arXiv:2602.21085v1 [math.OA] 24 Feb 2026

# 弧长度量的量子变形

RASMUS HAUGE HANSEN 和 JENS KAAD

摘要。我们研究单位圆上弧长度量的 a $q$ 变形。这种 $q$ 变形可通过将标准整数替换为其 $q$ 变形类比量，自然地从 Dirac算子 得到。尽管如此，我们证明，相应的度量结构只有在 Marc Rieffel 引入的量子度量空间层面上才有意义。这意味着，我们在圆上的连续函数上得到的量子度量并非源自圆上的经典度量。在 $q$ 等于一的特殊情形下，我们恢复通常的弧长度量；并且证明，关于 David Kerr 的完全格罗莫夫-豪斯多夫距离，我们这一族量子度量空间随变形参数连续变化。

目录

1. 引言 1 2. 符号与约定 3 3. A $q$-单位圆上的变形微分演算 3 4. 扩展 $q$-导数 5 5. $q$-积分 7 6. 从 $q$-导数导出的量子度量 9 6.1. 紧量子度量空间的一些背景知识 9 6.2. 圆上的量子度量 10 6.3. 圆上某些度量的不存在性 12 7. 扭曲的连续性 13 参考文献 15

## 1. 引言

紧量子度量空间理论由 Rieffel 在一系列论文中开创，[Rie98、Rie99、Rie04]。这一理论的灵感和动机，源于丰富的经典紧致度量空间理论，以及由 Connes 开创的非交换几何宏大研究计划，[Con89、Con94、Con96]。尤为重要的是，Rieffel 的理论给出了经典 Gromov-Hausdorff 距离的一种有趣类比，即量子 Gromov-Hausdorff 距离，使我们能够以系统的方式研究紧量子度量空间的收敛问题，[Rie04]。迄今为止，得益于多位作者的贡献，紧量子度量空间理论已得到显著发展；以下列出部分相关文献 [Ker03、Li05、OzRi05、ChIv06、Lat16、CovS21、AKK22、LevS24]以举若干重要成果。

2020 数学主题分类。 46L87；46L30。关键词和短语。 量子度量空间、微分演算、 $q$-导数、$q$-积分。 

本文关注 Kerr 完备 Gromov–Hausdorff 距离$\mathrm{dist}^s$，它是 Rieffel 量子 Gromov-Hausdorff 距离的增强版本，旨在处理算子系统，参见 [KER03]。关于量子 Gromov-Hausdorff 距离的其他改进，我们请读者参阅 Latrémolière 的大量研究，例如 [LAT16、LAT22]。

为了说明本文的贡献，我们回顾紧量子度量空间的定义。在算子系统方法中，紧量子度量空间由一个算子系统 $\mathcal{X}$ 和一个半范数 $L\colon \mathcal{X} \to [0,\infty)$ 给出，该半范数被要求具有 $*$-不变性，并且在单位元上取零。关键条件是，相应的 *Monge-Kantorovich* 度量在态空间 $S(\mathcal{X})$ 上诱导弱-$*$ 拓扑。如果 $\mathcal{X}$ 在一个含幺 $C^*$-代数 $A$中稠密，则称 $(\mathcal{X}, L)$ 是 $A$ 上的量子度量。

现在，固定一个紧 Hausdorff 空间 $M$，以及由 $M$ 上的连续复值函数构成、赋有上确界范数 $\|\cdot\|_\infty$ 的含幺 $C^*$-代数$C(M)$。交换情形中一个耐人寻味的观察是，存在 $C(M)$ 上的量子度量 $(\mathcal{X}, L)$，它们并非来自 $M$ 上的度量。这意味着，不可能在 $M$ 上找到一个度量，使得对所有 $f \in \mathcal{X}$，$L(f)$ 都与利普希茨常数一致。关于这些问题的深入讨论，请参阅 Rieffel 的论文 [Rie99]，尤其是 [Rie99，定理 4.2 和定理 8.1]。不过请注意，[Rie99] 中的结果局限于序单位空间，因此在交换情形中，讨论的是连续实值函数 $C(M,\mathbb{R})$，而非连续复值函数$C(M)$。

在本文中，我们研究一个简单的情形：紧 Hausdorff 空间$M$ 与单位圆 $S^1 \subseteq \mathbb{C}$一致。我们用记号 $\mathcal{O}(S^1) \subseteq C(S^1)$表示包含映射 $z\colon S^1 \to \mathbb{C}$ 所生成的最小含幺 $*$-子代数。我们给出一整族定义在 $C(S^1)$ 上的量子度量 $\big(\mathrm{Lip}_q(S^1)\ L_q\big)_{q\in(0,1]}$，使得对所有 $q \in (0,1]$，都有 $\mathcal{O}(S^1) \subseteq \mathrm{Lip}_q(S^1)$。此外，这一族还具有以下性质：

- 设 $q = 1$。算子系统 $\mathrm{Lip}_1(S^1)$ 与赋予通常弧长度量的 $S^1$ 上的利普希茨函数一致，并且对于 $f \in \mathrm{Lip}_1(S^1)$，$L_1(f)$ 是利普希茨常数。因此，紧量子度量空间 $(\mathrm{Lip}_1(S^1)\ L_1)$ 来自 $S^1$ 上的弧长度量。
- 令 $q \in (0,1)$，并令 $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Lip}_q(S^1)$ 为一个满足 $\mathcal{O}(S^1) \subseteq \mathcal{X}$ 的算子子系统。$C(S^1)$ 上的量子度量 $(\mathcal{X}, L_q)$ 并非来自 $S^1$ 上的度量。事实上，不可能找到一个常数 $C > 0$ 使得

$$L_q(f\cdot g) \leqslant C\cdot\big(L_q(f)\cdot\|g\|_\infty + \|f\|_\infty\cdot L_q(g)\big) \qquad \text{for all } f,g\in\mathcal{O}(S^1).$$

特别地，$\big(\mathcal{O}(S^1)\ L_q\big)$ 不满足莱布尼茨不等式。

- 我们的紧量子度量空间族关于 Kerr 完备 Gromov–Hausdorff 距离是连续的。因此，对于每个 $q_0 \in (0,1]$，，我们都有

$$\lim_{q\to q_0}\mathrm{dist}^s\big((\mathrm{Lip}_q(S^1),L_q),(\mathrm{Lip}_{q_0}(S^1),L_{q_0})\big) = 0.$$

- 令 $q \in (0,1]$。$C(S^1)$ 上最小与最大量子度量之间的完全格罗莫夫-豪斯多夫距离为零。这意味着 $\mathrm{dist}^s\big((\mathcal{O}(S^1)\ L_q),\ (\mathrm{Lip}_q(S^1)\ L_q)\big) = 0$。

上述性质是通过应用舒尔乘子理论得到的，参见例如 [Pis01]。更确切地说，我们的许多构造和估计都与 [KaKy25] 中的结果有关，在那里，类似的结构控制了量子 $SU(2)$ 上的一族量子度量的部分性质。

让我们用简短的说明来结束本引言，解释激发我们开展这项工作的基本问题。考虑单位圆的 Dirac算子 $-i\frac{d}{d\theta}\colon C^\infty(S^1) \to C^\infty(S^1)$, 并注意到

$$-i\frac{d}{d\theta}(z^n) = n\cdot z^n \qquad \text{for all } n\in\mathbb{Z}. \tag{1.1}$$

非交换几何中的重构定理意味着，在适当意义下，我们可以从这个 Dirac算子恢复单位圆，参见 [Con13]。对于$q\in(0,\ 1)$，因此我们可以询问：如果将等式右侧的整数 $n$ 替换为相应的1.1）中的$q$-整数$[n]_q = \frac{q^n-q^{-n}}{q-q^{-1}}$，单位圆的几何会发生什么变化？本文研究这种替换如何影响紧 Hausdorff 空间 $S^1$ 的（量子）度量性质。

## 2. 符号与约定

对于希尔伯特空间 $\mathcal{H}$，记号 $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$ 上有界算子构成的含幺 $C^*$-代数，并赋予算子范数 $\|\cdot\|_\infty\colon \mathbb{B}(\mathcal{H}) \to [0,\infty)$。我们约定希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的内积对第二个变量线性。

