arXiv:2602.21051v1 [math.CV] 24 Feb 2026

单位球中的稳定多项式与有界有理函数

Greg Knese、James Eldred Pascoe 和 Alan Sola

Abstract. 我们研究在复欧几里得空间的单位球内无零点的多项式，旨在刻画有理函数何时在球上有界。我们完整描述了两个变量中此类多项式在边界零点附近的局部性质。在更高维度中，我们对简单边界零点给出了部分刻画。我们还给出若干应用，包括具有边界奇点的有理函数的有界性，以及构造具有指定局部性质的例子。

1. Introduction

稳定多项式，即在某个域 $\Omega \subset \mathbb{C}^d$中无零点的多项式，在复分析中具有基础性作用——最明显的是作为在 Ω 上解析的有理函数的分母。尽管这类多项式在单位多圆盘 $\mathbb{D}^d$ 或上半平面的乘积等标准乘积域中已得到广泛研究，但在多复变函数中最常见的模型域之一——$\mathbb{C}^d$中的欧几里得单位球这一情形下，对它们的研究却少得多，

$$\mathbb{B}_d = \left\{ z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d : |z|^2 = \sum_{j=1}^{d} |z_j|^2 < 1 \right\}.$$

造成这种差异的原因多种多样，但或许主要在于以下两点：(1) 由于相关变量在某种意义上彼此独立，各种应用必然会涉及乘积域；(2) 乘积域具有多种有用的对称性（例如关于单位圆的反射），因而更易于研究。当然，球缺乏多圆盘的乘积结构和反射对称性，但仍具有传递的自同构群 [25, 第 2]章。在文献中，单位球内无零点的多项式早已出现，尤其是在球上的函数空间研究中，特别是关于多项式的循环性（相对于移位算子）的研究，参见例如 [26, 22, 3]。它们也出现在球之间的真有理映射研究中（见[13]），以及球上有界解析函数插值问题的研究中（见 [23]）。

本文旨在开启对球上无零点多项式本身的研究，同时也着眼于将其应用于理解球上的解析函数。具体而言，一个称为可容许分子问题的基本问题是：刻画球上的有界有理函数 $f = q/p$，其中分母 p

日期：2026年2月25日。2020年数学主题分类。主要分类号 14H45、32A08、32B05。关键词和短语。稳定多项式、普伊苏级数、有界有理函数、单位球。GK 的研究部分由美国国家科学基金会资助，项目编号 DMS-2247702。

有一个边界零点，不妨设该零点位于 $(0,\dots,0,1)$[1]。换言之，我们旨在描述理想

$$\mathcal{I}_p^\infty = \{q \in \mathbb{C}\{z_1,\dots,z_d\}\colon q/p \text{ is bounded on } \mathbb{B}_d \cap B((0,\dots,0,1),\epsilon) \text{ for some } \epsilon > 0\}.$$

这里，$\mathbb{C}\{z_1,\dots,z_d\}$ 是以 0 为中心、关于给定变量的收敛幂级数环。

由于 q 和 p 的边界零点可能相互竞争而不发生抵消，这是一个微妙的问题：一般来说，仅要求 q 在 p的边界零点处消失是不够的。

例 1.1. 考虑多项式 $p(z_1,z_2) = 1 - z_2$，它在 $\mathbb{B}_2$ 中只有一个零点，位于边界点 $(0,1)$。对于这个简单的例子，我们可以用初等方法确定理想 $\mathcal{I}_p^\infty$的生成元。首先注意到

$$|z_1|^2 \le 1 - |z_2|^2 = (1+|z_2|)(1-|z_2|) \le 2(1-|z_2|), \quad (z_1,z_2) \in \mathbb{B}_2.$$

因此，有理函数 $f(z) = z_1^2/(1-z_2)$ 在 $\mathbb{B}_2$中有界。显然，$1 - z_2 \in \mathcal{I}_p^\infty$，因此 $(z_1^2, 1-z_2) \subset \mathcal{I}_p^\infty$。要证明 $(z_1^2, 1-z_2) = \mathcal{I}_p^\infty$，只需证明 $1, z_1 \notin \mathcal{I}_p^\infty$。

显然，$1/(1-z_2)$在球上无界。下面证明 $f(z) = z_1/(1-z_2)$也无界。首先，注意对于固定的 $0 < a < 1$,

$$r^2 + a^2(1-r^2) < r^2 + 1 - r^2 = 1, \quad r \in [0,1),$$

因此，$\gamma = \{(a(1-r^2)^{1/2},\ r)\colon r \in [0,1)\}$ 是 $\mathbb{B}_2$ 中的一条曲线，并终止于$(0,\ 1)$。现在

$$\lim_{r\to 1} |f(a(1-r^2)^{1/2}, r)|^2 = \lim_{r\to 1} \frac{a^2(1-r^2)}{(1-r)^2} = \lim_{r\to 1} \frac{a^2(1+r)}{1-r} = \infty. \quad \diamondsuit$$

关于刻画双圆盘 $\mathbb{D}^2$ 的可容许分子的类似问题，已在 [8],[21]中得到解答（另见 [20]），而论文 [9]则研究了多圆盘 $\mathbb{D}^d$中的“典型”情形。在这些情形以及本文中，都需要理解在域内无零点的多项式的零点集在边界零点附近的局部性质。对于两个变量且处于双圆盘的情形，可以给出完整的描述；参见[8], 第98页“定理（普伊瑟因式分解）”。对于高维多圆盘，仍有许多问题有待探索，但某些特殊情形可以处理，例如 p 有一个孤立边界零点，且该点处 p 的零点集是光滑的；参见 [9], 定理1.10。

在研究球稳定多项式于边界零点处的零点集的局部性质时，宜将单位球 $\mathbb{B}_d$ 转换为双全纯等价的西格尔半空间

$$U_d = \left\{(z_1,\dots,z_{d-1},w) \in \mathbb{C}^d : \Im w > \sum_{j=1}^{d-1} |z_j|^2\right\}$$

通过有理双全纯映射。最基本的描述与情形出现在 p于0处具有单零点时。

定理 1.2. 设 $p \in \mathbb{C}[z_1,\dots,z_{d-1},w]$ 在 U_d 中靠近0处不取零，$p(0) = 0$，且$\nabla p(0) \neq 0$。设 $Hp(0) = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial z_j z_k}(0)\right)_{j,\ k=1,\dots,d-1}$是 p 关于 z 在0处的海森矩阵。那么，$\nabla p(0)$ 是 $\vec{e}_d$ 的倍数，并且

$$\frac{1}{2|\nabla p(0)|} Hp(0)$$

[1]酉变换可将任意边界点映至该点。

是压缩的。

对于部分逆命题，若 p 是一个满足 $p(0) = 0$、$\nabla p(0)$ 是 $\vec{e}_d$ 的倍数，且 $|\nabla_p^1(0)|^{Hp}$ ~~(0)~~ 严格压缩的多项式，则 p 在 U_d 内的 0 附近不取零。此外，在此情况下，对于任意在 0 附近解析的函数 q，q/p 在 U_d 内的 0 附近有界，当且仅当 $q \in (w, (z)^2)$。

这里，$(z)^2$ 是由 z^α 生成的理想，其中 $|\alpha| = 2$，而 $(w, (z)^2)$ 是由 w 和 $(z)^2$ 生成的理想。环境环可以取为以 0 为中心的收敛幂级数环，记为 $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_{d-1}, w\}$。当 $|\nabla_p^1(0)|^{Hp}(0)$ 严格压缩时，最终会导致特别简单的情形，因为 $p(z_1, \ldots, z_{d-1}, w)$ 在 U_d 内与 w 上下可比。当 $|\nabla_p^1(0)|^{Hp}(0)$ 的算子范数为 1 时，即使在二元情形下也已经十分微妙。

在两个变量的情形下，我们可以超越简单边界零点，并超越上述严格压缩性条件。根据牛顿-普伊苏定理，一条避开 U_2 的代数曲线将具有由 $t \mapsto (t^M, \phi(t))$ 局部参数化的分支，其中 ϕ 是解析的、在0处消失，并且满足

$$|t|^{2M} \geq \Im(\phi(t))$$

对于充分接近0的 $t \in \mathbb{C}$。我们可以对参数作旋转，并假定该参数化具有形式 $t \mapsto (ct^M, \phi(t))$，其中 $|c| = 1$，且 ϕ 的第一个非零系数位于正虚轴上。这不过是一种规范化，用以简化后面的若干公式。

现在我们写下

$$\phi(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j t^j = \psi_0 t^{a_0} + o(t^{a_0})$$

其中第一个和式是 ϕ 的标准幂级数展开，而第二个表达式记录了所出现的第一个非零项（此处为 $\psi_0 \in i(0, \infty)$与 $a_0 \in \mathbb{N}$）。

于是，我们对 ϕ的要求为

$$G_\phi(t) := |t|^{2M} - \Im(\phi(t)) \geq 0. \tag{1}$$

我们的目标是:

- 描述所有此类 ϕ
- 看看 ϕ 的性质如何应用于研究在 U_2 中 $(0, 0)$ 附近不取零的多项式的可容许分子
- 构造具有指定的局部和/或整体行为的多项式。

与定理 1.2 一样，我们有以下结果。

命题1.3。设 $\phi(t) = \psi_0 t^{a_0} + o(t^{a_0}) \in \mathbb{C}\{t\}$ 如上所述，且满足 $\psi_0 \in i(0, \infty)$。若 $|t|$ 足够小，则 (1) 成立，从而 $a_0 \geq 2M$。若此外 $a_0 = 2M$，则 $|\psi_0| \leq 1$。

反之，若 $a_0 > 2M$ 或 $a_0 = 2M$ 且 $|\psi_0| < 1$，则当 $|t|$ 足够小时(1) 成立，并且我们有$w - \phi(z^{1/M})$ 与 w 可比。

因此，我们再次发现，在 $|\psi_0| < 1$这一种情形下，表现简单；而在 $\psi_0 = i$ 和 $a_0 = 2M$ 这一临界情形下，则有更多可能性。在 $|\psi_0| < 1$的情形下，表达式$w - \phi(z^{1/M})$在 ∂U_2 上有一个孤立零点，而 $\psi_0 = i$ 则带来了其他可能性，包括 $w - \phi(z^{1/M})$在 ∂U_2上可能有一条实一维零点曲线。有趣的是，文献中此前已知的、在 U_2中没有零点的不可约多项式的例子仅有

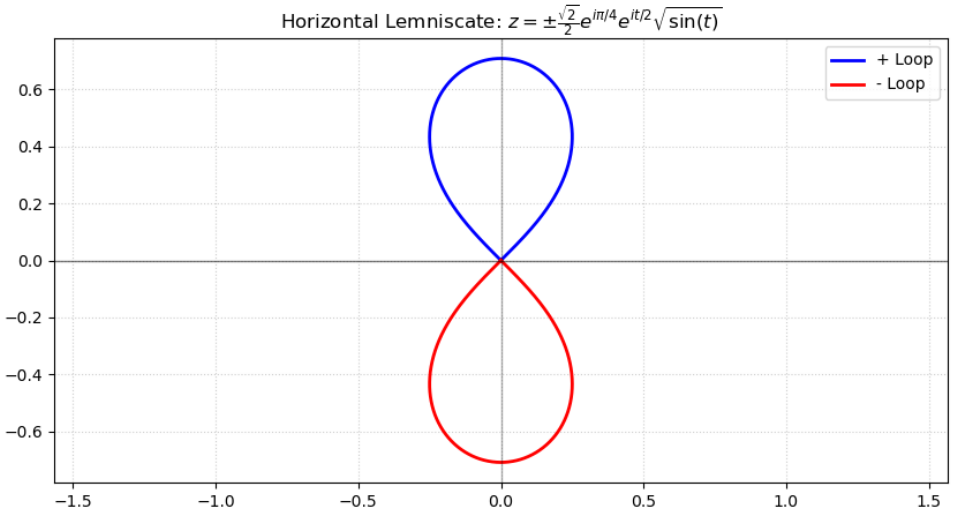


FIGURE 1. 伯努利双纽线

且在 ∂U_2 上有一条零点曲线的例子是 $w - z^2$ 及其密切相关的变体。在球域情形下，这对应于 $1 - z_1^2 - z_2^2$ 或 $1 - 2z_1z_2$（而这些变体对应于酉变量变换）。本文将补充以下例子：

$$w + w^2 - z^2 \tag{2}$$

它同样在 U_2 中没有零点，但在边界上有一条零点曲线。该例子在 $\mathbb{B}_2$ 设定下的一个版本是

$$i - 1 + 2z_2 - (1 + i)z_2^2 + z_1^2.$$

∂U_2 中的边界曲线可参数化为

$$\theta \mapsto \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\theta/2}e^{i\pi/4}\sqrt{\sin\theta}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{i\theta} \right), \quad \theta \in [0, \pi].$$

第一个分量描绘伯努利双纽线，第二个分量是一个半圆。见图 1 和例 5.6。

还有哪些其他例子?

问题 1.4. 是否有可能刻画在 $\mathbb{B}_2$ 或 U_2中没有零点、且具有无穷多个边界零点的不可约 $p \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$?

