arXiv:2602.21118v1 [math.AP] 24 Feb 2026

一般开集中的 p–拉普拉斯算子低特征值

LORENZO BRASCO、LUCA BRIANI 和 FRANCESCA PRINARI

ABSTRACT. 我们研究欧几里得空间中一般开集上的约束 p–狄利克雷积分的极小极大 Lusternik–Schnirelmann 水平。我们证明，只要这些水平之一低于由“无穷远处”的 L^p 庞加莱常数给出的阈值，它实际上就定义了狄利克雷 p–拉普拉斯算子的一个特征值。我们还证明了相关特征函数在无穷远处呈指数衰减：这可视为非线性情形下的 Snol-Simon 型估计。最后，我们给出一些特殊的无界开集实例，说明我们的主结果适用于这些集合。

CONTENTS

1. 引言 1 1.1. 本质谱以下 1 1.2. p–拉普拉斯算子的特征值 3 1.3. 主结果 5 1.4. 论文结构 6 2. 预备知识 7 2.1. 记号 7 2.2. 若干庞加莱不等式 7 2.3. 加权 Sobolev 空间 11 3. 次解的指数衰减 12 4. 扰动特征值问题 20 5. 主定理的证明 27 6. 一些例子 29 6.1. 具有巨大核心的集合 29 6.2. 弯曲波导 30 6.3. 无限鞭子 30 附录 A. 技术工具 33 附录 B. 情形 $p = 2$ 34参考文献 36

1. INTRODUCTION

1.1. 本质谱之下。 我们先考虑开集 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ 上的狄利克雷拉普拉斯算子的谱。当嵌入

$$W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega), \tag{1.1}$$

Date：2026年2月25日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 35P30，47J10，49R05。
Key words and phrases. 非线性特征值问题，p–拉普拉斯算子，特征函数的衰减，本质谱，Persson 定理。

是紧的，我们知道该谱是离散的，由一个趋于无穷大的正特征值序列构成 $\{\lambda_k(\Omega)\}_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$，且每个特征值的重数都有限。关于哪些开集上的嵌入（1.1）是紧的，其特征可参见例如 [30, 第 15]章。

此外，在这种情况下，我们可以构造一组与之相关的正交归一（相对于 L^2 ）特征函数 $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \subseteq W^{1,2}_0(\Omega)$，它们构成 $L^2(\Omega)$ 的希尔伯特基。因此，我们可以如下刻画特征值

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{\varphi\in W^{1,2}_0(\Omega)} \left\{ \int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx \,:\, \int_\Omega |\varphi|^2\,dx = 1 \right\},$$

且对于 $k \geq 2$

$$\lambda_k(\Omega) = \inf_{\varphi\in W^{1,2}_0(\Omega)} \left\{ \int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx \,:\, \int_\Omega |\varphi|^2\,dx = 1,\ \int_\Omega \varphi\, u_j\,dx = 0,\ \text{for } j = 1,\dots,k-1 \right\}.$$

每个特征函数 u_k 都是相应问题的极小化子。关于这些结论，请参见例如 [15, 第 VI 章] 或 [9,第 4 章第 8]节。

我们还要指出，特征值的另一种刻画方式由著名的*Courant-Fischer* 公式给出

$$\lambda_k(\Omega) = \inf\left\{ \max_{\varphi\in K\cap\mathcal{S}_2(\Omega)} \int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx \,:\, K\subseteq W^{1,2}_0(\Omega) \text{ subspace with } \dim K = k \right\}, \tag{1.2}$$

其中

$$\mathcal{S}_2(\Omega) := \Big\{ u\in L^2(\Omega) \,:\, \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1 \Big\}.$$

然而，对于一般的开集，嵌入（1.1）可能不是紧的。在这种情形下，情况会变得更加复杂，也更引人入胜：狄利克雷拉普拉斯算子的谱不再是纯离散的（见 [7, 定理 10.1。5]），并且存在非空的本质谱，记作 $\sigma_{\text{ess}}(\Omega)$。

我们回顾一下，后者可以用奇异约束 *Palais-Smale* 序列来刻画（例如参见 [7, 定理 9.1.2] 或 [26, 定理 7.2]）。具体而言， $\lambda \in\sigma_{\text{ess}}(\Omega)$当且仅当存在一个序列 $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W^{1,2}_0(\Omega)$，使得

(1) 对每个 $n\in\mathbb{N}$， $\varphi_n \in \mathcal{S}_2($
$\Omega)$；(2) $\lim_{n\to\infty} \|\nabla\varphi_n\|^2_{L^2(\Omega)} = \lambda$；

(3) 我们有

$$\lim_{n\to\infty} \|-\Delta\varphi_n - \lambda\,\varphi_n\|_{W^{-1,2}(\Omega)} = 0;$$

(4) $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $L^2(\Omega)$中弱收敛于0。

Persson 的一个著名结果（见 [31, 定理2.1]）对 $\sigma_{\text{ess}}(\Omega)$的底部给出了一种具有“几何”色彩的刻画。更确切地说，如果我们引入庞加莱 ´“无穷远”常数

$$\mathcal{E}(\Omega) := \sup_{R>0} \lambda_1\big(\Omega\setminus\overline{B_R}\big),$$

则 Persson 定理断言

$$\inf\Big\{ \lambda > 0 \,:\, \lambda\in\sigma_{\text{ess}}(\Omega) \Big\} = \mathcal{E}(\Omega). \tag{1.3}$$

然而，即使当 $\sigma_{\text{ess}}(\Omega) \neq \emptyset$时，也可能出现某些具有有限重数的离散特征值“冒出”在本质谱之下，也就是说，可能存在一些特征值 $\lambda <$

$\mathcal{E}(\Omega)$。在这种情形下，这些特征值仍可通过上文回顾的变分原理来刻画（例如参见 [7, 定理 10.2.1 和 10.2.2]）。

我们也回顾，相应的特征函数在空间中是强局部化的，即它们在无穷远处呈指数“衰减”。换言之，它们满足如下形式的估计

$$|u(x)| \le C\, e^{-\alpha\,|x|}, \qquad \text{for } x \in \Omega, \tag{1.4}$$

对于适当的 $C, \alpha > 0$。文献中证明此类结果的最早论文之一是[35] 由 Snol 给出的，针对形如 $-\Delta + V$ 的 Schr¨odinger 算子，其中势 V 为非负。我们还希望引用 Simon 的两篇论文 [32, 33]，它们与下文给出的主要结果相关。

如今，形如（1.4）的结果是通常以 Agmon 命名的衰减估计的一个非常特殊的实例，这源于他具有影响力的工作 [1]。在其中，可以找到关于特征函数的衰减估计的系统研究，这些特征函数属于 $-\Delta + V$。自那时起，它已成为谱理论中的一个经典课题。许多作者通过证明各种推广、一般化与改进作出了贡献。在不求完备的情况下，我们提及论文 [2] 以及 [13]。关于 Agmon 估计及其应用的综述可见于 [24, 25]。

1.2. 的特征值 p–拉普拉斯算子。本文旨在将此前对狄利克雷 p–拉普拉斯算子的分析推广到

$$\text{“}\textit{eigenvalues lying beneath the essential spectrum}\text{''}.$$

这句话需要作一些说明：首先，定义在开集 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$上的狄利克雷$p$–拉普拉斯算子的特征值究竟是什么意思。从临界点理论的角度来看，这一点可以直接表述为：这些特征值可以理解为泛函的临界值

$$\varphi \mapsto \int_\Omega |\nabla \varphi|^p \, dx,$$

限制在“球面”上

$$\mathcal{S}_p(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega) \,:\, \|u\|_{L^p(\Omega)} = 1 \Big\}.$$

相应的临界点就是特征函数。因此，换言之，狄利克雷 p–拉普拉斯算子的特征值是满足以下条件的数 λ：存在 $u \in W^{1,\,p}_{0}(\Omega) \setminus \{0\}$ 弱收敛地满足

$$-\Delta_p u = \lambda\, |u|^{p-2}\, u, \qquad \text{in } \Omega,$$

即

$$\int_\Omega \langle |\nabla u|^{p-2}\, \nabla u, \nabla \varphi \rangle \, dx = \lambda \int_\Omega |u|^{p-2}\, u\, \varphi, \qquad \text{for every } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

注意，受约束的狄利克雷积分的全局下确界

$$\lambda_{1,p}(\Omega) := \inf_{\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)} \left\{ \int_\Omega |\nabla \varphi|^p \, dx \,:\, \int_\Omega |\varphi|^p \, dx = 1 \right\},$$

对应于第一特征值或基态能量。

另一方面，在此背景下所说的本质谱究竟意指什么，并不十分明确。不过，回顾线性情形的 Persson结果（1.3），或许可以大胆猜想，无穷远处的 L^p 庞加莱 ´常数

$$\mathcal{E}_p(\Omega) := \sup_{R>0} \lambda_{1,p}\big(\Omega \setminus \overline{B_R}\big),$$

在这一非线性背景下，可能可以作为本质谱下确界的有效替代量。于是，我们提出以下问题：能否在阈值$p-$以下产生狄利克雷 $\mathcal{E}_p$拉普拉斯算子（Ω）的特征值？相应的特征函数是否满足类似于（1.4）的衰减估计？为尝试回答这些问题，我们将对开集 Ω 仅作极为宽松的假设。

先来看较简单的情形 $\mathcal{E}_p(\Omega) = +\infty$：在这种情形下，我们有嵌入

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \tag{1.5}$$

是紧的，譬如参见引理 2.4 。在这种情况下，众所周知，我们可以通过适当地仿照极小极大 Courant-Fischer 过程，构造出一个发散的正特征值序列。文献中对此情形有大量研究，这里仅列举几篇经典参考文献 [22, 28, 37], 讲义 [29] 和博士论文 [21], ，其中可以找到更多参考文献。

我们简要地 回顾这一特征值序列的构造：对于每个 $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$，我们定义

$$\mathcal{W}_{k,p}(\Omega) = \Big\{ K \subseteq \mathcal{S}_p(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \,:\, K \text{ symmetric and compact, } \gamma(K; W_0^{1,p}(\Omega)) \geq k \Big\}.$$

这里 $\gamma(K;\ W^{1,\ p}_{\ 0}(\Omega))$ 表示 *Krasnosel'skiĭ* 属 在 K的范数拓扑下的 $W^{1,\ p}_{\ 0}(\Omega)$，定义见下文的（2.1）。有了这类紧集，我们便可如下定义 $k-$阶极小极大 ***Ljusternik-Schnirelmann*** 值：

$$\lambda^{\mathrm{LS}}_{k,p}(\Omega) := \inf_{K \in \mathcal{W}_{k,p}(\Omega)} \max_{\varphi \in K} \int_\Omega |\nabla \varphi|^p \, dx, \qquad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \tag{1.6}$$

并证明，当嵌入（1.5）是紧的时，这确实定义了一个特征值。注意，对于 $k = 1$，前面的定义归结为 $\lambda_{1,\ p}(\Omega)$，也就是说，它确实给出了第一个特征值。因此，在下文中，对于 $k = 1$ 情形，我们将省略上标“LS”。此外，还可以证明，对于 $k = 2$，在连通开集上有

$$\lambda^{\mathrm{LS}}_{2,p}(\Omega) = \min \Big\{ \lambda > \lambda_{1,p}(\Omega) \,:\, \lambda \text{ is an eigenvalue} \Big\},$$

例如，参见 [27,定理 3。4]。

注 1.1。为了理解这些关于 $k = 1$和 $k = 2$看似迂腐的说明，读者应牢记，关于 $\{\lambda^{\mathrm{LS}}_{k,p}(\Omega)\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$是否穷尽整个谱，目前仍是一个重大未解问题，至少在（1.5）是紧的情形下是如此。我们还要指出，可以用另一种指标 i来定义前述极小极大水平，以取代 Krasnosel'skiĭ 属：例如，可以使用 $\mathbb{Z}_2-$上同调指标 [20] 或*Ljusternik-Schnirelman* 范畴 [36, 章 2]。

接下来考虑 $\mathcal{E}_p(\Omega) < +\infty$：此处嵌入（1.5）不是紧的，参见下文的引理2.4 。尽管如此，仍可以定义极小极大值（1.6），并且有理由认为，只要

$$\lambda^{\mathrm{LS}}_{k,p}(\Omega) < \mathcal{E}_p(\Omega),$$

我们仍然有一个特征值，类似于线性情形中的情况.....