记 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 为由整数指标的 $\ell^2$ 序列构成的可分希尔伯特空间。$\ell^2(\mathbb{Z})$ 的标准正交基记为 $(e_j)_{j\in\mathbb{Z}}$。双边移位是酉算子 $U\colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$，由规则 $U(e_j) = e_{j+1}$ 确定。按照惯例，我们将单位圆上的连续函数构成的含幺 $C^*$-代数 $C(S^1)$，与由 $U$ 生成的含幺 $C^*$-子代数 $C^*(U) \subseteq \mathbb{B}(\ell^2(\mathbb{Z}))$ 等同起来。此等同是通过将包含映射$z\colon S^1 \to \mathbb{C}$ 映到双边移位 $U$ 的映射实现的。

对于有限集合 $F$，记号 $|F|\in\mathbb{N}_0$表示 $F$ 中元素的个数。

本文讨论具体的算子系统，也就是说，对我们而言，算子系统 $\mathcal{X}$ 是固定含幺 $C^*$-代数 $A$ 的一个子空间（不一定是闭子空间）。我们确实要求 $A$ 中的单位元 $\mathbf{1}$ 属于 $\mathcal{X}$，并且当然要求 $A$ 中的对合保持 $\mathcal{X}$ 不变。算子系统 $\mathcal{X}$ 继承了 $A$ 的范数和正元的概念。我们将复数 $\mathbb{C}$与子空间 $\mathbb{C}\cdot 1 \subseteq \mathcal{X}$等同起来。

## 3. 单位圆上的 $q$ 变形微分演算

在本节中，我们固定一个 $q$ in $(0,1]$。对每个整数 $n\in\mathbb{Z}$，相应的 $q$-整数定义为

$$[n]_q := \begin{cases} \frac{q^n-q^{-n}}{q-q^{-1}} & \text{for} \quad q\in(0,1) \\ n & \text{for} \quad q=1 \end{cases}.$$

令 $\mathcal{O}(S^1)$ 表示包含映射 $z\colon S^1\to\mathbb{C}$ 的含幺 $C^*$-代数 $C(S^1)$ 的最小含幺 $*$-子代数。作为一个向量空间， $\mathcal{O}(S^1)$ 的一组基由 $z$ 的整数次幂构成，因此 $(z^n)_{n\in\mathbb{Z}}$。

本节旨在在 $\mathcal{O}(S^1)$ 上构造一种 $q$-变形的一阶微分演算（FODC）。当 $q=1$ 时，我们得到一种代数版本的

单位圆上的通常德拉姆复形（与复数张量化）。所谓一阶微分演算，指的是以下内容，参见例如 [KLSC97，12.1.1 定义 1，以及 2] 或 [BEMA20，定义 1.1 和 1。4]。

**定义 3.1.** 含幺代数 $\mathcal{A}$ 上的一阶微分演算由一个 $\mathcal{A}$-双模 $\mathcal{M}$ 以及一个线性映射 $\mathrm{d}: \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ 组成，使得

i)（莱布尼茨法则）对所有 $a, b \in \mathcal{A}$，$\mathrm{d}(ab) = a \triangleright \mathrm{d}(b) + \mathrm{d}(a) \triangleleft b$，ii) $\mathcal{M} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{a \triangleright \mathrm{d}(b) \triangleleft c \mid a, b, c \in \mathcal{A}\}$。

若 $\mathcal{A}$ 是一个含幺 $*$-代数，则 $\mathcal{A}$ 上的一阶微分演算（$\mathrm{d}$ $\mathcal{M}$）是一个 $*$-演算，如果存在向量空间 $\mathcal{M}$ 上的一个对合，使得对所有 $a, b, c \in \mathcal{A}$，$(a \triangleright \mathrm{d}(b) \triangleleft c)^* = c^* \triangleright \mathrm{d}(b^*) \triangleleft a^*$。

含幺 $*$-代数 $\mathcal{O}(S^1)$自带一个代数自同构 $\sigma: \mathcal{O}(S^1) \to \mathcal{O}(S^1)$，其定义如下

$$\sigma(z^n) = q^n z^n \qquad \text{for all } n \in \mathbb{Z}.$$

逆代数自同构 $\sigma^{-1}$ 由 $z^n \mapsto q^{-n} z^n$给出。我们指出， $\sigma$一般并不保持 $*$。相反，成立的是

$$\sigma(f^*) = \sigma^{-1}(f)^* \qquad f \in \mathcal{O}(S^1). \tag{3.1}$$

令 $\mathcal{X}_q := \mathcal{O}(S^1)$，并将 $\mathcal{X}_q$ 视为 $\mathcal{O}(S^1)$上的双模，其左作用与右作用由下式给出

$$f \triangleright \xi = \sigma(f) \cdot \xi \qquad \xi \triangleleft f = \xi \cdot \sigma^{-1}(f),$$

其中 $\cdot$表示 $\mathcal{O}(S^1)$中的通常乘积。双模 $\mathcal{X}_q$ 还从 $\mathcal{O}(S^1)$继承一个对合 $*$。

**定义 3.2.** $q$-导数 是由$z^n \mapsto i[n]_q z^n$定义的线性映射 $\mathrm{d}_q: \mathcal{O}(S^1) \to \mathcal{X}_q$。

**命题 3.3.** 对$(\mathcal{X}_q, \mathrm{d}_q)$ 是 $\mathcal{O}(S^1)$上的一个 $*$-演算。

证明. 为验证莱布尼茨法则，我们着重考虑对某个 $n, m \in \mathbb{Z}$有 $a = z^n$ 与 $b = z^m$ 的情形。在此情形下，我们利用恒等式 $[n+m]_q = q^n [m]_q + [n]_q q^{-m}$得到

$$\mathrm{d}_q(z^{n+m}) = i q^n [m]_q z^{n+m} + i[n]_q q^{-m} z^{n+m} = \sigma(z^n) \cdot \mathrm{d}_q(z^m) + \mathrm{d}_q(z^n) \cdot \sigma^{-1}(z^m).$$

我们现在转而验证条件 $ii)$。只需证明 tha t

$$z^n \in \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{f \triangleright \mathrm{d}_q(g) \triangleleft h \mid f, g, h \in \mathcal{O}(S^1)\} \qquad \text{for all } n \in \mathbb{Z}, \tag{3.2}$$

因为所有此类函数的集合张成 $\mathcal{X}_q$。对于 $n \neq 0$，相关的包含映射成立，因为 $z^n = 1 \triangleright \mathrm{d}_q\big(z^n \tfrac{1}{i[n]_q}\big) \triangleleft 1$。对于 $n = 0$，通过观察到$1 = -iqz^{-1} \triangleright \mathrm{d}_q(z) \triangleleft 1$，该包含映射成立。

接下来还需考虑各种对合之间的相互作用。为此，我们首先注意到 $\mathrm{d}_q(x^*) = \mathrm{d}_q(x)^*$ 对所有 $x \in \mathcal{O}(S^1)$。相应的恒等式现由（3.1）得出。□

在 $q = 1$ 的特殊情形下，1-导数与向量场 $\frac{d}{d\theta}: \mathcal{O}(S^1) \to \mathcal{O}(S^1)$ 一致，后者局部由相对于坐标卡 $S^1 \setminus \{1\} \cong (0, 2\pi)$ 的微分给出（将 $e^{i\theta}$ 映射到 $\theta$）。事实上，对于所有 $n \in \mathbb{Z}$，我们都有 $\frac{dz^n}{d\theta} = inz^n = \mathrm{d}_1(z^n)$，因此，将我们的一阶微分演算与复数张量化，并以其代数对应物替换光滑函数和 1-形式后，便可恢复经典的德拉姆复形。

## 4. 扩展 $q$-导数

回顾一下， $q$ 是$(0,1]$中的一个固定数。本节的目标是扩展$q$-导数 $\mathrm{d}_q$： $\mathcal{O}(S^1)$ $\to \mathcal{X}_q$ ，使我们能够对种类更广泛的函数取 $q$-导数。最有效的实现方式是在 $\ell^2(\mathbb{Z})$上的有界算子层面进行研究。事实上，我们扩展后的 $q$-导数是一个无界Schur乘子。与之相关的有界Schur乘子理论已发展得相当成熟，读者可参阅 [Pis01第5], [Pau02章，或 8] ，也可参阅综述 [ToTu。

