arXiv:2602.21060v1 [math.CT] 24 Feb 2026

仿射群概形的半阿贝尔性

David Forsman鲁汶天主教
大学david.forsman@uclouvain.be

2026年2月24日

摘要

我们证明，域 k 上的交换霍普夫代数范畴是余半阿贝尔的。因此，仿射群 k概形范畴是半阿贝尔的。我们通过确定由满射和忠实平坦单射构成的正交分解系统，确立了余正则性；并根据 Takeuchi 关于交换霍普夫代数的正规 Hopf 理想与 Hopf 子代数之间的对应关系，推导出余正合性 k。

1 引言

众所周知，在任意 k域上，余交换霍普夫 k 代数构成一个半阿贝尔范畴 [5, 18], 这一结果最初是在特征为零的域上证明的 [4]。这些结果促使人们进一步研究不同霍普夫结构的范畴性质；例如，半阿贝尔条件也已成功应用于某些余交换分次霍普夫代数范畴的分析 [15]。证明余交换霍普夫 k代数构成半阿贝尔范畴，在很大程度上依赖于 Newman 双射对应，即余交换霍普夫代数的 Hopf 子代数与双理想之间的对应关系 k。 [12]我们对偶问题的研究方法依赖于 Takeuchi 关于交换霍普夫代数的单态射是忠实平坦的结果，以及 Takeuchi 对应；后者以句法方式刻画了 Hopf 理想中的正规 Hopf 理想 k。 [16]。

由 Janelidze、Márki 和 Tholen 引入的半阿贝尔范畴，为非阿贝尔情形下的同调代数提供了统一框架，并具备支持同调代数中关键引理和构造的充分结构 [6]。余交换霍普夫 k代数已被确立为半阿贝尔的，这自然引出了对偶问题：交换霍普夫代数具有怎样的范畴性质？关于交换霍普夫代数的余原模性，已在与 García- Martínez 和 Van der Linden [3]论文相关的报告 [17] 中有所指出。文献 [13]证明了交换霍普夫代数的同调自对偶性。

我们通过证明以下事实来回答这一问题：域 k 上的交换霍普夫代数范畴 $\mathbf{Hopf}_k^{\mathrm{com}}$ 是<sty le id='5'>余半阿贝尔的，这意味着其关于 k 的仿射群概形对偶范畴（见 [10]）是半阿贝尔范畴。此外，由于 Takeuchi 的结果可推广到超霍普夫代数 [9], 的情形，同样的证明表明，域 k 上的交换超霍普夫代数范畴也构成一个局部可呈现的余半阿贝尔范畴（$\mathrm{char}(k) \neq 2$）。

本文结构如下。第 2 节介绍必要的范畴论和代数预备知识。第 3 节中，我们证明域上交换霍普夫代数的主定理。

2 预备知识

我们在此回顾半阿贝尔范畴的定义，并指出在同调背景下，正合性可视为正规子对象（核）的一种稳定性性质。

定义 2.1. 称范畴 C 具有以下性质：

1. **有基点** 若它有一个零对象，即同时是始对象和终对象的对象。2. **正则** 若它有有限极限，且每个态射 f 分解 $f = me$，其中 m 是单态射，且 e 是稳定极端满态射。[1][2]
3. **正合** (依 Barr 的定义)，若它是正则的，且每个内部等价关系都是某个态射的核对。
4. **原模** 若沿回缩的拉回存在，且对每个回缩 $r\colon\ x \to y$在 C中，若有截面 s和沿 k: $a \to x$ 的拉回 r，则这对 $(s,\ k)$ 是联合极端满的。

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & b \\ {\scriptstyle k}\downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ x & \xrightarrow[r]{} & y \end{array}$$

5. **半阿贝尔** 若它有基点、原模、正合，且有二元余积。若范畴 C 的对偶 C^{op} 是半阿贝尔的，则称其为**余半阿贝尔** 。

6. **局部可呈现**，如果 C 等价于预层范畴的一个反射子范畴 $[K,\mathbf{Set}]$，并且对于某个小范畴在足够大的有向余极限下闭合K [1]。

由于阿贝尔范畴等同于正合加性范畴 [2], ，半阿贝尔范畴可以看作阿贝尔范畴，只是将加性削弱为具有二元余积的有基点原模性。通过联合保守族（$F_i\colon\ C \to D_i$）$_i$ 保拉回函子，可以在范畴之间反映原模性。这使得通过由可表函子诱导的函子 $\mathbf{Grp}(C) \to \mathbf{Grp}(\mathbf{Set})$，可以很容易地验证有限完备范畴 C 的内部群范畴 $\mathbf{Grp}(C)$ 是原模范畴。