1.3. **主要结果**。我们将证明这一点确实如此。此外，我们还将为相关特征函数得到一个 ˇSnol–Simon 型衰减估计（术语参见备注1.2）。具体而言，我们证明如下结论

主定理。设 $1 < p < \infty$，且设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ 为一个开集。假设存在$k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 使得

$$\lambda^{\mathrm{LS}}_{k,p}(\Omega) < \mathcal{E}_p(\Omega). \tag{1.7}$$

那么，对每个 $\ell \in \{1, \dots, k\}$，极小极大值 $\lambda^{\mathrm{LS}}_{\ell,p}(\Omega)$ 都是 Ω 上狄利克雷 p–拉普拉斯算子的特征值。

此外，我们有：

- 若 $\mathcal{E}_p(\Omega) < +\infty$，则对每个 $\ell \in \{1, \dots, k\}$，存在两个常数 $C_\ell = C_\ell(N, p, \Omega) > 0$ 和 $\alpha_\ell = \alpha_\ell(p, \Omega) > 0$，使得对每个与 $\lambda^{\mathrm{LS}}_{\ell,p}(\Omega)$相关联的特征函数 $u_\ell \in W^{1,p}_0(\Omega)$，都有

$$|u_\ell(x)| \le C_\ell \|u_\ell\|_{L^p(\Omega)} e^{-\alpha_\ell |x|}, \qquad \textit{for every } x \in \Omega;$$

- 若 $\mathcal{E}_p(\Omega) = +\infty$，则对每个 $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 及每个 $\alpha > 0$，存在一个常数 $C_\ell = C_\ell(N, p, \Omega, \alpha) > 0$ 使得

$$|u_\ell(x)| \le C_\ell \|u_\ell\|_{L^p(\Omega)} e^{-\alpha |x|}, \qquad \textit{for every } x \in \Omega.$$

本小节的其余部分将专门对这一结果作一些（详细的）说明。我们从指数衰减开始。

注 1.2（衰减）。关于“紧情形” $\mathcal{E}_p(\Omega) = +\infty$，我们的衰减估计将 Simon [33, 定理 2]（上文已回顾）推广到了非线性情形。后者讨论了受非负强约束势 ¨作用下的 Schr $-\Delta + V$odinger 算子 $\mathbb{R}^N$在整个 V 上（见下文定义 2.6 ）。

在“非紧情形” $\mathcal{E}_p(\Omega) < +\infty$中，我们的估计是对先前回顾的 Snol 经典结果的一个非线性变体。特别地，我们有

$$\alpha_k \le \cdots \le \alpha_1,$$

采用上述记号。也就是说，特征值越高，指数衰减越慢。此外，当特征值趋近于谱阈值 $\mathcal{E}_p(\Omega)$ 时，这些指数会变差（即趋近于 0）：关于这一事实，参见下文命题 3.1 。这一行为与 ˇSnol 的结果完全一致。事实上，在 [35, 定理第 282], 页中，该估计针对 $-\Delta + V$的特征函数得以证明，其对应的特征值 λ低于本质谱 $\mathcal{E}_V$。同样，在 [35], 中，决定衰减的指数 α 取决于差值 $\mathcal{E}_V - \lambda$，并且当该差值趋近于 0 时，该指数也趋近于 ˇ 0。更准确地说，Snol 的指数为

$$\alpha = \log\left(1 + \frac{\mathcal{E}_V - \lambda}{K}\right),$$

其中常数 K 取决于（正）势 V。基于这些原因，下文将 ˇ主定理中的估计称为*Snol-Simon* 型衰减估计。

最后，我们想指出，我们的证明方法不同于 [33] 和[35]，并且基于非线性技术：我们先在 L^p 范数下获得指数衰减，然后利用一个“局部化于无穷远处”的 $L^\infty - L^p$ 估计，将其转化为逐点衰减估计。在 L^p 范数下的衰减是通过结合 Caccioppoli 不等式和 Poincar´e 不等式得到的，而第二个估计则是拟线性方程的 De Giorgi-Moser 正则性理论中的经典工具。

值得一提的是，一旦我们获得了特征函数的衰减估计，就可以利用方程进一步获得其梯度的一些衰减和可积性估计（见下文推论3.3 ）。

接下来，我们简要说明如何证明主定理中的存在性部分 .

注 1.3 (特征函数的存在性)。 获得特征函数的方式有多种。当然，鉴于我们前面回顾的内容，我们可以关注 $\mathcal{E}_p(\Omega) < +\infty$这一情形。在希尔伯特情形（即 $p = 2$）下，Smets 提供了一种基于集中紧性论证的纯变分方法，见 [34, 定理 4.1 和定理 4.2], ，其中讨论的是一个略有不同的特征值问题。他的方法依赖于这样一种可能性：将较高特征值刻画为下确界，且下确界可取于某个有限维向量空间的正交补上。对于 $p = 2$，这一事实成立，但对于 $p \neq 2$，则没有对应的结论。因此，这种方法能否适用于 p的完整范围尚不明确，例如参见 [34, 注 4.4 (b)]。

我们简要说明一下我们的思路。我们采用一种谱稳定性论证，即证明我们的极小极大Ljusternik-Schnirelmann值可以由具有良好紧性性质的扰动算子的特征值逼近。更具体地说，我们通过考虑一族新的问题，将原有的特征值问题“紧化”；这族问题中的每一个问题都是通过添加一个强约束势 V_n得到的。对于这族问题，我们可以通过上文回顾的常规极小极大方法，证明存在无穷多个“扰动”特征值。此外，如果 n 趋于 ∞时， V_n 以适当的意义趋于0，我们可以证明这些特征值收敛到原有的极小极大Ljusternik-Schnirelmann值。接下来，为了证明那些低于 $\mathcal{E}_p(\Omega)$的值实际上定义了一个特征值，我们力求推导出“扰动”特征函数在 L^p 中强收敛。这里，我们关键地利用了这样一个事实：每当这些“扰动”特征函数所对应的“扰动”特征值收敛到一个$\lambda_k^{\mathrm{LS}}{}_{,p}(\Omega) < \mathcal{E}_p(\Omega)$时，它们都满足一致的Snol-Simon衰减估计。由此得到的一致衰减又意味着 L^p 等度胎紧性，因此可以应用经典的Riesz-Fr´echet-Kolmogorov紧性判别准则。简言之，我们通过正则性获得紧性。

用变分法的语言来说，这本质上是一个伪装起来的 Γ–收敛型论证，但用于全局极小值以外的高阶临界点（关于 Γ–收敛的一般理论，参见 [8, 16] ）。在此过程中，我们关键性地借鉴了Champion和De Pascale论文[14] 中的一些思想。

1.4. **论文结构**。 本文首先介绍第 2 节中的一些预备材料。ˇ 第 3 节的主要内容是命题 3.1 中的Snol-Simon型估计，该估计对特征值方程的非负次解 更一般地成立。因此，我们还得到了这些次解的梯度的一些衰减性和可积性。第4 节致力于讨论上述“扰动的”特征值问题，即通过加入一个强约束势得到的问题。在这里，技术性引理 4.1 可能具有某种独立的意义。主定理的证明包含在第5节中，而在第 6 节中，我们给出了一些适用于本结果的无界开集的例子。本文最后附有两个附录：特别地，在附录 B 中，我们证明对于 $p = 2$，低于本质谱的极小极大Ljusternik-Schnirelmann值与由Courant-Fischer 公式给出的特征值相一致。

致谢。我们感谢 Bernard Helffer 就阿格蒙型估计与我们进行了一些讨论，并提供了他的论文副本 [24, 25]。我们也感谢 Giovanni Franzina 就非线性特征值问题与我们进行了一些讨论，并仔细审阅了本文的初稿。

L.Briani 和 F. Prinari 均为国家数学分析、概率论`及其应用研究组（GNAMPA）成员，该研究组隶属国家高等数学研究所（INdAM）。他们衷心感谢 GNAMPA 2026 项目“各向异性和非局部背景下的形状优化问题”（CUP E53C25002010001）提供的资金支持。

L. Brasco 获得了费拉拉大学的大学研究基金 FAR 2024 和院系研究激励基金 FIRD 2025 的资助。L. Briani 的研究获得了德国研究联合会通过埃米·诺特计划提供的资助（项目编号 509436910）。

2. 预备知识

2.1. 记号。 我们始终用 $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 表示环境空间的维数。对于$x_0 \in \mathbb{R}^N$ 和 $R > 0$，我们定义

$$B_R(x_0) = \Big\{ x \in \mathbb{R}^N \,:\, |x - x_0| < R \Big\}.$$

记号 B_R 表示前述集合，特别是在 x_0 等于原点的情形下。

我们回顾*Krasnosel'skiĭ*属的定义。对于巴拿赫空间 X中的任意对称闭子集 A，其定义为

$$\gamma(A; X) = \inf \left\{ k \in \mathbb{N} \,:\, \exists \text{ a continuous odd map } f : A \to \mathbb{S}^{k-1} \right\}, \tag{2.1}$$

约定 $\gamma(A;\, X) = +\infty$，若不存在这样的整数 k，并约定 $\gamma(\emptyset; X) = 0$。关于属的更多细节，请参阅 [36, 第二章，第 5] 节。

对于开集 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ 和指数 $1 < p < \infty$，我们用 $W^{1,p}(\Omega)$ 表示标准索伯列夫空间

$$W^{1,p}(\Omega) = \Big\{ \varphi \in L^p(\Omega) \,:\, \nabla \varphi \in L^p(\Omega) \Big\},$$

赋予范数

$$\|\varphi\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \Big(\|\varphi\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla \varphi\|^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{p}}, \qquad \text{for every } \varphi \in W^{1,p}(\Omega).$$

我们用 $W^{1,p}_0(\Omega)$ 表示 $C^\infty_0(\Omega)$ 在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中的闭包。对于 $1 < p < N$，记 p^* 为索伯列夫指数，其定义为

$$p^* = \frac{N\, p}{N - p}.$$

**2.2. 一些庞加莱`不等式。** 我们先介绍下面这个简单的庞加莱`型不等式。这个结果众所周知，但由于情形 $p \geq N$ 在文献中常常有些被忽视，我们还是倾向于给出详细证明。熟悉这一主题的读者当然可以略过。

引理 2.1. 设 $1 < p < \infty$，且 $E \subseteq \mathbb{R}^N$ 为有限测度的可测集。那么，对于每个 $\varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^N)$ 以及每个 $\varepsilon > 0$，我们有：

- *if* $1 < p < N$

$$\int_E |\varphi|^p \, dx \leq C\, |E|^{\frac{p}{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^p \, dx;$$

- *if* $p = N$

$$\int_E |\varphi|^N \, dx \leq \frac{C}{\varepsilon}\, |E| \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^N \, dx + C\, \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^N \, dx;$$

- 若 $p > N$

$$\int_E |\varphi|^p \, dx \le \frac{C}{\varepsilon^{\frac{p-N}{N}}} \, |E|^{\frac{p}{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^p + C \, \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p \, dx,$$

对于常数 $C = C(N, p) > 0$。

证明。 我们首先注意到，对于每个 $p < q \le \infty$，由 Hölder 不等式可得[1]

$$\int_E |\varphi|^p \, dx \le |E|^{1-\frac{p}{q}} \, \|\varphi\|^p_{L^q(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.2}$$

现在我们通过区分以下三种情形来继续讨论： $1 < p < N$、 $p = N$ 和 $p > N$。

情形 $1 < p < N$。我们在前一个不等式中取 $q = p^*$。于是，由索博列夫不等式可得

$$\int_E |\varphi|^p \, dx \le |E|^{1-\frac{p}{p^*}} \, \frac{1}{T_{N,p}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^p \, dx,$$

由此我们可以得出结论。

情形 $p = N$。由拉迪任斯卡娅不等式（例如参见 [9, 定理 3.6。4]），可得

$$\|\varphi\|^N_{L^{2N}(\mathbb{R}^N)} \le \mathcal{L}_N \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^N \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^N \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

因此，由 2.2 式取 $q = 2\,N$，可得

$$\int_E |\varphi|^N \, dx \le |E|^{\frac{1}{2}} \, \mathcal{L}_N \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^N \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^N \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

利用杨氏不等式，对于每个 $\varepsilon > 0$，可得

$$\int_E |\varphi|^N \, dx \le \frac{|E| \, \mathcal{L}_N}{2\,\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^N \, dx + \frac{\varepsilon \, \mathcal{L}_N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^N \, dx,$$

如所愿。

情形 $p > N$。这与前一种情形类似。我们可以使用莫里不等式（例如参见[9,定理 3.6。8]）

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \le \mathcal{M}_N \, \|\varphi\|^{1-\frac{N}{p}}_{L^p(\mathbb{R}^N)} \, \|\nabla \varphi\|^{\frac{N}{p}}_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

于是，由（2.2）及 $q = \infty$，可得

$$\int_E |\varphi|^p \, dx \le |E| \, \mathcal{M}^p_{N,p} \, \|\varphi\|^{p-N}_{L^p(\mathbb{R}^N)} \, \|\nabla \varphi\|^N_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

再次由杨氏不等式，对每个 $\varepsilon > 0$，可得

$$\int_E |\varphi|^p \, dx \le \frac{N}{p} \, |E|^{\frac{p}{N}} \, \mathcal{M}^p_{N,p} \, \varepsilon^{-\frac{p-N}{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^p + \frac{p-N}{p} \, \mathcal{M}^p_{N,p} \, \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p \, dx.$$

证明至此完成。 □

下面的加权 Poincaré 型不等式将会很有用。

[1]在情形 $q = \infty$ 下，意指 $p/q = 0$。

引理 2.2。 设 $V \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ 为一个非负函数，使得存在一个常数 $\alpha > 0$和一个半径 $R > 0$，满足

$$V(x) \geq \alpha, \qquad \text{for a. e. } x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R. \tag{2.3}$$

设 $1 < p < \infty$，则存在常数 $C_{N,\,p,\,R,\,\alpha} > 1$，使得

$$\frac{1}{C_{N,p,R,\alpha}} \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^p \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V \, |\varphi|^p \, dx, \qquad \text{for every } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

证明。 取 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$，并将关于 $\mathbb{R}^N$ 的积分分解如下

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p \, dx = \int_{B_R} |\varphi|^p \, dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |\varphi|^p \, dx.$$

对于第二个积分，我们直接使用（2.3），于是得到

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p \, dx \leq \int_{B_R} |\varphi|^p \, dx + \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} V \, |\varphi|^p \, dx.$$