我们的方法回答了这个问题的一个局部解析版本。描述一个局部解析例子的最简单方式，是给出其零点集的参数化。解析曲线

$$s \mapsto (se^{is}, is^2 - (2/3)s^3) \tag{3}$$

在较小的 $s \in \mathbb{C}$ 范围内定义，避开 U_2，并将实数映射到 ∂U_2。为了得到具有所需局部性质的解析函数，我们令 $\Phi(z)$ 为 $s \mapsto z = se^{is}$ 的反函数，于是 $w - i\Phi(z)^2 - (2/3)\Phi(z)^3$ 在 U_2 中靠近 (0，0) 的位置没有零点，却在∂U_2上有一条零点曲线。详情见例 3.1。在两个变量的情形中，边界上有零点曲线的多项式与研究球上的有界有理函数无关，因为

这类多项式不会作为有界 q/p 的分母出现（写成 q 和 p 没有公因子的形式）。[2] 尽管如此，这一现象仍然很有趣。

下一个定理给出了相关的、形如 $\phi(t) = it^{2M} + o(t^{2M})$ 的 ϕ 的完整刻画。[3] 综合命题1.3和定理 1.5，可得出 U_2 中在 (0，0) 附近无零点的多项式的完整局部描述。

定理 1.5。给定 $M \in \mathbb{N}$、$|c| = 1$ 和 $\phi \in \mathbb{C}\{t\}$、$\phi(t) = it^{2M} + o(t^{2M})$，使得

$$t \mapsto (ct^M, \phi(t))$$

是一个不与 U_2 相交的解析曲线的单射参数化（当 $t \in \mathbb{C}$ 充分小时），则存在 $L(s) \in \mathbb{C}\{s\}$，满足 $L(0) = 0$，使得我们的曲线可以参数化为

$$s \mapsto \left(cs^M e^{ML(s)}, is^{2M} + 2Mi \int_{[0,s]} w^{2M} L'(w) dw \right). \tag{4}$$

此外，该曲线分为两种不同类型：

(1)（曲线型）$M = 1$ 和 $L(s) \in i\mathbb{R}\{s\}$，此时我们的曲线与 ∂U_2 相交于一条实一维曲线。(2)（孤立型）$M \geq 1$ 和 $L(s)$ 具有如下形式

$$L(s) = iA_0(s^M) + s^{2MK} L_1(s)$$

其中 $K \in \mathbb{N}$, $A_0(s) \in \mathbb{R}[s]$ 的次数小于 $2K$，且 $L_1 \in \mathbb{C}\{s\}$, $\Re(L_1(0)) > 0$。在这种情况下，我们的曲线与 ∂U_2 相交于孤立点 (0,0)。

反之，给定满足上述两个条件之一的 M 和 $L(s)$，参数化 (4) 给出一条在 (0,0)附近避开 U_2 的解析曲线。要使参数化具有单射性，我们需要 L 不是 s^M的函数。

上述参数化乍看令人望而却步，但实际上只涉及幂级数 L 的一些基本条件，以及一个积分的计算（它仅仅作为系数的乘数）。更简单地说，如果 $H(s) = s^M e^{ML(s)}$，那么

$$is^{2M} + 2Mi \int_{[0,s]} w^{2M} L'(w) dw = 2i \int_{[0,s]} w^{2M} \frac{H'(w)}{H(w)} dw.$$

在上文的 (3) 中，我们写出了 $M = 1, L(s) = is$的情形。最简单的曲线型示例是$M = 1$, $L(s) \equiv 0$，它对应于全局稳定多项式 $w - z^2$；但正如 (2) 所示，还有其他具有这一性质的 L。对于 $M = 2$，最简单的示例（它必然是孤立型）是 $L(s) = is^2 + s^4 + s^5$。参见例 3.2。

我们还可以描述具有上述孤立型零点集的多项式的可容许分子理想。在这种情形下，可容许分子理想定义为

$$\mathcal{I}_p^\infty = \{q \in \mathbb{C}\{z, w\} \colon q/p \text{ is bounded on } U_2 \cap B((0,0), \epsilon) \text{ for some } \epsilon > 0\}.$$

上述描述的一个推论是，在孤立型情形下，ϕ具有如下形式

$$\phi(t) = \phi_0(t^M) + O(t^{2M(1+K)}) \tag{5}$$

[2]具体而言，为了使 q/p 有界，必须满足 $Z_p \cap \partial\mathbb{B}_2 \subset Z_q \cap \partial\mathbb{B}_2$，而 p 与 q 有无穷多个公共零点，则由贝祖定理可知它们有一个公共因子。[3]值得注意的是，某些结构与双圆盘或双上半平面中的情形相似。参见 [8],第 98 页，“定理（普伊瑟因式分解）”。

其中 $\phi_0(t) \in \mathbb{C}[t]$ 的次数小于 $1+K$。 [4] 参见推论 3.7。

定理 1.6. 设 $p(z,w)$ 是一个多项式，在 U_2 的某个邻域内没有零点，且其零点集在$(0,0)$ 附近可由下式（单射地）参数化：

$$t \mapsto (ct^M, \phi(t))$$

其中， ϕ具有定理 *1.5* 中所述的孤立型。于是，p 的可容许分子理想为

$$(w - \phi_0(\bar{c}z), z^{2(1+K)})^M \tag{6}$$

这里所用的数据 K, ϕ_0 见定理 *1.5* 和(5)。

表达式 (6) 是一个乘积理想： $\mathbb{C}\{z,w\}$中 $j = 0, \ldots, M$的各个 $(w - \phi_0(\bar{c}z))^j z^{2(1+K)(M-j)}$ 的组合。

定理 1.6 关注的是：当 p 在 (0,0) 附近只有一个不可约魏尔斯特拉斯因子，且具有孤立型参数化时的情形。对于两个变量，一般情况下如何确定可容许分子呢？通常，一个多项式在 U_2 的某个邻域内没有零点，却可能分解为若干个不可约魏尔斯特拉斯多项式，而每个多项式的零点集都由某种普伊苏型参数化给出；这些类型可能分别是基本型、孤立型或曲线型。可容许分子理想的确定问题留待未来工作。在双圆盘情形中，这一步最初由 Koll´ar [21] 完成。（纯代数层面上的一个区别是，双圆盘情形中的可容许分子理想涉及实系数多项式，这在 [21] 的证明中发挥了一定作用。而这里的对应对象 ϕ_0 可能既非实数，也非纯虚数。）

接下来的一个重大问题是，能否构造出全局定义的多项式，使其具有我们局部理论中所描述的行为。第 4 节介绍了几个多项式示例，展示了上述局部理论的不同方面。Rudin 在 [25] 中的一种构造，使我们得以构造全局多项式示例，其参数化满足 $M = 1$，且 K 可以任意大。参见第 4.4 节。

行列式公式在多圆盘（尤其是双圆盘）情形下很有价值，但在球域情形下似乎并非如此。我们在第 4.5 节指出，在球域情形下值得考虑的一类自然的行列式多项式虽然在 $\mathbb{B}_d$ 上不取零，却具有特别简单的边界行为。我们考虑的是以下多项式

$$\det\left(I - \sum_{j=1}^{d} z_j A_j\right)$$

其中（A_1，……，A_d）是由 $N \times N$ 矩阵构成的行收缩（即 $\sum_{j=1}^{d} A_j A_j^* \leq I_N$），这些多项式最终会有有限多个边界零点，且每个边界零点都会贡献一个次数为一的多项式因子。参见命题 4.5。

我们以第5节结束本文，该节给出一种构造具有正确局部行为的多项式的方法；然而，我们尚不清楚如何确保所构造的多项式在 U_2中没有零点。

假设我们有一个不可约多项式 $p \in \mathbb{C}[z,w]$，它在 U_2 中没有零点，并且在 (0，0) 处有一个零点。根据命题1.3， p 可能具有以下基本型的分支：

$$s \mapsto (cs^M, \psi_0 i t^{a_0} + o(t^{a_0}))$$

[4]人们很容易想据此直接刻画 ϕ，但这似乎并不那么简单。

其中要么是 $a_0 > 2M$，要么是“$a_0 = 2M$ 和 $\psi_0 < 1$。”对于任意的 M，都很容易构造出具有这种局部行为的多项式：

$$s \mapsto (s^M, is^{2M+1}) \quad \text{and} \quad s \mapsto (s^M, (i/2)s^{2M} + s^{2M+1})$$

具有这种行为的参数化，以及零点集由其值域给出的相应多项式，是

$$z^{2M+1} + w^{2M} \text{ and } (w - (i/2)z^2)^M - z^{2M+1}.$$

然而，这些在整个 U_2上并非不取零。尽管如此，例4.2和例4.3展示了具有正确局部和全局行为的基本型多项式（以及一个孤立型的实例），因此我们确实希望找到一种构造多项式的方法，使其在 U_2 上不取零，并具有孤立型或曲线型边界零点。

那么，假设 p 至少有一个分支，其局部参数化为

$$s \mapsto \gamma(s) = \left(cs^M e^{ML(s)}, is^{2M} + i2M \int_{[0,s]} x^{2M} L'(x) dx \right) \tag{7}$$

其中 $L(s) \in \mathbb{C}\{s\}$, $L(0) = 0$, $|c| = 1$, $M \in \mathbb{N}$；有关孤立型与曲线型的其他细节见定理 1.5。

定理 1.7。 如果上述参数化(7) 是代数的，那么 $f(s) = e^{L(s)}$ 是一个代数函数，其解析延拓在 $\mathbb{C}_* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$上的各点处没有零点或极点（也没有代数零点或代数极点）。此外，$f'(1/s)/f(1/s)$（任意解析延拓）的 ***Puiseux-Laurent*** 级数在0附近不能含有项 s^{2M+1}。

所谓代数零点或极点，是指在分支点 s_0 处，函数 e^L 的延拓必然具有 Puiseux-Laurent展开

$$\sum_{j=n}^{\infty} a_j (s - s_0)^{j/k} \qquad a_n \neq 0$$

零点对应于 $n > 0$，而极点对应于 $n < 0$。定理中的条件旨在避免积分（7）中的对数奇点。

注 1.8。 这并非一个完整的刻画。尽管我们在此不对其进行全面探讨，但本质上所要求的是，$z^{2M} \frac{dw}{w}$ 是与代数函数 $w = f(z)$相关联的黎曼曲面上的恰亚纯1-形式。 ♠

该定理提供了一种开始构造多项式的方法，使其零点集在 $(0, 0)$ 处至少有一个分支具有所需的局部行为。首先，为了得到一个在 $\mathbb{C}_*$中没有零点或极点的代数函数，我们需要一个不可约多项式 $P(s, y) = \sum_{j=0}^{m} P_j(s) y^j \in \mathbb{C}[s, y]$，使得 $P_m(s)$在 $\mathbb{C}_*$ 中没有零点（以避免 $\mathbb{C}_*$中的极点），并且 $P(s, 0) = P_0(s)$在 $\mathbb{C}_*$中没有零点。必然地，P_0和 P_m是单项式。除此之外，$P(s, y)$需要在 $(0, 1)$ 处具有一个解析分支，其对数满足定理 1.5 中关于 L 的条件。第5节介绍了定理 1 中 $f(s)$ 的几个例子 .7 例如

Example 5.1: $((1 + 4s^4)^{1/2} + 2s^2)^{1/2}$ with polynomial $w - iw^2 - iz^2$

Example 5.2: $1 + (1 + is)^{1/2}$

Example 5.6: $((1 - 4s^4)^{1/2} + 2is^2)^{1/2}$ with polynomial $w + w^2 - iz^2$

我们还讨论了定理 1.7 和注 1.8 的几个“反例”，这些反例实质上引导我们了解阿贝尔积分理论的具体实例。

目录准确地概述了本文的结构。

Contents

1. 引言 1 2. 边界上的简单零点 8 3. 两个变量 11 3.1. 基本情形 11 3.2. 基本情形中的可容许分子 12 3.3. 非基本情形：孤立型与曲线型 13 3.4. 孤立型的可容许分子 17 4. 全局示例 20 4.1. 初等例子 20 4.2. 由单变量多项式构造稳定多项式 22 4.3. 二次型的例子 22 4.4. 鲁丁构造 23 4.5. 由行压缩构造稳定多项式 24 4.6. 球域情形之外的例子 26 5. 构造具有局部行为的多项式 27 致谢 31 参考文献 32

2. Simple zero on the boundary

如引言中所述，单位球 $\mathbb{B}_d$ 与西格尔半空间双全纯等价

$$U_d = \{(z_1, \dots, z_{d-1}, w) : \Im w > |z|^2\} \tag{8}$$

通过映射

$$F : U_d \to \mathbb{B}_d \qquad F(z_1, \dots, z_{d-1}, w) = \left(\frac{2z_1}{i+w}, \dots, \frac{2z_{d-1}}{i+w}, \frac{i-w}{i+w} \right) \tag{9}$$

$$F^{-1} : \mathbb{B}_d \to U_d \qquad F^{-1}(z_1, \dots, z_{d-1}, w) = \left(\frac{iz_1}{1+w}, \dots, \frac{iz_{d-1}}{1+w}, i\frac{1-w}{1+w} \right). \tag{10}$$

域 U_d 及其简单变体在 [13]中被称为球的无界实现。 [5]因此，多项式 $p(z_1, \dots, z_{d-1}, w)$ 在 $\mathbb{B}_d$ 上不取零，当且仅当多项式

$$(i+w)^{\deg p} p(F(z,w))$$

在 U_d上不取零。此外，有理函数 q/p 在 $\mathbb{B}_d$ 中于 $(0, \dots, 0, 1)$ 附近有界，当且仅当 $q(F(z,w))/p(F(z,w))$在 U_d内的 0 附近有界。

[5]域 U_d 是 Siegel 研究的众多“经典”域之一，所以或许使用一个更通用的术语更合适。

首先，我们尝试理解简单边界零点；也就是说， p 在 U_d中的 0 附近不取零， $p(0) = 0$, 且 $\nabla p(0) \neq 0$。

引理2.1. 假设 $p(z, w) \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_{d-1}, w]$ 在与 U_d相交的$0 \in \mathbb{C}^d$ 邻域内不取零。设 $p(0) = 0$ 且 $\nabla p(0) \neq 0$。那么，对于$j = 1, \frac{\partial p}{\partial z_j}(0) = 0$ ， $d-1$，因此必然有 $\frac{\partial p}{\partial w}(0) \neq 0$。

证明。 例如, 若 $\frac{\partial p}{\partial z_1}(0) \neq 0$，则根据隐函数定理， p 的零点集可在局部通过 $z_1 = \phi(z_2, \ldots, z_{d-1}, w)$ 参数化，其中某个在 0 处取零的解析函数 ϕ 满足

$$\Im w \leq |\phi|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_{d-1}|^2$$

对于所有充分小的 $(z_2, \ldots, z_{d-1}, w)$（因为 p在 U_d中不取零）。由于右侧的消失阶为 2，对于所有充分小的 w ，我们得到 $\Im w \leq 0$ ，这是不可能的（取 $w \in i(0, \infty)$）。□