引理 2.2。 设 C 为一个有基点、正则且具有原模性的范畴。则以下命题等价：

1. 范畴 C 是正合的。

2. 正则满态射将核映为核：对于每个交换方块

$$\begin{array}{ccc} a & \overset{f'}{\twoheadrightarrow} & b \\ {\scriptstyle k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m} \\ x & \underset{f}{\twoheadrightarrow} & y \end{array}$$

其中 f 和 f' 是正则满态射，k 是一个核，m 是一个单态射，m 是一个核 l.

[1]如果一个态射族 $(f_i\colon\ c_i \to d)_{i\in I}$ 是联合极端满的，那么对于分解 $f_i = me_i$，若 m 对所有 $i \in I$都是固定的单态射，则可保证 m 是同构。若某个态射构成的单元素族是联合极端满的，则该态射称为极端满态射。稳定极端满态射是指其所有拉回都是极端满态射的态射。[2]正则范畴中的极端满态射是正则满态射，见 [7, 命题 2.2(b)]。

$r_1$3. 对于 C 中的每个自反关系 $R \rightrightarrows x$，态射 $r_1 k_2$ 是一个核，其中 k_2 是r_2 r_2 的核。

证明。 证明基本见 [6,第 381–382]页。 □

3 交换 Hopf 代数的性质

设有一个对称幺半范畴 A，并考虑其中关于张量积的交换幺半群范畴$\mathbf{Mon}_A^{\mathrm{com}}$。注意，张量积定义了$\mathbf{Mon}_A^{\mathrm{com}}$中的余积。交换 Hopf A-代数范畴$\mathbf{Hopf}_A^{\mathrm{com}}$定义为范畴 $\mathbf{Grp}((\mathbf{Mon}_A^{\mathrm{com}})^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$，即$\mathbf{Mon}_A^{\mathrm{com}}$中的内余群对象范畴。简写起见，对于交换环 R，我们将 Hopf R-代数范畴$\mathbf{Hopf}_{\mathrm{com}R}$记作$\mathbf{Hopf}^{\mathrm{com}}_{\mathbf{Mod}_R}$。已知，$(\mathbf{Hopf}_R^{\mathrm{com}})^{\mathrm{op}}$ 等价于交换环 R [10]上的仿射群概形范畴。

命题 3.1。 设 A 是一个局部可呈现的对称幺半范畴。假设张量积按分量保持有向余极限。那么，交换 *Hopf* A-代数的$\mathbf{Hopf}_A^{\mathrm{com}}$范畴是一个局部可呈现、有基点且原模的范畴。

证明。$\mathbf{Mon}_A^{\mathrm{com}}$的局部可呈现性已在 [14]中证明。根据 [1, , 局部可呈现范畴中的余代数结构构成一个局部可呈现范畴。推论 2.63],$\mathbf{Hopf}_A^{\mathrm{com}}$是局部可呈现的。由于对任意有限完备范畴$C$，可表函子会诱导出一族共同保守的连续函子 $\mathbf{Grp}(C) \to \mathbf{Grp}(\mathbf{Set})$，因此 $\mathbf{Hopf}_A^{\mathrm{com}}$是有基点的余原模范畴。 □

3.1 余正则性

余正则性分两步证明。首先，利用$\mathbf{Mon}_k^{\mathrm{com}}$中的单态射在张量下封闭这一事实，将 $\mathbf{Mon}_k^{\mathrm{com}}$中由满射和单射构成的正交分解系统提升到$\mathbf{Hopf}_k^{\mathrm{com}}$。关于沿保持左类的单子函子提升此类分解系统， [19, 命题 3.7],中已予以确立；该命题表明，Linton 原始结果 [8] 中的适当性假设并非必需。稍作修改后，只要左类在积下封闭，这一证明便可推广到任意有限完备范畴中的代数。其次，我们利用 Takeuchi 的结果：$\mathbf{Hopf}_k^{\mathrm{com}}$中的单态射是忠实平坦的，因此单射是推出稳定的极端单态射。

定义 3.2. 设 $f\colon R \to S$ 是交换环的一个态射。若诱导函子 $S \otimes_R (-)\colon \mathbf{模}_R \to \mathbf{模}_S$ 在模范畴之间保有限极限且是忠实的，则称 f是忠实平坦的。