为了估计 B_R 上的积分，我们可以应用引理 2.1。情形 $1 < p < N$ 显然成立，我们考虑其余情形。

情形 $p = N$。由引理 2.1，对每个 $\varepsilon > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^N \, dx \leq \frac{C}{\varepsilon} \, |B_R| \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^N \, dx + C \, \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^N \, dx + \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} V \, |\varphi|^N \, dx.$$

通过选取 $\varepsilon = 1/(2C)$，我们可以吸收 φ 的 L^N 范数，从而得出结论。

情形 $p > N$。这与前一种情形类似。不过，由于引理 2.1，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p \, dx \leq \frac{C}{\varepsilon^{\frac{p-N}{N}}} \, |B_R|^{\frac{p}{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^p + C \, \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p \, dx + \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} V \, |\varphi|^N \, dx.$$

再次选取 $\varepsilon = 1/(2C)$，即可得出结论。 □

注记2.3。 上述常数 $C_{N,\,p,\,R,\,\alpha}$ 的具体形式对我们的目的并不十分重要。我们只强调，它体现了以下自然性质

$$\lim_{R \nearrow +\infty} C_{N,p,R,\alpha} = +\infty = \lim_{\alpha \searrow 0} C_{N,p,R,\alpha}.$$

接下来，我们用 $\mathcal{E}_p(\Omega)$ 给出 $W^{1,\,p}_{0}(\Omega)$ 到 $\hookrightarrow L^p(\Omega)$ 的紧嵌入的一种简单刻画。

引理 2.4。 设 $1 < p < \infty$，且 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ 是一个开集。则

$$W^{1,p}_0(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \text{ is compact} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{E}_p(\Omega) = +\infty.$$

证明. 该推论 $\Longleftarrow$ 直接由 [10, 引理 A.1], 例如。反过来，我们证明，若 $\mathcal{E}_p(\Omega) < +\infty$，则该嵌入不是紧的。根据假设，我们有

$$\lambda_{1,p}(\Omega \setminus \overline{B_R}) \leq \mathcal{E}_p(\Omega) < +\infty, \qquad \text{for every } R > 0.$$

对于每个 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$，我们取 $\varphi_n \in C_0^\infty(\Omega \setminus \overline{B_n}) \subseteq C_0^\infty(\Omega) \subseteq W^{1,\,p}_{0}(\Omega)$，使得

$$\int_{\Omega \setminus \overline{B_n}} |\varphi_n|^p \, dx = 1 \qquad \text{and} \qquad \lambda_{1,p}(\Omega \setminus \overline{B_n}) \leq \int_{\Omega \setminus \overline{B_n}} |\nabla \varphi_n|^p \, dx \leq \lambda_{1,p}(\Omega \setminus \overline{B_n}) + \frac{1}{n}.$$

根据 $\lambda_{1,p}(\Omega \setminus B_n)$ 的定义，这样的函数存在。因此，我们构造了一个 $W^{1,p}_0(\Omega)$ 中的有界序列，其 $L^p(\Omega)$ 范数为 1，但无法找到在 $L^p(\Omega)$ 中强收敛的子列。这说明嵌入 $W^{1,p}_0(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{E}_p(\Omega)$ 不具有紧性。□

最后，我们给出一个简单的结果：开集支持 L^p Poincar´e 不等式，当且仅当其“无穷远处”的 Poincar´e 常数为正。鉴于前面的结果，只需考虑 $\mathcal{E}_p < +\infty$ 情形，并不失一般性。

引理 2.5. 设 $1 < p < \infty$，且设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ 为满足 $\mathcal{E}_p(\Omega) < +\infty$的开集。则有

$$\lambda_{1,p}(\Omega) > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{E}_p(\Omega) > 0.$$

证明. 蕴含关系 $\Longrightarrow$ 由以下事实可得：$\lambda_{1,p}(\Omega) \le \mathcal{E}_p(\Omega)$，而这又是 $\lambda_{1,p}$ 关于集合包含的单调性的结果。

为证明反向蕴含，设 $\mathcal{E}_p(\Omega) > 0$，并证明 Ω 支持 L^p Poincar´e 不等式。根据定义和单调性，这意味着存在 $R_\Omega > 0$ 使得

$$\lambda_{1,p}(\Omega \setminus \overline{B_R}) \ge \frac{\mathcal{E}_p(\Omega)}{2}, \qquad \text{for every } R \ge R_\Omega.$$

我们取 $\eta \in C^\infty_0(B_{2R_\Omega})$，使得

$$0 \le \eta \le 1, \qquad \eta \equiv 1 \text{ on } B_{R_\Omega}, \qquad \|\nabla \eta\|_{L^\infty} \le \frac{C}{R_\Omega},$$

对某个维数常数 $C > 0$，并令 $\zeta = 1 - \eta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$。对每个 $\varphi \in C^\infty_0(\Omega)$，我们观察到

$$\eta\,\varphi \in W^{1,p}_0(\Omega \cap B_{2R_\Omega}) \qquad \text{and} \qquad \zeta\,\varphi \in W^{1,p}_0(\Omega \setminus \overline{B_{R_\Omega}}).$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\cap B_{2R_\Omega}} |\varphi\,\eta|^p\,dx &\le \frac{1}{\lambda_{1,p}(\Omega \cap B_{2R_\Omega})} \int_{\Omega\cap B_{2R_\Omega}} |\nabla(\varphi\,\eta)|^p\,dx \\ &\le \frac{2^{p-1}}{\lambda_{1,p}(B_{2R_\Omega})} \int_{\Omega\cap B_{2R_\Omega}} |\nabla\varphi|^p\,dx + \frac{2^{p-1}\,C^p}{R^p_\Omega\,\lambda_{1,p}(B_{2R_\Omega})} \int_{B_{2R_\Omega}\setminus B_{R_\Omega}} |\varphi|^p\,dx.\end{aligned}$$

另一方面，我们也有

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\setminus B_{R_\Omega}} |\varphi\,\zeta|^p\,dx &\le \frac{1}{\lambda_{1,p}(\Omega \setminus \overline{B_{R_\Omega}})} \int_{\Omega\setminus B_{R_\Omega}} |\nabla(\varphi\,\zeta)|^p\,dx \\ &\le \frac{2^p}{\mathcal{E}_p(\Omega)} \int_{\Omega\setminus B_{R_\Omega}} |\nabla\varphi|^p\,dx + \frac{2^p\,C^p}{R^p_\Omega\,\mathcal{E}_p(\Omega)} \int_{B_{2R_\Omega}\setminus B_{R_\Omega}} |\varphi|^p\,dx.\end{aligned}$$

将这两个估计相加并利用

$$\eta^p + \zeta^p \ge 2^{1-p}\,(\eta + \zeta)^p = 2^{1-p} \qquad \text{and} \qquad \lambda_{1,p}(B_{2R_\Omega}) = (2\,R_\Omega)^{-p}\,\lambda_{1,p}(B_1),$$

经过一些标准的运算之后，我们得到 ns

$$\int_\Omega |\varphi|^p\,dx \le C_{N,p} \left(R^p_\Omega + \frac{1}{\mathcal{E}_p(\Omega)}\right) \left[\int_\Omega |\nabla\varphi|^p\,dx + \frac{1}{R^p_\Omega} \int_{B_{2R_\Omega}} |\varphi|^p\,dx\right], \tag{2.4}$$

对于适当的常数 $C_{N,\,p} > 0$。

为了处理最后一项，我们可以借助引理 2.1。事实上，在 $1 < p < N$ 的情形下，我们可以直接得到

$$\frac{1}{R_\Omega^p} \int_{B_{2R_\Omega}} |\varphi|^p \, dx \le C \int_\Omega |\nabla \varphi|^p \, dx,$$

这就得到了所声称的估计。反之，对于情形 $p = N$，我们得到

$$\frac{1}{R_\Omega^N} \int_{B_{2R_\Omega}} |\varphi|^N \, dx \le \frac{C}{\varepsilon} \int_\Omega |\nabla \varphi|^N \, dx + \frac{C}{R_\Omega^N} \, \varepsilon \int_\Omega |\varphi|^N \, dx,$$

对每个 $\varepsilon > 0$，通过调整常数 C，该结论均成立。结合（2.4），可得

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\varphi|^N \, dx \le C_N \left(R_\Omega^N + \frac{1}{\mathcal{E}_N(\Omega)} \right) \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \int_\Omega |\nabla \varphi|^N \, dx \\ + C_N \left(R_\Omega^N + \frac{1}{\mathcal{E}_N(\Omega)} \right) \frac{\varepsilon}{R_\Omega^N} \int_\Omega |\varphi|^N \, dx. \end{aligned}$$

通过选取

$$\varepsilon = \frac{R_\Omega^N}{2} \frac{1}{C_N} \frac{\mathcal{E}_N(\Omega)}{R_\Omega^N \, \mathcal{E}_N(\Omega) + 1},$$

我们可以吸收右侧的 L^N 范数，从而证明所需的 Poincar´e 不等式。最后，对于情形 $p > N$，我们可以采用类似的方法：细节留给读者。□

2.3. **加权 Sobolev 空间**。 现在我们需要给出一个定义，以明确我们希望研究的一类特定势函数。

定义 2.6. 设 $V \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ 为非负函数。若 V具有如下性质，则称其为强约束势： 存在增函数 α: $(0, +\infty) \to (0, +\infty)$，使得

$$\lim_{R \to +\infty} \alpha(R) = +\infty,$$

并且对每一个 $R > 0$，我们有

$$V(x) \ge \alpha(R), \qquad \text{for a.e. } x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R.$$

命题 2.7. 设 $1 < p < \infty$，并设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ 为开集。对于强约束势$V \ge 0$，我们将 $\mathscr{D}_0^{1,p}(\Omega; V)$ 定义为 $C_0^\infty(\Omega)$ 关于该范数的完备化

$$\|\varphi\|_{\mathscr{D}_0^{1,p}(\Omega;V)} := \left(\int_\Omega |\nabla \varphi|^p \, dx + \int_\Omega V \, |\varphi|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \textit{for every } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

于是，这是一个紧嵌入于 $L^p(\Omega)$ 的巴拿赫空间。此外，它可以等同于$W_0^{1,p}(\Omega; V)$，即 $C_0^\infty(\Omega)$ 在加权索伯列夫空间中的闭包

$$W^{1,p}(\Omega; V) = \left\{ \varphi \in W^{1,p}(\Omega) \, : \, \int_\Omega V \, |\varphi|^p \, dx < +\infty \right\},$$

赋予范数

$$\|\varphi\|_{W^{1,p}(\Omega;V)} := \left(\int_\Omega |\nabla \varphi|^p \, dx + \int_\Omega (1 + V) \, |\varphi|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

证明。 由引理 2.2，这两个范数

$$\|\varphi\|_{\mathscr{D}_0^{1,p}(\Omega;V)} \qquad \text{and} \qquad \|\varphi\|_{W^{1,p}(\Omega;V)},$$

在 $C_0^\infty(\Omega)$ 上等价。因此，两个空间 $\mathscr{D}^1_{,0}{}^p(\Omega;\,V)$ 与 $W^1_{,0}{}^p(\Omega;\,V)$ 可以按典范方式等同。此外，我们注意到，对每一个 $R>0$ 都成立

$$\int_{\Omega\setminus B_R}|\varphi|^p\,dx\le\frac{1}{\alpha(R)}\int_{\Omega\setminus B_R}V\,|\varphi|^p\,dx\le\frac{1}{\alpha(R)}\,\|\varphi\|^p_{\mathscr{D}_0^{1,p}(\Omega;V)},\qquad\text{for every }\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega;V).$$

借助于 Riesz-Fr´echet-Kolmogorov 定理，上述事实保证每一个有界序列 $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq W^1_{,0}{}^p(\Omega;\,V)$ 都存在一个子列在 $L^p(\Omega)$ 中强收敛到一个函数φ。此外，借助于一个标准论证（例如参见 [9, 定理 3.7.4] 的证明），可知空间 $W^1_{,0}{}^p(\Omega;\,V)$ 也是弱闭的，因此极限函数 φ 仍然属于 $W^1_{,0}{}^p(\Omega;\,V)$。□

下文某处将需要用到下一个简单的技术性结果。

引理 2.8. 设 $1<p<\infty$ 且$\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ 为一个开集。取一个强约束势$V\ge0$，则对每个 $\zeta\in C_0^\infty(\Omega)$ 以及 $\varphi\in W^1_{,0}{}^p(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$，有

$$\zeta\,\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega;V).$$

证明。 根据 $W^1_{,0}{}^p(\Omega)$ 的定义，存在一个序列 $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq C_0^\infty(\Omega)$，它在$W^{1,p}(\Omega)$ 中收敛到 φ。不失一般性，我们还可以进一步假设

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\varphi_n\|_{L^\infty(\Omega)}\le2\,\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\qquad\text{and}\qquad\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x),\ \text{for a. e. }x\in\Omega.\tag{2.5}$$

于是，不难验证

$$\lim_{n\to\infty}\|\zeta\,\varphi_n-\zeta\,\varphi\|_{W^{1,p}(\Omega;V)}=0.$$

特别地，事实

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega V\,|\varphi_n-\varphi|^p\,|\zeta|^p\,dx=0$$

可由 (2.5) 和勒贝格控制收敛定理得出。事实上，我们有 e

$$V\,|\varphi_n-\varphi|^p\,|\zeta|^p\le3^p\,\|\varphi\|^p_{L^\infty(\Omega)}\,V\,\zeta^p\in L^1(\Omega),$$