对于有界算子 $T$： $\ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$，对由 $j,k\in\mathbb{Z}$标号的矩阵单位采用记号 $T_{jk}:=\langle e_j, Te_k\rangle$。对每个有限非空子集 $F\subseteq\mathbb{Z}$，我们由此得到有限矩阵$(T_{jk})_{j,k\in F}$ ，它可视为$M_{|F|}(\mathbb{C})$中的元素，因而具有 $C^*$-范数 $\left\|(T_{jk})_{j,k\in F}\right\|_\infty$。由于 $T$有界，上确界

$$\sup\left\{\left\|(T_{jk})_{j,k\in F}\right\|_\infty \mid F\subseteq\mathbb{Z},\ \text{finite and non-empty}\right\}$$

是有限的，并且它与 $T$的算子范数一致。事实上，我们可以将有界算子 $\mathbb{B}\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big)$ 等同于满足下述子集有上界的无限矩阵$(M_{jk})_{j,k\in\mathbb{Z}}$ （其元素属于$\mathbb{C}$）：

$$\left\{\left\|(M_{jk})_{j,k\in F}\right\|_\infty \mid F\subseteq\mathbb{Z},\ \text{finite and non-empty}\right\}\subseteq[0,\infty).$$

记号 $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ 指 $\mathbb{Z}$ 上有界 $\mathbb{C}$ 值函数的含幺 $C^*$-代数，我们将 $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ 等同于 $\mathbb{B}\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big)$ 中由对角无限矩阵构成的含幺 $C^*$-子代数。这一等同将函数 $f\in\ell^\infty(\mathbb{Z})$ 映为无限矩阵 $(f(j)\delta_{jk})_{j,k\in\mathbb{Z}}$，其中 $\delta_{jk}\in\{0,1\}$ 是克罗内克 δ。

**定义 4.1.** 设 $\mu:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ 为一个函数。与 $\mu$ 相关联的无界*Schur*乘子是由下列公式给出的线性映射 $\mathbb{M}(\mu):\mathrm{Dom}\big(\mathbb{M}(\mu)\big)\to\mathbb{B}\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big)$

$$\mathbb{M}(\mu)\big((M_{jk})_{j,k\in\mathbb{Z}}\big)=\big(\mu(j,k)\cdot M_{jk}\big)_{j,k\in\mathbb{Z}}$$

其定义域为 $\mathrm{Dom}\big(\mathbb{M}(\mu)\big)$，由那些有界算子 $(M_{jk})_{j,k\in\mathbb{Z}}$ 组成，其中$\big(\mu(j,k)\cdot M_{jk}\big)_{j,k\in\mathbb{Z}}$ 同样是一个有界算子。

注意，对于函数 $\mu:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$，相应的无界Schur乘子 $\mathbb{M}(\mu):\mathrm{Dom}\big(\mathbb{M}(\mu)\big)\to\mathbb{B}\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big)$ 自动是一个闭无界算子。因此，根据闭图定理，若$\mathbb{M}(\mu)$的定义域与 $\mathbb{B}\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big)$一致，则相应的线性映射

$$\mathbb{M}(\mu):\mathbb{B}\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big)\to\mathbb{B}\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big)$$

自动是有界的。在这种情况下，我们称 $\mathbb{M}(\mu)$为有界*Schur*乘子。事实上，根据 [Pis01，定理 5。1]有界算子 $\mathbb{M}(\mu)$自动是完全有界的，且 $\mathbb{M}(\mu)$ 的完全有界范数与$\mathbb{M}(\mu)$的算子范数一致。

让我们回到一般情形，其中 $\mathbb{M}(\mu)$是一个无界Schur乘子。我们可以将有界算子 $\mathbb{B}\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big)$ 视为 $\ell^\infty(\mathbb{Z})$上的双模，其左作用与右作用由有界算子的乘法给出。按此方式，定义域$\mathrm{Dom}\big(\mathbb{M}(\mu)\big)\subseteq\mathbb{B}\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big)$ 是 $\ell^\infty(\mathbb{Z})$上的子双模，且无界Schur乘子 $\mathbb{M}(\mu)$关于 $\ell^\infty(\mathbb{Z})$是双线性的。

下一个引理的证明是关于无界Schur乘子的一个初等练习。就此请注意，对于有界算子 $T\colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$，我们得到$(T^*)_{jk} = T_{kj}$对所有 $j,k \in \mathbb{Z}$成立。

引理*4.2.* 若函数 $\mu\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ 满足：对所有$j,k\in\mathbb{Z}$，有 $\overline{\mu(k,j)} = \mu(j,k)$，且上确界 $\sup_{j\in\mathbb{Z}} |\mu(j,j)|$ 有限，则定义域 $\mathrm{Dom}\big(\mathbb{M}(\mu)\big) \subseteq \mathbb{B}\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big)$ 是一个算子系统。此外，对所有 $T \in \mathrm{Dom}\big(\mathbb{M}(\mu)\big)$，成立 $\mathbb{M}(\mu)(T^*) = \big(\mathbb{M}(\mu)(T)\big)^*$。

定义函数 $\delta_q\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ 如下

$$\delta_q(j,k) := i\cdot[j-k]_q \qquad \text{for all } j,k\in\mathbb{Z}.$$

下一个引理断言，无界Schur乘子 $\mathbb{M}(\delta_q)\colon \mathrm{Dom}\big(\mathbb{M}(\delta_q)\big) \to \mathbb{B}\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big)$ 延拓了 $q$-导数（见第3节）。如第2 节所述，我们将 $\mathcal{O}(S^1)$ 等同于一个含幺的 $*$-子代数（属于 $\mathbb{B}\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big)$），通过将 $z$ 映为双边移位 $U$。

**引理 4.3**。成立：$\mathcal{O}(S^1) \subseteq \mathrm{Dom}\big(\mathbb{M}(\delta_q)\big)$，并且有恒等式$\mathbb{M}(\delta_q)(f) = \mathrm{d}_q(f)$对所有 $f\in\mathcal{O}(S^1)$均成立。

证明。设 $n\in\mathbb{Z}$，并注意到与 $U^n$ 对应的无限矩阵满足$U^n_{n+k,k} = 1$对所有 $k\in\mathbb{Z}$均成立，且其他所有项都等于零。由于 $\delta_q(n+k,k) = i\cdot[n]_q$对所有 $k\in\mathbb{Z}$均成立，我们得到 $U^n \in \mathrm{Dom}\big(\mathbb{M}(\delta_q)\big)$，其中

$$\mathbb{M}(\delta_q)(U^n) = i\cdot[n]_q\cdot U^n. \qquad \square$$

根据引理 4.3，我们采用记号 $\mathrm{d}_q := \mathbb{M}(\delta_q)$，并将这个舒尔乘子称为 $q$-导数。注意，引理4.2推出定义域 $\mathrm{Dom}\big(\mathbb{M}(\delta_q)\big) \subseteq \mathbb{B}(\ell^2(\mathbb{Z}))$ 是一个算子系统，并且对所有 $T\in\mathrm{Dom}\big(\mathbb{M}(\delta_q)\big)$，均有 $\mathrm{d}_q(T^*) = \mathrm{d}_q(T)^*$。

**定义4.4**。 $q$-利普希茨算子 是 $q$-导数的定义域，该算子系统记作

$$\mathrm{Lip}_q\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big) := \mathrm{Dom}\big(\mathbb{M}(\delta_q)\big).$$

$q$-利普希茨函数 $\mathrm{Lip}_q(S^1) \subseteq C(S^1)$ 是由交集定义的算子系统

$$\mathrm{Lip}_q(S^1) := C(S^1)\cap \mathrm{Lip}_q\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big).$$

我们简要考察 $q=1$ 的情形。

**命题 4.5**。 1-利普希茨函数$\mathrm{Lip}_1(S^1)$ 与单位圆上关于标准弧长度量的利普希茨函数一致。此外，对于$f\in\mathrm{Lip}_1(S^1)$，导数 $\|\mathrm{d}_1(f)\|_\infty$ 的算子范数等于利普希茨函数 $f$ 所对应的利普希茨常数。

证明。定义实数直线在 $C(S^1)$ 上的强连续作用 $\sigma$，令$\sigma_t(f)(z) := f(e^{-it}\cdot z)$，其中 $t\in\mathbb{R}$ 和 $z\in S^1$ 任意。

对于连续函数 $f\colon S^1\to\mathbb{C}$，可以验证，$f$ 是关于 $S^1$ 上标准度量的利普希茨函数，当且仅当上确界

$$\sup_{t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{\|\sigma_t(f)-f\|_\infty}{|t|} \tag{4.1}$$

