参见命题 4.8。

一般而言，(1.6) 的满射性失效，Raeburn 和 Taylor 已在 [RT85，第 462] 页（在 Stein 紧空间这一相关情形下）指出这一点。关键在于，当 S 是一个流形时，(1.6) 左侧是一个挠群（由下文定理 1.7可知），但 (1.6) 右侧可能包含非挠类。 [Tay82 第 200], 页底部的评论中，Taylor 解释了为何难以用中心可分 $H^2(S,\mathcal{O}_S^\times)$ 代数来表示 $\mathcal{O}_S$-代数；这些评论也说明了为何诉诸更大的布劳尔群的论证无法证明 (1.6) 是满射。

1.6. **亚纯函数域**。若 S 是一个 Stein 空间，则上同调群 $H^2_{\text{ét}}(\text{谱}(\mathcal{O}(S))\ \mathbb{G}_m)$ 一般而言并非挠群（参见命题 4.9），因此单射 $\text{Br}(\mathcal{O}(S)) \to H^2_{\text{ét}}(\text{谱}(\mathcal{O}(S))\ \mathbb{G}_m)$（见（1.2））可能不是满射。若 S 的局部环均为阶乘的，例如 S 非奇异时，我们证明该映射是满射。

定理1.6 (推论5.2)。自然态射

$$\text{Br}(\mathcal{O}(S)) \to H^2_{\text{ét}}(\text{Spec}(\mathcal{O}(S)), \mathbb{G}_m)$$

对于任意有限维局部阶乘 *Stein* 空间 S，都是一个同构。

定理 1.6 可直接由下面这个纯粹的上同调陈述推出，其中 $\mathcal{M}(S)$表示复空间上的亚纯函数环 S(参见 [GR84, 第6章, §3])。

定理1.7 (定理5.1)。自然态射

$$H^2_{\text{ét}}(\text{Spec}(\mathcal{O}(S)), \mathbb{G}_m) \to H^2_{\text{ét}}(\text{Spec}(\mathcal{M}(S)), \mathbb{G}_m)$$

对于任意有限维局部阶乘 *Stein* 空间 S，都是单射。

为了证明定理 1.7，我们需要一种方法来检测上同调类在 $H^2_{\text{ét}}(\text{谱}(\mathcal{O}(S))\ \mathbb{G}_m)$中的消失。为此，我们利用定理 1.5的前半部分。此外，我们还使用扭曲层；de Jong 和 Lieblich 首创了将其用于布劳尔群研究的方法（参见 [dJ03, Lie08]）。

定理 1.7 是 Grothen- dieck 的一个代数结果的复解析类比，该结果指出，对于任意诺特环 R，若其局部环的严格化 hensel 化是阶乘的，则若 K 是 R的全分式环，则自然态射

$$H^2_{\text{ét}}(\text{Spec}(R), \mathbb{G}_m) \to H^2_{\text{ét}}(\text{Spec}(K), \mathbb{G}_m) \tag{1.7}$$

是单射（参见 [Gro68，II，推论 1。10]）。Grothendieck 的证明依赖于对 谱(R) 上的 Cartier除子的 étale 层的研究，更确切地说，依赖于将其识别为 谱(R) 上 Weil除子的 étale 层（参见 [Gro68，II，（3）第 71]页）。在定理 1.7的情形下，可以在 谱$(\mathcal{O}(S))$上定义有意义的 Cartier除子和 Weil除子的 étale 层。然而，从前者到后者的自然态射通常既非单射也非满射（在 谱$(\mathcal{O}(S))$的奇异几何点处），即使 S 是一个流形。这使得沿着这条思路证明定理1.7 颇为困难。

1.7.**纯性**。设 R 是一个分式域为 K 的正则整环。由于（1.7）是单射，自然态射 $\text{Br}(R) \to \text{Br}(K)$也是单射（此结果可追溯至[AG60，定理 7。2]）。此外，Auslander 和 Goldman 在 [AG60，第 389]页提出，能否在 $\text{Br}(R)$ 中将 $\text{Br}(K)$ 恢复为

$$\text{Br}(R) = \bigcap_{\mathfrak{p}} \text{Br}(R_{\mathfrak{p}}), \tag{1.8}$$

其中 $\mathfrak{p}$遍历 的所有高度为 1 的素理想 R。这一命题也称为格罗滕迪克纯性猜想（参见 [Gro68，III，§6]），由 Česnavičius [Čes19，定理 1，完全一般地证明。（2] 此前已知许多特殊情形，列于 [Čes19，第 1462]页，例如优秀 $\mathbb{Q}$-代数的情形，见 [Gro68，III，定理 61]。）当 R 是一个 $\mathbb{Q}$-代数时，可以将（1.8）改写为正合列

$$0 \to \text{Br}(R) \to \text{Br}(K) \xrightarrow{\text{res}_x} \bigoplus_x H^1_{\text{ét}}(\text{Spec}(\kappa(x)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \tag{1.9}$$

（参见 [Čes19, （6.4.4）]），其中 x 遍历Spec(R) 的所有余维数一点，其剩余域为 $\kappa(x)$，并且 $\mathrm{res}_x : \mathrm{Br}(K) \to H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(\kappa(x))\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 是剩余映射（例如可参见 [CTS21，定义 1.4.11 （ii）]）。

我们按照（1.9）的思路，在 Stein 几何中证明一个纯度定理。

定理 1.8 （定理5.5）。设 S 是一个有限维 *Stein* 流形。存在一个正合列

$$0 \to \mathrm{Br}(\mathcal{O}(S)) \to \mathrm{Br}(\mathcal{M}(S)) \xrightarrow{\mathrm{res}_D} \prod_D H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(\mathcal{M}(D)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \tag{1.10}$$

其中 D 遍历 S中所有余维1 的不可约解析子集。

Br(O(S)) 到 Br(M(S)) 的单射性由定理 1.7 得出。证明（1.10）在 Br(M(S)) 处正合，依赖于定理 1.3 给出的 Br(O(S)) 的拓扑计算，以及 [Ben24a 引理 6.4] 中证明的一个关于 étale O(S)-代数的次数 1 奇异上同调类的消去引理。

1.8. **指标**。设 R 是一个环。 $\alpha \in$Br(R) 的周期per(α) 是它在挠群 Br(R) 中的阶。一个更精细的不变量是 α 的指标ind(α)（表示 α的阿祖马雅代数的次数的最大公约数）。本文最后一节研究 Stein 代数情形下的整数 ind(α)。

我们首先证明，在这种情形下，指标可以通过拓扑方法计算（拓扑 Brauer 类的指标定义为表示该类的拓扑阿祖马亚代数的次数的最大公约数）。

定理 1.9 (定理6.1)。 设 S 是有限维 *Stein* 空间。对于任意 $\alpha \in \mathrm{Br}(\mathcal{O}(S))$ 其在 α^{top} 中的像为 $\mathrm{Br}^{\mathrm{top}}(S)$，有 $\mathrm{ind}(\alpha)$ $=\mathrm{ind}(\alpha^{\mathrm{top}})$。

若 V 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的连通光滑射影簇，且 $\alpha \in \mathrm{Br}(V)$ 的像 $\alpha_{\mathbb{C}(V)}$ 位于 $\mathrm{Br}(\mathbb{C}(V))$中，则 $\mathrm{ind}(\alpha)$ $=\mathrm{ind}(\alpha_{\mathbb{C}(V)})$ ([AW14b中的论证（命题 6。1] ）归功于 Saltman）。我们证明了这一结果的 Stein 类比。

定理 1.10 (定理6.7)。 设 S 是连通 *Stein* 流形。取一个类$\alpha \in \mathrm{Br}(\mathcal{O}(S))$，并设 $\alpha_{\mathcal{M}(S)}$ 是它在$\mathrm{Br}(\mathcal{M}(S))$中的像。则 $\mathrm{ind}(\alpha)$ $= \mathrm{ind}(\alpha_{\mathcal{M}(S)})$。

将 [AW14b] 中的论证推广到 Stein 情形，会因以下事实而变得复杂：在 S 上，凝聚层不一定能通过向量丛获得整体有限解消（仅在限制到 S的紧子集上可以）。为克服这一困难，我们利用指标可以从拓扑角度计算这一事实（定理 1.10），以及扭曲 K 理论 上由 [DK70、AS04]（见 §6.2）所给出的上同调理论。

设 V 为一个定义在 $\mathbb{C}$上的维数为 d 的连通光滑射影簇。周期-指标猜想（见 [CT06, 第 389]页）询问对于所有 $\alpha \in$ Br(ℂ(V))，是否有 ind(α) | per(α)$^{d-1}$ 。当 $d = 1$ 时，该猜想成立，因为根据 Tsen 定理（见 [Ser94, II.3.1, 命题 6]），Br(ℂ(V)) $= 0$ ；当 $d = 2$ 时，根据 de Jong 的周期-指标定理 [dJ04], , 猜想成立；而当 $d \geq 3$时，问题仍未解决。这一问题促使人们构造周期与指标不同的布劳尔类。为此，人们发展了许多策略，运用了分歧、退化、指标约化或霍奇理论论证（见 [CT02] 及其附录，以及 [Kre03、Hot22、dJP22]）。

设 S 是一个维数为 d 的不可约约化施泰因空间，我们仍然可以问，对于所有 $\alpha \in$ Br(M(S))，是否都有 ind(α) | per(α)$^{d-1}$ 。对 $d = 1$而言，答案是肯定的，因为根据 M. Artin [Gur88, Proposition 3.7], 的结果，Br(M(S)) $= 0$ ；对 $d = 2$ 而言，根据 [Ben25, Theorem 1.4], 的周期-指标定理，答案也是肯定的；而对于 $d \geq 3$，这个问题仍未解决。同样，这促使我们寻找周期与指标不同的布劳尔类。正如在

代数情形中，人们可以利用分歧构造此类例子。然而，$\mathrm{Br}(\mathcal{O}(S)) \to \mathrm{Br}(\mathcal{M}(S))$ 像中的类无法用这些赋值方法处理（$\mathcal{M}(S)$ 上的离散赋值以 $\mathcal{O}(S)$ 为中心，这是根据 [Iss66，定理 I]得出的），而且我们也无法将上述其他方法用于这些类。我们的最后一个结果表明，尽管如此，$\mathrm{Br}(\mathcal{O}(S)) \to \mathrm{Br}(\mathcal{M}(S))$ 像中某个类的周期与指标仍可能不相等。

定理 1.11 （定理6.8）。 存在一个连通 *Stein* 流形 S 以及一个类 $\alpha \in \mathrm{Im}[\mathrm{Br}(\mathcal{O}(S)) \to \mathrm{Br}(\mathcal{M}(S))]$ 使得 $\mathrm{ind}(\alpha) \neq \mathrm{per}(\alpha)$。

证明定理 1.11 时所用的周期与指标相等这一结论的障碍具有拓扑性质：我们利用了 Antieau 和 Williams 提出并研究的拓扑周期-指数问题（参见 [AW14a、AW14b]）。此外，我们的论证还依赖于定理 1.9 和 1.10。

2. 预备知识

2.1. 布劳尔群。设 (X, O_X) 是一个局部环化位点（在我们的应用中，它将是概形的 étale 位点，或配备其全纯函数层 O_S 的复空间 S，或配备其复值连续函数层 C_T 的拓扑空间 T）。(X, O_X) 上次数为 n 的阿祖马亚代数是一个 O_X-代数，它局部同构于 $M_n(\mathsf{O}_X)$。若存在代数同构 $\mathsf{A} \otimes \mathsf{End}(\mathsf{E}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{B} \otimes \mathsf{End}(\mathsf{F})$，其中 E 和 F 是有限秩的局部自由 O_X-模，则 (X, O_X) 上的两个阿祖马亚代数 A 和 B 莫里田等价。(X, O_X) 的布劳尔群 $\mathrm{Br}(X, \mathsf{O}_X)$ 是 (X, O_X) 上阿祖马亚代数的莫里田等价类构成的群，其群运算由张量积诱导（参见 [Gro68, I, §2] 或 [Gir71，第 V 章，§4]）。

(X, O_X) 上次数为 n 的阿祖马亚代数的同构类，与 $\mathrm{PGL}_n(\mathsf{O}_X)$-挠子的同构类自然一一对应，因此可由 $H^1(X, \mathrm{PGL}_n(\mathsf{O}_X))$ 分类（参见 [Gro68, I, 注记 5.12] 或 [Gir71, 第 V 章，注记 4.5]）。短正合列 $0 \to \mathsf{O}_X^\times \to \mathrm{GL}_n(\mathsf{O}_X) \to \mathrm{PGL}_n(\mathsf{O}_X) \to 0$ 所诱导的边界映射 $H^1(X, \mathrm{PGL}_n(\mathsf{O}_X)) \to H^2(X, \mathsf{O}_X^\times)$ 给出一个单射态射

$$\mathrm{Br}(X, \mathcal{O}_X) \to H^2(X, \mathcal{O}_X^\times)_{\mathrm{tors}} \tag{2.1}$$

(参见 [Gro68，I，§2] 或 [Gir71，第 V 章，§4.4，§4。6])。

若 R 是一个环，定义 $\mathrm{Br}(R) := \mathrm{Br}(\text{谱}(R)_{\text{ét}}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R)})$。若 S 是一个复空间，定义 $\mathrm{Br}_{\mathrm{an}}(S) := \mathrm{Br}(S, \mathcal{O}_S)$。若 T 是一个拓扑空间，定义 $\mathrm{Br}^{\mathrm{top}}(T) := \mathrm{Br}(T, \mathcal{C}_T)$。

2.2. **解析化函子**。 以下是关于 Stein 几何中解析化的若干回顾，用于下列定理的证明：3.5、4.5、5.1、5.5 以及 6.7。

设 S 为一个 Stein 空间。对于有限表示的 $\mathcal{O}(S)$-概形 X，Bingener 将其 解析化 定义为：S 上的一个复空间 $X^{\mathrm{an}} \to S$，并配备局部环化空间的态射 $i_X\colon X^{\mathrm{an}} \to X$，它由如下性质刻画：

$$\mathrm{Hom}_S(S', X^{\mathrm{an}}) \xrightarrow{i_X \circ -} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(S)-\text{locally ringed spaces}}(S', X)$$

对于所有复空间 S' over S ([Bin76, Satz 1.1], 另见 [Ben25, §4.1]或 [Ben24a, §2.2]) 都是双射。具体而言，若 $X = \mathrm{Spec}(\mathsf{O}(S)[x_1, \ldots, x_n]/f_1, \ldots, f_m$ 是仿射的，则 X^{an} 可构造为 $S \times \mathbb{C}^n$ 中 $f_1, \ldots, f_m \in \mathsf{O}(S \times \mathbb{C}^n)$ 的零点集。一般而言，通过选取仿射图表并将其粘合，可由仿射情形推出解析化的存在性。此构造具有函子性 [Bin76, p. 2],

与纤维积相容 [Bin76, p. 3], 并将 étale 态射变为局部双全纯映射 [Bin76,Satz 3.1].