得益于 $V\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 和 $\zeta\in C_0^\infty(\Omega)$ 这一事实。由于 $\{\zeta\,\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq C_0^\infty(\Omega)$，命题得证。□

3. Exponential fall-off of subsolutions

˘主定理中的 Snol-Simon 型衰减估计将是下面更一般结果的推论，该结果对非负下解成立。

命题 3.1（无穷远处的指数衰减）。 设 $1<p<\infty$，且令 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ 为满足 $\lambda_{1,\,p}(\Omega)>0$ 的开集。对于满足下列条件的常数 λ

$$\lambda_{1,p}(\Omega)\le\lambda<\mathcal{E}_p(\Omega),$$

我们考虑 $v\in W^1_{,\,0}{}^p(\Omega)$ 上的方程的一个非负下解

$$-\Delta_p u=\lambda\,u^{p-1},\qquad in\ \Omega.\tag{3.1}$$

那么：

• 若 $\mathcal{E}_p(\Omega) < +\infty$，则存在两个常数 $\mathcal{C} = \mathcal{C}(N, p, \lambda, \Omega) > 0$ 和 $\alpha = \alpha(p, \lambda, \Omega) > 0$，使得 v 满足以下衰减估计

$$0 \le v(x) \le \mathcal{C} \, \|v\|_{L^p(\Omega)} \, e^{-\alpha |x|}, \qquad \text{for a. e. } x \in \Omega. \tag{3.2}$$

此外，常数 α 随 λ 递减，且有

$$\lim_{\lambda \nearrow \mathcal{E}_p(\Omega)} \alpha = 0;$$

• 如果 $\mathcal{E}_p(\Omega) = +\infty$，则对每个 $\alpha > 0$ 都存在一个常数 $\mathcal{C} = \mathcal{C}(N, p, \lambda, \Omega\ \alpha) > 0$ 使得(3.2)成立。

证明。我们将 p–拉普拉斯算子的情形下的证明改写自 [6, 定理 5。1]。证明会稍加展开，因为与 [6] 所采用的框架不同，我们不对集合 Ω 的“无穷远处的几何”作任何假设。

为便于阅读，我们将证明分为几个部分。

化归到 L^p 范数。我们首先指出，只需证明所需的 L^p 范数下的指数衰减，也就是说，我们只需证明：

• 若 $\mathcal{E}_p(\Omega) < +\infty$，则存在 $\alpha = \alpha(p, \lambda, \Omega) > 0$ 以及一个常数 $C_1 = C_1(p, \lambda, \Omega) > 0$，使得

$$\|v\|_{L^p(\Omega \setminus B_R)} \le C_1 \, \|v\|_{L^p(\Omega)} \, e^{-\alpha R}, \qquad \text{for every } R > 0; \tag{3.3}$$

• 若 $\mathcal{E}_p(\Omega) = +\infty$，则对每个 $\alpha > 0$ 都存在一个常数 $C_1 = C_1(p, \lambda, \Omega\ \alpha)$，$> 0$ 使得（3.3）成立。

事实上，假设假设（3.3）成立。利用 [11, 引理 2。3] 以及 $q = p$，我们有 $v \in L^\infty(\Omega$)with

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \le C_2 \, \lambda^{\frac{N}{p^2}} \, \|v\|_{L^p(\Omega)},$$

对于某个 $C_2 = C_2(N, p) > 0$。这又意味着

$$\|v\|_{L^\infty(B_2)} \le \left(C_2 \, e^{2\,\alpha} \, \lambda^{\frac{N}{p^2}} \right) e^{-\alpha |x|} \, \|v\|_{L^p(\Omega)}, \qquad \text{for } x \in B_2. \tag{3.4}$$

此外，根据 [11, 引理 7。1] 以及 $q = p$，我们有

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega \setminus B_{R+1})} \le C_3 \, (1+\lambda)^{\frac{N}{p^2}} \, \|v\|_{L^p(\Omega \setminus B_R)}, \qquad \text{for every } R > 0, \tag{3.5}$$

对一个常数 $C_3 = C_3(N, p) > 0$。于是，由 (3.5) 和 (3.3)，结合 $R = n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$，我们可得，对几乎处处的 $x \in B_{n+2} \setminus B_{n+1}$

$$\begin{aligned} 0 \le v(x) \le \|v\|_{L^\infty(\Omega \setminus B_{n+1})} &\le C_3 \, (1+\lambda)^{\frac{N}{p^2}} \, \|v\|_{L^p(\Omega \setminus B_n)} \\ &\le C_3 \, C_1 \, (1+\lambda)^{\frac{N}{p^2}} \, \|v\|_{L^p(\Omega)} \, e^{-\alpha\, n} \\ &\le \left(C_3 \, C_1 \, e^{2\,\alpha} \, (1+\lambda)^{\frac{N}{p^2}} \right) \|v\|_{L^p(\Omega)} \, e^{-\alpha |x|}. \end{aligned}$$

所声称的估计 (3.2) 可通过将后者与 (3.4) 结合并令 g

$$\mathcal{C} := \max \left\{ C_2 \, e^{2\,\alpha} \, \lambda^{\frac{N}{p^2}}, \, C_3 \, C_1 \, e^{2\,\alpha} \, (1+\lambda)^{\frac{N}{p^2}} \right\}.$$

指数衰减 $L^p(\Omega)$：情形 $\mathcal{E}_p(\Omega) < +\infty$。现在我们将证明（3.3）的有效性。首先注意到，由于 λ 的选取，我们有

$$\frac{\lambda}{\mathcal{E}_p(\Omega)} < 1.$$

我们引入以下单实变量函数

$$\begin{aligned} h \quad : \quad \left[0, \min\{1, 1/(p-1)\}\right] \quad &\to \quad [0,1] \\ t \quad &\mapsto \quad \frac{1-t}{1+t}\,(1-(p-1)\,t), \end{aligned}$$

它是　　双射且递减。因此，存在 $0 < \varepsilon_{\Omega,\ \lambda} < 1$ 具有以下性质[2]

$$h(\varepsilon_{\Omega,\lambda}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\lambda}{\mathcal{E}_p(\Omega)}\right). \tag{3.6}$$

我们还注意到，根据 $\mathcal{E}_p(\Omega)$ 的定义，存在 $r_0 = r_0(\Omega) > 0$，使得

$$(1-\varepsilon_{\Omega,\lambda})\,\mathcal{E}_p(\Omega) \le \lambda_{1,p}(\Omega \setminus \overline{B_R}), \qquad \text{for every } R \ge r_0. \tag{3.7}$$

对于每个 $R > 0$，我们取以下径向对称利普希茨截断函数

$$\eta(x) = \min\Big\{(|x| - R)_+, 1\Big\}. \tag{3.8}$$

注意到

$$0 \le \eta \le 1, \qquad \eta \equiv 0 \text{ on } B_R, \qquad \eta \equiv 1 \text{ on } \mathbb{R}^N \setminus B_{R+1}, \qquad \|\nabla\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 1.$$

我们希望使用这个“在无穷远处”的截断函数，为 v得到一个适当的卡乔波利不等式。更准确地说，注意到根据假设， v 满足以下不等式

$$\int_\Omega \langle |\nabla v|^{p-2}\nabla v, \nabla\varphi\rangle\, dx \le \lambda \int_\Omega v^{p-1}\,\varphi\, dx, \qquad \text{for every } \varphi \in W^{1,p}_0(\Omega),\ \varphi \ge 0.$$

我们将其与测试函数 $\varphi = \eta^p\, v$一同使用，这是可行的。于是得到

$$p\int_\Omega \langle |\nabla v|^{p-2}\,\nabla v, \nabla\eta\rangle\, v\,\eta^{p-1}\, dx + \int_\Omega |\nabla v|^p\,\eta^p \le \lambda \int_\Omega v^p\,\eta^p\, dx. \tag{3.9}$$

利用杨氏不等式，对于每个 $\delta > 0$，我们得到

$$p\int_\Omega \langle |\nabla v|^{p-2}\,\nabla v, \nabla\eta\rangle\,\eta^{p-1}\, v\, dx \ge -(p-1)\,\delta \int_\Omega |\nabla v|^p\,\eta^p - \delta^{1-p}\int_\Omega |\nabla\eta|^p\, v^p\, dx.$$

我们将这个估计代入（3.9），从而直接推出

$$(1-(p-1)\,\delta)\int_\Omega |\nabla v|^p\,\eta^p\, dx \le \delta^{1-p}\int_\Omega |\nabla\eta|^p\, v^p\, dx + \lambda\int_\Omega v^p\,\eta^p\, dx. \tag{3.10}$$

特别地，取$\delta = \varepsilon_{\lambda,\ \Omega}$，我们得到

$$(1-(p-1)\,\varepsilon_{\Omega,\lambda})\int_\Omega |\nabla v|^p\,\eta^p\, dx \le \varepsilon_{\Omega,\lambda}^{1-p}\int_\Omega |\nabla\eta|^p\, v^p\, dx + \lambda\int_\Omega v^p\,\eta^p\, dx. \tag{3.11}$$

现在，我们使用下面引理A.1中给出的初等不等式，其中取

$$\varepsilon = \varepsilon_{\Omega,\lambda}, \qquad a = \eta\,\nabla v \qquad \text{and} \qquad b = v\,\nabla\eta.$$

因此，我们有

$$\Big||\nabla(v\,\eta)|^p - |\nabla v|^p\,\eta^p\Big| \le \varepsilon_{\Omega,\lambda}\,|\nabla v|^p\,\eta^p + \varepsilon_{\Omega,\lambda}^{1-p}\,c_p\,v^p\,|\nabla\eta|^p.$$

[2]只需注意到

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\lambda}{\mathcal{E}_p(\Omega)}\right) < 1 \qquad \text{and} \qquad \lim_{t\searrow 0} h(t) = 1.$$

特别地，我们可以推断出

$$\begin{aligned}(1-(p-1)\,\varepsilon_{\Omega,\lambda})\int_\Omega |\nabla(v\,\eta)|^p\,dx &\le (1-(p-1)\,\varepsilon_{\Omega,\lambda})\,(1+\varepsilon_{\Omega,\lambda})\int_\Omega |\nabla v|^p\,\eta^p\,dx\\ &\quad+(1-(p-1)\,\varepsilon_{\Omega,\lambda})\,\varepsilon_{\Omega,\lambda}^{1-p}\,c_p\int_\Omega v^p\,|\nabla\eta|^p\,dx\\ &\le (1+\varepsilon_{\Omega,\lambda})\,\lambda\int_\Omega v^p\,\eta^p\,dx\\ &\quad+\varepsilon_{\Omega,\lambda}^{1-p}\left[(1+\varepsilon_{\Omega,\lambda})+(1-(p-1)\,\varepsilon_{\Omega,\lambda})\,c_p\right]\int_\Omega |\nabla\eta|^p\,v^p\,dx.\end{aligned}$$

在第二个不等式中，我们使用了（3.11）。现在我们注意到

$$\int_\Omega |\nabla(v\,\eta)|^p\,dx \ge \lambda_{1,p}(\Omega\setminus\overline{B_R})\int_\Omega v^p\,\eta^p\,dx,$$

这得益于 $\eta\,u\in W^{1,\,p}_{\,0}(\Omega\setminus B_R)$ 上的 Poincaré 不等式。结合最后两个估计，我们得到

$$\begin{aligned}\lambda_{1,p}(\Omega\setminus\overline{B_R})\int_\Omega v^p\,\eta^p\,dx &\le \frac{1+\varepsilon_{\Omega,\lambda}}{(1-(p-1)\,\varepsilon_{\Omega,\lambda})}\,\lambda\int_\Omega v^p\,\eta^p\,dx\\ &\quad+\varepsilon_{\Omega,\lambda}^{1-p}\left[\frac{(1+\varepsilon_{\Omega,\lambda})}{(1-(p-1)\,\varepsilon_{\Omega,\lambda})}+c_p\right]\int_\Omega |\nabla\eta|^p\,v^p\,dx.\end{aligned}\tag{3.12}$$

我们可以进一步从下方估计最左边的项，方法是应用（3.7），至少对于充分大的 R。因此，对每一个 $R\ge r_0$

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon_{\Omega,\lambda})\,\mathcal{E}_p(\Omega)\int_\Omega v^p\,\eta^p\,dx &\le \frac{1+\varepsilon_{\Omega,\lambda}}{(1-(p-1)\,\varepsilon_{\Omega,\lambda})}\,\lambda\int_\Omega v^p\,\eta^p\,dx\\ &\quad+\varepsilon_{\Omega,\lambda}^{1-p}\left[\frac{(1+\varepsilon_{\Omega,\lambda})}{(1-(p-1)\,\varepsilon_{\Omega,\lambda})}+c_p\right]\int_\Omega |\nabla\eta|^p\,v^p\,dx.\end{aligned}$$

现在我们利用截断函数 η 的性质：特别地，我们得到

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon_{\Omega,\lambda})\,\mathcal{E}_p(\Omega)\int_{\Omega\setminus B_{R+1}} v^p\,dx &\le \frac{1+\varepsilon_{\Omega,\lambda}}{(1-(p-1)\,\varepsilon_{\Omega,\lambda})}\,\lambda\int_{\Omega\setminus B_R} v^p\,dx\\ &\quad+\varepsilon_{\Omega,\lambda}^{1-p}\left[\frac{(1+\varepsilon_{\Omega,\lambda})}{(1-(p-1)\,\varepsilon_{\Omega,\lambda})}+c_p\right]\int_{\Omega\cap(B_{R+1}\setminus B_R)} v^p\,dx.\end{aligned}$$