有限。在这种情况下，上述上确界等于相应的利普希茨常数。

引入由公式 $N(e_k) = k \cdot e_k$ 确定的自伴无界算子 $N : \mathrm{Dom}(N) \to \ell^2(\mathbb{Z})$。该公式定义在由基向量 $e_k$ （ $k \in \mathbb{Z}$）的代数线性张成空间构成的核上。我们称连续函数 $f : S^1 \to \mathbb{C}$ 是关于 $N$的利普希茨算子，若满足以下条件

- $f$保持 $N$的定义域不变，并且交换子 $[N, f] : \mathrm{Dom}(N) \to \ell^2(\mathbb{Z})$可延拓为 $\ell^2(\mathbb{Z})$上的有界算子。

对于 $t \in \mathbb{R}$，酉算子 $e^{itN}$ （通过自伴无界算子的函数演算构造）由公式 $e^{itN}(e_k) = e^{itk} \cdot e_k$ 给出，其中$k \in \mathbb{Z}$。因此， $N$ 诱导出强连续作用 $\sigma$ ，具体而言

$$\sigma_t(f) = e^{-itN} f e^{itN} \qquad \text{for all } f \in C(S^1).$$

因此，对于连续函数 $f : S^1 \to \mathbb{C}$，根据 [Chr16，定理 38] 可知，式（4.1）中的上确界有限，当且仅当 $f$ 是关于 $N$的利普希茨算子。此时，式（4.1）中的上确界等于交换子 $[N, f] : \mathrm{Dom}(N) \to \ell^2(\mathbb{Z})$的有界延拓的算子范数。

对于每一个 $T \in \mathbb{B}\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big)$ 以及 $j, k \in \mathbb{Z}$，我们现在指出

$$-i \cdot \delta_1(j,k) T_{jk} = (j-k) T_{jk} = \langle Ne_j, Te_k \rangle - \langle e_j, TNe_k \rangle.$$

应用 [Chr16，定理3.8]再一次，因此我们得到：连续函数 $f : S^1 \to \mathbb{C}$ 是1-利普希茨函数，当且仅当 $f$ 是关于 $N$的利普希茨算子。在这种情况下， $-i \cdot \mathrm{d}_1(f)$ 与交换子的有界扩张一致 $[N, f] : \mathrm{Dom}(N) \to \ell^2(\mathbb{Z})$。

这就证明了该命题的结论。 □

## 5. $q$-积分

我们提醒读者， $q \in (0, 1]$ 是一个固定的数。我们现在的目标是为配备哈尔测度的单位圆 $S^1$ 上的连续函数构造经典黎曼积分的 $q$-类似物。用我们的语言来说，这意味着我们要寻找 $q$-导数$\mathrm{d}_q : \mathcal{O}(S^1) \to \mathcal{X}_q$ 的逆，直至相差常函数的加法。与第4节中所进行的研究相一致，我们自然要考虑一个更为一般的问题，即我们能否找到扩张的 $q$-导数$\mathrm{d}_q$ 的逆，直至相差$\mathrm{d}_q$的核中元素的加法。本节的内容依赖于 [KaKy25第5.4节和5.5] 中得到的结果，其中在不同的背景下借助舒尔乘子构造了 $q$-积分。这意味着我们的 $q$-积分的性质源自关于舒尔乘子的格罗滕迪克定理，参见例如 [Pis01，定理5.1]以及 [Pau02，推论8.8]。

我们首先计算扩展的 $q$-导数 $\mathrm{d}_q : \mathrm{Lip}_q\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big) \to \mathbb{B}\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big)$ 的核。

**引理5.1.** 成立的是 $\ker(\mathrm{d}_q) = \ell^\infty(\mathbb{Z})$。

证明。 只需注意到 $\delta_q(j,k) = 0$ 当且仅当 $j = k$，即可立即得出。 □

我们的 $q$-积分将是与函数 $\psi_q\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ 相关联的舒尔乘子，其定义为

$$\psi_q(j,k) := \begin{cases} -i\cdot\frac{1}{[j-k]_q} & \text{for} \quad j\neq k \\ 0 & \text{for} \quad j=k \end{cases}.$$

对 [KaKy25 引理 5.4 的证明稍作修改，3]即可得到以下关键结果。值得注意的是，$[n]_q \geqslant n$ 对所有 $n\in\mathbb{N}_0$ （参见 [KaKy25 引理 5.4 的证明2]）。

**引理 5.2**。 舒尔乘子 $\mathbb{M}(\psi_q)$ 是有界的，并且我们对相应的完全有界范数有如下估计 $\big\|\mathbb{M}(\psi_q)\big\|_{cb}\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

我们采用便于表达的记号 $\int_q := \mathbb{M}(\psi_q)$，并将 $\int_q\colon \mathbb{B}\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big)\to\mathbb{B}\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big)$ 称为 $q$-积分。

为了理解 $q$-导数与 $q$-积分之间的关系，我们引入条件期望 $E\colon \mathbb{B}\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big)\to\mathbb{B}\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big)$，其定义如下

$$E\big((T_{jk})_{j,k\in\mathbb{Z}}\big) := (T_{jk}\delta_{jk})_{j,k\in\mathbb{Z}}$$

并记录 $E$ 的像与 $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ 一致。注意， $E$ 是与克罗内克 $\delta$ 函数 $\delta\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ 相关联的有界Schur乘子。

**命题 5.3.** 我们有以下恒等式

$$T-\int_q \mathrm{d}_q(T) = E(T) \quad \textit{and} \quad S-\mathrm{d}_q\int_q S = E(S)$$

对所有 $T\in\mathrm{Lip}_q\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big)$ 和 $S\in\mathbb{B}\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big)$ 均成立。特别地，$\int_q$ 的像包含于 $\mathrm{d}_q$ 的定义域中。

证明。 这可由以下恒等式

$$1-\psi_q(j,k)\cdot\delta_q(j,k)=\delta_{jk}\qquad j,k\in\mathbb{Z}$$

以及舒尔乘子的基本性质推出。 □

**推论 5.4.** $q$-导数 $\mathrm{d}_q:\mathrm{Lip}_q\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big)\to\mathbb{B}\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big)$ 的像与 $\ker(E)$ 一致，而 $q$-积分 $\int_q:\mathbb{B}\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big)\to\mathbb{B}\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big)$ 的像与交集 $\mathrm{Lip}_q\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big)\cap\ker(E)$ 一致。

**命题 5.5.** 我们有如下估计

$$\|T-E(T)\|_\infty\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{3}}\cdot\|\mathrm{d}_q(T)\|_\infty\qquad \textit{for all } T\in\mathrm{Lip}_q\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big).$$

证明. 令 $T$ 为一个 $q$-利普希茨算子。应用引理5.2 和命题 5.3 可得

$$\|T-E(T)\|_\infty=\|\int_q \mathrm{d}_q(T)\|_\infty\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{3}}\cdot\|\mathrm{d}_q(T)\|_\infty.$$ □

我们通过将部分结果具体化为关于单位圆的陈述来结束本节。

首先，注意到 $q$-积分限制为一个有界算子 $\int_q\colon C(S^1)\to C(S^1)$，满足 $\int_q z^n=-i\cdot\frac{1}{[n]_q}\cdot z^n$ 对 $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ 和 $\int_q 1=0$成立。此外，还有 $E(U^n)=0$ 对 $n\neq 0$ 成立，而 $E(1)=1$。因此，令 $h\colon C(S^1)\to\mathbb{C}$表示与单位圆相关联的 Haar 态（使得 $h$由积分给出

关于归一化弧长测度），我们得到 $E(f) = h(f) \cdot 1$对所有 $f \in C(S^1)$ 都成立。

**命题 5.6.** $q$-导数的核 $\mathrm{d}_q : \mathrm{Lip}_q(S^1) \to \mathbb{B}\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big)$ 与常函数一致，并且对每个 $f \in \mathrm{Lip}_q(S^1)$ 我们有恒等式

$$f - \int_q \mathrm{d}_q(f) = h(f) \cdot 1$$

以及估计 $\|f - h(f)\cdot 1\|_\infty \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot \|\mathrm{d}_q(f)\|_\infty$。

## 6. Quantum metrics derived from the $q$-derivative

我们应用扩展的 $q$-导数（来自第 4节）来构造半范数 $L_q$，该半范数定义在 $q$-利普希茨算子的算子系统上，定义为

$$L_q(T) := \big\|\mathrm{d}_q(T)\big\|_\infty \qquad \text{for all } T \in \mathrm{Lip}_q\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big).$$

在本节中，我们研究对 $\big(\mathrm{Lip}_q\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big), L_q\big)$ 的性质，依据 Rieffel 的紧量子度量空间理论，参见 [Rie98，Rie99]。

本节的主要结果是，半范数 $L_q$ 赋予 $q$-利普希茨函数 $\mathrm{Lip}_q(S^1)$ 紧量子度量空间的结构。

### 6.1. 关于紧量子度量空间的一些背景。

我们回顾 Kerr 在 [Ker03] 中提出的紧量子度量空间的算子系统方法。以下 滑移范数 概念起着关键作用：

**定义 6.1.** 设 $\mathcal{X}$ 为一个算子系统。若半范数 $L : \mathcal{X} \to [0,\infty)$ 满足以下条件，则称其为滑移范数：

- $L(x) = L(x^*)$ for all $x \in \mathcal{X}$ and $L(1) = 0$.