设 X 是一个有限表示的 $\mathcal{O}(S)$-概形，并设$\mathcal{F}$ 是一个有限表示的拟凝聚层。Bingener 将 F 的解析化定义为凝聚层 $\mathcal{F}^{\mathrm{an}} := i_X^*\mathcal{F}$ 在 X^{an}上的解析化，并证明解析化函子 $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{\mathrm{an}}$是正合的（见 [Bin76，第3]页）。

称 $\mathcal{G}$ 上的凝聚层 S 为全局有限表示的，如果它存在如下形式的表示：$\mathcal{O}_S^{\oplus n_2} \to \mathcal{O}_S^{\oplus n_1} \to \mathcal{G} \to 0$ 其中 n_1 和 n_2是整数。在[Ben24a，命题 2.5], 构造了一个范畴的幺半伴随等价

$$\left\{\begin{array}{c}\text{finitely presented quasi-coherent}\\ \text{sheaves on } \mathrm{Spec}(\mathcal{O}(S))\end{array}\right\} \rightleftarrows \left\{\begin{array}{c}\text{globally finitely presented}\\ \text{coherent sheaves on } S\end{array}\right\} \tag{2.2}$$

构造了一个左至右函子 $\mathrm{F} \mapsto \mathrm{F}^{\mathrm{an}}$ 和一个右至左函子 $\mathrm{G} \mapsto \mathrm{G}(S)$。具体而言，[Ben24a，命题 2.5] 使用 $\mathrm{O}(S)$-模，而非 $\mathrm{Spec}(\mathrm{O}(S))$ 上的拟凝聚层；不过，这两个范畴之间存在保持张量积的等价（见 [SP，引理 01IB 和 01I8 (1)]）。此外，文中并未说明左至右函子是 Bingener 的解析化函子，但这可直接由定义得出。

设 X 是一个有限表示的 $\mathrm{O}(S)$-概形。对 étale X-概形进行解析化诱导出位的态射 $\varepsilon_X : (X^{\mathrm{an}})_{\mathrm{cl}} \to X_{\text{ét}}$，从 X^{an} 的局部同构位（该位等价于通常的 X^{an}，见 [SGA4_{III}，XI，§4.0]）到 X 的小 étale 位点。如果 $\mathbb{L}$ 是 X 上的 étale 层，我们记 $\mathbb{L}^{\mathrm{an}} := \varepsilon_X^*\mathbb{L}$，并将其视为 X^{an} 上的层。通过 ε_X 拉回得到比较态射 $H^k_{\text{ét}}(X,\mathbb{L}) \to H^k(X^{\mathrm{an}},\mathbb{L}^{\mathrm{an}})$，其中 $k \geq 0$（见 [Ben24a，§2.2]）。

3. The Brauer group of a Stein algebra

3.1. Stein 代数与 Stein 空间。

命题 3.1。若 S 是一个 *Stein* 空间，则自然态射 $\mathrm{Br}_{\mathrm{an}}(S) \to \mathrm{Br}^{\mathrm{top}}(S)$ 是同构。

证明。S 上秩为 r的全纯向量丛和拓扑向量丛的同构类，分别与 $H^1(S, \mathrm{GL}_r(\mathrm{O}_S))$ 和 $H^1(S, \mathrm{GL}_r(\mathrm{C}_S))$一一对应。此外，$S$ 上次数为 n 的全纯阿祖马亚代数和拓扑阿祖马亚代数的同构类，分别与 $H^1(S, \mathrm{PGL}_n(\mathrm{O}_S))$和 $H^1(S, \mathrm{PGL}_n(\mathrm{C}_S))$一一对应（见 §2.1）。根据Grauert的Oka原理（见 [Gra58，命题2，第 267]页），自然态射 $H^1(S, \mathrm{GL}_r(\mathrm{O}_S)) \to H^1(S, \mathrm{GL}_r(\mathrm{C}_S))$和 $H^1(S, \mathrm{PGL}_n(\mathrm{O}_S)) \to H^1(S, \mathrm{PGL}_n(\mathrm{C}_S))$均为双射，因此诱导出 S 上全纯阿祖马亚代数与拓扑阿祖马亚代数的同构类之间的双射，且该双射保持Morita等价。这就证明了该命题。□

命题 3.2。若 S 是有限维 *Stein* 空间，则自然态射$\mathrm{Br}(O(S)) \to \mathrm{Br}_{\mathrm{an}}(S)$ 是一个同构。

证明。对于 $r \geq 0$，幺半等价 (2.2) 限制为谱$(\mathrm{O}(S))$上秩为 r 的局部自由层范畴与秩为 r 的 O_S-模局部自由层范畴之间的等价（参见 [Ben24a，注 2.6]）。由此可知，(2.2) 保持 Morita 等价。此外，将谱$(\mathrm{O}(S))$ 上的阿祖马雅代数 A（分别地，(S, O_S) 上的全纯阿祖玛雅代数）刻画为满足以下条件的局部自由代数：代数态射 $\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{E}nd(\mathrm{A})$ 定义为

左乘和右乘是一个同构（参见 [Gro68，I，定理 5.1 (ii) 及注 5。12]）表明，(2.2) 的两个箭头将阿祖玛雅代数映到阿祖玛雅代数。由此我们推出 $\mathrm{Br}(\mathcal{O}(S)) \to \mathrm{Br}_{\mathrm{an}}(S)$ 是一个同构。□

3.2. **有限维 CW 复形的拓扑布劳尔群**。令 T 为一个拓扑空间。考虑以下复合映射

$$\mathrm{Br}_{\mathrm{top}}(T) \to H^2(T, \mathcal{C}_T^\times)_{\mathrm{tors}} \to H^3(T, \mathbb{Z})_{\mathrm{tors}} \tag{3.1}$$

（2.1）与短正合列的边界映射的复合

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2\pi i} \mathcal{C}_T \xrightarrow{\exp} \mathcal{C}_T^\times \to 0.$$

由 [Gro68，I，第 48-50] 页，或 [Gir71，第 V 章，第 4 节，6] 可知，复合映射（3.1）也由以下复合映射诱导

$$H^1(T, \mathrm{PGL}_n(\mathcal{C}_T)) \to H^2(T, \mathbb{Z}/n) \to H^3(T, \mathbb{Z})[n] \tag{3.2}$$

边界映射与短正合列相关的列

$$0 \to \mathbb{Z}/n \xrightarrow{1 \mapsto \exp(\frac{2\pi i}{n})\mathrm{Id}_n} \mathrm{SL}_n(\mathcal{C}_T) \to \mathrm{PGL}_n(\mathcal{C}_T) \to 0 \text{ and } 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n \to 0.$$

Serre 证明了，若 3.1 中的复合映射是同构，则 T 是有限 CW 复形（参见 [Gro68，I，推论 1。7]）。我们将放宽这一有限性假设。

定理 3.3。设 T 是有限维 *CW* 复形。那么典范态射 $\mathrm{Br}^{\mathrm{top}}(T) \to H^2(T, \mathcal{C}_T^\times)_{\mathrm{tors}} \to H^3(T, \mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}$ 是同构。

证明。由于 T 是仿紧的（参见 [Miy52]），层 $\mathcal{C}_T$ 是细层。因此$H^2(T, \mathcal{C}_T) = H^3(T, \mathcal{C}_T) = 0$，所以 $H^2(T, \mathcal{C}_T^\times) \to H^3(T, \mathbb{Z})$ 是同构。态射 $\mathrm{Br}^{\mathrm{top}}(T) \to H^2(T, \mathcal{C}_T^\times)_{\mathrm{tors}}$ 是单射（参见 [Gro68，I，命题 1.4 3°]）。

为证明 $\mathrm{Br}^{\mathrm{top}}(T) \to H^3(T, \mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}$的满射性，取定 $\alpha \in H^3(T, \mathbb{Z})[n]$。写作 $\alpha = \partial(\beta)$，其中 ∂ 是与 $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n \to 0$的上同调长正合列相关联的边界映射。选取 Eilenberg–MacLane CW 复形 $K(\mathbb{Z}/n, 2)$，使其每个维数上都只有有限个胞腔（参见 [Tho54，§II.6，第 36] 页）。令 d为 S的维数，并令 $i\colon K(\mathbb{Z}/n,2)^{\leq d} \to K(\mathbb{Z}/n,2)$ 为 $K(\mathbb{Z}/n, 2)$的 d-骨架的包含映射。令 $\beta_0 \in H^2(K(\mathbb{Z}/n,2)\ \mathbb{Z}/n)$ 为典范类。由胞腔逼近 [Hat02，定理 4.8]，，可找到连续映射 $f\colon T \to K(\mathbb{Z}/n, 2)^{\leq d}$，满足 $f^* i^* \beta_0 = \beta$。根据 Serre 定理（参见 [Gro68，I，推论 1.7]），类 $i^*\partial(\beta_0) \in H^3(K(\mathbb{Z}/n,2)^{\leq d}, \mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}$来自 $\mathrm{Br}^{\mathrm{top}}(K(\mathbb{Z}/n, 2)^{\leq d})$。因此，$\alpha = f^* i^* \partial(\beta_0)$ 来自 $\mathrm{Br}^{\mathrm{top}}(T)$。□

备注 3.4. 我们对定理 3.3 的证明将有限维 CW 复形的情形归结为 Serre 处理过的有限 CW 复形情形。然而，Serre 在 [Gro68，I，推论 17] 中给出的论证不能直接应用于无限的有限维 CW 复形，原因如下。

令 $\mathrm{PGL}_\infty(\mathbb{C}) := \mathrm{colim}_{n \geq 1} \mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$，其中转移映射由与单位矩阵作张量积给出。若 T 是有限 CW 复形（ Serre 使用了这一点），则连续映射 $T \to \mathrm{BPGL}_\infty(\mathbb{C})$ 对某个 n 可提升到 $\mathrm{BPGL}_n(\mathbb{C})$，但若 T 仅为有限维，则未必如此。一个反例是取 T 为 $\mathrm{BPGL}_\infty(\mathbb{C})$ 的 3-骨架。事实上，由于 $H^2(\mathrm{BPGL}_\infty(\mathbb{C})\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 中的典范类不是挠元（因为其到 $H^2(\mathrm{BPGL}_n(\mathbb{C})\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 的限制的阶恰好为 n），它到 $H^2(T, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 的限制不是挠元，因此自然映射 $T \to \mathrm{BPGL}_\infty(\mathbb{C})$ 对任何 n 都不能提升为映射 $T \to \mathrm{BPGL}_n(\mathbb{C})$。

定理 3.5. 设 S 为有限维 *Stein* 空间。自然态射

$$\mathrm{Br}(\mathcal{O}(S)) \to \mathrm{Br}_{\mathrm{an}}(S) \to \mathrm{Br}_{\mathrm{top}}(S) \to H^3(S,\mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}$$

是同构。

证明。由于 S 具有有限维 CW 复形的同伦型（见[Ham86，Korollar]），由命题3.1和 3.2 以及定理 3.3即可得出此结论。□

3.3. **无限维 Stein 空间的情形。** 若 Stein 空间 S 不假设为有限维，则$\mathrm{Br}(\mathcal{O}(S)) \to \mathrm{Br}^{\mathrm{top}}(S)$(等价地$\mathrm{Br}(\mathcal{O}(S)) \to \mathrm{Br}_{\mathrm{an}}(S)$ 根据命题 3.1) 一般而言既非单射也非满射。本段给出此类例子，以求完整。

以下定理归功于 Eliashberg [Eli90] 和 Gompf [Gom98]。

定理 3.6。 设 T 是一个维数为 n的可数 *CW* 复形。存在一个维数为 n 的 *Stein* 流形 S，其同伦型与 T相同。

证明。当 $n = 1$时，可取 S 为若干个 $\mathbb{C}$的不交并，再减去一个离散子集。设 $n \geq 2$。根据 [Whi49，定理 13]，，可假设 T 是一个维数为 n的局部有限可数单纯复形。 [Spa66，第 3 章第 2 节定理 9] 的证明（将其中的 $\mathbb{R}^{2n+1}$替换为 $\mathbb{R}^{2n}$ ）表明，可以将 T线性浸入 $\mathbb{R}^{2n}$。在此浸入中， T的一个适当管状邻域 S 是一个维数为 $2n$、同伦型与 T相同的可平行化流形；也就是说，它是一个把手体的内部（按 [Gom09，第 2] 节的定义），其所有把手的指标均为 $\leq n$。应用 [Eli90，定理 1.3.1] （当 $n \geq 3$ 时）以及 [Gom98，定理 3.1] （当 $n = 2$ 时）（另见 [Gom09，推论 2.2 和定理 2.4]）可知， S 同胚于一个维数为 n的 Stein 流形。□

引理 3.7。 存在一个可数 *CW* 复形 T，满足 $H^2(T,\mathbb{Z}) = 0$，以及定义在 T 上的秩为 2 的复向量丛 E，使得复向量丛 $End(E)$是平凡的，且 $c_2(E) \in H^4(T,\mathbb{Z})$ 在环 $H^*(T,\mathbb{Z})$中不是幂零的。

证明。 取 T 为伴随映射 $BSL_2(\mathbb{C}) \to BGL_3(\mathbb{C})$ 的同伦纤维。令 $\mathcal{F}$ 为 $BSL_2(\mathbb{C})$ 上的泛向量丛，并令 $\mathcal{E}$ 为其拉回到 T 上所得的向量丛。取整数系数，纤维化序列 $GL_3(\mathbb{C}) \to T \to BSL_2(\mathbb{C})$ 的 Leray 谱序列表明 $H^2(T,\mathbb{Z}) = 0$。取系数 $\mathbb{Z}/2$ 时，它为