我们进一步分解

$$\int_{\Omega\setminus B_R} v^p\,dx=\int_{\Omega\setminus B_{R+1}} v^p\,dx+\int_{\Omega\cap(B_{R+1}\setminus B_R)} v^p\,dx,$$

因此，经过简单的运算，我们得到

$$\begin{aligned}&\left[\left(\frac{1-\varepsilon_{\Omega,\lambda}}{1+\varepsilon_{\Omega,\lambda}}\right)(1-(p-1)\varepsilon_{\Omega,\lambda})\,\mathcal{E}_p(\Omega)-\lambda\right]\int_{\Omega\setminus B_{R+1}} v^p\,dx\\ &\qquad\le\left[\varepsilon_{\Omega,\lambda}^{1-p}\left(1+\frac{(1-(p-1)\varepsilon_{\Omega,\lambda})}{1+\varepsilon_{\Omega,\lambda}}\,c_p\right)+\lambda\right]\int_{\Omega\cap(B_{R+1}\setminus B_R)} v^p\,dx.\end{aligned}$$

我们整理 稍微调整前面的估计，并将相关常数记作.....首先，我们注意到

$$\left(\frac{1-\varepsilon_{\Omega,\lambda}}{1+\varepsilon_{\Omega,\lambda}}\right)\left(1-(p-1)\varepsilon_{\Omega,\lambda}\right)\mathcal{E}_p(\Omega)-\lambda=\frac{\mathcal{E}_p(\Omega)-\lambda}{2},$$

由 (3.6) 可知。然后我们设

$$C_4=C_4(\Omega,p,\lambda):=\frac{2}{\mathcal{E}_p(\Omega)-\lambda}\left[\varepsilon_{\Omega,\lambda}^{1-p}\left(1+\frac{(1-(p-1)\varepsilon_{\Omega,\lambda})}{1+\varepsilon_{\Omega,\lambda}}\,c_p\right)+\lambda\right].$$

根据这一记号，我们得到

$$\int_{\Omega\setminus B_{R+1}}v^p\,dx\le C_4\int_{\Omega\cap(B_{R+1}\setminus B_R)}v^p\,dx. \tag{3.13}$$

由前面的估计，现在可以轻松推出 v 的 L^p 范数具有所需的指数衰减。只需令

$$A(R):=\int_{\Omega\setminus B_R}v^p\,dx,$$

并注意到 (3.13) 可以等价地改写为

$$A(R+1)\le\left(\frac{C_4}{1+C_4}\right)A(R),\qquad\text{for every } R\ge r_0.$$

特别地，对于 $R\ge r_0+1$，我们有

$$A(R)\le A(r_0+\lfloor R-r_0\rfloor)\le\left(\frac{C_4}{1+C_4}\right)^{\lfloor R-r_0\rfloor}A(r_0)\le\left(\frac{C_4}{1+C_4}\right)^{R-r_0-1}\int_\Omega v^p\,dx.$$

其中我们还利用了

$$A(r_0)=\int_{\Omega\setminus B_{r_0}}v^p\,dx\le\int_\Omega v^p\,dx.$$

总而言之，我们证明了

$$\int_{\Omega\setminus B_R}v^p\,dx\le\left(\frac{C_4}{1+C_4}\right)^R\left(\frac{1+C_4}{C_4}\right)^{r_0+1}\int_\Omega v^p\,dx,\qquad\text{for every } R\ge r_0+1.$$

另一方面，对于 $0<R<r_0+1$，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\setminus B_R}v^p\,dx\le\int_\Omega v^p\,dx&=\left(\frac{C_4}{1+C_4}\right)^R\left(\frac{1+C_4}{C_4}\right)^R\int_\Omega v^p\,dx\\&\le\left(\frac{C_4}{1+C_4}\right)^R\left(\frac{1+C_4}{C_4}\right)^{r_0+1}\int_\Omega v^p\,dx.\end{aligned}$$

因此，令

$$C_1:=\left(1+\frac{1}{C_4}\right)^{\frac{r_0+1}{p}}\qquad\text{and}\qquad\alpha:=\frac{1}{p}\log\left(1+\frac{1}{C_4}\right),$$

我们得到（3.3）。

我们通过证明正指数 α 的单调性性质来结束本部分。事实上，回顾常数 C_4 的定义，指数 α 为

$$\alpha = \frac{1}{p}\log\left(1+\frac{1}{C_4}\right) = \frac{1}{p}\log\left\{1+\frac{\mathcal{E}_p(\Omega)-\lambda}{2}\,\frac{1}{\left[\varepsilon_{\Omega,\lambda}^{1-p}\left(1+\dfrac{(1-(p-1)\varepsilon_{\Omega,\lambda})}{1+\varepsilon_{\Omega,\lambda}}\,c_p\right)+\lambda\right]}\right\}.$$

接下来，由（3.6）可知，常数$\varepsilon_{\Omega,\,\lambda}$ 为

$$\varepsilon_{\Omega,\lambda} = h^{-1}\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{\lambda}{\mathcal{E}_p(\Omega)}\right)\right),$$

因此，回想起 h （以及 h^{-1}）是递减的，可得$\lambda\mapsto\varepsilon_{\Omega,\,\lambda}$ 是递减的，其中

$$\lim_{\lambda\nearrow\mathcal{E}_p(\Omega)}\varepsilon_{\Omega,\lambda} = \lim_{\lambda\nearrow\mathcal{E}_p(\Omega)}h^{-1}\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{\lambda}{\mathcal{E}_p(\Omega)}\right)\right) = h^{-1}(1) = 0.$$

因此，不难看出，α 随着 λ 递减，并且

$$\lim_{\lambda\nearrow\mathcal{E}_p(\Omega)}\alpha = 0,$$

如所述。

*(Ω)*中的指数衰减 L^p(Ω)：情形 $\mathcal{E}_p$(Ω) $=+\infty$。只需重现前面的论证，并将每处的 $\mathcal{E}_p$(Ω)替换为任意一个严格大于 λ的固定数 $\mathcal{E}$ 即可。例如，可以取 $\mathcal{E}=\vartheta\,\lambda$，其中 $\vartheta\geq 2$ 是一个固定常数。因此，我们选择常数 ε_ϑ 使其满足

$$h(\varepsilon_\vartheta) = \frac{1+\vartheta}{2\,\vartheta}, \tag{3.14}$$

代替（3.6）。注意，实际上这样的选择既不依赖于 Ω，也不依赖于 λ，这一次。证明随后与之前完全相同，细节留给读者。我们只指出，这一次我们得到

$$\alpha = \frac{1}{p}\log\left\{1+\frac{(\vartheta-1)\,\lambda}{2}\,\frac{1}{\left[\varepsilon_\vartheta^{1-p}\left(1+\dfrac{(1-(p-1)\varepsilon_\vartheta)}{1+\varepsilon_\vartheta}\,c_p\right)+\lambda\right]}\right\}.$$

由于$\lambda\geq\lambda_{1,\,p}$(Ω)，我们有

$$\alpha \geq \frac{1}{p}\log\left\{1+\frac{(\vartheta-1)\,\lambda_{1,p}(\Omega)}{2}\,\frac{1}{\left[\varepsilon_\vartheta^{1-p}\left(1+\dfrac{(1-(p-1)\varepsilon_\vartheta}{1+\varepsilon_\vartheta}\,c_p\right)+\lambda_{1,p}(\Omega)\right]}\right\}.$$

此外，根据构造，利用 h^{-1} 是递减的这一点以及 $\vartheta\geq 2$，我们可得

$$\varepsilon_\vartheta = h^{-1}\left(\frac{1+\vartheta}{2\,\vartheta}\right)\geq h^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) =: \overline{\varepsilon}.$$

因此我们可以推断

$$\alpha \geq \frac{1}{p}\,\log\left\{1+\frac{(\vartheta-1)\,\lambda_{1,p}(\Omega)}{2}\,\frac{1}{\left[\bar{\varepsilon}^{1-p}\left(1+\frac{c_p}{1+\bar{\varepsilon}}\right)+\lambda_{1,p}(\Omega)\right]}\right\} =: \frac{1}{p}\,\log\left(1+\frac{\vartheta-1}{K_{\Omega,p}}\right).$$

因此，我们可以得到所声称的、具有最后一个指数的指数衰减；该指数与 λ 无关，并且可以任意大，因为 $\vartheta \geq 2$ 是任意的。□

注 3.2. 在情形 $\mathcal{E}_p(\Omega) = +\infty$ 中，正如容易预料的那样，取越来越大的指数α 会导致估计的定量损失。换言之，常数 $\mathcal{C}$ 会相应地趋于无穷。事实上，仔细考察证明可知，在这种情形下，我们可以取

$$\mathcal{C} = \max\left\{C_2\, e^{2\,\alpha}\,\lambda^{\frac{N}{p^2}},\, C_3\left(1+\frac{1}{C_4}\right)^{\frac{r_0+1}{p}}\, e^{2\,\alpha}\,(1+\lambda)^{\frac{N}{p^2}}\right\},$$

因此，当 α 趋于 $+\infty$时，它发散至 $+\infty$。我们还注意到

$$\lim_{\alpha\to+\infty} C_4 = 0,$$

以及可能的

$$\lim_{\alpha\to+\infty} r_0 = +\infty.$$

作为前述结果的推论，我们还可以得到梯度的一些衰减和可积性性质。为完整起见，我们将其记录为以下结果。

推论 3.3. 设 $1 < p < \infty$，并设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ 为一个开集，使得 $\lambda_{1,p}(\Omega) > 0$。对于一个常数 λ，使得

$$\lambda_{1,p}(\Omega) \leq \lambda < \mathcal{E}_p(\Omega),$$

我们考虑 $v \in W^{1,p}_0(\Omega)$ 为方程 (3.1)的非负次解。则[3]:

- 若 $\mathcal{E}_p(\Omega) < +\infty$，则存在 $M = M(p,\lambda,\Omega) > 0$ 使得

$$\|\nabla v\|_{L^p(\Omega\setminus B_{R+1})} \leq M\, e^{-\alpha\, R}\, \|v\|_{L^p(\Omega)}, \qquad \textit{for every } R > 0, \tag{3.15}$$

其中 α 与命题 3.1中的指数相同。此外，对每一个 $0 < \beta < \alpha$ 存在一个常数

$$\widetilde{\mathcal{C}} = \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, p, \lambda, \beta, \alpha-\beta) > 0,$$

使得

$$\int_\Omega |\nabla v|^p\; e^{\beta p|x|}\, dx \leq \widetilde{\mathcal{C}}\, \|v\|^p_{L^p(\Omega)}; \tag{3.16}$$

- 若 $\mathcal{E}_p(\Omega) = +\infty$，则对每一个 $\alpha > 0$ 存在一个常数 $M = M(p,\lambda,\Omega\ \alpha) > 0$ 使得(3.15) 成立。此外，对每一个 $\beta > 0$ 存在一个常数

$$\widetilde{\mathcal{C}} = \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, p, \lambda, \beta) > 0,$$

使得(3.16)成立。

特别地，在这两种情形下，我们都有

$$\int_\Omega |\nabla v|^\gamma\, dx < +\infty, \qquad \textit{for every } 0 < \gamma \leq p.$$

[3]我们用记号 $\mathcal{C}$ 表示命题3.1中的同一个常数。

证明。 为简单起见，我们只考虑情形 $\mathcal{E}_p(\Omega) < +\infty$。另一种情形可用同样的方法处理。

为证明（3.15），我们回到卡乔波利不等式（3.10）。取 $\delta = 1/(2(p-1))$，得到

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^p\,\eta^p\,dx \le 2^{p-1}\,(p-1)^{p-1}\int_\Omega |\nabla\eta|^p\,v^p\,dx + \lambda\int_\Omega v^p\,\eta^p\,dx.$$

利用截断函数 η 的性质，进而可得

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus B_{R+1}} |\nabla v|^p\,dx \le \left(2^{p-1}\,(p-1)^{p-1}+\lambda\right)\int_{\Omega\setminus B_R} v^p\,dx.$$

最后，我们可以将右侧应用于（3.3）中证明的 L^p 范数的指数衰减。这就得到了所述的衰减估计（3.15），其中

$$M := (2^p\,(p-1)^{p-1} + 2\,\lambda)^{\frac{1}{p}}\,C_1.$$

（3.16）的证明类似，只需调整测试函数的选取。固定 $R>0$ 并考虑一个标准截断函数 $\eta \in C_0^\infty(B_{R+1})$，使其满足

$$0\le\eta\le 1, \qquad \eta\equiv 1 \text{ on } B_R, \qquad \|\nabla\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \le C,$$

其中 $C>0$ 是某个维数常数。取陈述中的 $0<\beta<\alpha$，并在弱形式中使用以下测试函数

$$\varphi = \eta^p\,e^{\beta p|x|}\,v.$$

我们得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla v|^p\,\eta^p\,e^{p\beta|x|}\,dx \le \lambda\int_\Omega v^p\,\eta^p\,e^{p\beta|x|}\,dx - p\,\beta\int_\Omega \left\langle |\nabla v|^{p-2}\,\nabla v, \frac{x}{|x|}\right\rangle v\,\eta^p\,e^{p\beta|x|}\,dx \\ - p\int_\Omega \langle |\nabla v|^{p-2}\,\nabla v, \nabla\eta\rangle\,v\,\eta^{p-1}\,e^{p\beta|x|}\,dx.\end{aligned}$$