因此，对于单零点， p的零点集可通过满足以下条件的 $w = \phi(z_1, \ldots, z_{d-1})$ 在局部参数化

$$\Im \phi(z_1, \ldots, z_{d-1}) \leq |z|^2$$

其中 $z = (z_1, \ldots, z_{d-1})$。与上文相同， ϕ不可能含有线性项。若 ϕ含有二次齐次项 $\Phi_2(z)$，则它必须满足

$$\Im \Phi_2(z) \leq 1$$

对于 $|z| = 1$。

引理 2.2。 设我们有一个二次型 $z^t A z$，此处用一个对称复矩阵 A表示，并满足

$$\Im(z^t A z) \leq 1$$

对于 $|z| = 1$。那么， A 必须是压缩的。

证明。 通过旋转 z，该不等式等价于更强的不等式

$$|z^t A z| \leq 1 \quad \text{for} \quad |z| = 1.$$

由 Autonne-Takagi分解（见 [17] 推论 4.4.4c），存在一个酉矩阵 U，使得 $U^t A U = D$为对角矩阵，其对角线上为非负实元素 D_1、.....、 D_{d-1}。用 Uz 替换 z，得到 $|z^t D z| \leq 1$，或者更确切地说

$$\left| \sum_{j=1}^{d-1} D_j z_j^2 \right| \leq 1.$$

我们可以分别旋转每个分量，从而得到

$$\sum_{j=1}^{d-1} D_j |z_j|^2 \leq 1$$

对于 $|z| = 1$。这只有在对所有 j， $D_j \leq 1$ 时才有可能。因此， D 是压缩的，由于 A 具有相同的算子范数，它也同样是压缩的。□

因此，我们可以得出结论： ϕ 的二次齐次项具有如下形式： $\Phi_2(z) = z^t A z$，其中 A 是复对称压缩矩阵。若 $\|A\| < 1$，则可得出一个反之命题；也就是说，对于满足 $\|A\| < 1$ 且 A 为对称的情形，以及

$$\phi(z) = z^t A z + \text{ higher order},$$

the 图像 $w = \phi(z)$ 在 0 附近避开 U_d。事实上，对于这样的 ϕ，以及 $(z,\ w) \in U_d$ ，

$$|w - \phi(z)| \geq \Im w - \Im\phi(z) = \Im w - |z|^2 + |z|^2 - \Im\Phi_2(z) - O(|z|^3) \gtrsim |z|^2.$$

由于 $|\phi(z)| \lesssim |z|^2$，我们也有 $|w - \phi(z)| \gtrsim |w|$ 在 U_d 内。因此，

$$|w - \phi(z)| \asymp |w| + |z|^2 \asymp |w| \tag{11}$$

对于 $(z,\ w) \in U_d$ 在 0 附近。综合以上结果，我们得到如下结论。

定理 1.2。 设 $p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_{d-1}, w]$ 在 U_d 中 0 附近不取零， $p(0) = 0$，且 $\nabla p(0) \neq 0$。设 $Hp(0) = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial z_j z_k}(0)\right)_{j,\ k=1,\ \ldots,\ d-1}$ 是 p 关于 z 在 0 处的海森矩阵。那么， $\nabla p(0)$ 是 $\vec{e}_d$ 的倍数，且

$$\frac{1}{2|\nabla p(0)|} Hp(0)$$

是压缩的。

作为部分逆命题，若 p 是一个多项式，使得 $p(0) = 0$, $\nabla p(0)$ 是 $\vec{e}_d$的倍数，且$\frac{1}{2|\nabla p\ (0)|} Hp(0)$ 是严格压缩的，那么 p 在 U_d内靠近0 处不取零。此外，在这种情况下，对于任意在0附近解析的函数 q ，当且仅当 $q \in (w,(z)^2)$时， q/p 在 U_d内靠近0 处有界。

与前面一样，$(z)^2$ 表示由 z^α 生成的理想，其中 $|\alpha| = 2$ ；而$(w,(z)^2)$表示由 w 和$(z)^2$生成的理想。

证明。 由魏尔斯特拉斯预备定理， p 可分解为 $p = u(z,w)(w - \phi(z))$，其中u, ϕ是解析的，且 $u(0,0) \neq 0$。由引理2.1， $\nabla\phi(0) = 0$且 $\frac{\partial p}{\partial w}(0) \neq 0$，并且 ϕ 的三次齐次项 $\Phi_2(z)$ 可用对称矩阵 A 表示为$\Phi_2(z) = z^t A z$。经计算，

$$A = -\frac{1}{2\frac{\partial p}{\partial w}(0)} Hp(0)$$

并且根据假设，这个矩阵是严格压缩的。

由 (11) 可知，理想 $(w,(z)^2)$ 的每个元素 q 都具有如下性质： q/p 在 U_d 内的 0 附近有界。反之，若 q/p 在 U_d 内的 0 附近有界，则我们希望证明 $q \equiv 0$ 模理想 $(w,(z)^2)$。根据魏尔斯特拉斯除法定理，我们可以写成

$$q = Q(z,w)w + R(z)$$

其中 $Q(z,w)$ $R(z)$ 是解析的。对理想 $(w,(z)^2)$ 取模后，我们可以忽略 Q，并假设 $R(z)$ 不含二阶及更高阶项。显然，若 R/p 局部有界，则 $R(0) = 0$。因此， $R(z) = \sum_{j=1}^{d-1} a_j z_j$ 由一个线性项构成。由于 p 在 0 附近与 w 局部可比较，我们必有

$$\frac{\sum_{j=1}^{d-1} a_j z_j}{w}$$

在 U_d 中于 0 附近有界。令 $\gamma(r) = (\operatorname{sgn}(\overline{a_1})r, \ldots, \operatorname{sgn}(\overline{a_{d-1}})r, idr^2)$，它对 $r \in (0, \infty)$ 取值于 ∂U_d，则有

$$\frac{R(\gamma(r))}{idr^2} = \frac{\sum_j |a_j|}{idr}$$

当 $r \to 0$ 时趋于无穷远点，除非 $R \equiv 0$。这意味着 $R \equiv 0$ 和 $q \equiv 0$。 □

当 A 是压缩但并非严格压缩时，即使在两个变量的情形下也已相当困难，因此我们将 $d > 2$ 个变量的进一步研究留待将来。

3. Two variables

如引言中所述，在两个变量的情形下，我们的策略是分析式（1）中的函数

$$G_\phi(t) = G(t) = |t|^{2M} - \Im(\phi(t))$$

在 0 附近。我们将看到，理解并刻画相关 ϕ 的一种好方法，是研究固定 r 时 $\theta \mapsto G$（$re^{i\theta}$）的临界点——即所谓的角临界点。这也使我们能够确定最优下界的行为

$$G(t) \gtrsim |t|^K$$

当 G 在 0 附近非负时。如果 G 在 0 处有一个孤立零点，那么根据 Lojasiewicz不等式（参见 [9]），这种行为便有保证；但通过我们的方法，我们可以确定 K，并找出使 G 最小化的曲线。也有可能 G 在最小化曲线上恒等于零，例如 $w - z^2$ 的情形——它在 U_2 中不取零，但在边界上的点（$\sqrt{ir}$，ir^2）处为零。

这与寻找可容许分子有何关系？在给定的参数化下，p 将具有普伊瑟因子

$$w - \phi(\mu^k(\bar{c}z)^{1/M})$$

对于 $\mu = \exp(2\pi i/M)$，以及 $k = 0, \ldots\ldots, M-1$。然后，对于 $(z, w) \in U_2$

$$|w - \phi(\mu^k(\bar{c}z)^{1/M})| \geq \Im w - \Im\phi(\mu^k(\bar{c}z)^{1/M}) \geq \Im(w) - |z|^2 + G(\mu^k(\bar{c}z)^{1/M}) \gtrsim |z|^{K/M}. \tag{12}$$

这一下界使我们能够找到一些可容许分子。要证明对可容许分子的整个理想所作的合理猜测是完备的，还需要额外的工作。

3.1. 基本情形。

要进入最有趣的情形，需要进行一些初步约化。回想一下，我们有

$$\phi(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j t^j = \psi_0 t^{a_0} + o(t^{a_0})$$

其中 $\psi_0 \in i(0, \infty)$。首先，我们逐步处理并找出两个“基本”情形：

- $a_0 > 2M$
- $a_0 = 2M$ 和 $\psi_0 = i\tilde{\psi}_0$，且 $0 < \tilde{\psi}_0 < 1$

在第3.3节中，我们讨论 $a_0 = 2M$ 和 $\psi_0 = i$的情形。

命题1.3。 设 $\phi(t) = \psi_0 t^{a_0} + o(t^{a_0}) \in \mathbb{C}\{t\}$ 如上所述，且 $\psi_0 \in i(0, \infty)$。若（1）对足够小的 $|t|$ 成立，则 $a_0 \geq 2M$。此外，若 $a_0 = 2M$，则 $|\psi_0| \leq 1$。

反之，若 $a_0 > 2M$ 或 $a_0 = 2M$ 且 $|\psi_0| < 1$，则当 $|t|$ 较小时，(1) 成立，并且我们有$w - \phi(z^{1/M})$ 与 w 相当。

证明。若 $a_0 < 2M$ 则

$$\lim_{r\to 0} \frac{G(re^{i\theta})}{r^{a_0}} = -\Im(\psi_0 e^{ia_0\theta}) \geq 0$$

当 $a_0\theta = 3\pi/2$ 时这是错误的，因为 $\psi_0 \in i(0, \infty)$。

现在，如果 $a_0 > 2M$，那么

$$G(t) = |t|^{2M}(1 - O(|t|^{a_0-2M})) \gtrsim |t|^{2M}$$

当 $|t|$ 足够小时为正。

当 $a_0 = 2M$ 时，我们可以写成 $t = re^{i\theta}$，并且

$$G(t) = r^{2M}(1 - \Im(\psi_0 e^{i2M\theta})) - O(r^{2M+1}).$$

如果 $G(t) \geq 0$ 对足够小的 t 成立，我们有

$$\lim_{r\to 0} \frac{G(re^{i\theta})}{r^{2M}} = 1 - \Im(\psi_0 e^{i2M\theta}) \geq 0$$

这意味着 $|\psi_0| \leq 1$。

Conv反之，‘$a_0 = 2M$ 和 $|\psi_0| < 1$’给出了一个充分条件，因此我们有

$$G(t) \gtrsim |t|^{2M}.$$

在这两种情形下，上界 $G(t) \lesssim |t|^{2M}$ 均可由 $a_0 \geq 2M$ 得出。由 (12)，$|w - \phi(\mu^k(\bar{c}z)^{1/M})| \gtrsim |z|^2$。由于 $\phi(\mu^k(\bar{c}z)^{1/M})$ 的消失阶数为 2 或更高，我们还可以看出

$$|w - \phi(\mu^k(\bar{c}z)^{1/M})| \gtrsim |w|$$

因此 $|w - \phi(\mu^k(\bar{c}z)^{1/M})| \asymp |z|^2 + |w|$，因为这些上界是显然的。换言之，由于 $|w| \asymp |z|^2 + |w|$ 属于 U_2，$w - \phi(\mu^k(\bar{c}z)^{1/M})$ 可以用简单的局部模型 ‘w’ 替代。□

3.2. 基本情形下的可容许分子。 如果 p 的所有不可约 Weierstrass 因子都属于基本情形，那么多项式 p 可以用 w 的幂来建模。

如上所述，在基本情形中，我们有 p 的相应普伊瑟因子满足

$$|w - \phi(\mu^k(\bar{c}z)^{1/M})| \asymp |w| \asymp |w| + |z|^2$$

在 U_2 中靠近 (0,0) 的位置。因此，如果 p 只有一个给定类型的不可约魏尔斯特拉斯因子，那么可容许分子理想包含 $(w, z^2)^M$，并且我们可以证明这个理想就是整个环。事实上，给定 $q \in \mathbb{C}[z, w]$，使得 q/p 在 U_2 中靠近 (0,0) 时有界，我们声称可以将 q 对 $(w, z^2)^M$ 取模并得到零。由于 p 的普伊瑟因子与 w 可比，我们只需假设 q/w^M 在靠近 (0,0) 时有界。

根据魏尔斯特拉斯除法定理，我们可以假设 q 是关于 w 的多项式，其次数至多为 $M - 1$。写作 $q(z, w) = \sum_{j=0}^{M-1} q_j(z)w^j$，我们还可以假设 $\deg q_j(z) < 2M - 2j$，因为 $w^j z^{2(M-j)} \in (w, z^2)^M$。

注意，若 $(z, w) \in U_2$，则对于任意 $r > 0$，$(rz, r^2w) \in U_2$。若考察 $q(rz, r^2w)$ 中出现的 t 的最低次幂 k，它必定小于 $2M$。写作

$$q(rz, r^2w) = \tilde{q}(z, w)r^k + \text{ higher order in } r$$

我们有

$$\left|\frac{q(rz, r^2w)}{r^{2M}w^M}\right| \gtrsim \frac{r^k|\tilde{q}(z, w)| - O(r^{k+1})}{r^{2M}}.$$

如果 q 并非恒等于零，我们可以选取一点，使得 $\tilde{q}(z,w) \neq 0$，令 $t \to 0$趋于该点，便会与局部有界性矛盾。因此 $q \equiv 0$ 模理想 $(w, z^2)^M$。

3.3. 非基本情形：孤立型与曲线型。现在我们来讨论基本类型之外的情形。为此，假设 $a_0 = 2M$ 和 $\psi_0 = i$。于是，我们可以写成 $\phi(t) = it^{2M} + o(t^{2M})$。我们的目标是证明下面的定理，它完整刻画了上述在 $(0,\ 0)$ 附近避开 U_2 的曲线。

定理 1.5。给定 $M \in \mathbb{N}$, $|c| = 1$ 和 $\phi \in \mathbb{C}\{t\}$, $\phi(t) = it^{2M} + o(t^{2M})$，满足

$$t \mapsto (ct^M, \phi(t))$$

是一个解析曲线的单射参数化，且当 $t \in \mathbb{C}$ 足够小时避开 U_2，则存在 $L(s) \in \mathbb{C}\{s\}$，使得 $L(0) = 0$，从而我们的曲线可以参数化为

$$s \mapsto \left(cs^M e^{ML(s)}, is^{2M} + 2Mi \int_{[0,s]} w^{2M} L'(w) dw \right). \tag{4}$$