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathrm{BSL}_2(\mathbb{C}),\mathbb{Z}/2) \otimes H^q(\mathrm{GL}_3(\mathbb{C}),\mathbb{Z}/2) \Rightarrow H^{p+q}(T,\mathbb{Z}/2). \tag{3.3}$$

外代数 $H^*(GL_3(\mathbb{C}),\mathbb{Z}/2)$ 的生成元传递到 $End(E)$ 的某些陈多项式模 2（见 [Bor53, §19]），这些多项式均为零。因此，(3.3) 退化。由此，拉回映射 $\mathbb{Z}/2[c_2(E)] = H^*(BSL_2(\mathbb{C}),\mathbb{Z}/2) \to H^*(T,\mathbb{Z}/2)$ 是单射。引理得证。□

命题 3.8。 存在一个 *Stein* 空间 S，使得自然态射$\mathrm{Br}(\mathcal{O}(S)) \to \mathrm{Br}_{\mathrm{an}}(S)$ 不是单射。

证明。令 T和 E 如引理 3.7 中所述。利用定理 3.6，找到一个 Stein 空间 S_i，其同伦型与 T 的 i 骨架相同。令 S 为 $(S_i)_{i\geq 3}$ 的不交并（因此 $H^2(S,\mathbb{Z}) = 0$）。令 E_S 为 S 上由 E 诱导的向量丛（根据冈原理 [Gra58, Satz II]，赋予其全纯向量丛结构）。向量丛 $End(E_S)$ 在拓扑上是平凡的，因此根据冈原理 [Gra58, Satz I]，在全纯意义下也是平凡的。利用 (2.2)，可以在 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}(S))$ 上的一个平凡向量丛上找到代数结构 A，使得 $A^{\mathrm{an}} \simeq End(E_S)$ 作为代数同构。

由于 A^{an} 是阿祖玛雅，判据 [Gro68, I, Théorème 5.1 (ii) et Remarque 5.12] 和 (2.2) 表明 A 是阿祖玛雅。其类 $[\mathrm{A}] \in \mathrm{Br}(\mathrm{O}(S))$ 在 $\mathrm{Br}_{\mathrm{an}}(S)$ 中消失，因为 $\mathrm{A}^{\mathrm{an}} \simeq \mathrm{E}nd(\mathrm{E}_S)$。假设 $[\mathrm{A}] \in \mathrm{Br}(\mathrm{O}(S))$ 消失。正合列

$$H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}(S)), \mathrm{GL}_2) \to H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}(S)), \mathrm{PGL}_2) \to H^2_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}(S)), \mathbb{G}_m)$$

的 [Gir71，第 IV 章，注释 4.2。10] 给出一个向量丛 $\mathcal{F}$ 在 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}(S))$，满足 $\mathcal{A} \simeq \mathcal{E}nd(\mathcal{F})$，因此 $\mathcal{E}nd(\mathcal{E}_S) \simeq \mathcal{E}nd(\mathcal{F}^{\mathrm{an}})$ 作为代数。正合列

$$H^1(S, \mathcal{O}_S^\times) \to H^1(S, \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_S)) \to H^1(S, \mathrm{PGL}_2(\mathcal{O}_S))$$

给出了全纯线丛 L，定义在 S 上，且 $\mathrm{E}_S \simeq \mathrm{F}^{\mathrm{an}} \otimes \mathrm{L}$（参见 [Gir71, 第 III 章，命题 3.4.5 (iv)]）。由于 $H^2(S, \mathbb{Z}) = 0$，冈原理 [Gra58, Satz I] 表明 L 是平凡的，因此 $\mathrm{E}_S \simeq \mathrm{F}^{\mathrm{an}}$。由于 F 由有限多个截面生成，$\mathrm{F}^{\mathrm{an}}$也如此，因此 E_S也如此。这便给出了定义在 S 上的向量丛短正合列，其形式为 $0 \to \mathrm{G} \to \mathrm{O}_S^{\oplus N} \to \mathrm{E}_S \to 0$。取陈类可知 $(1 + c_2(\mathrm{E}_S))^{-1} = c(\mathrm{G})$。这与 $c_2(\mathrm{E}_S)$ 非幂零这一事实矛盾。□

引理 3.9. *存在一个可数 CW 复形 T 以及一个拓扑阿祖马亚代数 $\mathcal{A}$，其次数为 2，定义在 T 上，其在 $H^3(T, \mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}$ (见 (3.1)) 中的类在 T 的上同调环中不是幂零元。*

证明。取 T，其同伦型为 $\mathrm{BPGL}_2(\mathbb{C})$，并令$\mathcal{A}$ 为定义在 T 上的典范拓扑阿祖玛雅代数，其次数为 2。由于 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ 与其极大紧子群 $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ 具有相同的同伦型，可计算得

$$H^*(T, \mathbb{Z}/2) = H^*(\mathrm{BPGL}_2(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2) = H^*(\mathrm{BSO}_3(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2[w_2, w_3], \tag{3.4}$$

其中 w_i 是斯蒂费尔–惠特尼类。阿祖玛雅代数$\mathcal{A}$在 $H^2(T, \mathbb{Z}/2)$ (见 (3.2)) 中的类非零，因此等于 w_2。其类在 2模下于 $H^3(T, \mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}$ 中的约化因此等于 $\mathrm{Sq}^1 w_2 = w_3$ (根据吴公式[MS74，问题 8-A])，由 (3.4) 可知其不是幂零元。□

命题 3.10. *存在一个 Stein 空间 S，使得自然态射$\mathrm{Br}(\mathcal{O}(S)) \to \mathrm{Br}_{\mathrm{an}}(S)$ 不是满射。*

证明。设 T 和 $\mathcal{A}$ 如引理 3.9所述。固定一个 Stein 空间 S_i，其同伦型为 i维骨架的 T（见定理 3.6）。令 S 为这些 $(S_i)_{i \geq 0}$的不交并。令 $\mathcal{A}_S$ 为 S 上由 $\mathcal{A}$诱导的拓扑阿祖马亚代数。利用冈原理 [Gra58，Satz II]，将 $\mathcal{A}_S$ 视为全纯阿祖马亚代数。

反设存在一个定义在谱$(\mathrm{O}(S))$上的阿祖马亚代数 B，使得 $[\mathrm{A}_S] = [\mathrm{B}^{\mathrm{an}}]$ 属于 $\mathrm{Br}_{\mathrm{an}}(S) = \mathrm{Br}^{\mathrm{top}}(S)$（见命题 3.1）。利用 Gro68, I, Théorème 5.1(ii)] 对阿祖马亚代数的刻画，基于 Stacks Project, 引理 01ZR 和 0B8W(1)] 的极限论证表明，存在一个有限生成的子-$\mathbb{C}$-代数 $R \subset \mathrm{O}(S)$，其诱导态射为 $\pi : \mathrm{Spec}(\mathrm{O}(S)) \to V := \mathrm{Spec}(R)$，并且存在定义在 V 上的阿祖马亚代数 C，使得 $\mathrm{B} \simeq \pi^* \mathrm{C}$。

令 V^{an} 和 C^{an} 分别为 V 和 C 按照 [Ser56] or[SGA1, Exp. XII] 的定义所得的解析化。令 $f\colon S \to V\mathrm{an}$ 为 $V\mathrm{an}$ 的泛性质所导出的全纯映射（见 [SGA1, Exp. XII, 定理 1.1]）。则 $f^*\mathrm{C}^{\mathrm{an}} \simeq \mathrm{B}^{\mathrm{an}}$。令 $\gamma \in H^3(V\mathrm{an}\mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}$ 为与 C^{an} 相关联的类（见 (3.1)）。该类是幂零的，因为 V^{an} 具有有限 CW 复形的同伦型（见 [Hir75, 定理 p. 170, 注 1.10]）。因此，与 $f^*\mathrm{C}^{\mathrm{an}} \simeq \mathrm{B}^{\mathrm{an}}$ 相关联的类 $f^*\gamma \in H^3(S, \mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}$ 也同样是幂零的。由于 $[\mathrm{A}_S] = [\mathrm{B}^{\mathrm{an}}]$，这与我们对 A_S 的选择相矛盾。□

4. 2 次比较定理

4.1. 有限系数。 我们从一个众所周知的引理开始。

引理 4.1. 设 S 是一个有限维 *Stein* 空间。自然态射

$$H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}(S)),\mathbb{G}_m)\to H^1(S,\mathcal{O}_S^\times)\to H^1(S,\mathcal{C}_S^\times) \tag{4.1}$$

是同构。

证明. 由于 S 是有限维的，解析化函子（见 §2.2）在可逆层同构类的集合之间诱导出一个双射，其中一方是$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}(S))$，另一方是 S （见 [Ben24a，命题 2.5 和注 2.6]）。这表明 (4.1) 的第一个箭头是同构。

由于 $H^1(S,\mathsf{O}_S)=H^2(S,\mathsf{O}_S)=0$（因为 S是 Stein 空间），且 $H^1(S,\mathsf{C}_S)=H^2(S,\mathsf{C}_S)=0$（因为 C_S 是精细层），指数正合列 $0\to\mathbb{Z}\xrightarrow{2\pi i}\mathsf{O}_S\xrightarrow{\exp}\mathsf{O}_S^\times\to 0$（见 [GR79, 引理 p. 142]）和 $0\to\mathbb{Z}\xrightarrow{2\pi i}\mathsf{C}_S\xrightarrow{\exp}\mathsf{C}_S^\times\to 0$ 表明，两个群 $H^1(S,\mathsf{O}_S^\times)$ 和 $H^1(S,\mathsf{C}_S^\times)$ 都自然同构于 $H^2(S,\mathbb{Z})$。由此可得，(4.1) 的第二个箭头是同构。□

定理 4.2。 设 S 是有限维 *Stein* 空间。自然态射 *s*

$$H^2_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}(S)),\mathbb{Z}/n)\to H^2(S,\mathbb{Z}/n)$$

对所有 $n\geq 1$ 都是同构。

证明。 考虑 Kummer 短正合列

$$0\to\mathbb{Z}/n\xrightarrow{1\mapsto\exp(\frac{2\pi i}{n})}\mathbb{G}_m\xrightarrow{n}\mathbb{G}_m\to 0 \tag{4.2}$$

在 $X:=$谱$(\mathcal{O}(S))$ 上的 étale 层，以及类似的短正合列

$$0\to\mathbb{Z}/n\xrightarrow{1\mapsto\exp(\frac{2\pi i}{n})}\mathcal{C}_S^\times\xrightarrow{n}\mathcal{C}_S^\times\to 0 \tag{4.3}$$

在 S 上。(4.2) 和 (4.3) 的上同调长正合列诱导出一个行正合的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & H^1_{\text{ét}}(X,\mathbb{G}_m)/n & \to & H^2_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}/n) & \to & H^2_{\text{ét}}(X,\mathbb{G}_m)[n] & \to & 0\\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & H^1(S,\mathcal{C}_S^\times)/n & \to & H^2(S,\mathbb{Z}/n) & \to & H^2(S,\mathcal{C}_S^\times)[n] & \to & 0. \end{array} \tag{4.4}$$

鉴于引理4.1，(4.4) 中左侧的垂直箭头是同构。

态射 (2.1) 将 (4.4) 的右上群与 $\mathrm{Br}(\mathcal{O}(S))[n]$ 通过 Gabber 定理 [Gro68, I, 推论 1.7]，并将 (4.4) 的右下群与 $\mathrm{Br}^{\mathrm{top}}(S)[n]$ 根据定理 3.3 相识。由于这些识别彼此相容，(4.4) 的右侧垂直箭头是一个同构。

该定理现可由将五引理应用于 (4.4) 得出。 □

4.2. 中心可分代数。 本段汇集了中心可分代数的一般性质，这些性质将在定理 4.5的证明中用到。

设 X 为一个概形。设 $\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{N}$ 为拟凝聚 $\mathcal{O}_X$-模，并固定一个 $\mathcal{O}_X$-模的满射态射 $\lambda\colon\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{N}\to\mathcal{O}_X$。所谓 初等代数 $\mathcal{M}\otimes^{\lambda}_{\mathcal{O}_X}\mathcal{N}$ 是（可能非幺的）拟凝聚结合代数，其底层层为 $\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{N}$，并赋予乘法

$$(m\otimes n)\star(m'\otimes n')=\lambda(m'\otimes n)\cdot(m\otimes n'). \tag{4.5}$$

按照 Heinloth 与 Schröer [HS09 定义 2.1], ，我们称一个（可能非幺的）拟凝聚结合 $\mathcal{O}_X$-代数 A 是中心可分的，如果它 étale 局部同构于一个初等代数（在所引文献中，该条件仅要求光滑局部成立，但参见 [Stacks Project, 引理 055U]）。设 $p: U \to X$ 为一个 étale 态射。A 在 U 上的一个分裂由如下数据组成：拟凝聚 $\mathcal{O}_U$-模 M 与 N、一个满射态射 $\lambda: \mathrm{M} \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathrm{N} \to \mathcal{O}_U$，以及一个代数同构 $\varphi: \mathrm{M} \otimes^{\lambda}_{\mathcal{O}_U} \mathrm{N} \xrightarrow{\sim} p^*\mathrm{A}$。

正如 [HS09, p. 1191], 中所解释的，将 $p: U \to X$ 分裂范畴（M, N λ, φ）与 p^*A 在 U 上的分裂（以及分裂之间的同构）相联系，会得到一个定义在 X 的小 étale 位上的层 $\mathfrak{X}_{\mathcal{A}}$。根据 Raeburn 和 Taylor [RT85, Lemmas 2.3 and 2.4] 的结果（并且由于根据我们的假设，分裂 étale 局部存在），层 $\mathfrak{X}_{\mathcal{A}}$ 是一个 $\mathbb{G}_m$-gerbe。我们用 [A] $\in H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ 表示 $\mathfrak{X}_{\mathcal{A}}$ 的类。

以下定理最初见于 [RT85, Corollary 4.1]（其中的错误后来在 [CG98, Theorem 3.4]中被指出并纠正）。下面的表述则源自 Heinloth 和 Schröer 的工作 [HS09]。