现在，我们在右端使用杨氏不等式：对于每个 $\delta>0$，我们得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u|^p\,\eta^p\,e^{p\beta|x|}\,dx \le \lambda\int_\Omega v^p\,\eta^p\,e^{p\beta|x|}\,dx \\ + \delta\,(p-1)\beta\int_\Omega |\nabla v|^p\,\eta^p\,e^{p\beta|x|}\,dx + \delta^{1-p}\,\beta\int_\Omega v^p\,\eta^p\,e^{p\beta|x|}\,dx \\ + \delta\,(p-1)\int_\Omega |\nabla v|^p\,\eta^p\,e^{p\beta|x|}\,dx + \delta^{1-p}\int_\Omega v^p\,|\nabla\eta|^p\,e^{p\beta|x|}\,dx.\end{aligned}$$

特别地，我们可以取

$$\delta = \frac{1}{2\,(p-1)\,(1+\beta)},$$

并将含有 ∇v的项移至左端并吸收。再利用 η的性质，并进行一些简单的代数运算，可得

$$\int_{\Omega\cap B_R} |\nabla v|^p\,e^{p\beta|x|}\,dx \le C_p\,(\lambda+1+\beta^p)\int_{\Omega\cap B_{R+1}} v^p\,e^{p\beta|x|}\,dx.$$

现在我们可以利用衰减估计（3.2），从而得到

$$\int_{\Omega\cap B_R} |\nabla v|^p\,e^{p\beta|x|}\,dx \le C_p\,(\lambda+1+\beta^p)\,\mathcal{C}^p\left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{-p(\alpha-\beta)|x|}\,dx\right)\|v\|^p_{L^p(\Omega)} =: \widetilde{\mathcal{C}}\,\|v\|^p_{L^p(\Omega)}.$$

令 R 趋于 $+\infty$，并利用单调收敛定理，可得所需的（3.16）。

最后，对于每个 $0<\gamma<p$，H¨older 不等式给出

$$\int_\Omega |\nabla v|^\gamma\,dx \le \left(\int_\Omega |\nabla v|^p\, e^{p\beta|x|}\,dx\right)^{\frac{\gamma}{p}} \left(\int_\Omega e^{-\frac{p\beta}{p-\gamma}|x|}\,dx\right)^{\frac{p-\gamma}{p}} < +\infty.$$

鉴于 (3.16)，这表明所需的可积性成立。 □

4. Perturbed eigenvalue problems

我们将需要以下关键技术结果。为了适应我们的研究目的，我们将其表述为稍微更一般的形式。证明主要受到以下结果的启发： [14,定理 3。3]。

引理 4.1. 设 $1<p<\infty$，并设 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ 为满足 $\lambda_{1,\,p}(\Omega)>0$ 的开集。设 $X(\Omega)$ 为具有以下性质的巴拿赫空间：

- $C_0^\infty(\Omega)\subseteq X(\Omega)$;
- $X(\Omega)\subseteq W^{1}_{,0}{}^{p}(\Omega)$ 具有连续嵌入，即存在 $C>0$ 使得

$$\|\nabla\varphi\|_{L^p(\Omega)} \le C\,\|\varphi\|_{X(\Omega)}, \qquad \textit{for every } \varphi\in X(\Omega).$$

我们令

$$\mathcal{X}_{k,p}(\Omega)=\Big\{K\subseteq\mathcal{S}_p(\Omega)\cap X(\Omega)\,:\,K \textit{ symmetric and compact, } \gamma(K;X(\Omega))\ge k\Big\},$$

and

$$\mathcal{W}_{k,p}(\Omega)=\Big\{K\subseteq\mathcal{S}_p(\Omega)\cap W^{1,p}_0(\Omega)\,:\,K \textit{ symmetric and compact, } \gamma(K;W^{1,p}_0(\Omega))\ge k\Big\}.$$

*T*则，对每个$K\in\mathcal{W}_{k,p}(\Omega)$ 以及每个 $\delta>0$，存在$K_\delta\in\mathcal{X}_{k,p}(\Omega)$ 使得

$$\max_{\varphi\in K_\delta}\int_\Omega |\nabla\varphi|^p\,dx \le \max_{\varphi\in K}\int_\Omega |\nabla\varphi|^p\,dx+\delta.$$

证明。 我们首先注意到，假设$\lambda_{1,p}(\Omega)>0$ 保证了

$$\varphi\mapsto\|\nabla\varphi\|_{L^p(\Omega)}, \tag{4.1}$$

是 $W^{1}_{,0}{}^{p}(\Omega)$上的等价范数。我们按陈述取 K 和 $\delta>0$。为简单起见，我们令

$$\mathrm{M}:=\max_{\varphi\in K}\int_\Omega |\nabla\varphi|^p\,dx,$$

它是一个正实数，并定义

$$c_\Omega:=\left(\frac{1}{\lambda_{1,p}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}\ \frac{5}{2}. \tag{4.2}$$

最后，我们固定一个半径 $r=r(\mathrm{M}\ c_\Omega,\ \delta)>0$ 使得

$$r<\frac{1}{2\,c_\Omega}, \tag{4.3}$$

and

$$(1-c_\Omega\,r)^{-p}\left[1+\frac{r}{2\,\mathrm{M}^{\frac{1}{p}}}\right]^p \le 1+\frac{\delta}{\mathrm{M}}. \tag{4.4}$$

注意，这样的选择是可行的，因为当 $r \searrow 0$ （4.4）中的左侧趋于 1 时，右侧严格大于 1。

选择这一点的原因很快就会清楚；现在让我们继续构造声明中定义的集合 K_δ 。

我们首先注意到 K 是紧的，因此可以找到有限个函数 $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\ell\} \subseteq K$ ，使得

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{\ell} \left\{ \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \,:\, \|\nabla\varphi - \nabla\varphi_i\|_{L^p(\Omega)} < \frac{r}{2} \right\},$$

其中 $r > 0$ 是此前引入的半径。特别地，每个 φ_i 都属于 $\mathcal{S}_p(\Omega)$，因此其 $L^p(\Omega)$ 范数为单位范数。由于 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W^{1,p}_0(\Omega)$ 中稠密，我们可以选择 $\{\psi_1, \dots, \psi_\ell\} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$，使得

$$\|\nabla\psi_i - \nabla\varphi_i\|_{L^p(\Omega)} < \frac{r}{2}, \qquad \text{for } i \in \{1, \dots, \ell\}.$$

这意味着对于每个 $i \in \{1, \dots, \ell\}$，我们都有

$$\left\{ \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \,:\, \|\nabla\varphi - \nabla\varphi_i\|_{L^p(\Omega)} < \frac{r}{2} \right\} \subseteq \left\{ \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \,:\, \|\nabla\varphi - \nabla\psi_i\|_{L^p(\Omega)} < r \right\}$$

因此我们得到

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{\ell} \left\{ \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \,:\, \|\nabla\varphi - \nabla\psi_i\|_{L^p(\Omega)} < r \right\}, \tag{4.5}$$

也如此。我们定义

$$F := \{\pm\psi_1, \dots, \pm\psi_\ell\}^{\mathrm{ch}},$$

即，这是有限族 $\{\pm\psi_1, \dots, \pm\psi_\ell\}$ 的凸包 。注意，由于 $C_0^\infty(\Omega) \subseteq X(\Omega)$，前述集合 F 尤其是 $X(\Omega)$ 的一个对称凸闭子集，而 $X(\Omega)$ 也是紧的。用 Proj_F 表示从 $W^{1,p}_0(\Omega)$ 到 F 的投影算子，则定义

$$\widetilde{K} = \mathrm{Proj}_F(K).$$

此处的投影是相对于 $W^{1,p}_0(\Omega)$ 上的等价范数（4.1）而言的。

我们来验证 $\widetilde{K}$ 与原点之间的距离一致地大于零。更准确地说，我们断言

$$\|\psi\|_{L^p(\Omega)} \geq 1 - c_\Omega\, r, \qquad \text{for every } \psi \in \widetilde{K}, \tag{4.6}$$

其中 c_Ω 是（4.2）中定义的常数。事实上，取 $\psi \in K$，这意味着 $\psi = \mathrm{Proj}_F(\varphi)$，对某个 $\varphi \in K$。由性质（4.5），存在 $i \in \{1, \dots, \ell\}$ 使得

$$\|\nabla\varphi - \nabla\psi_i\|_{L^p(\Omega)} < r.$$

因此，由三角不等式和投影算子的性质（回顾 $\psi_i \in F$），我们有

$$\begin{aligned}
\|\psi\|_{L^p(\Omega)} = \|\mathrm{Proj}_F(\varphi)\|_{L^p(\Omega)} &\geq \|\varphi\|_{L^p(\Omega)} - \|\mathrm{Proj}_F(\varphi) - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \\
&\geq \|\varphi\|_{L^p(\Omega)} - \left(\frac{1}{\lambda_{1,p}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \|\nabla \mathrm{Proj}_F(\varphi) - \nabla\varphi\|_{L^p(\Omega)} \\
&\geq \|\varphi\|_{L^p(\Omega)} - \left(\frac{1}{\lambda_{1,p}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \|\nabla\psi_i - \nabla\varphi\|_{L^p(\Omega)} \\
&\geq \|\varphi_i\|_{L^p(\Omega)} - \|\varphi_i - \varphi\|_{L^p(\Omega)} - \left(\frac{1}{\lambda_{1,p}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \|\nabla\psi_i - \nabla\varphi\|_{L^p(\Omega)} \\
&\geq 1 - \left(\frac{1}{\lambda_{1,p}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\|\nabla\varphi_i - \nabla\varphi\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla\psi_i - \nabla\varphi\|_{L^p(\Omega)}\right) \\
&\geq 1 - \left(\frac{1}{\lambda_{1,p}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\|\nabla\varphi_i - \nabla\psi_i\|_{L^p(\Omega)} + 2\,\|\nabla\psi_i - \nabla\varphi\|_{L^p(\Omega)}\right) \\
&\geq 1 - \left(\frac{1}{\lambda_{1,p}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{5\,r}{2}.
\end{aligned}$$

我们指出，我们还两次使用了 Poincaré 不等式。总之，我们得到了 (4.6)，如前所述。

现在，我们注意到集合 $\widetilde{K}$ 是对称的，并且由于投影算子的连续性，它关于 $W^{1,p}_0(\Omega)$ 的范数拓扑是紧的。事实上，它关于 $X(\Omega)$ 的范数拓扑也是紧的。确实，我们有 $K \subseteq F \subseteq X(\Omega)$，并且根据构造，$F$ 又包含在一个有限维子空间中，而在该子空间中所有范数等价。这足以证明我们的断言。

然而仍集合是我们所要寻找的集合：事实上，它不是 $\mathcal{S}_p(\Omega)$ 的子集。因此，我们必须对其中的元素重新归一化。为此，我们考虑奇连续泛函$T\colon W^{1,p}_0(\Omega) \to W^{1,p}_0(\Omega)$，其定义为

$$T(\psi) = \begin{cases} \dfrac{\psi}{\|\psi\|_{L^p(\Omega)}}, & \text{if } \|\psi\|_{L^p(\Omega)} \geq \dfrac{1}{2}, \\[2ex] 2\,\psi, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

注意到 T 在 F 上的限制取值于 $X(\Omega)$，并且相对于 $X(\Omega)$ 的范数拓扑连续。根据 (4.6) 和所作的选择 (4.3)，显然有

$$T(\psi) = \frac{\psi}{\|\psi\|_{L^p(\Omega)}} \in \mathcal{S}_p(\Omega) \cap X(\Omega), \qquad \text{for every } \psi \in \widetilde{K}. \tag{4.7}$$

最后，我们可以定义

$$K_\delta = T(\widetilde{K}) = T \circ \mathrm{Proj}_F(K).$$

根据前面的观察可知，K_δ 是 $\mathcal{S}_p(\Omega) \cap X(\Omega)$的子集，它在 $X(\Omega)$的范数拓扑下是紧的且对称。

为了证明 $K_\delta \in \mathcal{X}_{k,\,p}(\Omega)$，我们还必须估计其属，仍然相对于 $X(\Omega)$ 的范数拓扑。根据 [36, 第二章，命题 5。4], 注意到 $T \circ \mathrm{Proj}_F$ 可以

视为从 $W^{1,p}_0(\Omega)$ 到自身的连续奇泛函，并利用 $K \in \mathcal{W}_{k,p}(\Omega)$，我们推得

$$\gamma(K_\delta; W^{1,p}_0(\Omega)) \geq \gamma(K; W^{1,p}_0(\Omega)) \geq k.$$

由于利用引理 A.2，我们有

$$\gamma(K_\delta; X(\Omega)) = \gamma(K_\delta; W^{1,p}_0(\Omega)),$$

我们得到 $K_\delta \in \mathcal{X}_{k,p}(\Omega)$，正如所要求的。

接下来需要估计属于 K_δ 的函数的 p–狄利克雷积分：根据构造，对于每个 $\eta \in K_\delta$，我们有

$$\eta = \frac{\psi}{\|\psi\|_{L^p(\Omega)}}, \qquad \text{for some } \psi \in \widetilde{K}.$$

因此，由（4.6）

$$\int_\Omega |\nabla \eta|^p \, dx = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla \psi|^p \, dx}{\displaystyle\int_\Omega |\psi|^p \, dx} \leq (1 - c_\Omega \, r)^{-p} \int_\Omega |\nabla \psi|^p \, dx. \tag{4.8}$$