此外，该曲线分为两种不同类型：

(1)（曲线型）$M = 1$ 和 $L(s) \in i\mathbb{R}\{s\}$，此时我们的曲线与 ∂U_2 相交于一条实一维曲线。(2)（孤立型）$M \geq 1$ 和 $L(s)$ 具有如下形式

$$L(s) = iA_0(s^M) + s^{2MK} L_1(s)$$

其中 $K \in \mathbb{N}$、A_0（s）$\in \mathbb{R}[s]$ 的次数小于 $2K$，且 $L_1 \in \mathbb{C}\{s\}$、$\Re$（L_1（0）> 0。在这种情况下，我们的曲线在孤立点（0、0）处与 ∂U_2 相交。

反之，给定满足上述两个条件之一的 M 和 L（s），参数化（4）给出一条在（0、0）附近避开 U_2 的解析曲线。为了使参数化具有单射性，我们需要 L 不是 s^M的函数。

函数 $L(s)$ 与双上半平面情形中出现的参数化函数具有相同的结构，只需进行一些小的修改。实际上，它完全对应于 [20]中定理3.1和定理3.2所述的、在 $\mathbb{R} \times \mathbb{H}$ 中靠近（0, 0）处没有零点的多项式情形。同样，我们仍然具有这样的特征：边界曲线迫使不可约皮瑟参数化具有光滑性；但在当前情形中，并不存在“实稳定”多项式的概念（即在 $\mathbb{H}^2$ 和 $-\mathbb{H}^2$上没有零点的多项式）。

例3.1。 令 $M = 1$, $L(s) = is$，我们得到如下参数化的解析曲线：

$$s \mapsto (se^{is}, is^2 - (2/3)s^3)$$

它避开 U_2，同时在 ∂U_2 上为 s 实数时参数化一条曲线。 ♢

例 3.2。设 $M = 2$，并令 $L(s) = is^2 + s^4 + s^5$，它显然满足“孤立型”条件。参数化为

$$s \mapsto (s^2 \exp(2is^2 + 2s^4 + 2s^5), is^4 - (4/3)s^6 + 2is^8 + (20/9)is^9).$$

注意，将 s^5 包含在 $L(s)$ 中，使得这个例子不可约。♢

定理 *1.5* 的证明。首先，对于每个固定的 r，我们分析 $\theta \mapsto G(re^{i\theta})$ 的临界点，也就是下式的解

$$\Im(\phi'(re^{i\theta}) rie^{i\theta}) = 0.$$

我们将 $\Im(\phi'(t)it)$ 的解称为 G 的角临界点。我们可以通过对 ϕ 进行幂级数运算来求出角临界点。

由于 $\phi(t) = it^{2M} + o(t^{2M})$，我们有

$$\frac{1}{-2M} it\phi'(t) = t^{2M} + o(t^{2M})$$

并且我们可以将其因式分解为

$$\frac{1}{-2M} it\phi'(t) = (\Phi(t))^{2M}$$

其中 $\Phi(t)$ 在 0 附近是解析的，$\Phi(0) = 0$，且 $\Phi'(0) = 1$。令 $\Psi(s) = \Phi^{-1}(s)$ 为解析反函数，则有

$$\phi'(\Psi(s))i\Psi(s) = -2Ms^{2M}. \tag{13}$$

因此，要在 0 附近求解 $\Im(\phi'(t)it) = 0$，关于 t，我们可以求解 $0 = \Im(\phi'(\Psi(s))i\Psi(s)) = -2M\Im(s^{2M})$，其解为 $s = r\nu^k$，其中 $\nu = \exp(\pi i/2M)$，$k \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{R}$。在原坐标中，角临界点因此由 $t = \Psi(r\nu^k)$ 构成。

注意，根据链式法则和 (13)

$$\phi(\Psi(s)) = \int_{[0,s]} 2Miw^{2M} \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)} dw$$

并且将 $\Psi(s) = s\exp(L(s))$ 写作解析的 $L(s)$，其中 $L(0) = 0$，我们有

$$\phi(\Psi(s)) = is^{2M} + 2Mi \int_{[0,s]} w^{2M} L'(w) dw. \tag{14}$$

要检验当 $t \in \mathbb{C}$ 较小时，$G_\phi(t) \geq 0$ 是否成立，我们只需检查角临界点。首先注意到

$$\begin{aligned} G_\phi(\Psi(s)) &= |\Psi(s)|^{2M} - \Im(\phi(\Psi(s))) \\ &= |s|^{2M} \exp(2M\Re(L(s))) - \Im\left(is^{2M} + 2Mi \int_{[0,s]} w^{2M} L'(w) dw \right). \end{aligned}$$

令 $s = r\nu^k$ 为 $r \in \mathbb{R}$，我们计算角临界点处的 G

$$G_\phi(\Psi(r\nu^k)) = r^{2M} \exp(2M\Re(L(r\nu^k))) - (-1)^k r^{2M} - 2M\Re\left(\int_{[0,r\nu^k]} w^{2M} L'(w) dw \right).$$

如果 k 是奇数，那么该表达式为 $\gtrsim r^{2M}$，且非负性得以保证（也就是说，这些临界点很可能是局部极大值），因此我们只需考虑 k 为偶数的情况。我们也可以用 $\exp(i\pi/M)$ 替换$\mu = \nu^2 =$，并考虑 $k \in \mathbb{Z}$。于是现在有

$$G_\phi(\Psi(r\mu^k)) = r^{2M}(\exp(2M\Re(L(r\mu^k))) - 1) - 2M\Re\left(\int_{[0,r\mu^k]} w^{2M} L'(w) dw \right). \tag{15}$$

对于固定的 k，该表达式对所有充分小的 $r \in \mathbb{R}$ 均为非负，当且仅当该表达式恒为零，或者存在形如 βr^{2K} 的最低阶项（对于 $\beta > 0$）。我们按如下方式标记系数 $L(s) = \sum_{j=1}^{\infty} L_j s^j$。若对所有 j 均有 $\Re(L_j \mu^{jk}) = 0$，则 (15) 必然恒为零。我们对每个 k 定义

$$m(k) = \min\{j \in \mathbb{N} : \Re(L_j \mu^{kj}) \neq 0\}$$

并且我们允许 $m(k)=\infty$ 这种可能性。利用这个首个非零项，我们可以计算 (15) 中的最低阶项。以下是所需的组成部分；我们有 $\Re(L(r\mu^k)) = \Re(L_{m(k)}\mu^{km(k)})r^{m(k)} + o(r^{m(k)})$，因此

$$\exp(2M\Re(L(r\mu^k))) - 1 = 2M\Re(L_{m(k)}\mu^{km(k)})r^{m(k)} + o(r^{m(k)})$$

以及

$$\Re\left(\int_{[0,r\mu^k]} w^{2M}L'(w)dw\right) = \frac{m(k)}{m(k)+2M}\Re(L_{m(k)}\mu^{k(m(k)+2M)})r^{m(k)+2M} + o(r^{m(k)+2M}).$$

综合以上结果

$$G_\phi(\Psi(r\mu^k)) = \frac{(2M)^2}{m(k)+2M}r^{2M+m(k)}\Re(L_{m(k)}\mu^{km(k)}) + o(r^{2M+m(k)}). \tag{16}$$

当 r 足够小时，该表达式非负，当且仅当 $m(k)$ 为偶数，且

$$\Re(L_{m(k)}\mu^{km(k)}) > 0. \tag{17}$$

因此，我们得出结论：当 $t\in\mathbb{C}$ 足够小时， $G_\phi(t)$ 非负，当且仅当对于每个 $k\in\mathbb{Z}$，要么 $m(k)=\infty$，要么 $m(k)<\infty$， $m(k)$ 为偶数，并且 (17) 成立。现在，我们希望进一步完善这一刻画，并证明：当 $t\in\mathbb{C}$ 足够小时， $G_\phi(t)$ 非负，当且仅当下列情形之一成立

情形 A： $M=1$ 且 $m(0)=\infty$ 或

情形 B： 对于所有 k， $m(k)<\infty$， $m(k)$ 为偶数，并且 (17) 成立。

为此，我们证明：如果 $m(\ell)=\infty$ 对某个 ℓ 成立，那么必然有 $M=1$。

断言：如果 $m(\ell)=\infty$ 对某个 ℓ 成立，那么 $M=1$。

为此，我们可以假设 $\ell=0$ ——即 $m(0)=\infty$ ——从而 $L(s)$ 的所有系数都属于 $i\mathbb{R}$。（否则，考虑 $L(s\mu^\ell)$。）假设 $M\neq 1$，下面证明 $m(1)<\infty$。事实上，如果 $L(s\mu)$ 的所有系数都属于 $i\mathbb{R}$，那么对所有 j，都有 $\Re(L_j)=\Re(L_j\mu^j)=0$。除非 $\mu^j=\pm 1$，否则必有 $L_j=0$；而 $\mu^j=\pm 1$ 恰好在j是 M的倍数时成立。因此，除非 j是 M的倍数，否则 $L_j=0$。在这种情况下，对某个解析的 L，有 $L(s)=\tilde{L}(s^M)\tilde{}$。我们可以将此追溯到 ϕ，从而与我们的 Puiseux 参数化的单射性矛盾。我们有 $\Psi(s)=se^{\tilde{L}(s^M)}$，这意味着反函数具有类似的形式，即对某个解析的 $\tilde{\Phi}$，有 $\Phi(t)=t\tilde{\Phi}(t^M)$。这由拉格朗日反演公式得出。于是， $it\phi'(t)=-2Mt^{2M}\tilde{\Phi}(t^M)^{2M}$ 是 t^M 的解析函数，因此 $\phi(t)$ 也是解析函数，这与我们的 Puiseux 参数化的单射性矛盾。因此，由于$M\neq 1$， $m(1)<\infty$。

现在我们可以考虑

$$m = \min\{m(k) : k\in\mathbb{Z}\} \tag{18}$$

由于 $m(1)<\infty$ （尽管 $m(0)=\infty$），这必然是有限的。我们必须有 m 为偶数，并且

$$\Re(L_m\mu^{km}) \geq 0 \tag{19}$$

根据 (16) 和 (17)，对所有 k 都成立——此外，对某个 k，不等式是严格的。事实上，如果$m=m(k)$，那么不等式是严格的；而如果 $m<m(k)$，那么 $\Re(L_m\mu^{mk})=0$。

下面这个初等引理概括了下文中多次出现的一种情形，证明从略。

引理 3.3。若 σ 是单位根且 $A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，假设对于所有 $k \in \mathbb{Z}$，都有 $\Re(A\sigma^k) \geq 0$。那么，要么 $\sigma = -1$ 且 $\Re(A) = 0$，要么 $\sigma = 1$ 且 $\Re(A) \geq 0$。

假设 $m(0) = \infty$，我们有 $\Re(L_m) = 0$，因此引理将表明 $\mu^m = -1$；但这显然与以下事实矛盾：对于某个 k，$\Re(L_m\mu^{mk}) > 0$。这一矛盾证明了 $M = 1$。（断言证明完毕。）♣

现在，情形 A 就意味着 $M = 1$，并且 $L(s) \in i\mathbb{R}[s]$。

关于情形 B，我们还可以说得更多。我们仍可像在（18）中那样定义 m，并且对于所有 k，仍有（19），且对于某个 k为严格不等式。但现在，参照引理 3.3，我们必须有$\mu^m = 1$，并且 $\Re(L_m) > 0$（另一种情形，即 $\mu^m = -1$ 且 $\Re(L_m) = 0$，意味着对于所有 k都有 $\Re(L_m\mu^{mk}) = 0$）。这意味着 m 是 $2M$的倍数。因此，在当前 $m(k) < \infty$ 对于所有 k的情形下，我们有 $\Re(L_m\mu^{mk}) = \Re(L_m) > 0$，从而对于所有 k都有 $m = m(k)$。所以，这种情形等价于更简单的条件：m（如（18）中所定义）是 $2M$ 的倍数，并且 $\Re(L_m) > 0$。

仍在情形 B 中，我们有：对于 $j < m$，$\Re(L_j\mu^{jk}) = 0$ 对所有 k 都成立，这意味着要么 $L_j = 0$，要么 j 是 M 的倍数，且 $\Re(L_j) = 0$。这等价于 $L(s)$具有以下形式

$$L(s) = iA_0(s^M) + s^{2MK}L_1(s)$$

其中 $K \in \mathbb{N}$，$A_0(s) \in \mathbb{R}[s]$ 的次数小于 K，且 $L_1 \in \mathbb{C}\{s\}$，$\Re(L_1(0)) > 0$。

重申一下，$G_\phi(t)$ 对所有充分小的 $t \in \mathbb{C}$ 均为非负，当且仅当我们处于以下两种情形之一

情形 A： $M = 1$ 以及 $L(s) \in i\mathbb{R}[s]$ 或

情形 B： $L(s) = iA_0(s^M) + s^{2MK}L_1(s)$，具体细节如上所述。

证明到此结束。 □

备注3.4。要在标准 Puiseux 型参数化与

$$t \mapsto (ct^M, \phi(t))$$

我们的新参数化之间转换，只需将 $\phi(t) = it^{2M} + o(t^{2M})$分解为 d

$$it\phi'(t)/(-2M) = (\Phi(t))^{2M}$$

$\Phi(0) = 0$，$\Phi'(0) = 1$。令 $\Psi(s) = \Phi^{-1}(s)$，然后令 $L(s) = \log(\Psi(s)/s)$，其中$L(0) = 0$。♠

若要检查给定的标准 Puiseux 参数化 $t \mapsto (ct^M, \phi(t))$是否在局部避开 U_2，一些简单的判据会很有帮助。

推论3.5。若 $\phi(t) = it^{2M} + \alpha t^{2M(K+1)} + o(t^{2M(K+1)})$，其中 $\Im\alpha < 0$，则 $t \mapsto (ct^M, \phi(t))$对足够小的 t 避开 U_2，且与 ϕ 相关的函数 $L(s)$ 开始

$$L(s) = i\frac{K+1}{2M}\alpha t^{2MK} + o(t^{2MK}).$$

证明。我们只需根据上述构造计算 $L(s)$ 中的首项。我们有

$$it\phi'(t)/(-2M) = t^{2M} - i\alpha(K+1)t^{2M(K+1)} + o(t^{2M(K+1)}) = (\Phi(t))^{2M}$$

其中

$$\Phi(t) = t\left(1 - i\frac{K+1}{2M}\alpha t^{2MK} + o(t^{2MK})\right)$$

以及反函数

$$\Psi(s) = s\left(1 + i\frac{K+1}{2M}\alpha s^{2MK} + o(s^{2MK})\right) = se^{L(s)}$$