定理 4.3. 设 X 为一个拟紧且拟分离的概形。固定一个上同调类 $\alpha \in H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$。存在一个定义在 X 上、有限表示的中心可分代数 A，使得 $[A] = \alpha$；还存在一个满射 *étale* 态射 $p: U \to X$，以及一个 $(M, N\ \lambda, \varphi)$ 分裂，使 p^*A 在 U 上分裂，且 M 和 N 均为有限表示。

证明。通过极限论证（基于 [SP, Proposition 01ZA] 和 [SP, Theorem 09YQ] 在 F $_i = \mathbb{G}_m$下的应用），我们可以假设 X 是诺特的。于是由 [HS09, Theorem 3.1 及其证明] 可知，存在 X 上的一个中心可分代数 A，且满足 [A] $= \alpha$。根据 [HS09, Theorem 2.5], ，可将 $\mathcal{O}_X$-代数 A 选为凝聚的。此外，鉴于 [HS09, Theorem 2.5 (iii) ⇒(ii)],的证明，我们可以假设，对于某个满射 étale 态射 $p: U \to X$，存在 U 上 A 的一个分裂 (M, N λ, φ)，其中 M 和 N 均为凝聚层。□

我们将在复解析几何中使用上述构造的类似形式。设 S 为一个复空间。给定 S 上的凝聚层 M 和 N，以及一个满射态射 $\lambda: \mathrm{M} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathrm{N} \to \mathcal{O}_S$，与 (M, N λ) 相关联的初等代数是一个凝聚 $\mathcal{O}_S$-代数，其底层层为 $\mathrm{M} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathrm{N}$，并赋予乘法 (4.5)。若一个凝聚 $\mathcal{O}_S$-代数 A 局部同构于某个初等代数，则称其为中心可分代数。A 在开子集 $V \subset S$ 上的一个分裂，是指 V 上的凝聚层 M 和 N、一个满射态射 $\lambda: \mathrm{M} \otimes_{\mathcal{O}_V} \mathrm{N} \to \mathcal{O}_V$，以及一个代数同构 $\varphi: \mathrm{M} \otimes^{\lambda}_{\mathcal{O}_V} \mathrm{N} \xrightarrow{\sim} \mathrm{A}|_V$。

引理 4.4. 设 S 是一个复空间。设 A 是一个中心可分的 $\mathcal{O}_S$-代数。层 $\mathfrak{X}_{\mathcal{A}}$ 在 S 上，将每个开子集 $V \subset S$ 对应到 $A|_V$的分裂范畴 $(M, N\ \lambda, \varphi)$（以及分裂之间的同构），是一个 $\mathcal{O}_S^\times$-*gerbe*。

证明. 根据假设，A 的分裂局部存在。由 [RT85, 引理 2.3], 可知，A 在 $V \subset S$上的两个分裂在茎上同构；因此，由相干性，它们局部同构（参见 [GR84, 附录, §2.4]）。此外，A 在 $V \subset S$ 上的分裂 (M, N λ, φ) 的一个自同构由 M 上乘以某个（唯一的）可逆函数，并在 N 上乘以其逆给出（在茎上的情形由 [RT85, 引理 2. 4] 成立，并由相干性推广到整体）。□

若$\mathcal{A}$ 是复空间 S上的中心可分代数，我们令 $[\mathcal{A}] \in H^2(S, \mathcal{O}_S^\times)$表示引理$\mathcal{O}_S^\times$-gerbe $\mathfrak{X}_{\mathcal{A}}$ 所定义的类，见引理4.4。

4.3. **可逆系数**。

定理 4.5。设 S 是一个有限维 *Stein* 空间。自然态射

$$H^2_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}(S)), \mathbb{G}_m) \to H^2(S, \mathcal{O}_S^\times) \tag{4.6}$$

是单射。

证明。取 (Spec(O(*S*)) $\mathbb{G}_m$) 中属于 (4.6) 的核的 $\alpha \in H^2_{\text{ét}}$。应用定理 4.3，得到 Spec(O(*S*)) 上一个有限表示的中心可分代数 A，其中 $[\mathrm{A}] = \alpha$；一个满射 étale 态射 $p\colon U \to X$；以及 U 上 p^*A 的一个分裂 (M, N λ, φ)，其中 M 和 N 是有限表示的拟凝聚模。取 M 和 N 的表示 $\mathrm{O}_U^{\oplus m_2} \to \mathrm{O}_U^{\oplus m_1} \to \mathrm{M} \to 0$ 及 $\mathrm{O}_U^{\oplus n_2} \to \mathrm{O}_U^{\oplus n_1} \to \mathrm{N} \to 0$。

现在我们将所有这些对象解析化（按 §2.2 的意义）。A 的解析化 A^{an} 是一个凝聚 O_S-代数，作为 O_S-模全局有限表示。由于 $p^{\mathrm{an}}\colon U^{\mathrm{an}} \to S$ 是满射局部双全纯映射，数据 (M^{an}, N^{an}, λ^{an}, φ^{an}) 表明 A^{an} 具有局部分裂，因此是一个中心可分 O_S-代数。M 和 N 的上述表示诱导出 M^{an} 和 N an 的表示 $\mathrm{O}_{U^{\mathrm{an}}}^{\oplus m_2} \to \mathrm{O}_{U^{\mathrm{an}}}^{\oplus m_1} \to \mathrm{M}^{\mathrm{an}} \to 0$ 及 $\mathrm{O}_{U^{\mathrm{an}}}^{\oplus n_2} \to \mathrm{O}_{U^{\mathrm{an}}}^{\oplus n_1} \to \mathrm{N}^{\mathrm{an}} \to 0$。

类 $[\mathcal{A}^{\mathrm{an}}] \in H^2(S, \mathcal{O}_S^\times)$ 属于 $\mathcal{A}^{\mathrm{an}}$，是 $[\mathcal{A}] = \alpha$ 在（4.6）下的像，因此为零。由此可知，$\mathcal{A}^{\mathrm{an}}$ 在 S 上是分裂的。因此，存在 S 上的凝聚层 $\mathcal{M}_S$ 和 $\mathcal{N}_S$，以及一个满射态射 $\lambda_S\colon \mathcal{M}_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{N}_S \to \mathcal{O}_S$ 和一个代数同构 $\varphi_S\colon \mathcal{M}_S \otimes^{\lambda_S}_{\mathcal{O}_S} \mathcal{N}_S \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}^{\mathrm{an}}$。

由引理 4.4，层 $p^*\mathrm{M}_S$ 和 M^{an} 在 U^{an} 上局部同构。因此，对于所有 $x \in S$，存在自由分解 $\mathrm{O}_S^{\oplus m_2,x} \to \mathrm{O}_S^{\oplus m_1,x} \to (\mathrm{M}_S)_x \to 0$。根据下面的引理 4.6，对于某些整数 m_1' 和 m_2'，存在自由分解 $\mathrm{O}_S^{\oplus m_2'} \to \mathrm{O}_S^{\oplus m_1'} \to \mathrm{M}_S \to 0$。完全相同的论证表明，存在整数 n_1' 和 n_2'，以及自由分解 $\mathrm{O}_S^{\oplus n_2'} \to \mathrm{O}_S^{\oplus n_1'} \to \mathrm{N}_S \to 0$。

应用 [Ben24a 命题 2.5]（见 (2.2)）可知，在谱(O(*S*))上存在有限表示的凝聚层 P 和 Q，并配有同构 $\mathrm{P}^{\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{M}_S$ 和 $\mathrm{Q}^{\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{N}_S$；存在层的满射态射 $\mu : \mathrm{P} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}(S))}} \mathrm{Q} \to \mathrm{O}^{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}(S))}$，使得 $\mu^{\mathrm{an}} = \lambda$；还存在代数同构 $\psi : \mathrm{P} \otimes^{\mu} \mathrm{O}_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}(S))} \mathrm{Q} \xrightarrow{\sim} \mathrm{A}$，且满足 $\psi^{\mathrm{an}} = \varphi$。因此，中心可分代数 A 是分裂的，并且 $\alpha = [\mathrm{A}] = 0$ 属于 $H^2_{\text{ét}}$(谱(O(*S*)) $\mathbb{G}_m$)。 □

引理 4.6。设 S 是一个有限维 *Stein* 空间。设 $\mathcal{G}$ 是 S上的一个凝聚层。假设存在整数 n_1 和 n_2 以及自由分解

$$\mathcal{O}_{S,x}^{\oplus n_2} \to \mathcal{O}_{S,x}^{\oplus n_1} \to \mathcal{G}_x \to 0 \tag{4.7}$$

对所有 $x \in S$均成立。则存在整数 n_1' 和 n_2' 以及一个自由分解

$$\mathcal{O}_S^{\oplus n_2'} \to \mathcal{O}_S^{\oplus n_1'} \to \mathcal{G} \to 0. \tag{4.8}$$

证明。由（4.7）可知，$\mathcal{G}$ 的所有茎都由 n_1 截面芽生成。此外，由于$\mathcal{G}$ 也是整体生成的（因为 S 是 Stein），由 [Kri69的定理 1] 可知，存在一个整数 n_1' 以及一个满射态射$\mathcal{O}_S^{\oplus n_1'} \to \mathcal{G}$。设$\mathcal{K}$ 为此态射的核，则有一个短正合列

$$0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{O}_S^{\oplus n_1'} \to \mathcal{G} \to 0. \tag{4.9}$$

固定 $x \in S$。令 $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_{S,x}$ 为$\mathcal{O}_S$的极大理想，x。将（4.9）与 $\mathcal{O}_{S,x}$-模 $\mathcal{O}_{S,x}/\mathfrak{m}_x$ 张量，得到一个正合列

$$\operatorname{Tor}_1^{\mathcal{O}_{S,x}}(\mathcal{G}_x, \mathcal{O}_{S,x}/\mathfrak{m}_x) \to \mathcal{K}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{K}_x \to (\mathcal{O}_{S,x}/\mathfrak{m}_x)^{\oplus n_1'}. \tag{4.10}$$

正合列 (4.7) 表明，$\operatorname{Tor}^{\mathcal{O}_{S,x}}_1$ (Gx, OS,x/mx) 是一个维数为 $\leq n_2$ 的 OS,x/mx-向量空间。由 (4.10) 可知，OS,x/mx-向量空间 Kx/mxKx 的维数为 $\leq n_1' + n_2$。由中山引理，我们推得 Kx 由 $n_1' + n_2$ 个截面芽生成。此外，由于 S 是 Stein 空间，K 还是整体生成的；再应用 [Kri69, 定理 1]，可得一个整数 n_2' 以及一个满射态射 $\mathrm{O}_S^{\oplus n_2'} \to$K。这就得到了所需的自由分解 (4.8)。□

推论 4.7。设 S 是维数为 ≤ 2 的 *Stein* 空间。那么

$$H^2_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}(\mathcal{O}(S)), \mathbb{G}_m) = 0.$$

证明。指数正合列 $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2\pi i}$OS exp⟶$\mathrm{O}_S^\times \to 0$ 以及 H^2(S, OS) 和 H^3(S, OS) 的消失（因为 S 是 Stein 空间）表明，H^2(S, $\mathrm{O}_S^\times$) 同构于 H^3(S, $\mathbb{Z}$)；后者为零，因为 S 具有维数为 2 的 CW 复形的同伦型（见 [Ham86, Korollar]）。由定理 4.5 可推得 $H^2_{\text{ét}}$(谱(O(S)) $\mathbb{G}_m$) 消失。□

通过一个类似但更简单的论证，可以得到以下定理的代数类比 4.5。它可以看作 [Sch05 命题 1.3 和 1.4] 的一个变体，其中考虑了 $H^2_{\text{ét}}(V, \mathbb{G}_m)$ 的非挠类。在命题中，解析化按 [Ser56] 的含义理解（另见 [SGA1，Exp. XII, §1]，当 V 可能非约化或非射影时）。

命题 4.8。若 V 是定义在 $\mathbb{C}$上的真代数簇，则自然态射

$$H^2_{\text{ét}}(V, \mathbb{G}_m) \to H^2(V^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{V^{\mathrm{an}}}^\times) \tag{4.11}$$

是单射

证明。取 α 为 (4.11) 的核中的元素。令 A 如定理 4.3 中所述。由于 [A^{an}] = 0，存在定义在 V^{an} 上的凝聚层 M 和 N、一个凝聚层的满射态射λ: M $\otimes_{\mathcal{O}_{V^{\mathrm{an}}}}$N $\to$O$_V$an，以及一个代数同构 φ: M $\otimes^{\lambda}_{\mathcal{O}_V}$an N $\xrightarrow{\sim}$ A^{an}。根据塞尔 GAGA 定理（见 [Ser56, §12] 或 [SGA1, Exp. XII, Théorème 4.4]），可以将 (M, N λ, φ) 代数化。由此可知 A 是分裂的，因此 $\alpha = 0$。□

4.4. **上同调布劳尔群中的一个非挠类**。下一个命题表明，使用阿祖马亚代数（而不是更一般的中心可分代数）原本不足以证明定理 4.5。

命题 4.9. 存在一个连通正规施泰因空间 S，其维数为3，使得 $H^2_{\text{ét}}$(谱(O(S)) $\mathbb{G}_m$) 不是挠群。

证明。设 $V \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ 为具有单节点的三次三维簇。簇 V 是局部阶乘的（参见例如 [CDG04，定理]），但其在奇点处的亨泽尔化的类群同构于 $\mathbb{Z}$。因此由 [Gro68, II，命题 1.7 及 (7bis) 第 75] 页可知，$H^2_{\text{ét}}(V, \mathbb{G}_m)$ 包含一个同构于 $\mathbb{Z}$ 的子群。

取定一个非挠的 $\alpha \in H^2_{\text{ét}}(V, \mathbb{G}_m)$。像 $\alpha^{\mathrm{an}} \in H^2(V_{\mathrm{an}}, \mathcal{O}^\times_{V\,\mathrm{an}})$，即 α 经 (4.11) 所成者，是非挠的，由命题4.8 （此处解析化按 [Ser56] 或 [SGA1，Exp. XII] 的意义）。由于 $H^2(V_{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{V^{\mathrm{an}}})$ $= H^2(V, \mathcal{O}_V) = 0$（由 GAGA,

见 [Ser56，§12，定理 1])， α^{an} 经指数正合列的边界映射所得的像 $\beta \in H^3(V_{\mathrm{an}}\mathbb{Z})$ 是非挠的。