回想一下，我们的（具体）算子系统 $\mathcal{X}$ 包含在一个含幺 $C^*$-代数 $A$中。我们用记号 $X \subseteq A$ 表示通过对 $\mathcal{X} \subseteq A$取范数闭包而得到的完备算子系统。

成为紧量子度量空间，刻画了滑移范数$L$：$\mathcal{X} \to [0,\infty)$与 $\mathcal{X}$的态空间 之间的相互作用，我们将其记为 $S(\mathcal{X})$。态空间 $S(\mathcal{X})$由 $\mathcal{X}$上的保单位正线性泛函构成。注意，限制映射诱导出一个同胚 $S(X) \cong S(\mathcal{X})$。

**定义 6.2。** 设 $L : \mathcal{X} \to [0,\infty)$ 是一个滑移范数。与 $L$ 相关联的 *Monge-Kantorovich* 度量$\rho_L$：$S(\mathcal{X}) \times S(\mathcal{X}) \to [0,\infty]$ 定义如下：

$$\rho_L(\varphi,\psi) = \sup\big\{|\varphi(x) - \psi(x)| \mid L(x) \leq 1\big\}.$$

除了 Monge-Kantorovich 度量可能取值为 $\infty$ 这一点外，它满足度量的公理。因此，我们在 $S(\mathcal{X})$ 上取所有开球（相对于 $\rho_L$）作为基，从而得到一个拓扑。

**定义 6.3。** 若算子系统 $\mathcal{X}$ 配备滑移范数 $L$，则称其为紧量子度量空间，当且仅当由 $\rho_L$ 诱导的度量拓扑与 $S(\mathcal{X})$ 上的弱 -$*$ 拓扑一致。此时，我们也称 $(\mathcal{X}, L)$ 是 $X$ 上的量子度量。

若对 $(\mathcal{X}, L)$ 是紧量子度量空间，则由于 $S(\mathcal{X})$ 的弱-$*$ 紧性与凸性， $\rho_L$ 是有限的。因此，在这种情形下， $\rho_L$ 是通常意义下的度量。

我们现在定义何谓具有有限直径。为此，令 $[\cdot]\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}/\mathbb{C}$ 表示商映射，并赋予商空间 $\mathcal{X}/\mathbb{C}$ 商范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{X}/\mathbb{C}}$。

**定义 6.4**。设 $L\colon \mathcal{X} \to [0,\infty)$ 是一个滑移范数。我们称对 $(\mathcal{X}, L)$ 具有有限直径，若存在一个 $r > 0$ 使得

$$\big\|[x]\big\|_{\mathcal{X}/\mathbb{C}} \leq r \cdot L(x) \qquad \text{for all } x \in \mathcal{X}.$$

我们澄清，对 $(\mathcal{X}, L)$ 而言，按照定义6.4 的意义具有有限直径，当且仅当其态空间相对于 Monge-Kantorovich 度量具有有限直径 $\rho_L$，参见 [Rie98，命题 1。6]. 在这种情况下，我们用 $\mathrm{diam}(\mathcal{X}, L)$ 表示度量空间 $\big(S(\mathcal{X})\ \rho_L\big)$的直径。此外，若$(\mathcal{X}, L)$ 具有有限直径，则显然 $L$ 的核与标量一致$\mathbb{C}$。

对我们而言，采用 [Kaa24定理 3 中给出的、通过有限维逼近刻画紧量子度量空间的方法1]很方便。因此，我们回顾一下其具体做法。

**定义 6.5**。设 $L : \mathcal{X} \to [0,\infty)$ 为一个滑移范数。进一步设 $\varepsilon$，$C > 0$ 为常数，并设 $\mathcal{Y}$ 为一个算子系统。若一对 $(\iota,\ \Phi)$ 由含幺有界算子 $\iota$，$\Phi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 构成，则称其为 $(\varepsilon,\ C)$ 对 $(\mathcal{X},\ L)$ 的逼近，如果满足以下条件：

(1) 对所有 $x \in \mathcal{X}$，$\frac{1}{C}\|x\|_\infty \leq \|\iota(x)\|_\infty$；(2) $\Phi($
$\mathcal{X})$ 是有限维的；(3) 对所有 $x \in \mathcal{X}$，$\|\iota(x) - \Phi$
$(x)\|_\infty \leq \varepsilon \cdot L(x)$。

注意到，(1) 意味着含幺有界算子 $\iota : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 诱导出一个到其像上的线性有界同构，并且相应的逆映射也是有界的（算子范数小于或等于 $C$）。

**定理 6.6**。设 $L : \mathcal{X} \to [0,\infty)$ 为一个滑移范数。以下条件等价。

*(1)*（$\mathcal{X}$、$L$）是一个紧量子度量空间；*(2)*（$\mathcal{X}$、$L$）具有有限直径，并且存在常数 $C > 0$，使得对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个（$\varepsilon$、$C$）对（$\mathcal{X}$、$L$）的逼近。

我们强调，如果（$\mathcal{X}$，$L$）是一个紧量子度量空间，且 $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}$是一个算子子系统，那么数对（$\mathcal{Z}$，$L$）也自动成为一个紧量子度量空间。例如，这可由定理 6.6或 [Rie98中的定理 1 得出。8]。

6.2. **圆上的量子度量**。令 $q \in (0,1]$，并考虑半范数$L_q$ : $\mathrm{Lip}_q(S^1) \to [0,\infty)$，这是我们在本节开头定义的。显然，$L_q$ 是一个滑移范数。我们现在将证明数对（$\mathrm{Lip}_q(S^1)$ $L_q$）是 $C(S^1)$ 上的量子度量。首先，我们在第$q$5 节关于-积分的结果，使我们能够验证有限直径条件。

**命题 6.7.** 数对 $(\mathrm{Lip}_q(S^1)\ L_q)$ 具有有限直径。事实上，有

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}_q(S^1)/\mathbb{C}} \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot L_q(f) \qquad \textit{for all } f \in \mathrm{Lip}_q(S^1)$$

因此我们得到估计 直径$\big((\mathrm{Lip}_q(S^1)\ L_q)\big) \leqslant \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$。

证明。这可由命题 5.6以及 [Rie98，命题 16]。□

值得指出，命题 5.5 的结果实际上给出了以下关于 $q$-利普希茨算子的估计，而非关于 $q$- 利普希茨函数的估计：

$$\|T\|_{\mathrm{Lip}_q(\ell^2(\mathbb{Z}))/\ell^\infty(\mathbb{Z})} \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot L_q(T) \qquad \text{for all } T \in \mathrm{Lip}_q\left(\ell^2(\mathbb{Z})\right).$$

为了按照定义 6.5，$q$（$S^1$） $L_q$构造这一对的有限维逼近，我们引入另一个舒尔乘子。

令 $M \in \mathbb{N}_0$，并定义 $\gamma_M\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ 如下：

$$\gamma_M(j,k) := \begin{cases} \frac{M+1-|j-k|}{M+1} & \text{for} \quad |j-k| \leq M \\ 0 & \text{for} \quad |j-k| > M \end{cases}.$$

以下引理见 [KaKy25，引理 5.4。4]。

**引理 6.8。** 舒尔乘子 $\mathbb{M}$（$\gamma_M$）是有界的，并且相应的完全有界范数满足估计$\left\|\mathbb{M}\right.$（$\gamma_M$）$\left\|_{cb} \leq 1\right.$。