其中

$$L(s) = i\frac{K+1}{2M}\alpha s^{2MK} + o(s^{2MK}).$$

由于 $\Re(i\alpha) = -\Im\alpha > 0$，定理 1.5 推出 $t \mapsto (ct^M,\ \phi(t))$ 对足够小的 t 避开 U_2。 □

还有其他判据；这主要取决于人们愿意深入到幂级数计算的哪一步。

3.4. 孤立型的可容许分子。研究可容许分子的第一步，是求出 $G_\phi(t)$ 的下界行为。

定理 3.6。对于孤立型情形下定理 *1.5* 中的 ϕ，我们有

$$G_\phi(t) \gtrsim |t|^{2M(1+K)}.$$

证明。对于 $t = re^{i\theta}$，$G_\phi(t)$ 关于 θ 在模为 r 的一个角临界点处取得最小值。角临界点的形式为 $\Psi(x\mu^k)$，其中 $x \in \mathbb{R}$，因此我们需要考察每个 k 下 x 对 r 的粗略依赖关系。于是我们解出 $|\Psi(x\mu^k)| = xe^{\Re(L(x\mu^k))} = r$，将 x 表示为 r 的函数。由于 $\Re(L(x\mu^k)) = \Re(L_{2MK})x^{2MK} + o(x^{2MK})$，可见

$$x_k(r) = r\left(1 - \Re(L_{2MK})r^{2MK} + o(r^{2MK})\right)$$

对每个 k（对 k 的依赖隐藏在 o 项中）。因此，

$$G_\phi(re^{i\theta}) \geq \min_k G_\phi(\Psi(x_k(r)\mu^k)) \gtrsim \min_k x_k(r)^{2M+2MK} \asymp r^{2M+2MK}$$

由 (16) 得。 □

推论 3.7. 在孤立型情形下，设 ϕ 如定理 *1.5* 所述，则 ϕ 具有如下形式

$$\phi(t) = \phi_0(t^M) + O(t^{2M(1+K)})$$

其中，ϕ_0 是次数小于 $K+1$ 的多项式。此外，

$$|w - \phi((\bar{c}z)^{1/M})| \asymp |w - \phi_0(\bar{c}z)| + |z|^{2(1+K)}.$$

对于 $(z,\ w)$，当 $\in U^2$ 接近 (0，0) 时。

证明。回想注 3.4 展示了如何通过相关函数 Φ，Ψ 在 $L(s)$ 与 $\phi(t)$ 之间转换。我们可以使用拉格朗日反演公式计算 $\Phi = \Psi^{-1}$ 的系数。

Us用记号 $[t^n]\Phi(t)$ 表示提取 t^n 的系数，我们有 e

$$[t^n]\Phi(t) = \frac{1}{n}[s^{n-1}]e^{-nL(s)}$$

采用 [14, 第66]页中给出的拉格朗日反演表述。对于 $j \leq 2MK$，项 s^j仅当 j 是 M 的倍数时才出现在 $e^{-nL(s)}$ 中，因为 $L(s)$具有定理 1.5 所给出的形式。因此，对于 $n \leq 2MK+1$，出现在 $\Phi(t)$中的仅有的幂 t^n必须是那些使 $n-1$为 M的倍数的幂。因此，Φ 具有如下形式

$$\Phi(t) = t(B_0(t^M) + O(t^{2MK}))$$

其中 B_0 是次数小于 $2K$的多项式。进而，由于

$$it\phi'(t)/(-2M) = (\Phi(t))^{2M} = t^{2M}(B_0(t^M) + O(t^{2MK}))^{2M}$$

我们看到， $\phi(t)$只含有幂 t^j，其中 j 是 M 的倍数，适用于 $j \le 2M + 2MK$。因此，我们可以写成

$$\phi(t) = \phi_0(t^M) + O(t^{2M(1+K)})$$

其中 $\phi_0(t) \in \mathbb{C}[t]$ 的次数小于 $1 + K$。于是， $\phi((\bar{c}z)^{1/M}) = \phi_0(\bar{c}z) + O(z^{2(1+K)})$，尽管大O项可能涉及分数幂。

由 (12) 和定理 3.6 可得

$$|w - \phi((\bar{c}z)^{1/M})| \gtrsim |z|^{2(1+K)}.$$

对于 (z, w)，当其靠近 $(0, 0)$ 时。从这里我们推得

$$|w - \phi((\bar{c}z)^{1/M})| \asymp |w - \phi_0(\bar{c}z)| + |z|^{2(1+K)}$$

对于 (z, w)，当其位于 U_2 中且靠近 $(0, 0)$ 时。 □

现在我们可以证明以下结论。

定理 1.6. 设 $p(z, w)$ 是一个在 U_2 中靠近 $(0, 0)$ 处没有零点的多项式，其靠近 $(0,0)$ 的零点集被（单射地）参数化为

$$t \mapsto (ct^M, \phi(t))$$

其中 ϕ如定理 *1.5* 中那样属于孤立型。于是，p 的可容许分子理想由下式给出

$$(w - \phi_0(\bar{c}z), z^{2(1+K)})^M \tag{6}$$

其中我们引用定理 *1.5* 及 (5)中的数据 K, ϕ_0 。

证明. 设 $\mathcal{I} = (w - \phi_0(\bar{c}z)\ z^{2(1+K)})^M$，并设 $\mathcal{I}_p^\infty$表示 $\mathbb{C}\{z, w\}$ 中 $q \in \mathbb{C}\{z, w\}$的理想，使得 q/p 在 U_2 内靠近 $(0,0)$ 处有界。

我们对 p 的假设意味着它可以分解为

$$p(z, w) = u(z, w) \prod_{j=1}^{M} (w - \phi(\nu^j(\bar{c}z)^{1/M})$$

其中 $u(z, w) \in \mathbb{C}\{z, w\}$， $u(0, 0) \neq 0$， $\nu = \exp(2\pi i/M)$，且 ϕ, c, M如定理 1.5 中所述。常数 c 在证明中不起作用，因此我们假设 $c = 1$。

根据推论 3.7，对于靠近 $(0, 0)$ 的 $(z, w) \in U_2$，我们有

$$|w - \phi(z^{1/M})| \asymp |w - \phi_0(z)| + |z|^{2(1+K)}$$

对于 $z^{1/M}$ 的任意分支，这尤其意味着任意两个分支在U_2中可比较：

$$|w - \phi(z^{1/M})| \asymp |w - \phi(\nu^j z^{1/M})|.$$

这意味着

$$|p(z, w)| \asymp (|w - \phi_0(z)| + |z|^{2(1+K)})^M$$

以及

$$(w - \phi_0(z))^j z^{(M-j)2(1+K)} \in \mathcal{I}_p^\infty$$

对于 $j = 0, \ldots\ldots, M$。换言之， $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_p^\infty$。

为证明反向结论，我们可以取 $q(z,\ w) \in \mathcal{I}_p^\infty$，并证明 q 模 $\mathcal{I}$ 等于 0。将 $q(z,\ w+\phi_0(z))$ 在 $(0,\ 0)$ 处展开为幂级数后，我们可以写出

$$q(z,w)=\sum_{j=0}^{\infty} q_j(z)(w-\phi_0(z))^j$$

对于 $q_j(z) \in \mathbb{C}\{z\}$。模 $\mathcal{I}$ 化简后，我们可以在 $M-1$ 处截断级数，并假设每个 q_j 都是次数小于 $2(1+K)(M-j)$ 的多项式：

$$q(z,w)=\sum_{j=0}^{M-1} q_j(z)(w-\phi_0(z))^j.$$

现在，我们在 U_2 中构造一族（实参数）曲线，用来证明每个 $q_j=0$。定义

$$z(r)=r^M e^{MiA_0(r^M)}$$

$$w(r,B)=ir^{2M}-2M\int_0^r x^{2M}\frac{d}{dx}(A_0(x^M))dx+iBr^{2M(K+1)}$$

其中 $r \in \mathbb{R}$、$B>0$ 是参数，而 A_0 是定理 1.5 中次数小于 K 的实系数多项式。注意，

$$r \mapsto (z(r),w(r,B))$$

由于 $\Im w(r)=r^{2M}+Br^{2M(K+1)}>|z(r)|^2=r^{2M}$，这定义了 U_2 中的一条实一维曲线。这些曲线本质上是对 p 的零点的扰动。现在，

$$\phi(re^{iA_0(r^M)})=\phi_0(z(r))+O(r^{2M(1+K)})$$

但由于 $L(r)=iA_0(r^M)+r^{2MK}L_1(r)$，我们也有 $e^{L(r)}=e^{iA_{0(r^M)}}+O(r^{2MK})$，因此

$$\begin{aligned}\phi(re^{L(r)}) &= \phi_0(r^M e^{ML(r)})+O(r^{2M(1+K)})\\ &= \phi_0(r^M e^{iMA_0(r^M)}+O(r^{2MK+M}))+O(r^{2M(1+K)})\\ &= \phi_0(r^M e^{iMA_0(r^M)})+O(r^{2M(1+K)})=\phi_0(z(r))+O(r^{2M(1+K)})\end{aligned}$$

最后一行来自于 $\phi_0(t)$ 以 it^2 开头这一事实。另一方面，由 (14) 可得

$$\phi(re^{L(r)})=ir^{2M}+2Mi\int_0^r x^{2M}L'(x)dx=w(r,0)+O(r^{2M(1+K)}).$$

因此，

$$\phi_0(z(r))=w(r,0)+r^{2M(1+K)}F(r)$$

对于某个幂级数 $F(r)$。

现在，由于 $|p(z,\ w)| \asymp (|w-\phi_0(z)|+|z|^{2(1+K)})^M$，沿着 $(z(r)\ w(r,\ B))$ 求值可得

$$|p(z(r),w(r,B))| \lesssim (|iB-F(r)|r^{2M(1+K)}+r^{2M(1+K)})^M \lesssim r^{2M^2(1+K)}(B+1)^M$$

对于 $B>0$。假设在 (0,0) 附近的 U_2 内有 $|q/p| \le C$，现在我们有

$$|q(z(r),w(r,B))| \lesssim r^{2M^2(1+K)}(B+1)^M.$$

But

$$q(z(r), w(r, B)) = \sum_{j=0}^{M-1} q_j(z(r))(iB - F(r))^j r^{2Mj(1+K)}$$

现在我们考虑可能出现的最低阶项。记 $q_j(z) = c_j z^{a_j} + o(z^{a_j})$，则 $q_j(z(r))$ 的最低阶项为 $c_j r^{Ma_j}$，因此 $q_j(z(r))r^{2Mj(1+K)}$ 的最低阶项为 $c_j r^{Ma_j+2Mj(1+K)}$。现在考虑

$$a = \min_j\{Ma_j + 2Mj(1 + K)\} < 2M^2(1 + K)$$

并令 J 为使其取得最小值的指标集合。假设并非所有 q_j 都为零，则 J 非空。因此，$q(z(r)\ w(r,\ B))$ 的最低阶项为

$$r^a \sum_{j\in J} c_j(iB)^j.$$

但是，由于对每个 B，$|q(z(r)\ w(r,\ B))|$ 的消失阶为 $2M^2(1 + K)$，因此对每个 $B > 0$，该项都必须等于零。因此，每个 c_j 都必须为零，这与其构造相矛盾。由此可知，J 必为空集，且每个 q_j 都为零，这意味着 $q = 0$ 模 $\mathcal{I}$。□

4. Global examples

本节中，我们考察全局稳定多项式的具体例子，以说明我们的研究结果。在双圆盘中，[8] 以及在多圆盘中，[9] 也进行了类似的分析。

虽然人们已经提出了若干方法，用于构造和修改在多圆盘中稳定的多变量多项式（例如参见 [24, 10, 7, 1], ），但在单位球或西格尔上半平面的情形下，这方面的理论似乎发展得不够充分。

4.1. **初等例子**。

例子 4.1。我们重新考察二维球中最简单的稳定多项式，它有一个边界零点，即 $p(z_1,\ z_2) = 1 - z_2$。

它在西格尔上半平面中的对应形式为

$$P(z, w) = w.$$

集合 $Z_p \cap U_2$ 在局部（且在此情形下也在全局）上由 $t \mapsto (t,\ \phi(t))$ 参数化，其中 $\phi \equiv 0$，因此 ϕ 显然成立。正如我们在引言中推导的，对于这个例子

$$\mathcal{I}_p^\infty = (w, z^2) \quad \diamondsuit$$

例子 4.2。球的下一个最简单例子是

$$p_c(z_1, z_2) = 1 - z_2 + cz_1^2,$$

其中 $c \geq 0$ 是一个常数。这些多项式关于 $\mathbb{B}_2$ 全局稳定当且仅当 $0 \leq c \leq \frac{1}{2}$，这一点可由注意到在 Z_{p_c} 上有 $z_2 = -1 + cz_1^2$，以及当 $z_1 = x_1 + iy_1$ 时，

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1|^2 + |1 + cz_1^2|^2 = (1 + 2c)x_1^2 + (1 - 2c)y_1^2 + 2c^2x_1^2y_1^2 + c^2(x_1^4 + y_1^4) + 1.$$

当 $0 \leq c \leq \frac{1}{2}$ 时，右侧所有项在 $(x_1,\ y_1) \neq (0,\ 0)$ 时均为正，且总和在 $(0,\ 0)$ 处达到最小值 1。反之，若 $c > \frac{1}{2}$，则通过选取 $x_1 = 0$ 和 y_1 充分接近原点，可使该表达式小于 1。因此，我们有 $Z_{p_c} \cap \big(\mathbb{B}_2 \setminus \{(0,\ 1)\}\big) = \emptyset$

当且仅当 $0 \le c \le \frac{1}{2}$ 时。此前，这些多项式曾在 [23, 第 2 节.8] 中出现，用于讨论球上有界解析函数的三点插值。

利用 (9) 中的映射 F 移至 U_2，并重新缩放，我们得到多项式

$$P_c(z,w) = w - iw^2 - 2ciz^2, \tag{20}$$

根据上面的计算，该多项式关于 $0 < c \le \frac{1}{2}$ 在 U_2 中是稳定的。令 $P_c(z,\ w) = 0$，配方并确定正确的分支后，我们发现 Z_{P_c} 在 (0，0) 附近可局部参数化为 $t \mapsto (t,\ \phi_c(t))$，其中

$$\phi_c(t) = \frac{i}{2}\left((1+8ct^2)^{\frac{1}{2}} - 1\right) = 2cit^2 - 4c^2it^4 + 16c^3it^6 + \cdots$$