令 $D \subset V$ 为光滑超平面截面，并设 $U := V \setminus D$。复空间 $S := U^{\mathrm{an}}$ 是三维连通正规空间（因为 U 也是如此），且为 Stein 空间，因为 U 是仿射的。带支集上同调的上同调长正合列

$$H^3_{D^{\mathrm{an}}}(V^{\mathrm{an}}, \mathbb{Z}) \to H^3(V^{\mathrm{an}}, \mathbb{Z}) \to H^3(S, \mathbb{Z})$$

以及 Thom 同构 $H^3_{D^{\mathrm{an}}}(V_{\mathrm{an}}\mathbb{Z}) \simeq H^1(D^{\mathrm{an}}, \mathbb{Z}) = 0$ 表明 $\beta|_S$ 是非挠的。因此，类 $\alpha^{\mathrm{an}}|_S \in H^2(S, \mathcal{O}_S^\times)$ 是非挠的。

考虑由解析化态射 $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(U_{\mathrm{an}}) = \mathcal{O}(S)$ 诱导的态射 $f : 谱(\mathcal{O}(S)) \to U$，以及类 $f^*(\alpha|_U) \in H^2_{\text{ét}}(谱(\mathcal{O}(S)) \ \mathbb{G}_m)$。由于 $f^*(\alpha|_U)$ 在自然态射 $H^2_{\text{ét}}(谱(\mathcal{O}(S)) \ \mathbb{G}_m) \to H^2(S, \mathcal{O}_S^\times)$ 下的像与非挠类 $\alpha^{\mathrm{an}}|_S$ 一致，因此类 $f^*(\alpha|_U)$ 本身是非挠的。这就证明了该命题。□

备注 4.10. (i) 命题 4.9 中的例子在几个方面都是最优的。设 S 是一个 Stein 空间。首先，若 S 是有限维且局部阶乘的（例如一个流形），那么 $H^2_{\text{ét}}(谱(\mathcal{O}(S)) \ \mathbb{G}_m)$ 根据下文定理 5.1 是挠元的。其次，若 S的维数为 ≤ 2，则群 $H^2_{\text{ét}}(谱(\mathcal{O}(S)) \ \mathbb{G}_m)$ 由推论 4.7可知为零。

(ii) 与 (i) 相反，存在一个连通正规代数曲面 V，其定义在 $\mathbb{C}$上，并且 $H^2_{\text{ét}}(V, \mathbb{G}_m)$ 不是挠群（见 [Gro68，II，备注 1.11 b)]；注意，那里给出的例子被错误地声称为局部阶乘的）。

5. 全纯函数与亚纯函数

5.1. **扭曲层**。 我们回顾证明定理5.1所需的扭曲层背景知识。更多细节请参见 [Lie07，§2]。

设 $(X, \mathcal{O}_X)$ 是一个环化位点。Giraud 构造了 $\mathcal{O}_X^\times$-gerbe 在 X 上的等价类集合与上同调群 $H^2(X, \mathcal{O}_X^\times)$之间的双射（见 [Gir71，第 IV 章，§3。4]）。

固定 $\alpha \in H^2(X, \mathsf{O}_X^\times)$，并令 $\pi\colon \mathfrak{X} \to X$ 是一个表示 α 的 $\mathsf{O}_X^\times$-gerbe。赋予 $\mathfrak{X}$ 以位点结构，将其环结构定义为 $\mathsf{O}_{\mathfrak{X}} := \pi^*\mathsf{O}_X$ （见 [Lie07，定义 2.1.1.1]）。 α 上的扭曲层是一个 $\mathsf{O}_{\mathfrak{X}}$-模 F，满足 F 上两个自然的右 $\mathsf{O}_{\mathfrak{X}}^\times$ -作用（分别由 $\mathsf{O}_{\mathfrak{X}}$-模结构和 $\mathfrak{X}$ 的惯性作用诱导）相同（精确定义见 [Lie07，定义 2.1.2.2] ）。注意，当 (X, O_X) 是一个概形时，gerbe $\mathfrak{X}$ 是一个代数栈。

我们将采用 Căldăraru [Căl00]提出的另一种关于扭曲层的等价观点。设 $U_\bullet \to X$ 为一个超覆盖，且设 $a \in H^0(U_2, \mathsf{O}_{U_2}^\times)$为表示 α的一个 Čech 上同调余循环。我们用 $p_0, p_1 : U_1 \to U_0$ 表示两个投影，用 $q_0, q_1, q_2 : U_2 \to U_1$ 表示三个投影。Căldăraru-α-扭曲层是一个 O_{U_0}-模 G，配备一个同构 $\psi : p_0^*\mathsf{G} \xrightarrow{\sim} p_1^*\mathsf{G}$，使得 $(q_1^*\psi)^{-1} \circ q_2^*\psi \circ q_0^*\psi = a_\circ$ Lieblich 构造了 α-扭曲层范畴与 Căldăraru-α-扭曲层范畴之间的等价关系 X （见 [Lie07, 命题 2.1.3.3]；证明见 [Lie04, §2.1.3]）。

若 $(X, \mathcal{O}_X)$ 是一个概形，Lieblich 已验证：一个 α-扭层在 X 上是拟凝聚的，当且仅当其相伴的 Căldăraru-α-扭层亦然（见[Lie07，引理 2.2.1.4]）。完全相同的证明表明，一个 α-扭层在 X上具有有限表示，当且仅当其相伴的 Căldăraru-α-扭层亦然。

5.2. **局部阶乘斯坦空间的单射性**。

定理 5.1. 自然态射

$$H^2_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}(S)),\mathbb{G}_m)\to H^2_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(\mathcal{M}(S)),\mathbb{G}_m) \tag{5.1}$$

对任意有限维局部阶乘 *Stein* 空间都是单射的。

证明。 固定 $\alpha\in H^2_{\text{ét}}$(谱($\mathcal{O}(S)$) $\mathbb{G}_m$)，它属于(5.1)的核。利用 [Stacks Project，定理 09YQ]（应用于 $\mathcal{F}_i=\mathbb{G}_m$），可以找到一个非零因子 $a\in\mathcal{O}(S)$，使得 $\alpha|_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}(S)[\frac{1}{a}])}\in H^2_{\text{ét}}$(谱($\mathcal{O}(S)[\frac{1}{a}]$) $\mathbb{G}_m$) 消失。

设 $\mathfrak{X}\to$ 谱(O(S)) 是表示 α 的一个 $\mathbb{G}_m$-gerbe（见 §5.1）。我们对 a 的选取意味着 $\mathbb{G}_m$-gerbe $\mathfrak{X}_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}(S)[\frac{1}{a}])}\to$谱(O($S$)$[\frac{1}{a}]$) 是平凡的。由此可知，在谱(O($S$)$[\frac{1}{a}]$) 上存在一个可逆的 α-扭层 L（见 [Lie08，引理 3.1.1.8]）。将 L 延拓为 $\mathfrak{X}$上的一个有限表示拟凝聚层 F（结合 [Ryd15，引理 4.3 (C2)⇒(E2)] 与 [Ryd23，推论 B]）。用分解 [Lie07，命题 2.2.1.6], 中的一个直和项替换 F，即可保证 F 是谱(O(S)) 上的一个 α-扭层。

固定一个 étale 超覆盖 $U_\bullet\to$ Spec(O(S)) 以及一个余循环 $a\in H^0(U_2,\mathrm{O}^\times_{U_2})$，它们表示 α （由 Verdier 定理可知它们存在，参见 [Stacks Project，命题 09VZ]）。令 (G ψ) 为与 F 相关联的 Căldăraru-α-扭曲有限表示层（沿用 §5.1 中的记号）。将这些数据解析化（按 §2.2 中的意义），得到 S 的局部同构位上的一个超覆盖 $U^{\mathrm{an}}_\bullet\to S$ （该等价于 S 的经典位点，参见 [SGA4$_{\mathrm{III}}$，XI，§4.0]）、一个余循环 $a^{\mathrm{an}}\in H^0(U_2^{\mathrm{an}},\mathrm{O}^\times_{U_2^{\mathrm{an}}})$，以及 S 上的一个 Căldăraru-α^{an}-扭曲凝聚层 (G$^{\mathrm{an}}$, ψ^{an})（其中 α^{an} 是 α 在自然态射 $H^2_{\text{ét}}$(Spec(O(S)) $\mathbb{G}_m$) $\to H^2(S,\mathrm{O}_S^\times)$ 下的像）。

由于$\mathcal{F}$在 $\mathfrak{X}_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}(S)[\frac{1}{a}])}$ 上的限制可逆，$\mathcal{G}$在 $(U_0)_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}(S)[\frac{1}{a}])}$ 上的限制可逆，因此$\mathcal{G}^{\mathrm{an}}$在 $U_0\setminus\{a=0\}$上的限制可逆。由于 $a\in\mathcal{O}(S)$ 是非零因子， a 在 U_0 中的零点集在 U_0中处处稠密。又由于投影 $U_0\to S$ 是局部双全纯映射， U_0 的局部环是阶乘的。因此，$\mathcal{G}^{\mathrm{an}}$ 的双对偶（或反身包）$\mathcal{H}$ 可逆。

令 $p_0,p_1\colon U_1\to U_0$和 $q_0,q_1,q_2\colon U_2\to U_1$为投影（如 §5.1中所述），于是同构 $\psi^{\mathrm{an}}\colon (p_0^{\mathrm{an}})^*\mathcal{G}^{\mathrm{an}}\xrightarrow{\sim}(p_1^{\mathrm{an}})^*\mathcal{G}^{\mathrm{an}}$ 满足

$$((q_1^{\mathrm{an}})^*\psi^{\mathrm{an}})^{-1}\circ(q_2^{\mathrm{an}})^*\psi^{\mathrm{an}}\circ(q_0^{\mathrm{an}})^*\psi^{\mathrm{an}}=a^{\mathrm{an}}.$$

由 ψ^{an} 诱导的同构 $\chi\colon(p_0^{\mathrm{an}})^*\mathcal{H}\xrightarrow{\sim}(p_1^{\mathrm{an}})^*\mathcal{H}$ 于是满足

$$((q_1^{\mathrm{an}})^*\chi)^{-1}\circ(q_2^{\mathrm{an}})^*\chi\circ(q_0^{\mathrm{an}})^*\chi=a^{\mathrm{an}}. \tag{5.2}$$

这意味着，($\mathcal{H}$ χ) 是 S 上一个可逆的 Căldăraru-α^{an}-扭曲凝聚层。

由于 H 可逆，因而局部同构于 O$_{U_0}$，我们可以使用 [Stacks Project，引理 01GJ], 找到一个超覆盖 $V_\bullet\to S$ （位于 S 的局部同构位中）以及一个超覆盖态射 $\xi\colon V_\bullet\to U^{\mathrm{an}}_\bullet$，使得 ξ^*H $\simeq$ O$_{V_0}$。利用这一识别，同构 $\xi^*\chi:\mathrm{O}_{V_1}\xrightarrow{\sim}\mathrm{O}_{V_1}$ 由 O(V_1)$^\times$ 中的一个元素 $b\in$ 乘法给出。通过 ξ 拉回 (5.2) 可知， $\xi^*(a^{\mathrm{an}})$ 是 b 的余边界。因此，$\alpha^{\mathrm{an}}=[a^{\mathrm{an}}]=[\xi^*(a^{\mathrm{an}})]=0$ 属于 $H^2(S,\mathrm{O}_S^\times)$。

由于自然态射 $H^2_{\text{ét}}$(谱($\mathcal{O}(S)$) $\mathbb{G}_m$) $\to H^2(S,\mathcal{O}_S^\times)$ 是单射的，由定理 4.5，我们推出 $\alpha=0$。定理得证。 □

推论 5.2. 自然态射

$$\mathrm{Br}(\mathcal{O}(S))\to H^2_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}(S)),\mathbb{G}_m) \tag{5.3}$$

对于任意有限维局部阶乘 *Stein* 空间，都是一个同构。

证明。根据 Gabber 定理 [Gab81，第 II 章，定理 1]，，态射 (5.3) 将 Br(O(S)) 同构于 $H^2_{\text{ét}}$(Spec(O(S)) $\mathbb{G}_m$) 的挠子群。根据定理 5.1，群 $H^2_{\text{ét}}$(Spec(O(S)) $\mathbb{G}_m$) 嵌入伽罗瓦上同调群 $H^2_{\text{ét}}$(Spec(M(S)) $\mathbb{G}_m$)，因此是挠群。这就证明了该推论。□

推论 5.3。自然态射

$$\mathrm{Br}(\mathcal{O}(S)) \to \mathrm{Br}(\mathcal{M}(S))$$

对任意有限维局部阶乘 *Stein* 空间都是单射。

证明。由于群 $\mathrm{Br}(\mathcal{O}(S))$ 和 $\mathrm{Br}(\mathcal{M}(S))$ 分别嵌入 $H^2_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}(S))\ \mathbb{G}_m)$ 和$H^2_{\text{ét}}$ $(\mathrm{Spec}(\mathcal{M}(S))\ \mathbb{G}_m)$，由定理 5.1即可得出该推论。□

推论 5.4。存在一个连通 *Stein* 流形，使得自然态射 $H^2_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}(S))\ \mathbb{G}_m) \to H^2($ S, $\mathcal{O}_S^\times$) 不是满射。

证明。设 S 是一个同伦型为 $\mathbb{S}^3$ 的 Stein 流形（应用 [Mih96, 定理 4.1] 或定理 3.6，或者选择 $S := \{\sum_{i=1}^4 z_i^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^4$）。根据定理 5.1，群 $H^2_{\text{ét}}$(Spec(O(S)) $\mathbb{G}_m$) 是挠元。指数正合序列 $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2\pi i}$ O$_S$ exp$\longrightarrow$ O$_S^\times \to 0$，以及 H^2(S, O$_S$) 和 H^3(S, O$_S$) 的消失（因为 S 是 Stein）表明 H^2(S, O$_S^\times$) $\xrightarrow{\sim} H^3$($S, \mathbb{Z}$) $\simeq \mathbb{Z}$ 不是挠元。因此，态射 $H^2_{\text{ét}}$(Spec(O(S)) $\mathbb{G}_m$) $\to H^2$(S, O$_S^\times$) 不可能是满射。□