~利用 $\psi \in K = \mathrm{Proj}_F(K)$，可知 ψ 可以写成函数 $\{\pm\psi_1, \dots, \pm\psi_\ell\}$ 的凸组合。因此，根据 p–狄利克雷积分的凸性和偶性，我们得到

$$\int_\Omega |\nabla \psi|^p \, dx \leq \max_{\{1,\dots,\ell\}} \int_\Omega |\nabla \psi_i|^p \, dx. \tag{4.9}$$

为了得出结论，我们注意到，对于每个 $i \in \{1, \dots, \ell\}$，由三角不等式可得

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla \psi_i|^p \, dx &\leq \left[\left(\int_\Omega |\nabla \varphi_i|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} + \|\nabla \psi_i - \nabla \varphi_i\|_{L^p(\Omega)} \right]^p \\ &\leq \left[\mathrm{M}^{\frac{1}{p}} + \frac{r}{2} \right]^p = \mathrm{M} \left[1 + \frac{r}{2\,\mathrm{M}^{\frac{1}{p}}} \right]^p. \end{aligned}$$

现在轮到这个奇特的选择（4.4）发挥作用了：这保证了最后一个量不大于 $(\mathrm{M} + \delta)(1 - c_\Omega \, r)^p$。因此，我们得到

$$\int_\Omega |\nabla \psi_i|^p \, dx \leq (\mathrm{M} + \delta) \, (1 - c_\Omega \, r)^p, \qquad \text{for every } i \in \{1, \dots, \ell\}.$$

将这一信息代入（4.9），再回到（4.8），最终得到

$$\int_\Omega |\nabla \eta|^p \, dx \leq \mathrm{M} + \delta, \qquad \text{for every } \eta \in K_\delta.$$

由此便证明了所声称的结论。 □

对于强约束势 V，我们将定义扩展到加权空间 $W^{1,p}_0(\Omega; V)$（回忆命题 2.7），其中$\mathcal{W}_{k,p}(\Omega)$。具体而言，我们引入

$$\mathcal{W}_{k,p}(\Omega; V) = \Big\{ K \subseteq \mathcal{S}_p(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega; V) \, : \, K \text{ symmetric and compact, } \gamma(K; W^{1,p}_0(\Omega; V)) \geq k \Big\}.$$

借助前面的结果，我们可以证明极小极大值（1.6）的一个逼近结果。这是对 [11, 引理 41] 在更高临界值情形下的推广，其中 $q = p$。这是本节的主要结果。

命题 4.2。 设 $1 < p < \infty$，并设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ 是一个开集，使得 $\lambda_{1,\,p}(\Omega) > 0$。最后，设 $V \geq 0$ 是一个强约束势，且 $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个正数的递减无穷小数列。对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$，我们定义

$$\lambda^{\mathrm{LS}}_{k,p}(\Omega; V_n) := \inf_{K\in\mathcal{W}_{k,p}(\Omega;V)} \max_{\varphi\in K} \mathcal{G}_n(\varphi),$$

其中

$$\mathcal{G}_n(\varphi) = \int_\Omega |\nabla\varphi|^p\,dx + \int_\Omega V_n\,|\varphi|^p\,dx \qquad \textit{and} \qquad V_n(x) = \varepsilon_n\,V(x).$$

于是，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^{\mathrm{LS}}_{k,p}(\Omega; V_n) = \lambda^{\mathrm{LS}}_{k,p}(\Omega). \tag{4.10}$$

此外，量 $\lambda^{\mathrm{LS}}_{k,\,p}(\Omega; V_n)$ 是泛函 $\mathcal{G}_n$ 限制在流形 $\mathcal{S}_p(\Omega) \cap W^{1,\,p}_{0}(\Omega;\,V)$ 上的一个临界值；也就是说，存在一个函数 $u_{k,\,n} \in \mathcal{S}_p(\Omega) \cap W^{1,\,p}_{0}(\Omega;\,V)$ 使得

$$\begin{aligned}\int_\Omega \langle |\nabla u_{k,n}|^{p-2}\,\nabla u_{k,n}, \nabla\varphi\rangle\,dx + \int_\Omega V_n\,|u_{k,n}|^{p-2}\,u_{k,n}\,\varphi\,dx \\ = \lambda^{\mathrm{LS}}_{k,p}(\Omega; V_n)\int_\Omega |u_{k,n}|^{p-2}\,u_{k,n}\,\varphi\,dx, \quad \textit{for every } \varphi \in C^\infty_0(\Omega).\end{aligned}$$

最后，每个函数 $u_{k,\,n}$ 都满足

$$u_{k,n} \in L^\infty(\Omega) \qquad \textit{and} \qquad \|u_{k,n}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_{N,p}\left(\lambda^{\mathrm{LS}}_{k,p}(\Omega; V_n)\right)^{\frac{N}{p^2}}.$$

证明。 我们首先注意到

$$\mathcal{G}_n(\varphi) \leq \max\{1,\varepsilon_0\}\left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^p\,dx + \int_\Omega V\,|\varphi|^p\,dx\right), \qquad \text{for every } \varphi \in W^{1,p}_0(\Omega; V).$$

因此，泛函 $\mathcal{G}_n$ 在巴拿赫空间 $W^{1,p}_0(\Omega;\,V)$ 上有限且 C^1。根据我们要证明的结论，将证明分为三部分。

（证明4.10）。我们注意到，由引理 A.2 可得 $\mathcal{W}_{k,p}(\Omega; V) \subseteq \mathcal{W}_{k,p}(\Omega)$。此外，

$$\mathcal{G}_n(\varphi) \geq \int_\Omega |\nabla\varphi|^p, \qquad \text{for every } \varphi \in W^{1,p}_0(\Omega; V).$$

这些结论立即推出

$$\lambda^{\mathrm{LS}}_{k,p}(\Omega; V_n) \geq \lambda^{\mathrm{LS}}_{k,p}(\Omega) \qquad \text{and thus} \qquad \liminf_{n\to\infty} \lambda^{\mathrm{LS}}_{k,p}(\Omega; V_n) \geq \lambda^{\mathrm{LS}}_{k,p}(\Omega).$$

为证明反向不等式，取 $K \in \mathcal{W}_{k,p}(\Omega)$ 和 $\delta > 0$。应用引理 4.1，令 $X(\Omega) = W^{1,p}_0(\Omega;\,V)$：则存在 $K_\delta \in \mathcal{W}_{k,p}(\Omega;\,V)$，使得

$$\max_{\varphi\in K_\delta} \int_\Omega |\nabla\varphi|^p\,dx \leq \max_{\varphi\in K} \int_\Omega |\nabla\varphi|^p\,dx + \delta.$$

我们还注意到

$$\varphi \mapsto \int_\Omega V\,|\varphi|^p\,dx,$$

是 $W^{1,\,p}_0(\Omega;\,V)$ 上的连续泛函。因此，由于 K_δ 的紧性（相对于范数拓扑），我们可知存在常数 $C_{\delta,\,K_\delta} > 0$，使得

$$\int_\Omega V\,|\varphi|^p\,dx \leq C_{\delta,K_\delta}, \qquad \text{for every } \varphi \in K_\delta.$$

特别地，我们有

$$\int_\Omega V_n\,|\varphi|^p\,dx \le \varepsilon_n\,C_{\delta,K_\delta}, \qquad \text{for every } \varphi \in K_\delta.$$

总之，我们得到

$$\lambda^{\mathrm{LS}}_{k,p}(\Omega;V_n) \le \max_{\varphi\in K_\delta} \mathcal{G}_n(\varphi) \le \max_{\varphi\in K}\int_\Omega |\nabla\varphi|^p\,dx + \delta + \varepsilon_n\,C_{\delta,K_\delta}.$$

这意味着

$$\limsup_{n\to\infty} \lambda^{\mathrm{LS}}_{k,p}(\Omega;V_n) \le \max_{\varphi\in K}\int_\Omega |\nabla\varphi|^p\,dx + \delta.$$

对 $K \in \mathcal{W}_{k,p}(\Omega)$ 取下确界，由此可得

$$\limsup_{n\to\infty} \lambda^{\mathrm{LS}}_{k,p}(\Omega;V_n) \le \lambda^{\mathrm{LS}}_{k,p}(\Omega) + \delta.$$

由于 $\delta > 0$ 的任意性，这足以得到反向不等式。

临界性的证明。我们希望借助经典的极小极大定理，例如 [37, 推论 4.1]。固定 $n \in \mathbb{N}$ 后，我们只需验证 $\mathcal{G}_n$ 在流形 $\mathcal{S}_p(\Omega)\cap W^{1,p}_0(\Omega;V)$ 上的限制满足 Palais-Smale 条件，且对每个水平 $\lambda \ge \lambda^{\mathrm{LS}}_{1,p}(\Omega;V_n)$ 都成立。换言之，我们需要证明，若 $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 满足

$$\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}_p(\Omega)\cap W^{1,p}_0(\Omega;V), \tag{4.11}$$

$$\lim_{m\to\infty} \mathcal{G}_n(\varphi_m) = \lambda, \tag{4.12}$$

and

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sup_{\|\psi\|_{W^{1,p}_0(\Omega;V)}\le 1}\left|\delta\mathcal{G}_n[\varphi_m](\psi) - \lambda\,p\int_\Omega |\varphi_m|^{p-2}\,\varphi_m\,\psi\,dx\right|\right) = 0, \tag{4.13}$$

那么存在 $\varphi \in \mathcal{S}_p(\Omega)\cap W^{1,p}_0(\Omega;V)$，使得

$$\lim_{m\to\infty} \|\varphi_m - \overline{\varphi}\|_{W^{1,p}(\Omega;V)} = 0,$$

取一个子列。此处我们用 $\delta\mathcal{G}_n[\varphi_m]$ 表示在 φ_m 处计算的 $\mathcal{G}_n$ 的一阶变分，即 e.

$$\delta\mathcal{G}_n[\varphi_m](\psi) = p\int_\Omega \langle|\nabla\varphi_m|^{p-2}\,\nabla\varphi_m, \nabla\psi\rangle\,dx + p\int_\Omega V_n\,|\varphi_m|^{p-2}\,\varphi_m\,\psi\,dx, \quad \text{for every } \psi \in W^{1,p}_0(\Omega;V).$$

我们注意到，序列 $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 在 $W^{1,p}_0(\Omega;V)$ 中有界：事实上

$$\|\varphi_m\|_{W^{1,p}_0(\Omega;V)} \le \Big(1 + \max\{1,\varepsilon_n^{-1}\}\,\mathcal{G}_n(\varphi_m)\Big)^{\frac{1}{p}},$$

且最后一项在 m 中一致有界，这得益于（4.11）和（4.12）。因此，取一个子列后，它收敛到某个 $\varphi \in W^{1,p}_0(\Omega;V)$，在 $W^{1,p}_0(\Omega;V)$ 中弱收敛，并在 $L^p(\Omega)$ 中强收敛，这得益于命题 2.7。这已经保证了

$$\overline{\varphi} \in \mathcal{S}_p(\Omega)\cap W^{1,p}_0(\Omega;V).$$

现在我们可以进行标准论证。为简便起见，我们设

$$\theta_m := \sup_{\|\psi\|_{W^{1,p}_0(\Omega;V)}\le 1}\left|\delta\mathcal{G}_n[\varphi_m](\psi) - \lambda\,p\int_\Omega |\varphi_m|^{p-2}\,\varphi_m\,\psi\,dx\right|.$$

鉴于 （4.13）中的数列是正数构成的无穷小序列。特别地，我们有

$$\left|\delta\mathcal{G}_n[\varphi_m](\varphi_m-\overline{\varphi})\right| \le \theta_m \|\varphi_m-\overline{\varphi}\|_{W_0^{1,p}(\Omega;V)} + \lambda\, p \left|\int_\Omega |\varphi_m|^{p-2}\,\varphi_m\,(\varphi_m-\overline{\varphi})\,dx\right|. \tag{4.14}$$

注意到，根据 H¨older 不等式和（4.11），有

$$\left|\int_\Omega |\varphi_m|^{p-2}\varphi_m(\varphi_m-\overline{\varphi})\,dx\right| \le \|\varphi_m-\overline{\varphi}\|_{L^p(\Omega)}. \tag{4.15}$$

由于序列 $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 在 $W^{1,p}_{0}(\Omega;V)$ 并且在 $L^p(\Omega)$ 中强收敛，根据（4.14）和（4.15）可得

$$\lim_{m\to\infty}\left|\delta\mathcal{G}_n[\varphi_m](\varphi_m-\overline{\varphi})\right| = 0.$$

另一方面，根据弱收敛，我们有

$$\lim_{m\to\infty}\left|\delta\mathcal{G}_n[\overline{\varphi}](\varphi_m-\overline{\varphi})\right| = 0,$$

同样成立。将它们合并可得

$$\lim_{m\to\infty}\left|\delta\mathcal{G}_n[\varphi_m](\varphi_m-\overline{\varphi}) - \delta\mathcal{G}_n[\overline{\varphi}](\varphi_m-\overline{\varphi})\right| = 0.$$

回顾 $\mathcal{G}_n$的定义，由此可以推断

$$0 = \lim_{m\to\infty}\int_\Omega \langle |\nabla\varphi_m|^{p-2}\nabla\varphi_m - |\nabla\overline{\varphi}|^{p-2}\,\nabla\overline{\varphi}, \nabla\varphi_m-\nabla\overline{\varphi}\rangle\,dx, \tag{4.16}$$

and

$$0 = \lim_{m\to\infty}\int_\Omega V\,\left(|\varphi_m|^{p-2}\,\varphi_m - |\overline{\varphi}|^{p-2}\,\overline{\varphi}\right)\,(\varphi_m-\overline{\varphi})\,dx. \tag{4.17}$$