换言之，我们有 $\psi_0 = 2ci$。当 $0 < c < \frac{1}{2}$ 时，我们处于基本情形 $M = 1$、$a_0 = 2M = 2$ 和 $0 < \Im\psi_0 < 1$，这意味着

$$\mathcal{I}^{\infty}_{P_c} = (w, z^2).$$

当 $c = \frac{1}{2}$ 时，我们得到 $\psi_0 = i$，且 $\phi_{1/2}(t) = it^2 - it^4 + o(t^4)$。根据推论3.5，$L(s) = s^2 + o(s^2)$。因此，$K = 1$；为了计算可容许分子的理想，我们记录 $\phi_{1/2}$ 的次数小于 4 的泰勒多项式，即 iz^2。根据定理 1.6，可容许分子的理想为

$$\mathcal{I}^{\infty}_{P_{\frac{1}{2}}} = (w - iz^2, z^4). \qquad \diamondsuit$$

例 4.3。类似的分析使我们能够确定这些多项式在哪些参数值下

$$q_c(z_1, z_2) = 1 - z_2 + cz_1^4, \quad c \ge 0,$$

是稳定的，相对于 $\mathbb{B}_2$。在 Z_{q_c}上，我们有 $z_2 = 1 + cz_1^4$，并且计算表明

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 + x_1^2 + y_1^2 - 12cx_1^2y_1^2 + c^2(x_1^4 + y_1^4 - 6x_1^2y_1^2)^2 + 2c(x_1^4 + y_1^4).$$

使 $|z_1|^2 + |z_2|^2 \ge 1$成立的一个充分条件是 $0 \le c \le \frac{1}{12}$，当且仅当$(z_1,\ z_2) = (0,\ 1)$时取等号，这可以通过考察$(x_1, y_2) \mapsto x_1^2 + y_1^2 - 12cx_1^2y_1^2$对 $x_1^2 + y_1^2 \le 1$何时为非负而看出。（再作进一步努力，可以证明$0 \le c \le \frac{27}{32}$ 是稳定性的充要条件，但在这一完整范围内，$\partial\mathbb{B}_2$ 上会出现额外的零点。）

转到 U_2，我们得到这一族

$$Q_c(z,w) = w - 3iw^2 - 3w^3 + iw^4 + 8ciz^4,$$

从而提供对于 U_2，它是稳定多项式，在 (0，0) 处有一个零点，当 $0 \le c \le \frac{1}{12}$。注意，$w - 3iw^2 - 3w^3 + iw^4$ 在 $w = 0$ 处有一个单根（并在 $w = -i$ 处有一个三重根）。然后，Z_{Q_c} 在 (0，0) 附近由 $t \mapsto (e^{i\pi/4}t,\ \phi_c(t))$ 局部参数化，其中

$$\phi_c(t) = 8cit^4 + \cdots,$$

我们再次回到基本情形 $M = 1$，但现在是在 $a_0 = 4 > 2M$ 的情况下。根据第 3.2 节，可容许分子的理想为

$$I^{\infty}_{Q_c} = (w, z^2). \quad \diamondsuit$$

4.2. 通过单变量多项式得到稳定多项式。 任何关于单位圆盘 $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{C}\colon\ |x| < 1\}$ 稳定的多项式 $\mathfrak{p} \in \mathbb{C}[x]$，都可以通过设定 $p(z_1, \ldots, z_d) = \mathfrak{p}(z_d)$，提升为在 $\mathbb{B}_d$ 中稳定的多项式；而位于 $\mathbb{T} = \{x \in \mathbb{C}\colon\ |x| = 1\}$ 上的零点 $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$，则被映射到点 $\{(0, \ldots, 0, x_j)\} \subset \partial\mathbb{B}_d$。

一个稍有意思的提升（曾见于若干著作，例如 [4, 第 3] 节和 [3, 第 4] 节）源自映射 $\tau\colon\ \mathbb{B}_d \to \mathbb{C}$，其定义如下:

$$\tau(z_1, \ldots, z_d) = d^{d/2} \prod_{j=1}^{d} z_j.$$

注意，$|\tau(z)| \leq |z|^d$ 因为

$$(|z_1|^2 \cdots |z_d|^2)^{\frac{1}{d}} \leq \frac{1}{d}|z|^2$$

根据算术-几何平均不等式，当且仅当所有模都相等时取等号。现在，若 $\mathfrak{p} \in \mathbb{C}[x]$ 关于 $\mathbb{D}$ 稳定，则 $p(z) = (\mathfrak{p} \circ \tau)(z) \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$ 在 $\mathbb{B}_d$ 中稳定；若对于某个 $x_0 \in \mathbb{T}$，有 $\mathfrak{p}(x_0) = 0$，那么 p 会沿着曲线 $\tau^{-1}(\{x_0\}) \subset \partial\mathbb{B}_d$ 消失，在这条曲线上所有变量的模都相等。一个典型例子是这个二元多项式

$$p(z_1, z_2) = 1 - 2z_1 z_2,$$

它源自 $\mathfrak{p}(x) = 1 - x$，以及通过与酉变换复合得到的变体（例如 [26, 第 251-253] 页），如 $p = 1 - z_1^2 - z_2^2$（它也出现在下一节中）。这些多项式在球的无界实现中的一个尤为优美的形式是

$$P(z) = w - z^2.$$

采用这种单变量提升方法，我们无法得到任何真正不同的二变量（或多变量）例子，因为任意单变量多项式都可以分解为形如 $a - z$ 的线性因子，且因子可以重复；于是 $p \circ \tau$ 及其无界类比也能分解为上述形式的表达式。

4.3. 二次型的例子。 如果 A 是一个对称压缩 $d \times d$ 矩阵，那么 $P(z) = 1 - z^t A z$ 在 $\mathbb{B}_d$ 中没有零点。与引理 2.2 的证明一样，A 可以分解为 $A = UDU^t$，其中 D 是一个对角矩阵，其对角线上的元素为 D_1，……，$D_d \in [0, 1]$，而 U 是酉矩阵。那么，经过与酉矩阵复合后，P 具有如下形式

$$1 - z^t D z = 1 - \sum_{j=1}^{d} D_j z_j^2.$$

只有当某个 $D_j = 1$ 时，才会出现边界零点。如果有多个 $D_j = 1$，那么我们会得到一个与 $\partial\mathbb{B}_d$ 相交的整个实子空间，作为边界零点。假设 $D_d = 1$ 并转换为 U_d，我们得到多项式

$$p(z_1, \ldots, z_{d-1}, w) = iw - \sum_{j=1}^{d-1} D_j z_j^2.$$

定理 1.2 中的表达式 $\frac{1}{2|\nabla p(0)|} Hp(0)$ 是一个对角矩阵，其对角线上为 $D_1, \ldots, D_{d-1}$。

最极端的情形 $P(z) = 1 - z^t z$ 颇值得关注，因为它的边界零点集为 $(\partial\mathbb{B}_d) \cap \mathbb{R}^d$。值得指出的是，球的自同构只能产生这个多项式的酉变换

。事实上， $\mathbb{B}_d$ 的每个自同构都可以写成 $U \circ \varphi_a$ ，其中 U 是酉变换，而 φ_a 是对合自同构

$$\varphi_a(z) = \frac{a - P_a z - s_a Q_a z}{1 - \langle z, a\rangle}$$

其中我们按 Rudin [25] 的记法； $a \in \mathbb{B}_d$、 P_a 是到 a、$Q_a = I - P_a$ 所张成空间上的正交投影，且 $s_a = (1 - |a|^2)^{1/2}$。此处唯一相关的是该公式

$$1 - \langle \varphi_a(z), \varphi_a(w)\rangle = \frac{(1 - |a|^2)(1 - \langle z, w\rangle}{(1 - \langle z, a\rangle)(1 - \langle a, w\rangle)} \tag{21}$$

这是 [25] 的定理2.2.2(iii)（第26页）。

我们同样可以把 $\mathbb{B}_d$ 的任一自同构对某个酉矩阵写成 $\varphi_a \circ U$，从而考虑（现为有理的）函数

$$P \circ \varphi_a \circ U$$

在相差与酉矩阵复合的意义下，我们可以忽略酉矩阵 U。我们可以与一个对角酉变换复合，以迫使 $a \in \mathbb{R}^d \cap \mathbb{B}_d$，这样做时 $\varphi_a(z)$ 对 $z \in \mathbb{R}^d \cap \mathbb{B}_d$ 为实数。因此，对实的 $z = w$，方程 (21) 变为

$$1 - \varphi_a(z)^t \varphi_a(z) = \frac{(1 - |a|^2)(1 - z^t z)}{(1 - z^t a)^2}.$$

但由于两边关于 z 都是解析的，且该恒等式对实的 z 成立，故它对所有 z 都成立。于是，在消去分母和常数因子后，这表明 $P \circ \varphi_a$ 是 $1 - z^t z$。

4.4. 鲁丁构造。 在 Rudin [25, p.164], 中，给出了一种简单的构造方法，可生成许多在 $\mathbb{B}_2$ 上没有零点、但在 (0,1) 处有零点的多项式。已知幂级数

$$1 - \sqrt{1 - t} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k t^k$$

对于所有 $k \geq 1$，若我们考虑任意具有以下形式的解析函数 $c_k > 0$

$$f(z_1, z_2) = z_2 + z_1^2 g_1(z_1, z_2) + z_1^4 g_2(z_1, z_2) + \cdots$$

其中 e ach g_k 在 $\mathbb{B}^2$ 上是解析的并且满足$\sup_{\mathbb{B}_2} |g_k| \leq c_k$ 则对于$(z_1, z_2) \in \mathbb{B}_2$

$$|f(z_1, z_2)| \leq |z_2| + 1 - \sqrt{1 - |z_1|^2} < 1.$$

则 $F(z_1, z_2) := 1 - f(z_1, z_2)$ 在 $\mathbb{B}_2$中没有零点，并且如果 f可解析地延拓至 $(0, 1)$，我们有 $f(0, 1) = 1$，因此 $F(0, 1) = 0$。注意到 $c_k = \frac{1}{2k} \frac{1}{4^{k-1}} \binom{2k-2}{k-1}$，特别是

$$c_1 = 1/2, \quad c_2 = 1/8, \quad c_3 = 1/16, \quad c_4 = 5/128, \ldots$$

我们可以选择 $g_k(z_1, z_2)$ 为多项式（并且除有限多个 k 外均为零）来构造例子。以下是选择 g_k 为常数所得到的一些例子。

$$1 - \left(z_2 + \frac{1}{2} z_1^2\right), \quad 1 - \left(z_2 + \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{8} z_1^4\right), \ldots.$$

可以证明，当我们转换为 U_2 时，会得到具有如下参数化的曲线

$$t \mapsto (it, \phi(t)) = (it, it^2 - i2\beta t^{2K+2} + o(t^{2K+2}))$$

对于 $\beta > 0$ （此处的 2β 是为了方便后续讨论）。示例 $1 - z_2 - (1/2)z_2^2$ 对应于 $K = 1$，而更高阶截断会产生更大的 K。

根据推论3.5，$L(s) = \beta(K+1)s^{2K} + o(s^{2K})$。因此，这给出了一个具有定理 1.5 中所述给定 K 值的全局例子。

4.5. 通过行压缩构造稳定多项式。 在 $\mathbb{B}_d$ 中构造稳定多项式的一个自然方法，仿照 $\mathbb{D}^d$ 中的标准做法（参见例如 [6, 第 2.2] 节或 [2]），如下所示。设 $A = (A_1, \ldots, A_d)$, $A_j \in M_{N,N}(\mathbb{C})$ 是一组 d 元矩阵，它们构成一个行压缩，即，

$$\sum_{j=1}^{d} A_j A_j^* \leq I_N$$

其中 I_N 表示单位矩阵，而 $A \leq B$ 用于表示 $B - A$ 是一个半正定矩阵。

Set

$$p(z_1, \ldots, z_d) = \det\left(I - \sum_{j=1}^{d} z_j A_j\right), \quad z \in \mathbb{B}_d;$$

则 p 在球内稳定。由以下观察可知这一点：对于 $z \in \mathbb{B}_d$ 和 $v \in \mathbb{C}^N$

$$\left\|\sum_{j=1}^{d} \bar{z}_j A_j^* v\right\| \leq \sum_{j=1}^{d} |z_j| \|A_j^* v\| \leq \|z\| \left\langle \sum_{j=1}^{d} A_j A_j^* v, v \right\rangle^{1/2} < \|v\|$$

根据柯西-施瓦茨不等式。

现在，人们或许会希望，通过精心选择 A_j，能够构造出具有有趣边界行为的稳定多项式。例如，可以通过一个分块 $(N_1 + N_2) \times (N_1 + N_2)$ 压缩矩阵 K，利用公式构造所有 $\mathbb{D}^2$-稳定多项式

$$c \det\left(I - K \begin{pmatrix} z_1 I_{N_1} & 0 \\ 0 & z_2 I_{N_2} \end{pmatrix}\right).$$

见 [18], [16]。

然而，通过行压缩得到的稳定多项式的边界零点可以作为一次多项式因子分解出来。Kelly Bickel 在私人通信中向我们指出了这一点，她还提供了以下证明的核心思路。

引理 4.4. 设 $A = (A_1, \ldots, A_d)$ 是一个 $N \times N$ 行收缩，且 $A_1^* e_1 = e_1$ *for* $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^t$。那么，$A_j^* e_1 = 0$ *for* $j = 2, \ldots, d$ 并写作

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^t \\ * & \tilde{A}_1 \end{pmatrix}, \quad A_j = \begin{pmatrix} 0 & \vec{0}^t \\ * & \tilde{A}_j \end{pmatrix} \quad j = 2, \ldots, d$$

我们有

$$\det\left(I - \sum_{j=1}^{d} z_j A_j\right) = (1 - z_1) \det\left(I - \sum_{j=1}^{d} z_j \tilde{A}_j\right).$$