5.3. Stein 流形的纯性。设 S 是一个正规 Stein 空间，且 $D \subset S$是 S中余维 1 的不可约解析子集。设 $T \subset S$ 是包含 D的 S 的连通分支。考虑域 M(T) 上由沿 D的消失阶给出的离散赋值。其赋值环，即 M(T) 的子环 O(S)$_D$，由那些极点集（按 [GR84, Chap. 6, §3.2]的意义）不包含 D的亚纯函数组成，其剩余域为 M(D)。我们将

$$\mathrm{res}_D : \mathrm{Br}(\mathcal{M}(S)) \to H^1_{\text{ét}}(\mathcal{M}(D), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

限制态射的复合 $\mathrm{Br}(\mathcal{M}(S)) \to \mathrm{Br}(\mathcal{M}(T))$ 与剩余映射 $\mathrm{Br}(\mathcal{M}(T)) \to H^1_{\text{ét}}(\mathcal{M}(D)\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$，来自 [CTS21，定义 1.4.11 (ii)]。

定理 5.5。设 S 是一个有限维 *Stein* 流形。正合列

$$0 \to \mathrm{Br}(\mathcal{O}(S)) \to \mathrm{Br}(\mathcal{M}(S)) \xrightarrow{\mathrm{res}_D} \prod_D H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(\mathcal{M}(D)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

其中 D 遍历 S 的所有余维为1 的不可约解析子集，该序列是正合的。

证明。映射 $\mathrm{Br}(\mathcal{O}(S)) \to \mathrm{Br}(\mathcal{M}(S))$ 的单射性由推论 5.3得出。

取 $\alpha \in$Br(M(S)), 使其属于所有 res$_D$ 的核。令 n 为 α 在挠群 Br(M(S)) 中的阶。由于 M(S) 是（可能可数多个）域的乘法，根据 [SP，引理 092G]，它是一个绝对平坦环。因此，Spec(M(S)) 的所有拟紧开子集都是闭集（参见 [SP，引理 092F (2)⇒(3) 和引理 04MG (7)⇒(4)]），从而 Pic(Spec(M(S))) $= 0$。因此，库默尔正合列 $0 \to \mathbb{Z}/n \xrightarrow{1\mapsto \exp(\frac{2\pi i}{n})} \mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m \to 0$ 和希尔伯特定理 90（参见 [SGA4$_{\text{III}}$，Exp. IX，定理 3.3]）给出一个同构

$$\mathrm{Br}(\mathcal{M}(S))[n] \simeq H^2_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(\mathcal{M}(S)), \mathbb{Z}/n). \tag{5.4}$$

利用 (5.4)，将 α 视为 $H^2_{\text{ét}}$(Spec(M(S)) $\mathbb{Z}/n$) 的一个元素。应用 [SP，定理 09YQ]（取 $\mathrm{F}_i = \mathbb{G}_m$），可知存在一个非零因子 $a \in \mathrm{O}(S)$；令 $U := \mathrm{Spec}(\mathrm{O}(S)[\frac{1}{a}])$，则存在一个类 $\alpha' \in H^2_{\text{ét}}(\bar{U}, \mathbb{Z}/n)$，满足 $\alpha'|_{\mathrm{Spec}(\mathcal{M}(S))} = \alpha$。定义 $Z := \{a = 0\} \subset S$，使得 $U^{\mathrm{an}} = S \setminus Z$。令 $\beta \in H^2(S \setminus Z, \mathbb{Z}/n)$ 为 α' 在比较态射下的像

$$H^2_{\text{ét}}(U, \mathbb{Z}/n) \to H^2(S \setminus Z, \mathbb{Z}/n)$$

（见 §2.2）。设 $(D_i)_{i\in I}$ 为 Z的不可约分支。设 Z^{sing} 为 Z的奇异轨迹，置 $Z^0 := Z \setminus Z^{\mathrm{sing}}$ 和 $D_i^0 := D_i \cap Z^0$。设 $\gamma = (\gamma_i)_{i\in I}$ 为 $H^1(Z^0, \mathbb{Z}/n) = \prod_{i\in I} H^1(D_i^0, \mathbb{Z}/n)$ 中 β 在 Gysin长正合列中的像

$$H^2(S \setminus Z^{\mathrm{sing}}, \mathbb{Z}/n) \to H^2(S \setminus Z, \mathbb{Z}/n) \to H^1(Z^0, \mathbb{Z}/n). \tag{5.5}$$

引理 5.6。固定 $i \in I$。类 $\gamma_i \in H^1(D_i^0, \mathbb{Z}/n)$ 消失。

证明。设 T_i 为包含 D_i的 S 的连通分支。根据 res$_{D_i}$ 与 étale 上同调中的剩余映射的相容性（见 [CTS21，定理 1.4.14 和 2.3.5]），并且由于 res$_{D_i}(\alpha|_{\mathrm{Spec}(\mathcal{M}(T_i))}) = 0$，类 $\alpha|_{\mathrm{Spec}(\mathcal{M}(T_i))}$)提升为 $H^2_{\text{ét}}$(谱(O(S)$_{D_i}$) $\mathbb{Z}/n$)。基于 [SP，定理 09YQ]的极限论证表明，它还可提升为某个 $\alpha_i' \in H^2_{\text{ét}}$(谱(O($T_i$)$[\frac{1}{a_i}]$) $\mathbb{Z}/n$) 中的类，其中 $a_i \in$O(T_i) 是在 D_i上不恒等为零的非零因子。再次应用 [SP，定理 09YQ]表明，在必要时改变 a_i后，我们可以假设 α'和 α_i'在 $H^2_{\text{ét}}$(谱(O(T_i)$[\frac{1}{a_i a}]$) $\mathbb{Z}/n$) 上的限制相同。

—

定义 $Z_i := \{a_i = 0\} \subset T_i$，并令 $\beta_i \in H^2(T_i \setminus Z_i, \mathbb{Z}/n)$ 为 α_i' 在 §2.2 中的比较态射 $H^2_{\text{ét}}$(Spec(O(T_i)$[\frac{1}{a_i}]$) $\mathbb{Z}/n$) $\to H^2(T_i \setminus Z_i, \mathbb{Z}/n)$ 下的像。我们的 a_i 选择意味着，β和 β_i在 $H^2(T_i \setminus (Z \cup Z_i)$ $\mathbb{Z}/n)$ 上的限制相同。令 $W_i := ((Z \cap T_i) \setminus D_i^0) \cup Z_i$。Gysin 长正合列

$$H^2(T_i \setminus W_i, \mathbb{Z}/n) \to H^2(T_i \setminus ((Z \cap T_i) \cup Z_i), \mathbb{Z}/n) \to H^1(D_i^0 \setminus (Z_i \cap D_i^0), \mathbb{Z}/n)$$

及其与 (5.5) 的相容性因此表明，$\gamma_i|_{D_i^0 \setminus (Z_i \cap D_i^0)}$ 消失。由于限制映射 $H^1(D_i^0, \mathbb{Z}/n)$ $\to H^1(D_i^0 \setminus (Z_i \cap D_i^0)$ $\mathbb{Z}/n)$ 是单射（因为 $Z_i \cap D_i^0$ 是复流形 D_i^0 的一个处处稠密解析子集的补集），故有 $\gamma_i = 0$。□

我们继续证明定理 5.5。引理 5.6 表明 $\gamma = 0$，因此 $\beta \in H^2(S \setminus Z, \mathbb{Z}/n)$ 可提升为一个上同调类 $\beta' \in H^2(S \setminus Z^{\mathrm{sing}}, \mathbb{Z}/n)$。由于 S 是一个流形，且 Z^{sing} 在 S 中的余维为 ≥ 2，类 β' 还可进一步提升为类 $\beta'' \in H^2(S, \mathbb{Z}/n)$（将 Z^{sing} 按其奇异轨迹、奇异轨迹的奇异轨迹等分层，便可归约到 Z^{sing} 光滑的情形；此时结论由 Gysin长正合列得出）。

令 $\partial\colon H^2(S, \mathbb{Z}/n) \to H^3(S, \mathbb{Z})[n]$ 为与短正合列 $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n \to 0$ 相关联的连接态射。由定理 3.5，自然态射 Br(O(S)) $\to H^3(S, \mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}$ 是一个同构。从 α 中减去 Br(O(S) 中与 $\partial(\beta'') \in H^3(S, \mathbb{Z})[n]$ 对应的元素，并相应地修改 α'、β、β'和 β'' 后，我们可以假设 $\partial(\beta'') = 0$。这表明 β'' 是类 $\delta \in H^2(S, \mathbb{Z})$ 模 n 的约化。

指数正合列 $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2\pi i} \mathcal{O}_S \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_S^* \to 0$ 表明，δ是 S上全纯线丛$\mathcal{L}$ 的第一陈类。由于 S 是Stein的，可以选取 $\sigma \in H^0(S, \mathcal{L})$与 $\tau \in H^0(S, \mathcal{L}^{-1})$，使其零点集在 S中无处稠密。将非零因子 $a \in \mathcal{O}(S)$替换为 $a\sigma\tau \in \mathcal{O}(S)$，即可保证 $\delta|_{S\setminus Z} \in H^2(S \setminus Z, \mathbb{Z})$为零，从而 $\beta = 0$。

至此，考虑Leray谱序列

$$E_2^{p,q} = H^p_{\text{ét}}(U, \mathrm{R}^q(\varepsilon_U)_*\mathbb{Z}/n) \Rightarrow H^{p+q}(S \setminus Z, \mathbb{Z}/n) \tag{5.6}$$

拓扑斯态射 $\varepsilon_U : (S \setminus Z)_{\text{cl}} = (U^{\text{an}})_{\text{cl}} \to U_{\text{ét}}$ (见 §2.2)。考虑到自然态射 $\mathbb{Z}/n \to (\varepsilon_U)_*\mathbb{Z}/n$ 是一个同构（见 [Ben24a，推论 3.12]），谱序列（5.6）导出一个正合列

$$H^0_{\text{ét}}(U, \mathrm{R}^1(\varepsilon_U)_*\mathbb{Z}/n) \to H^2_{\text{ét}}(U, \mathbb{Z}/n) \to H^2(S \setminus Z, \mathbb{Z}/n). \tag{5.7}$$

由于 $\beta \in H^2(S \setminus Z, \mathbb{Z}/n)$ 消失，类 $\alpha' \in H^2_{\text{ét}}(U, \mathbb{Z}/n)$ 在 (5.7) 中提升为一个类 $\alpha'' \in H^0_{\text{ét}}(U, \mathrm{R}^1(\varepsilon_U)_*\mathbb{Z}/n)$。存在一个非零因子 $b \in \mathrm{O}(S)$，使得 $\alpha''|_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}(S)[\frac{1}{ab}])}$ 消失（展开高阶直像的定义即可知，这一结论由 [Ben24a, 引理 6.4] 得出）。因此，用 ab 替换 a 后，我们可以假设 $\alpha'' = 0$，从而 $\alpha' = 0$，进而自然有 $\alpha = 0$。定理得证。□

6. Stein 代数的布劳尔类的指标

设 (X, O_X) 为一个局部环化位点，并固定 $\alpha \in \mathrm{Br}(X, \mathrm{O}_X)$。$\alpha$ 的指标 $\mathrm{ind}(\alpha)$ 是表示 α 的 Azumaya 代数的次数的最大公因数。鉴于 [Lie08 命题 3.1.2 的证明的第一段，1], 指标 $\mathrm{ind}(\alpha)$ 可以等价地定义为所有局部自由 α-扭曲层的秩的最大公因数（在 §5.1 的意义下，其中通过 (2.1) 将 α 与其在 $H^2(X, \mathrm{O}_X^\times)$ 中的像等同）。

6.1. 代数指标与拓扑指标。

定理 6.1. 设 S 为一个有限维 *Stein* 空间。对于 $\alpha \in \mathrm{Br}(\mathcal{O}(S))$，其像为 $\alpha^{\text{an}} \in \mathrm{Br}_{\text{an}}(S)$ 与 $\alpha^{\text{top}} \in \mathrm{Br}^{\text{top}}(S)$，有 $\mathrm{ind}(\alpha) = \mathrm{ind}(\alpha^{\text{an}}) = \mathrm{ind}(\alpha^{\text{top}})$。

证明。将定义在谱 $(\mathcal{O}(S))$ 上的阿祖马亚代数 $\mathcal{A}$ 对应到全纯阿祖马亚代数 $\mathcal{A}^{\text{an}}$，并将定义在 S 上的全纯阿祖马亚代数 $\mathcal{B}$ 对应到拓扑阿祖马亚代数 $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{C}_S$，可得 $\mathrm{ind}(\alpha^{\text{an}}) \mid \mathrm{ind}(\alpha)$，且 $\mathrm{ind}(\alpha^{\text{top}}) \mid \mathrm{ind}(\alpha^{\text{an}})$。

设 $\mathcal{A}$ 是定义在 S 上的次数为 n 的拓扑阿祖马亚代数。命题 3.1 的证明表明，可以赋予 $\mathcal{A}$ 一个结构，使其成为定义在 S 上的次数为 n 的全纯阿祖马亚代数。由于 S 是有限维的，命题3.2的证明表明，$\mathcal{A}$ 是定义在 n 上的阿祖马亚代数谱 $(\mathcal{O}(S))$ 的解析化。这就证明了反向整除关系 $\mathrm{ind}(\alpha) \mid \mathrm{ind}(\alpha^{\text{top}})$。□

推论 6.2。设 S 是一个 n 维 *Stein* 空间。对于任意 $\alpha \in \mathrm{Br}(\mathcal{O}(S))$,

$$\mathrm{ind}(\alpha) \mid (\lceil n/2 \rceil - 1)!\, \mathrm{per}(\alpha)^{\lceil n/2 \rceil - 1}$$

证明。由定理 6.1，只需对 $\alpha^{\text{top}} \in \mathrm{Br}^{\text{top}}(S)$ 证明相同的界。事实上，推论 6.2 中的界更一般地适用于 n 维 CW 复形 T 上的拓扑 Brauer 类 α（注意，根据 [Ham86, Korollar]，S 具有维数为 n 的 CW 复形的同伦型）。实际上，如定理 3.3 的证明所示，可归结为 T 是一个维数为 n 的有限 CW 复形的情形。于是可以将 [AW21] 的主要结果应用于 $d = \lceil n/2 \rceil$。□