定理 3.3 （忠实平坦性）。 设 k 是一个域。那么，交换 *Hopf* k-代数之间的任意单射态射 $H_1 \to H_2$，作为交换环的态射都是忠实平坦的。

证明。 证明见 [16,定理 3.1]。 □

定理 3.4 (余正则性)。 $\mathbf{Hopf}_k^{\mathrm{com}}$ 范畴是余正则的，其中满射和忠实平坦态射分别构成满态射类和极端单态射类。

证明。考虑 $\mathbf{Mon}_k^{\mathrm{com}}$ 上由满射和单射构成的正交分解系统 (E, M)。由于 k 是域，类 M 在张量下封闭，因此 (E', M') 是 Hopf com$_k$ 上的正交分解系统，其中 $E' = U^{-1}(E)$,$M' = U^{-1}(M)$，且 U: Hopf com$_k$ $\to \mathbf{Mon}_k^{\mathrm{com}}$ 是遗忘函子 [19, 命题 3.7]。由 Takeuchi 定理，M' 中的每个态射都是忠实平坦的。接下来，我们证明类 M' 在推出下稳定。考虑态射 $f \in M'$、其推出 $\bar{f}$，以及 $\mathbf{Hopf}_k^{\mathrm{com}}$ 中 f 的余核对 $\bar{}$。这些推出是在 $\mathbf{Mon}_k^{\mathrm{com}}$ 的底层范畴中计算的：

$$\begin{array}{ccccc} H & \xrightarrow{g} & X & \xrightarrow{\bar{f}} & G \otimes_H X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \ulcorner & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}} & \ulcorner & \downarrow{\scriptstyle s_2} \\ G & \xrightarrow[\bar{g}]{} & G \otimes_H X & \xrightarrow[s_1]{} & G \otimes_H G \otimes_H X \end{array}$$

注意，$G \otimes_H f = s_1$ 是一个截面，并且由 $G \otimes_H (-)$的忠实性，我们可看出 f的$\bar{}$单射性：$X \to G \otimes_H X$。因此 $M\prime$是推出稳定的。对任意满态射 $f \in M'$，态射 $G \otimes_H f$ 作为 f的余核对中的一个态射是同构。$G \otimes_H (-)$的忠实性蕴含 f 既是模的单态射又是满态射，从而是同构。因此，M' 中的每个态射都是推出稳定的极端单态射，从而证明了余正则性。反之，由于每个满射都是满态射，由正交性可知每个极端单态射都属于 M'。这表明 E'与 M' 分别是满态射类和极端单态射类。

□

3.2 余正合性

我们证明 $\mathbf{Hopf}_k^{\mathrm{com}}$ 的余正合性。同样，根据 Takeuchi 的工作，我们得到了正规 Hopf 理想的一个关键刻画，这是证明 $\mathbf{Hopf}_k^{\mathrm{com}}$ 其余余正合性的关键。这些观察汇集了证明 $\mathbf{Hopf}_k^{\mathrm{com}}$ 余半阿贝尔性的必要要素。

定义 3.5（Hopf 理想）。设 X 是一个交换 Hopf k-代数，且 I 是 X 的一个子集。若存在一个 $\mathbf{Hopf}_k^{\mathrm{com}}$ 态射 f: $X \to Y$，其中 $I = f^{-1}(0_Y)$，则称 I 为 X 的一个 Hopf 理想。若 f 可取为 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{com}k}$ 中的一个余核，则称 I 为 X 的一个正规 Hopf 理想。

Hopf 理想这一概念等价于标准定义 [11]。

定理 3.6. 设 X 是一个交换 *Hopf* k-代数，且 X 有一个 *Hopf* 理想 I。那么以下条件等价。

1. I 是一个正规 *Hopf* 理想。
2. $I = XA^+$ 对于某个 *Hopf* 子代数 A，其中 X 满足 $A^+ := \varepsilon_A^{-1}(0)$ 是 A 的增广理想，而 ε_A: $A \to k$ 是 A 的增广。*3.* 对每个 $x \in I$，我们有 $x_1 S(x_3) \otimes x_2 \in X \otimes I$。[3]