注意到，对于所有 $j \in \mathbb{Z}$， $\mathbb{M}(\gamma_M)$ 是含幺的，因为 $\gamma_M(j,\ j) = 1$。在下一个引理中，我们将计算 $\mathbb{M}(\gamma_M)$ 的像。

**引理 6.9。** 有界*Schur*乘子 $\mathbb{M}(\gamma_M)$ 是关于 $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ 的双线性映射，且其像为

$$\mathbb{M}(\gamma_M)\big(\mathbb{B}(\ell^2(\mathbb{Z}))\big) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\big\{U^n f \mid |n| \leqslant M\ ,\ f \in \ell^\infty(\mathbb{Z})\big\}. \tag{6.1}$$

特别地， $\mathbb{M}(\gamma_M)$ 的像作为右模（也作为左模）同构于自由模 $\ell^\infty(\mathbb{Z})^{\oplus(2M+1)}$。

证明。 $\mathbb{M}(\gamma_M)$ 的双线性由 $\mathbb{M}(\gamma_M)$ 是舒尔乘子这一事实推出，参见定义 4.1 后的讨论。对于 $n \in \mathbb{Z}$，注意，对于 $|n| > M$，有 $\mathbb{M}(\gamma_M)(U^n) = 0$；对于 $|n| \leqslant M$，有 $\mathbb{M}(\gamma_M)(U^n) = \frac{M+1-|n|}{M+1} \cdot U^n$。这些观察推出了等式 (6.1)。自由模与 $\mathbb{M}(\gamma_M)$ 的像之间的同构由右模映射 $\{f_n\}_{n=-M}^M \mapsto \sum_{n=-M}^M U^n f_n$ 给出。对于 $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ 上的左模情形，相应的同构则由 $\{f_n\}_{n=-M}^M \mapsto \sum_{n=-M}^M f_n U^n$ 给出。□

引理 6.9 中的论证也使我们能够计算 $\mathbb{M}(\gamma_M)$ 在 $C(S^1)$上的限制的像：

**引理 6.10。** 我们有如下恒等式

$$\mathbb{M}(\gamma_M)\big(C(S^1)\big) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\big\{U^n \mid |n| \leqslant M\big\}. \tag{6.2}$$

特别地，像 $\mathbb{M}(\gamma_M)\big(C(S^1)\big)$ 是 $\mathcal{O}(S^1)$的有限维子空间。

引入严格正数

$$\varepsilon_M := \sqrt{2} \cdot \Big(\frac{M}{(M+1)^2} + \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

并记录 $\lim_{M\to\infty} \varepsilon_M = 0$。

以下命题是对 [KaKy25，命题 5.5 的修改。3]。与 [KaKy25，命题 5.5 相比，3] 我们一贯使用 $q$整数，而非 $q$半整数，因此我们的估计略为简单。提醒读者，对于所有 $|[n]_q| \geqslant |n|$， $n \in \mathbb{Z}$。

**命题 6.11.** 设 $T \in \mathrm{Lip}_q\left(\ell^2(\mathbb{Z})\right)$。则有

$$\left\|T - \mathbb{M}(\gamma_M)(T)\right\|_\infty \leq \varepsilon_M \cdot L_q(T) \qquad \text{for all } M \in \mathbb{N}_0 \text{ and } q \in (0,1].$$

现在我们可以证明本文的第一个主要定理了。

**定理 6.12.** 设 $q \in (0,1]$。则二元组 $(\mathrm{Lip}_q(S^1)\ L_q)$ 是$C(S^1)$上的量子度量。

证明。 我们旨在利用定理 6.6证明该定理的结论。具体而言，我们使用蕴含关系 (2) $\Rightarrow$ (1)。根据命题 6.7，我们知道二元组$(\mathrm{Lip}_q(S^1)\ L_q)$ 具有有限直径。我们证明，对于所有 $\varepsilon > 0$，都存在一个（，1)- 逼近 $(\mathrm{Lip}_q(S^1)\ L_q)$。

设 $\varepsilon > 0$ 给定。令恒等映射 $1\colon \mathrm{Lip}_q(S^1) \to \mathrm{Lip}_q(S^1)$ 作为我们的$\iota$ （定义 6.5）。显然，该映射满足定义中的条件 (1)，因为恒等映射是等距映射。

由于 $\lim_{M\to\infty} \varepsilon_M = 0$，我们可以选取 $M_0 \in \mathbb{N}_0$ 使得 $\varepsilon_M < \varepsilon$ 对所有 $M \geq M_0$。我们取有界Schur乘子 $\mathbb{M}(\gamma_{M_0})$ 作为与定理 $\Phi$ 对应的6.5。根据命题 6.11，这样的 $\iota$ 和 $\Phi$ 满足定义(3) 中的条件6.5。剩下的条件 (2) 由引理6.10立即得出。 □

6.3. 圆上某些度量的不存在性。本节的最终目标是证明，对于 $q \in (0,1)$，定理 6.12 中得到的 $C(S^1)$ 上的量子度量（$\mathrm{Lip}_q(S^1)\ L_q$）并非来自圆上的某个度量 $S^1$。为了说明这句话的含义，我们考虑一般情形： $M$ 是一个配备度量 $\rho$ 的紧致度量空间。我们用 $C(M)$ 表示 $M$ 上连续复值函数构成的含幺 $C^*$-代数，并赋予其上确界范数$\|\cdot\|_\infty$。 $M$ 上由利普希茨函数构成的范数稠密含幺 $*$-子代数记为 $\mathrm{Lip}_\rho(M) \subseteq C(M)$，并在 $\mathrm{Lip}_\rho(M)$ 上赋予半范数 $L_\rho$，该半范数将利普希茨常数赋给利普希茨函数 $f\colon M \to \mathbb{C}$。紧量子度量空间的典型例子是由这一对构成的：$\left(\mathrm{Lip}_\rho(M)\ L_\rho\right)$；在此情形下，以下莱布尼茨不等式成立：

$$L_\rho(fg) \leq \|f\|_\infty L_\rho(g) + L_\rho(f)\|g\|_\infty \qquad \text{for all } f,g \in \mathrm{Lip}_\rho(M).$$

**定义 6.13.** 设 $(\mathcal{X}, L)$ 是 $C(M)$ 上的一个量子度量。如果 $\mathcal{X}$ 是 $\mathrm{Lip}_\rho(M)$ 的一个算子子系统，且对所有 $f \in \mathcal{X}$， $L(f) = L_\rho(f)$，我们就说 $(\mathcal{X}, L)$来自度量 $\rho$。

现在，我们可以将命题 4.5以及定理 6.12的部分内容重新表述如下：

**命题 6.14.** 数对 $(\mathrm{Lip}_1(S^1)\ L_1)$ 是 $C(S^1)$ 上的一个量子度量，并且该量子度量来自 $S^1$ 上的标准弧长度量。此外，$\mathrm{Lip}_1(S^1)$ 与弧长度量所对应的利普希茨函数一致。

对于 $q \neq 1$，情况则有所不同，下一条引理将对此作出说明。

**引理 6.15**。 设 $q \in (0,1)$。不可能找到一个常数 $C > 0$ 使得

$$L_q(fg) \leqslant C \cdot \big(L_q(f)\|g\|_\infty + \|f\|_\infty L_q(g)\big) \qquad \textit{for all } f, g \in \mathcal{O}(S^1). \tag{6.3}$$

证明。 反设（6.3）对某个 $C > 0$成立。特别地，我们有

$$[2n]_q = L_q(z^{2n}) \leqslant 2C \cdot L_q(z^n) = 2C \cdot [n]_q \qquad \text{for all } n \in \mathbb{N}.$$

由此可得

$$q^{-n} - q^{3n} = q^n(q^{-1} - q) \cdot [2n]_q \leqslant 2C \cdot q^n(q^{-1} - q)[n]_q = 2C \cdot (1 - q^{2n}) \qquad \text{对所有 } n \in \mathbb{N}.$$

但这会导致矛盾，因为左侧趋于无穷大，而右侧在 $n$ 趋于无穷大时收敛到 $2C$。□

引理 6.15 与利普希茨函数满足莱布尼茨不等式这一事实相结合，得出了关于度量不存在性的结论。

**命题 6.16**。 设 $q \in (0,1)$。若 $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Lip}_q(S^1)$ 是一个算子子系统，且$\mathcal{O}(S^1) \subseteq \mathcal{X}$，则 $C(S^1)$ 上的量子度量 $(\mathcal{X}, L_q)$ 并非来自 $S^1$上的某个度量。