注6.3。Antieau 和 Williams 在 [AW21] 中猜想，对于每个 $d \geq 1$ 以及每个与 $\ell \geq 2$ 互素的整数 $(d-1)!$，都存在一个 $2d$ 维有限 CW 复形 T 和一个拓扑 Brauer 类 $\alpha \in \mathrm{Br}^{\text{top}}(T)$，其周期为 ℓ，满足

$$\mathrm{ind}(\alpha) = \mathrm{per}(\alpha)^{d-1} = \ell^{d-1}.$$

如果这一猜想成立，那么根据引理 3.6 和定理 6.1，推论 6.2 中的界对于周期与 $(n/2-1)!$互素的布劳尔类，在偶数维 n的 Stein 空间上是尖锐的。

备注 6.4. 取一个整数 $\ell \geq 2$，并设 S 是一个具有摩尔空间 3 维 Stein 流形，其同伦型为 $M(\mathbb{Z}/\ell, 2)$（利用定理 3.6 以及由构造可知 $M(\mathbb{Z}/\ell, 2)$ 是一个 3 维 CW 复形这一事实）。由定理 3.3和泛系数定理可计算得 $\mathrm{Br}^{\mathrm{top}}(S) = \mathbb{Z}/\ell$。

这个例子表明，在推论 $\lceil n/2 \rceil$ 中，通常无法在所有情况下将上取整改进为下取整 $\lfloor n/2 \rfloor$，参见推论 6.2。

6.2. **扭曲拓扑 K 理论**。称为扭曲拓扑 K 理论 的上同调理论由 Donovan 和 Karoubi 于 [DK70] 提出，并由 Atiyah 和 Segal [AS04]等人发展。我们在此汇集定理 6.7 在 §6.3 的证明中所需的扭曲拓扑 K 理论背景知识。

设 T 是一个拓扑空间，并设$\mathcal{A}$ 是 n 上的指标为 T的拓扑阿祖马亚代数。$\mathcal{A}$-丛是一个右$\mathcal{A}$-模，作为$\mathcal{C}_T$-模它是有限秩局部自由的。我们定义 $K(T, \mathcal{A})$ 为 $\mathcal{A}$-丛正合范畴的K理论（参见 [DK70，§5]）。对于无限维 CW 复形，这一定义并不恰当（参见 [AS04]），但足以满足我们的需要。

一个$\mathcal{A}$-丛$\mathcal{E}$ 作为$\mathcal{C}_T$-模的秩具有如下形式： nr 其中某个局部常值函数为 $r : T \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ （可归结为$\mathcal{A} = M_n(\mathcal{C}_T)$的情形，此时结论由 Morita 理论得出）。我们称 r 为$\mathcal{A}$-秩，即$\mathcal{E}$ 的$\mathcal{A}$ -秩（注意$\mathcal{A}$ 的$\mathcal{A}$-秩为 n）。利用加法性，可定义$\mathcal{A}$-秩：将 $K(T, \mathcal{A})$中的元素映到局部常值函数 $r : T \to \mathbb{Z}$。若 r 为常值（例如 T 是连通的），则将其视为一个整数。令 $K(T, \mathcal{A})_r \subset K(T, \mathcal{A})$为$\mathcal{A}$-秩为 r的元素所成的子群。

对于 $0 \leq r \leq nN$，令 $\mathrm{Gr}^{(T,\mathcal{A})}(r, N) \to T$为局部平凡纤维化，其在 $t \in T$ 上的纤维是 $\mathcal{A}_t$- 稳定的、 $\mathcal{A}_t$- 秩为 r 的 $\mathcal{A}_t^{\oplus N}$ 子空间构成的空间。由于 $\mathcal{A}$ 局部同构于 $M_n(\mathcal{C}_T)$，由 Morita 理论可知，$\mathrm{Gr}^{(T,\mathcal{A})}(r, N) \to T$ 的纤维同胚于格拉斯曼流形 $\mathrm{Gr}(r, nN)$，即 $\mathbb{C}^{nN}$ 中 r 维子空间构成的格拉斯曼流形。

定义 $\mathrm{BU}^{(T,\mathcal{A})}(r) := \varinjlim_N \mathrm{Gr}^{(T,\mathcal{A})}(r, N)$，其中余极限由包含映射 $\mathcal{A}^{\oplus N} \subset \mathcal{A}^{\oplus N+1}$ 诱导。令 $\mathcal{U}^{(T,\mathcal{A})}(r)$ 为 $\mathrm{BU}^{(T,\mathcal{A})}(r)$ 上 $\mathcal{A}$-秩为 r 的泛 $\mathcal{A}$-丛。设 $\mathrm{BU}^{(T,\mathcal{A}),r} := \varinjlim_i \mathrm{BU}^{(T,\mathcal{A})}(r + ni)$，其中余极限由 $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E} \oplus \mathcal{A}$ 诱导。局部平凡纤维化 $\mathrm{BU}^{(T,\mathcal{A})}(r) \to T$ 和 $\mathrm{BU}^{(T,\mathcal{A}),r} \to T$ 的纤维分别同胚于分类空间 $\mathrm{BU}(r)$ 和 BU。

以下引理在我们的语境中，类似于断言 $\mathrm{BU} \times \mathbb{Z}$表示通常的拓扑 K 理论（这对应于 $\mathcal{A} = \mathcal{C}_T$ 的情形）。由于引理 6.5 的证明与这一经典断言的证明完全类似（例如参见 [May99，第 24 章，§1]），故略去证明。

引理 6.5。设 T 是一个连通紧豪斯多夫拓扑空间，A 是 T 上次数为 n 的拓扑阿祖马亚代数。固定 $r \in \mathbb{Z}$。存在一个双射

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{homotopy classes of sections} \\ \textit{of } \mathrm{BU}_{(T,\mathcal{A}),r} \to T \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} K(T, \mathcal{A})_r \tag{6.1}$$

将 $\sigma : T \to \mathrm{BU}^{(T,\mathcal{A})}(r + ni)$ 与元素 $[\sigma^*(\mathcal{U}^{(T,\mathcal{A})}(r + ni))] - i[\mathcal{A}]$ 对应。

6.3. **在 $\mathcal{O}(S)$ 上的指标与在 $\mathcal{M}(S)$上的指标。以下命题是定理 6.7**证明中的关键。

命题 6.6。 设 S 是一个连通 *Stein* 流形。设 A 是 S 上的一个次数为 n 的全纯*Azumaya*代数，其类为 $\alpha \in \mathrm{Br}_{\mathrm{an}}(S)$。设 F 是 S 上的一个凝聚右 A-模，且其一般秩为 rn （作为 $\mathcal{O}_S$-模）。那么 $\mathrm{ind}(\alpha) \mid r$。

证明。令 d S的复维数为 $s \in S$。固定 ρ。设 $S \to \mathbb{R}_{\geq 1}$ 是定义在 S 上的 $\mathcal{C}^\infty$ 严格多重次调和穷竭函数（参见 [Hör90，定理 5.1.6]）。利用萨德定理，选取一个严格递增的正则值序列 $(c_i)_{i\geq 1}$，使其趋于无穷大。设 $S_i := \{x \in S \mid \rho(x) \leq c_i\}$。对于所有 $c \in \mathbb{R}$，复流形 $\{x \in S \mid \rho(x) < c\}$ 都是 Stein（将 $x \mapsto \frac{1}{c-\rho(x)}$ 应用于 [Hör90，定理 5.2.10]）。由此可知，紧子集 $S_i \subset S$ 在如下意义下是 Stein 的：它具有由 Stein 开邻域构成的邻域基。利用 [Mun66，定理 10.6]，，可以在 S 上赋予 CW 复形结构，使得 S_i 是有限子复形。将 S_i替换为包含 s的连通分支后，我们可以假设 S_i 是连通的。

固定 $i \geq 1$。由于 S_i 是一个 Stein 紧集，且 $\mathcal{F}$ 是凝聚的，因此存在一个自由分解

$$0 \to \mathcal{E}_d^i \to \cdots \to \mathcal{E}_0^i \to \mathcal{F}|_{U_i} \to 0 \tag{6.2}$$

在 Stein 开邻域 U_i 上，对 $\mathcal{F}|_{U_i}$ 的自由分解，其由 $\mathcal{A}|_{U_i}$-丛（即作为右 $\mathcal{A}|_{U_i}$-模且作为 $\mathcal{O}_{U_i}$-模具有有限秩的局部自由模）给出；还可以选择 $\mathcal{E}_0^i$、……、$\mathcal{E}_{d-1}^i$ 为自由右 $\mathcal{A}|_{U_i}$-模。利用 $\mathcal{F}$ 由某个 U_i上的有限多个全局截面生成（作为 $\mathcal{O}_S$-模，因而也作为 $\mathcal{A}$-模），可以构造态射 $\mathcal{E}_0^i \to \mathcal{F}|_{U_i}$。对 $\mathcal{E}_0^i \to \mathcal{F}|_{U_i}$ 的核应用同样的论证并迭代（必要时缩小 U_i），即可构造 $\mathcal{E}_1^i$、……、$\mathcal{E}_{d-1}^i$。这样选择的 $\mathcal{A}|_{U_i}$-模 $\mathcal{E}_d^i$ 使得 (6.2) 正合，根据希尔伯特零化子定理，它是局部自由的 $\mathcal{O}_{U_i}$-模。缩小 U_i 后，还可以进一步确保 $U_i \subset U_{i+1}$。

由于 U_i 是 Stein，可以将 $\mathcal{F}|_{U_i}$ 上的恒等映射提升为一个态射 $f^i : \mathcal{E}_\bullet^{i+1}|_{U_i} \to \mathcal{E}_\bullet^i$，它是 $\mathcal{A}|_{U_i}$-丛复形之间的态射（先选取 f_0^i，再选取 f_1^i，依此类推）。于是，f^i 的映射锥 $C(f^i)_\bullet$ 是一个由 $\mathcal{A}|_{U_i}$-丛构成的正合复形，且 $C(f^i)_j = \mathcal{E}_{j-1}^{i+1}|_{U_i} \oplus \mathcal{E}_j^i$。

考虑 S 上的拓扑阿祖马亚代数 $\mathcal{B} := \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{C}_S$，并令 $\mathcal{B}_i$ 为其在 S_i 上的限制。元素 $\kappa_i := \sum_{j=0}^{d} (-1)^j [(\mathcal{E}_j^i \otimes_{\mathcal{O}_{U_i}} \mathcal{C}^{U_i})|_{S_i}]$ 属于 $K(S_i, \mathcal{B}_i)$（见 §6.2），其 $\mathcal{B}_i$-秩为 r。复形 $(C(f^i)_\bullet \otimes_{\mathcal{O}_{U_i}} \mathcal{C}^{U_i})|_{S_i}$ 表明 $\kappa_{i+1}|_{S_i} = \kappa_i$。

类 κ_i 对应于一个连续截面 $\sigma_i : S_i \to \mathrm{BU}_{(S_i,\mathcal{B}_i),r}$，它在同伦意义下良好定义，是 $\mathrm{BU}_{(S,\mathcal{B}),r} \to S$ 在 S_i 上的截面（见引理 6.5）。由于 $\kappa_{i+1}|_{S_i} = \kappa_i$，截面 $\sigma_{i+1}|_{S_i}$ 与 σ_i 同伦。对于所有 $i \geq 1$，都可以修改 σ_{i+1}，以确保 $\sigma_{i+1}|_{S_i} = \sigma_i$ （要看出这一点，注意到 σ_{i+1}，而该同伦给出 $\mathrm{BU}_{(S,\mathcal{B})}(r) \times [0,1] \to S \times [0,1]$ 在 $S_{i+1} \times \{0\} \cup S_i \times [0,1]$ 上的一个截面；由于包含映射 $S_{i+1} \times \{0\} \cup S_i \times [0,1] \subset S_{i+1} \times [0,1]$ 是同伦等价，因此可以将其延拓到 $S_{i+1} \times [0,1]$）。对 $i = 1$、再对 $i = 2$ 等依次进行此操作，可确保 σ_i 彼此相容。由此得到一个截面 $\sigma : S \to \mathrm{BU}_{(S,\mathcal{B}),r}$，它是 $\mathrm{BU}_{(S,\mathcal{B}),r} \to S$ 在 S 上的截面。

选取 $i \geq 0$ 使得 $r + ni \geq d$。那么，包含映射 $\mathrm{BU}(r+ni) \to \mathrm{BU}$ 的同伦纤维 F 具有如下性质：对于 $0 < k \leq 2d$，有 $\pi_k(F) = 0$ （这由赫维兹定理的如下形式得出：[Hat02，定理 4.27]）。考虑寻找 $\mathrm{BU}_{(S,\mathcal{B})}(r+ni) \to S$ 的截面 τ的问题，该截面作为 $\mathrm{BU}_{(S,\mathcal{B}),r} \to S$的截面与 σ同伦。障碍理论为这个问题提供了一系列逐步出现的障碍，它们属于 $H^{k+1}(S, \pi_k(F))$，其中 $\pi_k(F)$ 是 S 上的一个局部系统，其纤维为 $\pi_k(F)$（例如参见 [Ste51，定理 34.2]）。当 $k \leq 2d$时，这些群消失，因为 $\pi_k(F) = 0$；当 $k \geq 2d$ 时，它们也消失，因为 S 是一个 $2d$ 维 $\mathcal{C}^\infty$ 流形。因此可得存在这样的截面 $\tau : S \to \mathrm{BU}_{(S,\mathcal{B})}(r+ni)$（参见 [Ste51，推论 34.4]）。

这个$\mathcal{B}$-丛 $\tau^*(\mathcal{U}_{(S,\mathcal{B})}(r+ni))$ 在 S上有 $\mathcal{B}$-秩 $r+ni$(采用 §6.2中的记号）。设 $\beta \in \mathrm{Br}_{\mathrm{top}}(S)$ 是$\mathcal{B}$的类。根据 [Căl00，定理 1.3。7]，存在

一个 β-扭曲层，其秩为 $r+ni$，定义在 S上，因此 $\mathrm{ind}(\beta) \mid r+ni$。显然 $\mathrm{ind}(\beta) \mid n$，由此可得 $\mathrm{ind}(\beta) \mid r$。定理 6.1 的证明现在表明 $\mathrm{ind}(\alpha) \mid r$。□