~ ~特别要注意，（A_1、…、A_d）是一个（$N-1$）×（$N-1$）行收缩。

证明。 由于元组（A_1、.. . 、 A_d）是一个行收缩，且 e_1 是 A_1^*的特征向量，我们得到

$$\|e_1\|^2 \geq \langle A_1 A_1^* e_1, e_1\rangle + \sum_{j=2}^{d} \langle A_j A_j^* e_1, e_1\rangle = \|e_1\|^2 + \sum_{j=2}^{d} \|A_j^* e_1\|^2.$$

因此，对于 $j = 2, \ldots, d$，有 $A_j^* e_1 = 0$。沿第一行展开即可得到行列式公式。□

作为引理 4.4 的推论，我们得到由行收缩得到的稳定多项式可以分解因子。

命题 4.5. 设 $p = \det(I - \sum_{j=1}^{d} z_j A_j)$，其中 $A = (A_1, .. . , A_d)$ 是一个满足 $A_j \in M_N(\mathbb{C})$ 的行收缩。那么， p 在 $\partial\mathbb{B}_d$ 上只有有限个零点，并且我们可以将其分解为

$$p(z) = q(z) \prod_{\zeta \in Z_p \cap \partial\mathbb{B}_d} (1 - \langle z, \zeta\rangle).$$

其中 $q \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ 满足 $Z_q \cap \mathbb{B}^2 = \overline{\emptyset}$，乘积遍历 $Z_p \cap \partial\mathbb{B}_d$ （重复项用于计入重数）。

证明。 我们将证明， $\partial\mathbb{B}_d$ 上的任意零点 ζ 都会产生一个因子 $1 - \langle z, \zeta\rangle$。因此，此类因子的数量（以及按重数计数的此类零点数量）至多为 p 的总次数。

设 $a = (a_1, ..., a_d) \in \partial\mathbb{B}_d$ 且 $p(a) = 0$。令 U 为一个 $d \times d$ 酉矩阵，其第一列为 a^t。我们将 $U \otimes I_N$ 视为一个分块 $(dN \times dN)$（酉）矩阵，其第一个分块列为

$$\begin{pmatrix} a_1 I_N \\ \vdots \\ a_d I_N \end{pmatrix}.$$

考虑行收缩

$$(A_1, \ldots, A_d)(U \otimes I_N) =: (B_1, \ldots, B_d) = B$$

其中 $B_1 = \sum_{j=1}^{d} a_j A_j$。由于 $0 = p(a) = \det(I - B_1)$，我们可以通过酉共轭并假设 $B_1^* e_1 = e_1$。将引理 4.4 应用于 B，得到

$$\det\left(I - \sum_{j=1}^{d} z_j B_j\right) = (1 - z_1) \det\left(I - \sum_{j=1}^{d} z_j \tilde{B}_j\right)$$

沿用引理陈述中的记号。将 $\sum_{j=1}^{d} z_j B_j$ 记作 $B(z \otimes I_N)$，我们有$B(U^* z \otimes I_N) = A(z \otimes I_N) = \sum_{j=1}^{d} z_j A_j$。注意， $U^* z$ 的第一分量是 $\langle z, a\rangle$。然后，将 z 替换为 $U^* z$，我们有

$$\det(I - \sum_{j=1}^{d} z_j A_j) = (1 - \langle z, a\rangle) \det(I - \tilde{B}(U^* z \otimes I_{N-1})).$$

~ ~ ~ ~在最后一个表达式中， $B($ $U^*z\otimes I_{N-1})$ $= B(U^*\otimes I_{N-1})(z\otimes I_{N-1})$。令 $A = B(U^*\otimes I_{N-1})$，我们便完成了因式分解

$$p(z) = \det\left(I - \sum_{j=1}^{d} z_j A_j\right) = (1 - \langle z, a\rangle)\det\left(I - \sum_{j=1}^{d} z_j \tilde{A}_j\right).$$

通过标准的归纳论证，我们得到定理： $q(z)$ 是行列式多项式 $\det(I - \sum_{j=1}^{d} z_j C_j)$，其中 $C = (C_1, \ldots, C_d)$ 是行收缩，并且 q 在 $\partial\mathbb{B}_d$ 上没有零点。

□

备注 4.6。 还值得指出稳定多项式出现的另一个场合——在这种情况下，相关的稳定多项式同样没有边界零点。这里讨论的是有理真映射；也就是说，有理函数 q/p：$\mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_N$ 是从一个球 $\mathbb{B}_n$ 到另一个球 $\mathbb{B}_N$ 的真映射。有效分母 p 必须在 $\mathbb{B}_n$ 中不取零。真性对应于如下性质：

$$|p(z)|^2 = \|q(z)\|^2$$

对于 $|z| = 1$；这里我们强调， q 是一个向量多项式。假设 q, p 没有公因子，则由 [11] 可知 p 在边界上没有零点。另见 [13] （第 207 页）的定理 6.8。♠

4.6. 球域情形之外的例子。 可容许分子的理想结构，很大程度上取决于域的选择以及给定的分母多项式。我们通过考察在固定$p = 1 - z_2$ 而底层域发生变化时会出现什么情况，来为未来研究指明方向。推测一种系统性方法可能会涉及分析针对相应域调整的 G_ϕ 函数的类似物。

例 4.7。 对于 $\alpha > 0$，考虑复椭球

$$\Omega = \mathcal{E}_\alpha = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \colon |z_1|^2 + |z_2|^{2\alpha} < 1\}.$$

$\mathcal{E}_\alpha$ 是 $\mathbb{C}^2$ 中的伪凸域的例子；当 $\alpha > 1$ 时，它们在$(1, 0)$处并非强伪凸（例如参见 [12]）。

我们再次取 $p(z) = 1 - z_2$。 $\mathcal{E}_\alpha$ 中 p 的唯一零点出现在特殊边界点$(1, 0)$处。显然，$1 - z_2 \in \mathcal{I}_p^\infty$。现在考虑 $f_N = z_1^N(1 - z_2)^{-1}$, $N \in \mathbb{N}$。取 $0 < a < 1$，并沿曲线计算 f_N

$$\gamma = \{(a(1 - r^2)^{1/2\alpha}, r) \colon r \in [0, 1)\} \subset \mathcal{E}_\alpha,$$

我们得到

$$|f_N(a(1 - r^2)^{1/2\alpha}, r)|^2 = a^{2\alpha}\frac{(1 - r^2)^{\frac{N}{\alpha}}}{(1 - r)^2} = a^{2\alpha}(1 + r)^{\frac{N}{\alpha}}(1 - r)^{\frac{N}{\alpha}-2},$$

因此，当且仅当 $N \geq 2\alpha$ 时， f_N 在 $(0, 1)$ 附近有界。随后可以利用 $|z_1|^{2\alpha} < 1 - |z_2|^2$ 在 $\mathcal{E}_\alpha$ 中这一事实，证明对于每个整数 $k \geq 0$， $z_1^{\lceil 2\alpha\rceil + k}/(1 - z_2)$ 都是 $\mathcal{E}_\alpha$ 中的有界有理函数。因此 $\mathcal{I}_p^\infty = (z_1^{\lceil 2\alpha\rceil}, 1 - z_2)$。（只有在考虑全局定义的有理函数时，我们才需要上取整函数。）

例如，当 $\alpha = 2$ 时，单项式 z_1， z_1^2， $z_1^3 \notin \mathcal{I}_p^\infty$，以及 $\mathcal{I}_p^\infty = (z_1^4, 1 - z_2)$。另一方面，当 $\alpha = 1/2$ 时，我们发现 $(z_1, 1 - z_2) = \mathcal{I}_p^\infty$，这意味着 $q(0, 1) = 0$ 成为 q/p 在 $\mathcal{E}_{1/2}$ 中为有界有理函数的充要条件。♢

5. Constructing polynomials with local behavior

如何构造具有指定局部边界行为的多项式？如何构造不可约多项式 $p(z,\ w) \in \mathbb{C}[z,w]$ ，使其在 U_2 上没有零点，却在边界上有一条零点实一维曲线？

正如引言中所述，我们证明以下定理，并构造若干相关例子。回顾一下，我们关注如下形式的参数化

$$s \mapsto \gamma(s) = \left(cs^M e^{ML(s)}, is^{2M} + i2M \int_{[0,s]} x^{2M} L'(x)dx \right)$$

其中 $L(s) \in \mathbb{C}\{s\}$, $L(0) = 0$, $|c| = 1$, $M \in \mathbb{N}$ ，具体细节见定理 1.5，取决于我们讨论的是孤立型还是曲线型情形。

定理 1.7。 如果上述参数化 (7) 是代数的，那么 $f(s) = e^{L(s)}$ 是代数函数，其解析延拓在 $\mathbb{C}_* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ 的点上没有零点或极点（也没有代数零点或代数极点）。此外， $f'(1/s)/f(1/s)$（任意解析延拓）的 *Puiseux-Laurent* 级数在 0 附近不能包含项 s^{2M+1}。

下面给出一些有启发性的例子。

例 5.1. 我们可以反推例 4.2 中的孤立型多项式

$$P_{1/2}(z,w) = w - iw^2 - iz^2$$

其参数化为

$$t \mapsto (t, \phi(t))$$

其中 $\phi(t) = (i/2)((1+4t^2)^{1/2} - 1)$。根据注 3.4，我们将 $(-i/2)t\phi'(t) = \Phi(t)^2$分解，得到

$$\Phi(t) = \frac{t}{(1+4t^2)^{1/4}}$$

以及 $\Psi(s) = \Phi^{-1}(s)$

$$\Psi(s) = s((1+4s^4)^{1/2} + 2s^2)^{1/2}$$

从而最终得到

$$e^{L(s)} = ((1+4s^4)^{1/2} + 2s^2)^{1/2}.$$

可以验证，该代数函数在 $\mathbb{C}_*$ 中没有零点或极点。我们有

$$L'(s) = \frac{2s}{(1+4s^4)^{1/2}} \text{ and } L'(1/s) = \frac{s}{(1+s^4/4)^{1/2}}$$

并且，最后一个表达式的幂级数中显然没有 s^3 项。 $\diamondsuit$

例 5.2。（局部行为良好但整体上不佳的例子）考虑将 $f(s) = \frac{1}{2}(1+(1+is)^{1/2})$ 作为 $e^{L(s)}$ 的候选函数。其中一个分支在 0 处有 $f(0) = 1$ ，而另一个分支在 0 处为零。对于任意解析延拓，这都是唯一的零点。对数导数为

$$f'(s)/f(s) = \frac{i}{2} \frac{1}{(1+is)^{1/2}(1+(1+is)^{1/2})} = \frac{1}{2s}\left(1 - \frac{1}{(1+is)^{1/2}}\right).$$

在 0 附近的一个分支以 $L'(s) = \frac{i}{4} + \frac{3}{16}s + O(s^2)$ 开始，这意味着 $L(s) = (i/4)s + (3/32)s^2 + O(s^3)$，其形式正是定理 1.5 中孤立型所要求的形式。 $L'(s)$ 的另一个分支

在 0 处有一个单极点。 $L'(1/s) = 2s(1-s^{1/2}(s+i)^{-1/2})$ 在 0 处的 Puiseux-Laurent级数不含所要求的 s^3 项。

参数化 $\gamma(s)$ 可以显式计算（并且可以找到一个在 γ 的值域上为零的显式多项式）。

事实上，

$$\gamma(s) = \left(\frac{s}{2}(1+(1+is)^{1/2}), \frac{3is^2}{2} - 2i\left[\frac{(1+is)^{3/2}-1}{3} - ((1+is)^{1/2}-1)\right]\right).$$

不过，这条曲线确实进入了 U_2。例如，对于 $s = -4-2i$

$$\gamma(s) = (3-i, -56/3+14i)$$

利用 $(1+is)^{1/2} = -2+i$ 和 $|3-i|^2 = 10 < \Im(-56/3+14i) = 14$ 可得 $\gamma(s) \in U_2$。 ♢

例 5.3. （一个反例——平面中的对数奇点）考虑 $L(s) = iA(s) = \log\left(\frac{1+is}{1-is}\right)$，它具有虚系数，因为对于 r 为实数时，$\left|\frac{1+ir}{1-ir}\right| = 1$。我们可以在参数化中计算积分

$$\int_0^s x^2 A'(x)dx = \int_0^s \frac{2x^2}{1+x^2}dx = 2s - 2\tan^{-1}(s).$$

注意， $e^{L(s)}$ 的零点和极点会在上述积分的 $\pm i$ 处造成对数奇点。我们得到参数化

$$s \mapsto \left(s\frac{1+is}{1-is}, is^2 + 4\tan^{-1}(s) - 4s\right)$$

它不是代数的。 ♢

例5.4。（另一个反例——无穷远点处的非平凡留数/周期）考虑

$$f(s) = (1-s^2)^{1/2} + is$$

作为 $e^{L(s)}$ 的候选函数，因为它在 $\mathbb{C}$中没有零点/极点。对数导数为

$$L'(s) = i(1-s^2)^{-1/2}$$

以及 幂级数 $L'(1/s) = is(1-s^2)^{-1/2}$ 确实含有一个 s^3 项。事实上，我们看到

$$\int \frac{s^2}{(1-s^2)^{1/2}}ds$$

不是代数的，因为它本质上是一个反三角函数 ♢

示例 5.5.（由非局部周期导致的反例）将 $f(s) = \frac{1}{2}(1+(1+is^3)^{1/2})$ 视为 $e^{L(s)}$ 的候选函数。显然，它仅对其中一个分支在 0 处有一个零点。对数导数

$$L'(s) = \frac{3}{2s}\left(1 - \frac{1}{(1+is^3)^{1/2}}\right)$$

以及 $L'(1/s) = \frac{3s}{2}\left(1 - \frac{s^{3/2}}{s^3+i}()^{1/2}\right)$ 它没有 s^3 项。此外，虽然L'的一个分支在 0 处有极点，但另一个分支导出了解析的 $L(s) = \frac{1}{4}is^3 + \frac{3}{32}s^6 + o(s^6)$，它满足28