## 7. 扭曲的连续性

定理 6.12 的结果表明，对于每个 $q \in (0, 1]$，我们都可以赋予紧量子度量空间 $(\mathrm{Lip}_q(S^1)\ L_q)$。本节将证明，这种对应是连续的，也就是说，对于所有 $q_0 \in (0, 1],$，都有 $\lim_{q\to q_0} \mathrm{dist}^s\big((\mathrm{Lip}_q(S^1)\ L_q), (\mathrm{Lip}_{q_0}(S^1) L_{q_0})\big) = 0$，其中 $\mathrm{dist}^s$ 指 Kerr 完备 Gromov–Hausdorff 距离，参见 [Ker03]。为此，我们采用 Leimbach 的一项结果，参见 [Lei25，命题 5.19]，以及相关结果 [KaKy25，命题 2.2.4] 和 [vS21，定理 5]。

**定理 7.1.** 设 $(\mathcal{X}, L_\mathcal{X})$ 和 $(\mathcal{Y}, L_\mathcal{Y})$ 是紧量子度量空间，且 $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 和 $\Psi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ 是完全正且保单位映射，并且存在正实数 $\varepsilon_\mathcal{X}, \varepsilon_\mathcal{Y}, C_\Phi, C_\Psi > 0$，使得它们满足以下性质：

*(1)* $L_\mathcal{Y}(\Phi(x)) \leq C_\Phi \cdot L_\mathcal{X}(x)$ 且 $L_\mathcal{X}(\Psi(y)) \leq C_\Psi \cdot L_\mathcal{Y}(y)$ 对所有 $x \in \mathcal{X}$和 $y \in \mathcal{Y}$均成立；*(2)* $\|x - \Psi\Phi(x)\|_\mathcal{X} \leq \varepsilon_\mathcal{X} \cdot L_\mathcal{X}(x)$ 且 $\|y - \Phi\Psi(y)\|_\mathcal{Y} \leq \varepsilon_\mathcal{Y} \cdot L_\mathcal{Y}(y)$ 对所有 $x \in \mathcal{X}$和 $y \in \mathcal{Y}$均成立。

那么有

$$\mathrm{dist}^s\big((\mathcal{X}, L_\mathcal{X}), (\mathcal{Y}, L_\mathcal{Y})\big) \leq \max\Big\{\mathrm{diam}(\mathcal{X}, L_\mathcal{X}) \cdot |1 - 1/C_\Phi| + \varepsilon_\mathcal{X}/C_\Phi,\ \mathrm{diam}(\mathcal{Y}, L_\mathcal{Y}) \cdot |1 - 1/C_\Psi| + \varepsilon_\mathcal{Y}/C_\Psi\Big\}.$$

对每个 $M \in \mathbb{N}_0$，我们将谱带定义为有限维算子子系统

$$A_M := \mathrm{span}_\mathbb{C}\big\{U^n \mid n \in \{-M, -M+1, \ldots, M\}\big\} \subseteq \mathcal{O}(S^1).$$

赋予其由将 $L_q$ 限制到 $A_M$ 而得到的半范数后，我们得到一个紧量子度量空间。

根据引理 6.8 可知，Schur 乘子 $\mathbb{M}(\gamma_M)$ 有界且是幺的，并且 $\|\mathbb{M}(\gamma_M)\|_{cb} \leq 1$。因此，由 [Pau02，命题 211]可得，$\mathbb{M}(\gamma_M)$是一个单位完全正映射。此外，根据引理 6.10，有界Schur乘子 $\mathbb{M}(\gamma_M)$

诱导一个满射 $C(S^1) \to A_M$。结合这些观察以及命题6.11 和定理7.1 ，我们可以证明如下结果：

**命题 7.2.** 对于每个 $q \in (0,1]$ 以及每个 $M \in \mathbb{N}_0$，均有

$$\operatorname{dist}^s\big((\operatorname{Lip}_q(S^1), L_q), (A_M, L_q)\big) \leq \varepsilon_M \tag{7.1}$$

因此 $\operatorname{dist}^s\big((\operatorname{Lip}_q(S^1)\ L_q), (\mathcal{O}(S^1)\ L_q)\big) = 0$。

证明。令 $M \in \mathbb{N}_0$ 和 $q \in (0,1]$。将 $A_M$ 包含到 $\operatorname{Lip}_q(S^1)$ 的包含映射记为 $\iota : A_M \to \operatorname{Lip}_q(S^1)$，并令 $E_M : \operatorname{Lip}_q(S^1) \to A_M$ 表示通过限制 $\mathbb{M}(\gamma_M)$ 得到的单位完全正映射。显然，$\iota$ 是一个单位完全正映射，且满足 $L_q(\iota(f)) = L_q(f)$，对所有 $f \in A_M$ 均成立。此外，由命题 6.11 可得 $\|f - E_M\iota(f)\|_\infty \leq \varepsilon_M \cdot L_q(f)$，对所有 $f \in A_M$ 均成立；同样有 $\|T - \iota E_M(T)\|_\infty \leq \varepsilon_M \cdot L_q(T)$，对所有 $T \in \operatorname{Lip}_q(S^1)$ 均成立。

接下来注意到 $\mathbb{M}(\gamma_M)$ 和 $\mathrm{d}_q = \mathbb{M}(\delta_q)$ 都是舒尔乘子，其中 $\mathbb{M}(\gamma_M)$ 是有界的，且其像包含于 $\mathrm{d}_q$ 的定义域中，见引理 6.9。因此有

$$\mathrm{d}_q\mathbb{M}(\gamma_M)(T) = \mathbb{M}(\gamma_M)\mathrm{d}_q(T) \qquad \text{for all } T \in \operatorname{Lip}_q\big(\ell^2(\mathbb{Z})\big). \tag{7.2}$$

由 (7.2) 可知，并且由于 $E_M$ 是范数收缩，我们得到估计式 $L_q(E_M(T)) \leqslant L_q(T)$ 对所有 $T \in \operatorname{Lip}_q(S^1)$ 均成立。应用定理 7.1 即可得到不等式 (7.1)。

最后，由于对所有 $M \in \mathbb{N}_0$ 都有 $A_M \subseteq \mathcal{O}(S^1)$，且 $\lim_{M\to\infty} \varepsilon_M = 0$，我们还可以得出结论：

$$\operatorname{dist}^s\big((\operatorname{Lip}_q(S^1), L_q), (\mathcal{O}(S^1), L_q)\big) = 0. \qquad \square$$

对于每个 $q \in (0,1]$ 以及每个 $M \in \mathbb{N}_0$，由引理 4.3 的证明可知，无界Schur乘子 $\mathrm{d}_q = \mathbb{M}(\delta_q)$ 限制为有界算子 $(\mathrm{d}_q)_M : A_M \to A_M$。现在我们将看到，这些有界算子关于变形参数 $q \in (0,1]$:

**引理 7.3.** 设 $M \in \mathbb{N}_0$。对每个 $q_0 \in (0,1]$，，我们有

$$\lim_{q\to q_0} (\mathrm{d}_q)_M = (\mathrm{d}_{q_0})_M,$$

其中极限是相对于 $\mathbb{B}(A_M, A_M$ 上的算子范数计算的 ).