定理 6.7. 设 S 为连通 *Stein* 流形。固定 $\alpha \in \mathrm{Br}(O(S))$，并设 ${}^{\alpha}\mathcal{M}(S)$ 为其在 $\mathrm{Br}(M(S))$ 中的像。则 $\mathrm{ind}(\alpha) = \mathrm{ind}({}^{\alpha}\mathcal{M}(S))$。

证明。显然 $\mathrm{ind}({}^{\alpha}\mathcal{M}(S)) \mid \mathrm{ind}(\alpha)$，我们证明相反的整除关系。

设 $\pi : \mathfrak{X} \to$ 谱(O(S)) 为一个表示 α 的 $\mathbb{G}_m$-gerbe（见 §5.1）。设 G 为一个秩 r 的局部自由 ${}^{\alpha}\mathcal{M}(S)$-扭层。将 G 延拓为 $\mathfrak{X}$ 上的一个有限表示拟凝聚层 H（结合 [Ryd15，引理 4.3 (C2)⇒(E2)] 与 [Ryd23，推论 B]）。用分解 [Lie07，命题 2.2.1.6]，中的一个直和项替换 H，我们便可确保 H 是谱(O(S)) 上的一个 α-扭层。

设 A 是 Spec(O(S)) 上次数为 n、表示 α 的阿祖玛雅代数。由[Căl00，定理 1.3，7], 可知，存在 Spec(O(S)) 上有限表示的拟凝聚层 F，其具有右 A-模结构，并且 $\mathrm{F}^{\mathcal{M}(S)}$ 的秩为 rn （作为 M(S) 上的模）。令 A^{an} 和 F^{an} 分别为 §2.2 意义下 A 和 F 的解析化，则 A^{an} 是 S 上次数为 n 的全纯 Azumaya 代数，而 F^{an} 是 S 上的凝聚右 A^{an}-模，其一般秩为 rn（作为 O_S-模）。由命题 6.6 可得 $\mathrm{ind}(\alpha^{\mathrm{an}}) \mid r$，因此由定理 6.1 可得 $\mathrm{ind}(\alpha) \mid r$。定理得证。□

6.4. **周期与指标**。

定理 6.8。 存在一个连通 *Stein* 流形 S 和一个类 $\alpha \in \mathrm{Br}(M(S))$，它属于 $\mathrm{Br}(O(S)) \to \mathrm{Br}(M(S))$ 的像，并且满足 $\mathrm{ind}(\alpha) \neq \mathrm{per}(\alpha)$。

证明。设 T 为一个连通有限 CW 复形，其上带有一个周期与指标不同的拓扑 Brauer 类（例如，如 [AW14b，定理 B]中所述，周期为 2、指标为 8）。利用定理 3.6 找到一个与 T具有相同同伦型的连通 Stein 流形 S，从而存在 $\gamma \in \mathrm{Br}^{\mathrm{top}}(S)[2]$，使得 $\mathrm{ind}(\gamma) = 8$。设 $\beta \in \mathrm{Br}(\mathrm{O}(S))[2]$ 满足 $\beta^{\mathrm{top}} = \gamma$ （见定理 3.5）。设 $\alpha \in \mathrm{Br}(\mathrm{M}(S))[2]$ 为 β的像。应用定理 6.7 与定理 6.1 可知 $\mathrm{ind}(\alpha) = \mathrm{ind}(\beta) = \mathrm{ind}(\gamma) = 8$。□

参考文献

[AG60] M. Auslander 和 O. Goldman，《交换环的布劳尔群》，美国数学会汇刊 97 (1960), 367–409. [AS04] M. Atiyah 和 G. Segal，《扭曲 K理论》，乌克兰数学通报 1 (2004), 第 3 期, 287–300. [AW14a] B. Antieau 和 B. Williams，《扭曲拓扑 K理论的周期-指标问题》，几何与拓扑 18 (2014), 第 2 期 , 1115–1148. [AW14b] ，《 6- 复形上的拓扑周期 - 指标问题》，拓扑学杂志 7 (2014), 第 3 期, 617–640. [AW21] ，《拓扑周期-指标猜想》，数学研究快报 28 5, 1307 2021 1317 ( ), 第 – 期。[Ben24a] O. Benoist，《关于 Stein 曲面上的亚纯函数域》，预印本，2024, arXiv:2410.16809，即将在克雷尔杂志二百周年特刊（2026）发表。[Ben24b] ，《Stein 空间与 Stein 代数》，预印本，2024，arXiv:2410.05521. [Ben25] ，《Stein 紧空间上代数簇的 étale 上同调》，数学发明 240 (2025), 第 2 期, 497–536. [Bin76] J. Bingener，《Stein 代数上的概形》，明斯特大学数学研究所丛书 (2)，第 10 卷，明斯特大学，1976.[Bor53] A. Borel，《紧李群的主纤维丛与齐性空间的上同调》，Ann. of Math. (2) 57 (1953), 115–207. [Cae98] S. Caenepeel，《布劳尔群、霍普夫代数与伽罗瓦理论》，《数学专著》，第 4 卷，克吕韦尔学术出版社，多德雷赫特，1998.

[Căl00] A. H. Căldăraru, 《卡拉比–丘流形上扭曲层的导出范畴》, 博士论文, 康奈尔大学, 2000, 见 https://people.math.wisc.edu/∼caldararu/publications/ThesisSingleSpaced.pdf. [CDG04] C. Ciliberto 和 V. Di Gennaro, 《具有普通二重点的某些 P 超曲面的阶乘性》, 《代数变换群与代数簇》, 《数学科学百科全书》第 132 卷, 施普林格出版社, 柏林, 2004, 第 1–7 页。[Čes19] K. Česnavičius, 《布劳尔群的纯性》, Duke Math. J. 168 (2019), 第 8 期, 1461–1486.[CG98] S. Caenepeel 和 F. Grandjean, 《关于 Taylor 布劳尔群的一则注记》, Pacific J. Math. 186 (1998), 第 1 期, 13–27. [CT02] J.-L. Colliot-Thélène, 《未分歧中心单代数的指数与指标》, 《数学教学》（2）48 (2002), 第 1–2 期, 127–146, 附录由 Ofer Gabber 撰写。[CT06] ,《二元函数域上的中心单代数（据 A. J. de Jong）》, Astérisque (2006), 第 307 期, 报告第 949 号, ix, 379–413, 《布尔巴基研讨班》, 2004/2005 卷。[CTS21] J.-L. Colliot-Thélène 和 A. N. Skorobogatov, 《布劳尔–格罗滕迪克群》, 《数学研究成果》（3）, 第 71 卷, 施普林格出版社, 沙姆, 2021. [dJ03] A. J. de Jong, 《Gabber 定理》, 预印本, 2003, 见 https://www.math.columbia.edu/∼dejong/papers/2-gabber.pdf.[dJ04] ,《代数曲面布劳尔群的周期-指标问题》, Duke Math. J. 123 (2004), 第 1 期, 71–94. [dJP22] A. J. de Jong 和 A. Perry, 《扭曲导出范畴的霍奇理论与周期-指标问题》, 预印本, 2022, arXiv:2212.12971.[DK70] P. Donovan 和 M. Karoubi, 《分次布劳尔群与带局部系数的 K理论》, 高等科学研究所数学出版物 38 (1970), 5–25. [Eli90] Y. Eliashberg, 《维数为 ≻2 的 Stein 流形的拓扑刻画》, Internat. J. Math. 1 (1990), 第 1 期, 29–46. [For66] O. Forster, 《Stein 代数中拓扑的唯一性》, 《函数代数》, Scott-Foresman, 芝加哥, 伊利诺伊州, 1966, 第 157–163 页。[For67] ,《论 Stein 代数与模的理论》, Math. Z. 97 (1967), 376–405.[Gab81] O. Gabber, 《阿祖玛雅代数的一些定理》, 《布劳尔群》, 《数学讲义》第 844 卷, 施普林格出版社, 柏林, 1981, 第 129–209 页。[Gir71] J. Giraud, 《非阿贝尔上同调》, 《数学科学基础丛书》第 179 卷, 施普林格出版社, 柏林–纽约, 1971.[Gom98] R. E. Gompf, 《Stein 曲面的把手体构造》, Ann. of Math. (2) 148 (1998), 第 2 期, 619–693.[Gom09] ,《继 Eliashberg 之后构造 Stein 流形》, 《辛场论的新视角与挑战》, CRM 会议录讲义, 第 49 卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2009, 第 229–249 页。[GR79] H. Grauert 和 R. Remmert, 《Stein 空间理论》, 《数学科学基础丛书》第 236 卷, 施普林格出版社, 柏林–纽约, 1979.[GR84] ,《凝聚解析层》, 《数学科学基础丛书》第 265 卷, 施普林格出版社, 柏林, 1984. [Gra58] H. Grauert, 《全纯完备空间上的解析纤维化》, 《数学年鉴》135 (1958), 263–273. [Gro68] A. Grothendieck, 《布劳尔群 I、II、III》, 《方案上同调十讲》, 《纯数学高级研究》第 3 卷, 北荷兰出版社, 阿姆斯特丹, 1968, 第 46–188 页。[Gur88] R. M. Guralnick, 《解析函数环及其他一维环上的矩阵与表示》, 《访问学者讲座—1987》（德克萨斯州拉伯克）, 德克萨斯理工大学数学丛书, 第 15 卷, 德克萨斯理工大学, 拉伯克, 德克萨斯州, 1988, 第 15–35 页。[Ham86] H. A. Hamm, 《全纯完备空间的同伦型》, 《纯粹与应用数学杂志》364 (1986), 1–9. [Hat02] A. Hatcher, 《代数拓扑》, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2002. [Hir75] H. Hironaka, 《代数集的三角剖分》, 《代数几何》, 阿卡塔, 1974, 《纯数学专题研讨会论文集》, 第 29 卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 1975, 第 165–185 页。[Hör90] L. Hörmander, 《多变量复分析导论》, 第 3 版修订版, 《北荷兰数学图书馆》第 7 卷, 北荷兰出版社, 1990.

[Hot22] J. Hotchkiss，扭曲导出范畴的霍奇理论与周期-指标问题，预印本，2022年，arXiv:2212.10638。[HS03] D. Huybrechts 与 S. Schröer，解析 $K3$ 曲面的布劳尔群，IMRN（2003年），第50号，2687–2698。[HS09] J. Heinloth 与 S. Schröer，更大的布劳尔群与扭曲层，J. Algebra 322（2009年），第4号，1187–1195。[HS15] J. Hornbostel 与 S. Schröer，无限 CW 复形、布劳尔群与幻影上同调，Israel J. Math. 207（2015年），第1号，77–101。[Iss66] H. Iss'sa，论 Stein 簇的亚纯函数域，Ann. of Math. (2) 83（1966年），34–46。[Kre03] A. Kresch，四元数代数存在性的霍奇理论障碍，Bull. LMS 35（2003年），第1号，109–116。[Kri69] B. Kripke，有限生成相干解析层，Proc. AMS 21（1969年），530–534。[Lie04] M. Lieblich，扭曲层模空间与广义阿祖马亚代数，麻省理工学院博士论文，2004，可获取于 https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/30145。[Lie07] , 扭曲层模空间，Duke Math. J. 138（2007年），第1号，23–118。[Lie08] , 扭曲层与周期-指标问题，Compos. Math. 144（2008年），第1号，1–31。[May99] J. P. May，代数拓扑简明教程，Chicago Lectures in Math.，芝加哥大学出版社，芝加哥，1999年。[Mih96] N. Mihalache，复空间中子集的特殊邻域，Math. Z. 221（1996年），第1号，49–58。[Miy52] H. Miyazaki，CW-复形的仿紧性，Tohoku Math. J. 4（1952年），309– 313。[MS74] J. W. Milnor 与 J. D. Stasheff，特征类，Annals of Math. Studies，第76卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西；东京大学出版社，东京，1974年。[Mun66] J. R. Munkres，初等微分拓扑，Annals of Math. Studies，第54卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西，1966年。[RT85] I. Raeburn 与 J. L. Taylor，更大的布劳尔群与 étale 上同调，Pacific J. Math. 119（1985年），第2号，445–463。[Ryd15] D. Rydh，代数空间与叠的诺特逼近，J. Algebra 422（2015年），105–147。[Ryd23] ，代数叠的绝对诺特逼近，预印本，2023年，arXiv:2311.09208。[Sch03] S. Schröer，更大的布劳尔群确实很大，J. Algebra 262（2003年），第1号，210–225。[Sch05] , 复解析布劳尔群的拓扑方法，Topology 44（2005年），第5号，875–894。[Ser56] J.-P. Serre，代数几何与解析几何，Ann. Inst. Fourier 6（1956年），1–42。[Ser94] , 伽罗瓦上同调，第五版，《数学讲义》，第5卷，施普林格出版社，柏林，1994年。[SGA1] A. Grothendieck，étale 覆叠与基本群（SGA 1），Documents Mathématiques，第3卷，法国数学会，巴黎，2003年。[SGA4$_{\mathrm{III}}$]，拓扑斯理论与概形的 étale 上同调（SGA 4 III），《数学讲义》，第305卷，施普林格出版社，柏林-纽约，1973年。[SP] A. J. de Jong 等，The Stacks Project，https://stacks.math.columbia.edu。[Spa66] E. H. Spanier，代数拓扑，麦格劳-希尔图书公司，纽约-多伦多-伦敦，1966年。[Sri25] H. Sridharan，高阶扭曲 K 理论中的冈原理，预印本，2025，arXiv:2509.24362。[Ste51] N. Steenrod，纤维丛的拓扑学，Princeton Math. Ser.，第14卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西，1951年。[Tay82] J. L. Taylor，更大的布劳尔群，Pacific J. Math. 103（1982年），第1号，163–203。[Tho54] R. Thom，可微流形的若干整体性质，Comment. Math. Helv. 28（1954年），17–86。[Whi49] J. H. C. Whitehead，组合同伦论. I，Bull. AMS 55（1949年），213–245。

数学与应用系，高等师范学院，法国国家科学研究中心，于尔姆街45号，巴黎邮政分区75230 Cedex 05，法国电子邮件地址： olivier.benoist@ens.fr

数学系，哥伦比亚大学，纽约，纽约州10027电子邮件地址：
james.hotchkiss@columbia.edu