证明。前两个条件等价，验证起来十分直接；第三个条件由 [16] 中的定理 4.3 可知与第二个条件等价。

□

定理 3.7. $\mathbf{Hopf}_k^{\mathrm{com}}$范畴是余正合的。

[3]符号 S 表示反粒子。我们采用 Sweedler 记号，对于余乘法，我们将 $\Delta(x)$ 记作 $x_1 \otimes x_2$，并将 $(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta(x)$ 记作 $x_1 \otimes x_2 \otimes x_3$。

证明。 定理 3.4 表明 $\mathbf{Hopf}_k^{\mathrm{com}}$是余正则的。根据引理 2.2，只需证明，在 $(\mathbf{Hopf}_k^{\mathrm{com}})^{\mathrm{op}}$ 中，正规子对象沿正则满态射的像仍是正规子对象。考虑以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f'} & Z \\ {\scriptstyle k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k'} \\ Y & \xrightarrow[f]{} & W \end{array}$$

在**霍普夫**k中，其中 f是余核， f'是满态射，而 k， k'是包含。我们证明 f' 是余核。由于 f' 是满射，只需证明 Hopf 理想$I = f'^{-1}(0)$ 是正规的。设 $x \in I$。根据定理 3.6 ，只需证明 $x' := x_1 S(x_3) \otimes x_2 \in X \otimes I$。由于 $x \in J := f^{-1}(0)$，我们有

$$x' \in (Y \otimes J) \cap (X \otimes X) = (Y \cap X) \otimes (J \cap X) = X \otimes I$$

这是因为交与张量积满足交换律，而张量积 $\otimes_k$ 在各分量上左正合。因此， I 是一个正规的 Hopf 理想，这说明 f'是余核。

□

3.3 结论

定理 3.8. 域 k 上交换霍普夫代数的**霍普夫**$_k^{\mathrm{com}}$范畴是一个余半阿贝尔范畴。

证明。 该范畴是有基点、局部可呈现、余原模（命题3.1），且余正合的（定理 3.7）。

□

注记 3.9。 对于 $\mathbf{Hopf}_A^{\mathrm{com}}$，其中 A 是一个具有逐分量正合张量积的对称幺半阿贝尔范畴，其余正合性可用与定理 3.7相同的方法证明，前提是忠实平坦态射和 Hopf 理想具有类似的刻画。考虑域 A 上的超 k-向量空间构成的对称幺半范畴，其中 k的特征不为 2。由于忠实平坦态射和正规 Hopf 理想的这些刻画已在 [9, 推论 5.5、定理 5.9]中针对范畴 $\mathbf{Hopf}_{\mathrm{com}A}$给出，因此我们得出，交换超 Hopf$k$-代数构成的范畴 $\mathbf{Hopf}_A^{\mathrm{com}}$是余半阿贝尔的。

在未来的一篇论文中，我们计划通过应用局部到整体原理，将半阿贝尔性结果推广到交换冯·诺依曼正则环上的仿射群概形。

致谢

本研究由 Fonds de la Recherche Scientifique（比利时）通过 Aspirant 研究员奖学金资助。作者感谢 Van der Linden 教授提出这一问题。

参考文献

[1] J. Adámek 和 J. Rosický。《局部可呈现范畴与可达范畴》。第 189 卷。伦敦数学学会数学讲义丛书。英国剑桥：剑桥大学出版社，1994年。ISBN： 978 0 521 42261 1 10.1017/CBO9780511600579 https://www.cambridge.org/core/books/locally-presentable-and-accessible-categories/94CB48295B6AF097FC232313A57BDE17 ----。DOI：。网址：。