证明。给定 $q_0 \in (0,1]$ 与 $\varepsilon > 0$。选取一个 $\delta > 0$，使得 $\big|[n]_q - [n]_{q_0}\big| < \varepsilon/(2M+1)$ 对所有 $q \in (0,1] \cap (q_0 - \delta, q_0 + \delta)$ 以及所有 $n \in \{-M, -M+1, \ldots, M\}$ 成立。于是对每个 $q \in (0,1] \cap (q_0 - \delta, q_0 + \delta)$ 以及每个满足 $\|f\|_\infty = 1$ 的 $f = \sum_{n=-M}^{M} \alpha_n U^n \in A_M$，成立

$$\big\|\mathrm{d}_q(f) - \mathrm{d}_{q_0}(f)\big\|_\infty = \Big\| \sum_{n=-M}^{M} ([n]_q - [n]_{q_0})\alpha_n U^n \Big\|_\infty < \sum_{n=-M}^{M} \frac{\varepsilon}{2M+1}|\alpha_n| \leqslant \varepsilon. \qquad \square$$

引理7.3中的连续性结果使我们能够证明谱带关于 Kerr 完备 Gromov–Hausdorff 距离的连续性结果：

**命题 7.4.** 对于每个 $M \in \mathbb{N}_0$ 以及每个 $q_0 \in (0,1]$，，均有

$$\lim_{q\to q_0} \operatorname{dist}^s\big((A_M, L_q), (A_M, L_{q_0})\big) = 0.$$

证明。设给定 $M \in \mathbb{N}_0$ 和 $q_0 \in (0,1]$。定义函数 $\chi : (0,1] \to [0,\infty)$，令 $\chi(q) := \left\|(\mathrm{d}_q)_M - (\mathrm{d}_{q_0})_M\right\|$ 对所有 $q \in (0,1]$ 均成立。

设 $q \in (0,1]$。对于每个 $f \in A_M$，由命题 5.6 可得

$$\begin{aligned} L_q(f) &\leq \left\|(\mathrm{d}_q)_M(f) - (\mathrm{d}_{q_0})_M(f)\right\|_\infty + L_{q_0}(f) \\ &= \left\|\left((\mathrm{d}_q)_M - (\mathrm{d}_{q_0})_M\right)\left(f - h(f)\cdot 1\right)\right\|_\infty + L_{q_0}(f) \\ &\leq \chi(q)\cdot\left\|f - h(f)\cdot 1\right\|_\infty + L_{q_0}(f) \leq \left(\chi(q)\cdot\pi/\sqrt{3}+1\right)\cdot L_{q_0}(f). \end{aligned}$$

同样，我们得到，对于所有 $f \in A_M$，$L_{q_0}(f) \leq \left(\chi(q)\cdot\pi/\sqrt{3}+1\right)\cdot L_q(f)$。

由命题 6.7 可知 $\operatorname{diam}(A_M, L_q) \leq \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$，应用定理 7.1 可得

$$\operatorname{dist}^s\left((A_M, L_q), (A_M, L_{q_0})\right) \leq \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\cdot\left|1 - \frac{1}{\chi(q)\cdot\pi/\sqrt{3}+1}\right|.$$

本命题的结论现在可由引理 7.3 立即推出。□

结合命题 7.2 与命题 7.4，我们得到本文的第二个也是最后一个主要结果：

**定理 7.5.** 对每个 $q_0 \in (0,1]$，，成立

$$\lim_{q\to q_0} \operatorname{dist}^s\left((\operatorname{Lip}_q(S^1), L_q), (\operatorname{Lip}_{q_0}(S^1), L_{q_0})\right) = 0.$$

证明。设给定 $q_0 \in (0,1]$ 与 $\varepsilon > 0$。由命题 7.2，我们可以选取一个 $M \in \mathbb{N}_0$，使得 $\operatorname{dist}^s\left((A_M, L_q), (\operatorname{Lip}_q(S^1)\ L_q)\right) < \varepsilon/3$ 对所有 $q \in (0,1]$ 成立。接下来，我们可以应用命题 7.4 选取一个 $\delta > 0$，使得 $\operatorname{dist}^s\left((A_M, L_q), (A_M, L_{q_0})\right) < \varepsilon/3$ 对所有满足 $|q - q_0| < \delta$ 的 $q \in (0,1]$ 成立。完备 Gromov-Hausdorff 距离的三角不等式，[Ker03，命题 3.4]，进而推出 $\operatorname{dist}^s\left((\operatorname{Lip}_q(S^1)\ L_q), (\operatorname{Lip}_{q_0}(S^1)\ L_{q_0})\right) < \varepsilon$ 对所有满足 $|q - q_0| < \delta$ 的 $q \in (0,1]$ 成立。定理的证明至此结束。□

## 参考文献

[AKK22] K. Aguilar、J. Kaad 和 D. Kyed，《Podleś 球面收敛到球面》，《数学物理通讯》392（2022年），第3期，1029–1061。MR 4426737[BeMa20] E. J. Beggs 和 S. Majid，《量子黎曼几何》，《数学科学基础原理》丛书 [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 第355卷，施普林格，Cham，[2020]©2020。MR 4292536[ChIv06] E. Christensen 和 C. Ivan，《AF $C^*$-代数的谱三元组及康托尔集上的度量》，《算子理论杂志》56（2006年），第1期，17–46。MR 2261610[Chr16] E. Christensen，《关于弱 $D$-可微算子》，《数学展望》34（2016年），第1期，27–42。MR 3463680[Con89] A. Connes，《紧致度量空间、Fredholm 模与超有限性》，《遍历理论与动力系统》9（1989年），第2期，207–220。MR 1007407[Con94] A. Connes，《非交换几何》，学术出版社，Inc.，圣迭戈，加利福尼亚州，1994。MR 1303779[Con96] ，《引力与物质耦合及非交换几何的基础》，《数学物理通讯》182（1996年），第1期，155–176。MR 1441908[Con13] ，《流形的谱刻画》，《非交换几何杂志》7（2013年），第1期，1–82。MR 3032810[CovS21] A. Connes 和 W. D. van Suijlekom，《非交换几何中的谱截断与算子系统》，《数学物理通讯》383（2021年），第3期，2021–2067。MR 4244265

[Kaa24] J. Kaad, 《谱度量空间的外积》, Pure Appl. Funct. Anal. 9（2024年）, 第5期, 1175–1211。MR 4852585[KaKy25] J. Kaad 和 D. Kyed, 《量子SU(2)的量子度量结构》, 《欧洲数学会回忆录》, 第18卷, EMS出版社, 柏林, 2025年。MR 4867562[Ker03] D. Kerr, 《矩阵量子戈罗夫-豪斯多夫距离》, J. Funct. Anal. 205（2003年）, 第1期, 132–167。MR 2020211[KlSc97] A. Klimyk 和 K. Schmüdgen, 《量子群及其表示》, 《物理学文本与专著》, 施普林格出版社, 柏林, 1997年。MR 1492989[Lat16] F. Latrémolière, 《量子戈罗夫-豪斯多夫邻近度》, Trans. Amer. Math. Soc. 368（2016年）, 第1期, 365–411。MR 3413867[Lat22] , 《度量谱三元组的戈罗夫-豪斯多夫邻近度》, Adv. Math. 404（2022年）, A部分, 无. 108393, 56页。MR 4411527[Lei25] M. Leimbach, 《紧量子群的彼得-外尔截断收敛性》, 《非交换几何杂志》（2025年）。[LevS24] M. Leimbach 和 W. D. van Suijlekom, 《环面谱截断的戈罗夫-豪斯多夫收敛》, Adv. Math. 439（2024年）, 无. 109496, 26页。MR 4693148[Li05] H. Li, 《$\theta$-变形作为紧量子度量空间》, 《数学物理通讯》256（2005年）, 第1期, 213–238。MR 2134342[OzRi05] N. Ozawa 和 M. A. Rieffel, 《双曲群 $C^*$-代数与自由积 $C^*$-代数作为紧量子度量空间》, Canad. J. Math. 57（2005年）, 第5期, 1056–1079。MR 2164594[Pau02] V. Paulsen, 《完全有界映射与算子代数》, 《剑桥高等数学研究》第78卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2002年。MR 1976867[Pis01] G. Pisier, 《相似问题与完全有界映射》, 增订版, 《数学讲义》第1618卷, 施普林格出版社, 柏林, 2001年, 收录“The Halmos problem”的解答。MR 1818047[Rie98] M. A. Rieffel, 《由紧群作用导出的态上的度量》, Doc. Math. 3（1998年）, 215–229。MR 1647515[Rie99] , 《态空间上的度量》, Doc. Math. 4（1999年）, 559–600。MR 1727499[Rie04] , 《量子度量空间的戈罗夫-豪斯多夫距离》, 第168卷, 2004年, 附录1由李汉峰撰写, 《量子度量空间的戈罗夫-豪斯多夫距离》。矩阵代数在量子戈罗夫-豪斯多夫距离下收敛到球面, 第1–65页。MR 2055927[ToTu10] I. G. Todorov 和 L. Turowska, 《Schur 乘子与算子乘子》, 《巴拿赫代数》2009, Banach Center Publ., 第91卷, 波兰科学院数学研究所, 华沙, 2010年, 第385–410页。MR 2777487[vS21] W. D. van Suijlekom, 《谱截断下态空间的戈罗夫-豪斯多夫收敛》, J. Geom. Phys. 162（2021年）, 无. 104075, 11页。MR 4199398

丹麦南丹麦大学数学与计算机科学系, Campusvej 55, DK-5230 欧登塞 M, 丹麦