定理 1.5 的孤立型条件。因此， f 满足所有局部约束。然而，移除代数项后，相关积分 $\int s^2 L'(s)ds$ 包含该项

$$\int \frac{s}{(1+is^3)^{1/2}}ds$$

wh沿两个分支点积分时，ich 有一个非零周期。 ♢

例 5.6. （在 U_2 中没有零点，但边界上有一条零点曲线。）考虑 $f(s) = ((1-4s^4)^{1/2} + 2is^2)^{1/2}$，它是对例 5.1、5.4 的一种修改。注意，对于实数 s （无论选择哪个分支），$f(s)$ 都是模为 1 的，因此呈现曲线型局部行为。其对数导数为

$$\frac{2is}{(1-4s^4)^{1/2}}$$

而积分

$$\int s^2 \frac{2is}{(1-4s^4)^{1/2}}ds$$

显然是代数的。由此得到的参数化

$$s \mapsto \left(sf(s), is^2 + \frac{1}{2}((1-4s^2)^{1/2} - 1) \right) = \left(sf(s), \frac{1}{2}(f(s)^2 - 1) \right)$$

给出了多项式 $p(z,\ w) = w^2 + w - iz^2$ 的零点集，这是对例 5.1 的简单修改。旋转 z 并无妨碍，这样可以得到更简单的多项式 w^2+w-z^2。该多项式在 U_2 中没有零点。事实上，通过 $w \mapsto (\sqrt{(w^2+w)}\ w)$ 对零点集进行参数化更为合适，我们需要证明

$$|w^2 + w| \geq \Im w.$$

事实上，更强的不等式 $|w^2+w|^2 \geq (\Im w)^2$ 成立，因为它可以重排为

$$(|w|^2 + \Re w)^2 \geq 0.$$

该不等式中的等号在圆周 $|w+1/2| = 1/2$ 上成立，但在我们原来的不等式中需要 $\Im w \geq 0$。因此，等号在 $|w^2+w| \geq \Im w$ 中对 $|w+1/2| = 1/2$ 和 $\Im w \geq 0$成立。引言中的参数化以及图 1就是这样得到的。 ♢

例 5.7. 我们如何构造在定理1.5中具有局部行为且带有 $M = 2$的多项式的例子？ 例 3.2中满足 $M = 2$ 的 $L(s)$的最简单（非全局）选择是 $\tilde{L}(s) = is^2 + s^4 + s^5$。回想一下， s^5 项的存在是为了迫使该参数化不可约，即不是 s^2的函数。由于 $e^{\tilde{L}} + e^{-\tilde{L}} = 2\cosh(\tilde{L})$，我们可以用泰勒多项式逼近右端，并分析满足

$$f(s) + f(s)^{-1} = 2P(s)$$

其中 $P(s) = 1 - \frac{1}{2}s^4 + is^6 + is^7 = \cosh(\tilde{L}(s)) + O(s^8)$。因此， $f(s)$ 满足 $y^2 - 2P(s)y + 1 = 0$，这意味着

$$f_\pm(s) = P(s) \pm \sqrt{P(s)^2 - 1}.$$

$f(s)$ 的解析延拓在 $\mathbb{C}$ 中不为零（因为 $f(s) = 0$ 蕴含 $P^2 = P^2 - 1$）。现在，注意到

$$\sqrt{(\cosh(\tilde{L}) + O(s^8))^2 - 1} = \sqrt{\sinh^2(\tilde{L}) + O(s^8)} = \sinh(\tilde{L})(1 + O(s^6)) = \sinh(\tilde{L}) + O(s^8)$$

因此

$$f = P \pm \sqrt{P^2 - 1} = \cosh(\tilde{L}) \pm \sinh(\tilde{L}) + O(s^8) = e^{\pm \tilde{L}} + O(s^8)$$

并且

$$f'/f = \pm \tilde{L}' + O(s^7).$$

因此，对 f_+, $L = \log f_+$ 取局部对数，可得 $L = \tilde{L} + O(s^8)$，它具有恰当的局部展开，从而得到一个避开 U_2 的局部参数化 γ 。然而，˜另一个分支以 $-L$ 开始，因此无法避开 U_2。 ♢

我们以定理 1.7 的证明作为本文的结尾。

定理 *1.7* 的证明。首先

$$0 \equiv p(\gamma(s))$$

并求导，得到

$$\begin{aligned} 0 &= (cMs^{M-1}e^{ML} + cs^M e^{ML} ML')p_1(\gamma(s)) + (2Mis^{2M-1} + 2Mis^{2M}L')p_2(\gamma(s)) \\ &= Ms^{M-1}(1 + sL')(ce^{ML}p_1 + 2is^M p_2) \end{aligned}$$

其中 p_1, p_2 表示偏导数。这意味着

$$cs^M e^{ML} p_1 + 2is^{2M} p_2 = 0$$

关于 γ。接着考虑关于 z， w， t 的多项式

$$Q(z, w, s) = zp_1(z, w) + 2itp_2(z, w)$$

它满足 $Q(\gamma(s)\ s^{2M}) \equiv 0$。

不失一般性，假设 $c = 1$。令 $R(z,\ t)$ 表示 $p(z,\ w)$ 和 $Q(z,\ w,\ t) \in \mathbb{C}[z, w, t]$ 关于 w 的结式。那么，存在多项式$B(z,\ w,\ t)$ $C(z,\ w,\ t)$，使得

$$R(z, t) = B(z, w, t)p(z, w) + C(z, w, t)Q(z, w, t).$$

$B(z,\ w,\ t)$ 关于 w 的次数小于 $Q(z,\ w,\ t)$ 关于 w 的次数；同样， $C(z,\ w,\ t)$ 关于 w 的次数小于 $p(z,\ w)$ 关于 w 的次数。参见例如 [5, 命题 4.19]。

如果 $R(z,\ t)$ 等于零，那么就会得到矛盾，如下所示。我们将有
i

$$-B(z, w, t)p(z, w) = C(z, w, t)Q(z, w, t)$$

并且由于 p 不可约，且 C 在 w 中的次数小于 p的次数，可知 $p(z, w)$是 $Q(z, w, t)$的倍数。由于 p 不涉及 t，我们必有 $p_2 = 0$，但这样一来 p 就不能是 p_1的倍数。因此， $R(z, t)$并非恒为零。

由于 $0 \equiv p(\gamma(s)) \equiv Q(\gamma(s)\ s^{2M})$，对接近0的 s，我们有 $R(s^M e^{ML(s)}, s^{2M}) \equiv 0$。记

$$R(z, t) = \sum_{j,k=0}^{D} R_{j,k} z^j t^k$$

我们有

$$0 = \sum_{j,k=0}^{D} R_{j,k} s^{Mj+2Mk} e^{MjL(s)}$$

我们看到， $f(s) := e^{L(s)}$ 满足关于 $\mathbb{C}(s)[y]$ 的一个非平凡多项式方程，其中系数取自有理函数域 $\mathbb{C}(s)$。换言之， $f(s) = e^{L(s)}$ 是代数的

因此可穿过除有限个点外的黎曼球面进行解析延拓。必然地， $f'(s)$ 和 $f'(s)/f(s)$ 都是代数的，并属于 $\mathbb{C}(s,\ f(s))$。特别是，$f'(s)/f(s)$ 的奇点至多是简单极点（位于 $f(s)$ 的零点、极点或代数零点/极点处），或是分支点。

接下来，考虑

$$g(s) := is^{2M} + i2M \int_{\Gamma_s} x^{2M} f'(x)/f(x)dx = 2Mi \int_{\Gamma_s} x^{2M-1}(1 + xf'(x)/f(x))dx.$$

沿某条路径 Γ_s 从 0 取到 s。由于

$$p\left(s^M f(s)^M, g(s)\right) = 0,$$

$g(s)$ 满足一个系数属于 $\mathbb{C}(s, f(s))$ 的多项式。我们断言 $g \in \mathbb{C}(s, f(s))$。否则， g 满足一个系数属于 $\mathbb{C}(s, f(s))$、次数大于 1 的（首一）最小多项式 $Q(y)$。我们可以写成

$$Q(y) = Q(s; y) = \sum_{j=0}^{K} Q_j(s) y^j$$

($Q_K = 1$) 并求导

$$0 = s\frac{d}{ds}Q(s; g(s)) = \sum_{j=0}^{K} \left(sQ_j'(s)g^j + Q_j(s)jg^{j-1}2Mis^{2M}(1 + sf'(s)/f(s))\right). \tag{22}$$

由于 $Q_j(s) \in \mathbb{C}(s, f(s))$，我们有 $Q_j'(s) \in \mathbb{C}(s, f(s))$。由于 $Q_K'(s) = 0$，(22) 给出一个关于 y、次数低于 Q 的多项式，这与最小性矛盾。因此， $g \in \mathbb{C}(s, f(s))$。注意，若 $f(s)$ 的解析延拓在异于 0 的一点 $s_0 \in \mathbb{C}$ 处有零点或极点，则 $g(s)$ 在 $s_0 \in \mathbb{C}$ 处将有对数奇点，这与$g(s) \in \mathbb{C}(s,\ f(s))$ 这一事实相矛盾。因此，我们得出结论： $f(s)$ 的解析延拓在$\mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$中没有零点。

为了分析无穷远点处的积分 $\int x^{2M} f'(x)/f(x)dx$，我们考察 $f(1/s) = \sum_{j=m}^{\infty} a_j s^{j/k}$ 的 Puiseux-Laurent级数；这里 $a_m \neq 0$。通过变量替换 $x = u^{-k}$，我们得到

$$\int u^{-2kM} \frac{f'(1/u^k)}{f(1/u^k)}(-k)u^{-k-1}du.$$

如果满足以下条件，就会出现对数奇点：

$$u^{-2k(M+1)} \frac{f'(1/u^k)}{f(1/u^k)} u^{-k-1}$$

在 $u = 0$ 处有非零留数，换句话说，如果 $f'(1/u^k)/f(1/u^k)$ 含有项 $u^{k(2M+1)}$。这等价于 $f'(1/s)/f(1/s)$ 的 Puiseux-Laurent级数含有项 s^{2M+1}，正如所声称的那样。

□

致谢。 我们感谢 Kelly Bickel 在这项工作早期阶段的多次讨论、评论和建议。

References

[1] L. Adlin、G. Thai、S. Tiscareno 与 R. Tully-Doyle，两个变量中彩色图的柯西变换，《线性代数及其应用》731 (2026)，1-21。[2] J. Agler 与 J. M^{c}Carthy，特征簇，《数学学报》194 (2005)，133-153。[3] A. Aleman、K.M. Perfekt、S. Richter 与 C. Sundberg，Drury-Arveson 空间及其他加权 Besov 空间中的循环性，《美国数学会汇刊》377 (2024)，1273-1298。[4] W. Arveson，C^*-代数的子代数 III. 多变量算子理论，《数学学报》181 (1998)，159-228。[5] S. Basu、R. M. Pollack 与 M.-F. Roy，《实代数几何中的算法》，第二版，数学中的算法与计算，第10卷，施普林格，柏林，2006；MR2248869[6] C. B´en´eteau、G. Knese、 ´L. Kosi´nski、C. Liaw、D. Seco 与 A. Sola，两个变量中的循环多项式，《美国数学会汇刊》368 (2016)，8737-8754。[7]K. Bickel 与 Y. Hong，经由无向图的稳定多项式，预印本见 https://arxiv.org/abs/2506.12624[8] K. Bickel、G. Knese、J.E. Pascoe 与 A. Sola，多变量稳定多项式与有界有理函数的局部理论，《波兰数学年刊》133 (2024)，95-169。[9] K. Bickel、G. Knese、J.E. Pascoe 与 A. Sola，乘积域中的稳定多项式与可容许分子，《伦敦数学会通报》57 (2025)，377-394。[10] K. Bickel、J.E. Pascoe 与 A. Sola，有理内函数的等值曲线图，《比萨高等师范学院年刊》21 (2020)，449-494。[11] J.A. Cima 与 T.J. Suffridge，有理真映射的边界行为。《杜克数学杂志》60 (1990)，第1期，135–138。[12] J.P. D'Angelo，伯格曼核函数的显式计算，《几何分析杂志》4 (1994)，23-34。[13] J.P. D'Angelo，有理球面映射。数学进展，第341卷，Birkh¨auser/施普林格，Cham，(2021) xiii+233页。[14] P. Flajolet 与 R. Sedgewick，解析组合学。剑桥大学出版社，剑桥，2009。xiv+810 页。[15] G. Fisher，平面代数曲线，学生数学文库第15卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001。[16] A. Grinshpan、D. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi、V. Vinnikov 与 H.J. Woerdeman，矩阵多球上稳定多项式的压缩行列式表示。《数学杂志》283 (2016)，第1-2期，25–37。[17] R.A. Horn 与 C.R. Johnson，矩阵分析。第二版，剑桥大学出版社，剑桥，2013。xviii+643 页。[18] A. Kummert，k 变量舒尔多项式的参数表示。《IEEE 电路与系统汇刊》37 (1990)，第10期，1288–1291。[19] G. Knese，有理函数的可积性与正则性，《伦敦数学会会刊》111 (2015年)，1261-1306。[20] G. Knese，两个变量中有理函数的边界局部可积性，《美国数学会汇刊》，待发表。https://arxiv.org/abs/2404.05042[21] J. Koll´ar，复二维圆盘上的有界亚纯函数，《匈牙利数学期刊》88 (2024)，1-7。[22] ´L. Kosi´nski 与 D. Vavitsas， $\mathbb{C}^2$ 的单位球中狄利克雷空间里的循环多项式，《构造逼近》58 (2023)，343-361。[23] ´L. Kosi´nski 与 W. Zwonek，球中的 Nevanlinna-Pick 插值问题，《美国数学会汇刊》370 (2018)，3931-3947。[24] J.E. Pascoe，两个变量中 Pick 函数的归纳型 Julia-Carath´eodory 定理，《爱丁堡数学学会会刊》61 (2018)，647-660。[25] W. Rudin， $\mathbb{C}^n$ 的单位球中的函数论，1980年版重印，施普林格出版社，柏林，2008。

[26] A. Sola, 《单位球中的狄利克雷型空间与循环向量札记》, 《巴塞尔数学档案》**104**（2015年）, 247-257。[27] D.G. Wagner, 《多元稳定多项式：理论与应用》, 《美国数学会通报》48（2011年）, 53-84。Department of Mathematics, Washington University in St. Louis, St. Louis, MO 63130,USA电子邮箱：geknese@wustl.eduDepartment of Mathematics, Drexel University, Philadelphia, PA 19104, USA电子邮箱：jep362@drexel.eduDepartment of Mathematics, Stockholm University, 106 91 Stockholm, Sweden电子邮箱：sola@math.su.se