[2] M. Barr、P. A. Grillet 和 D. H. Osdol。《精确范畴与层范畴》。第 236 卷。《数学讲义》。柏林，海德堡：施普林格柏林海德堡，1971年，页 x，246。isbn: 978 3 540 05678 2 10.1007/BFb0058579 https://link.springer.com/book/10.1 ----。doi: 。网址：。[3] X. García-Martínez 和 T. Van der Linden。“关于双代数分裂扩张的一则注记”。载于：《数学论坛》30.5（2018年）。另见 https://arxiv.org/abs/1701.00665，页 1089–1095。doi: 10.1515/forum-2017-0016 1701.00665 [math.CT] https://doi.org/10.1515 。arXiv: 。网址：。[4] M. Gran、G. Kadjo 和 J. Vercruysse。“余交换霍普夫代数范畴中的一种挠理论”。载于：《应用范畴结构》24.3（2015年5月），页 269–282。issn: 1572-9095。doi: 10.1007/s10485-015-9396-9。网址：http://dx.doi.org/10.1007/s10485-015-9396-9。[5] M. Gran、F. Sterck 和 J. Vercruysse。“Takeuchi 定理的一个半阿贝尔扩张”。载于：《纯粹与应用代数杂志》223 10 2019 4171 4190 0022 4049 https: 。（），页 –。doi: 。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002240491930012X 。[6] G. Janelidze、L. Márki 和 W. Tholen。“半阿贝尔范畴”。载于：《纯粹与应用代数杂志》168.2（2002年）。《范畴论 1999：精选论文》，科英布拉会议论文集，纪念 Saunders Mac Lane 90 367 386 0022 4049 https://doi.org 岁生日，页 –。issn: -。doi: 。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022404901001037 。[7] G. M. Kelly。“关于相对于分解系统的关系的一则注记”。载于：《范畴论》。A. Carboni、M. C. Pedicchio 和 G. Rosolini 编。第 1488 卷。《数学讲义》。首次在线发布：2006年1月1日。柏林，海德堡：施普林格，1991年，页 249–261。doi: 10.1007/BFb0084224。网址：https://link.springer.com/chapter/10.1007/BFb0084224。[8] F. E. J. Linton。“代数范畴中的余等化子”。载于：《三元组与范畴同调理论研讨会》。B. Eckmann 编。第 80 卷。《数学讲义》。柏林，海德堡：施普林格，1969， 75 90 10.1007/BFb0083082 https://link.springer.com/chapter 页 –。doi: 。网址：。[9] A. Masuoka。“超仿射群与超形式群中的基本对应”。载于：《纯粹与应用代数杂志》202 1 3 2005 284 312 10.1016/j.jpaa.2005 。–（），页 –。doi: 。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022404905000307。[10] J. S. Milne。《仿射群概形基础理论》。版本 1 00， https://www.jmiln 。可查阅：。3月。网址：https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/AGS.pdf 2012 /AGS.pdf 。[11] S. Montgomery。《霍普夫代数及其在环上的作用》。第 82 卷。CBMS数学区域会议丛书。CBMS数学区域会议丛书，第 82 号。美国罗得岛州普罗维登斯：美国数学学会，1993 978 0 8218 0738 5 https://www.ams.org/book 。isbn: ----。网址：。[12] K. Newman。“双理想与子霍普夫代数之间的对应”。载于：《代数杂志》36 1 1975 1 15 10.1016/0021-8693(75)90150-7 https://www.sciencedirect.c 。（），页 –。doi: 。网址：。[13] G. Peschke 和 T. Van der Linden。《范畴代数的同调观点》。2024 2404 。arXiv: 。网址：。[14] H.-E. Porst。“关于幺半群、余幺半群和双幺半群范畴”。载于：Quaestiones Mathematicae 31 2 2008 127 139 10.2989/QM.2008.31.2.2.474 https://doi.org/10.2 。（），页 –。doi: 。电子预印本：。网址：。[15] A. Sciandra。“色霍普夫代数的半阿贝尔条件”。载于：《纯粹与应用代数杂志》228 9 2024 107677 0022 4049 https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2024.1 。（），页 。issn: -。doi: 。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022404924000744。[16] M. Takeuchi。“霍普夫理想与子霍普夫代数之间的对应”。载于：《数学手稿》7（1972年9月）。收稿日期：1971年11月23日，页 251–270。doi: 10.1007/BF01579722。网址：https://link.springer.com/article/10.1007/BF01579722。[17] T. Van der Linden。《双代数的分裂扩张》。CT2018 报告。与 Xabier García-Martínez 合作；幻灯片见 https://www.mat.uc.pt/~ct2018/slides/T_VdLinden.pdf。2018年2月。网址：https://www.mat.uc.pt/~ct2018/slides/T_VdLinden.pdf。

[18] C. Vespa 和 M. Wambst。《关于余交换霍普夫代数范畴的一些性质》。载于：西北欧数学杂志 4 2018 https://hal.sc ( )。可在 HAL 获取：，https://nwejm.univ-lille.fr/index.php/nwejm/article ience/hal-01115720 21 38 第 – 页。网址：/view/43 。[19]

T. Wißmann。《通过分解系统及示例探讨极小性概念》。载于：计算机科学中的逻辑方法 18 3 2022 31 1 31 31 10.46298/lmcs-18(3:31)2022 https://l 。 ( ) ，：–：。DOI：。mcs.episciences.org/10014 网址：。