现在我们可以利用幂函数 $z\mapsto|z|^p$的标准单调性不等式，从而在 $W^{1,p}_{0}(\Omega;V)$中得到所需的强收敛。

L^∞ 界。每个$u_{k,n}$ 全局有界这一事实，连同所声称的 L^∞ 估计，可通过观察到$|u_{k,n}|$ 是如下方程的非负弱次解而得到

$$-\Delta_p v + V_n\,v^{p-1} = \lambda^{\mathrm{LS}}_{k,p}(\Omega;V_n)\,v^{p-1}, \qquad \text{in } \Omega.$$

利用 $V_n\ge 0$，这特别意味着$|u_{k,n}|\in W^{1,p}_{0}(\Omega;V) \subseteq W^{1,p}_{0}(\Omega)$在弱意义下满足

$$-\Delta_p|u_{k,n}| \le \lambda^{\mathrm{LS}}_{k,p}(\Omega;V_n)\,|u_{k,n}|^{p-1}, \qquad \text{in } \Omega.$$

因此我们可以借助 [11, 引理2.3]得出结论。 □

Rem注4.3. 由构造，我们有 $V_n\le V_0$，因此不难看出

$$\lambda^{\mathrm{LS}}_{k,p}(\Omega;V_n) \le \lambda^{\mathrm{LS}}_{k,p}(\Omega;V_0), \qquad \text{for every } n\in\mathbb{N}.$$

因此，由前面的 L^∞ 界，我们特别得到

$$\|u_{k,n}\|_{L^\infty(\Omega)} \le C_{N,p}\left(\lambda^{\mathrm{LS}}_{k,p}(\Omega;V_0)\right)^{\frac{N}{p^2}} =: M_k, \tag{4.18}$$

关于 n一致。

推论 4.4。 设 $1 < p < \infty$ ，并设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ 为一个开集，使得 $\mathcal{E}_p(\Omega) < +\infty$。假设存在 $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ，使得

$$\lambda_{k,p}^{\mathrm{LS}}(\Omega) < \mathcal{E}_p(\Omega).$$

采用命题 4.2的记号，对每一个 $1 \le \ell \le k$ 存在一个指标 $n_\ell \in \mathbb{N}$ 以及两个正数常量 C_ℓ 和 α_ℓ 独立于 n ，使得

$$|u_{\ell,n}(x)| \le C_\ell\, e^{-\alpha_\ell |x|}, \qquad \textit{for a. e. } x \in \Omega \textit{ and for every } n \ge n_\ell. \tag{4.19}$$

证明。 我们首先注意到，在既定假设下， $\mathcal{E}_p(\Omega) > 0$。特别地，引理2.5保证$\lambda_{1,\,p}(\Omega) > 0$。关于$\lambda_{k,\,p}^{\mathrm{LS}}(\Omega)$的假设，连同性质（4.10），蕴含对每一个 $\ell \in \{1, \dots, k\}$ 存在 $n_\ell \in \mathbb{N}$ 以及一个正数 λ_ℓ，满足$\lambda_{\ell,\,p}^{\mathrm{LS}}(\Omega) < \lambda_\ell < \mathcal{E}_p(\Omega)$，使得

$$\lambda_{\ell,p}^{\mathrm{LS}}(\Omega; V_n) < \lambda_\ell, \qquad \text{for every } n \ge n_\ell,$$

同样如此。特别地，我们得到$u_{\ell,\,n}| \in W^{1,\,p}_{0}(\Omega)$是该方程的一个非负次解

$$-\Delta_p u = \lambda_\ell\, u^{p-1}, \qquad \text{in } \Omega,$$

对每一个 $n \ge n_\ell$。注意到$u_{\ell,\,n}$具有单位 $L^p(\Omega)$范数，应用命题3.1，我们得到存在 $C = C(N,\ p,\ \lambda_\ell,\ \Omega)$和 $\alpha = \alpha(p,\ \lambda_\ell,\ \Omega)$，使得$u_{\ell,\,n}$满足一致衰减估计

$$|u_{\ell,n}(x)| \le C_\ell\, e^{-\alpha_\ell |x|}, \qquad \text{for a. e. } x \in \Omega \text{ and for every } n \ge n_\ell.$$

证明至此结束。 □

5. Proof of the Main Theorem

如前所述，假设 (1.7) 确保 $\lambda_{1,p}(\Omega) > 0$。接下来我们将证明分为两部分：首先证明每个低于阈值 $\mathcal{E}_p(\Omega)$ 的极小极大值都是特征值。然后，我们说明如何得到相关特征函数在无穷远处的指数衰减。

步骤 *1*：低特征值。我们可以假设 $\mathcal{E}_p(\Omega) < +\infty$，否则，正如引言中所述，我们已经知道每个$\lambda_{k,\,p}^{\mathrm{LS}}(\Omega)$ 都定义一个特征值。我们希望证明，对于陈述中的每个固定指标 $1 \le \ell \le k$ ，命题 4.2 中构造的序列 $\{u_{\ell,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 $\lambda_{k,p}^{\mathrm{LS}}(\Omega)$ 对应的一个特征函数（至多取一个子列）。首先注意，根据构造，对于每个，我们有

$$\{u_{\ell,n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}_p(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega) \quad \text{and} \quad \int_\Omega |\nabla u_{\ell,n}|^p\, dx \le \lambda_{\ell,p}^{\mathrm{LS}}(\Omega; V_0), \qquad \text{对于每个 } n \in \mathbb{N}. \tag{5.1}$$

因此，序列 $\{u_{\ell,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$在 $W^{1,\,p}_{0}(\Omega)$ 中有界。因此，取一个子列后，它在 $W^{1,\,p}_{0}(\Omega)$ 中弱收敛于某个极限函数 $u_\ell \in W^{1,p}(\Omega)$。此外，借助推论 4.4，并应用经典的 Riesz-Fr´echet-Kolmogorov 紧性定理，我们还可以确保该序列在 $u_\ell \in \mathcal{S}_p(\Omega)$ 中强收敛，从而得到$u_\ell \not\equiv 0$。我们断言， u_ℓ 是所需的特征函数。为证明这一点，我们将说明可以在方程的弱形式中取极限

$$-\Delta_p u_{\ell,n} + V_n\, |u_{\ell,n}|^{p-2}\, u_{\ell,n} = \lambda_{\ell,p}^{\mathrm{LS}}(\Omega; V_n)\, |u_{\ell,n}|^{p-2}\, u_{\ell,n}, \qquad \text{in } \Omega. \tag{5.2}$$

为此，令 $R > 0$ 和 $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 为一个截断函数，使得

$$0 \le \zeta \le 1, \quad \zeta = 1 \text{ on } B_R, \quad \zeta = 0 \text{ on } \mathbb{R}^N \setminus B_{2R}, \quad \|\nabla\zeta\|_\infty \le \frac{C}{R},$$

其中某个维数常数为 $C > 0$。注意，由于 (4.18)，我们还可以假设序列 $\{u_{\ell,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $*$–中弱收敛于 u_ℓ，其取值于 $L^\infty(\Omega)$。特别地，我们也有 $u_\ell \in L^\infty(\Omega)$。

因此，我们可以用函数 5.2的弱形式检验（ $\zeta\,(u_{\ell,n} - u_\ell) \in W^1_{,0}{}^{p}(\Omega;\, V)$。根据引理 2.8，这是允许的。由此得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega \langle |\nabla u_{\ell,n}|^{p-2}\,\nabla u_{\ell,n}, \nabla(u_{\ell,n} - u_\ell)\rangle\,\zeta\,dx &= \lambda^{\mathrm{LS}}_{\ell,p}(\Omega; V_n)\int_\Omega |u_{\ell,n}|^{p-2}\,u_{\ell,n}\,(u_{\ell,n} - u_\ell)\,\zeta\,dx\\ &\quad - \int_\Omega V_n\,|u_{\ell,n}|^{p-2}\,u_{\ell,n}\,(u_{\ell,n} - u_\ell)\,\zeta\,dx\\ &\quad - \int_\Omega \langle |\nabla u_{\ell,n}|^{p-2}\,\nabla u_{\ell,n}, \nabla\zeta\rangle\,(u_{\ell,n} - u_\ell)\,dx.\end{aligned}$$

利用一致有界性（5.1）和强 $L^p(\Omega)$ 收敛，不难看出右侧的第一项和第三项趋于 0，当 n 趋于 ∞ 时。至于第二项，利用 ζ 的性质以及 L^∞ 界（4.18），可得

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega V_n\,|u_{\ell,n}|^{p-2}\,u_{\ell,n}\,(u_{\ell,n} - u_\ell)\,\zeta\,dx\right| &\le \varepsilon_n\int_\Omega V\,\zeta\,|u_{\ell,n}|^{p-1}\,|u_{\ell,n} - u_\ell|\,dx\\ &\le \varepsilon_n\,M_\ell^{p-1}\,\big(M_\ell + \|u_\ell\|_{L^\infty(\Omega)}\big)\int_{B_{2R}} V\,dx.\end{aligned}$$

利用 $V \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$，我们也可得出该积分趋于 0。因此，得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \langle |\nabla u_{\ell,n}|^{p-2}\,\nabla u_{\ell,n}, \nabla(u_{\ell,n} - u_\ell)\rangle\,\zeta\,dx = 0.$$

另一方面，我们还得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \langle |\nabla u_{\ell}|^{p-2}\,\nabla u_{\ell}, \nabla(u_{\ell,n} - u_\ell)\rangle\,\zeta\,dx = 0,$$

这　　这直接由梯度在 $L^p(\Omega)$ 中的弱收敛得到。因此我们可以推断　　r

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \langle |\nabla u_{\ell,n}|^{p-2}\,\nabla u_{\ell,n} - |\nabla u_{\ell}|^{p-2}\,\nabla u_{\ell}, \nabla(u_{\ell,n} - u_\ell)\rangle\,\zeta\,dx = 0,$$

也成立。特别地，这意味着

$$\lim_{n\to\infty}\|\nabla u_{\ell,n} - \nabla u_\ell\|_{L^p(B_R)} = 0, \qquad \text{for every } R > 0, \tag{5.3}$$

这是由凸幂函数 $z \mapsto |z|^p$ 的标准单调性不等式得到的。

现在我们希望在恒等式中取极限

$$\int_\Omega \langle |\nabla u_{\ell,n}|^{p-2}\,\nabla u_{\ell,n}, \nabla\varphi\rangle\,dx + \int_\Omega V_n\,|u_{\ell,n}|^{p-2}\,u_{\ell,n}\,\varphi\,dx = \lambda^{\mathrm{LS}}_{k,p}(\Omega; V_n)\int_\Omega |u_{\ell,n}|^{p-2}\,u_{\ell,n}\,\varphi\,dx,$$

对每个 $\varphi \in C^\infty_0(\Omega)$。对于最左边的一项，只需使用 (5.3)，因为 φ是紧支撑的。对于最右边的一项，我们可以使用强 $L^p(\Omega)$ 收敛以及 (4.10。最后，我们注意到

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega V_n\,|u_{\ell,n}|^{p-2}\,u_{\ell,n}\,\varphi\,dx = 0, \qquad \text{for every } \varphi \in C^\infty_0(\Omega).$$

事实上，同样根据一致的 L^∞ 有界性估计 (4.18)，我们有

$$\left|\int_\Omega V_n\,|u_{\ell,n}|^{p-2}\,u_{\ell,n}\,\varphi\,dx\right| \le \varepsilon_n\int_\Omega V\,|u_{\ell,n}|^{p-1}\,|\varphi|\,dx \le \varepsilon_n\,\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\,M_\ell^{p-1}\int_{\mathrm{spt}(\varphi)} V\,dx,$$

并且当 n 趋于 ∞时，最后一个量趋于 0。

因此，让 n 趋于 ∞，我们得到

$$\int_\Omega \langle |\nabla u_\ell|^{p-2}\,\nabla u_\ell, \nabla\varphi\rangle\,dx = \lambda^{\mathrm{LS}}_{\ell,p}(\Omega)\int_\Omega |u_\ell|^{p-2}\,u_\ell\,\varphi\,dx, \qquad \text{for every } \varphi\in C_0^\infty(\Omega).$$

由于 $u_\ell \not\equiv 0$，我们已经证明 u_ℓ 是 Ω 上 Dirichlet p–Laplacian 的特征函数，其对应特征值为 $\lambda^{\mathrm{LS}}_{\ell,\,p}(\Omega)$。

第 2 步：无穷远处的衰减。对于 $\ell\in\{1,\dots,k\}$，若 u_ℓ 是与 $\lambda^{\mathrm{LS}}_{\ell,p}(\Omega)$ 对应的特征函数，则 $|u_\ell|$ 是 (3.1) 的下解，且 $\lambda=\lambda^{\mathrm{LS}}_{\ell,\,p}(\Omega)<\mathcal{E}_p(\Omega)$。根据命题 3.1，它满足所需的指数衰减估计。注意，由于 p–Laplacian 的特征函数是 $C^{1,\,\alpha}$(例如参见经典文献 [17] 以及较新的 [3, 定理 1。1]），我们可以确认衰减估计实际上处处成立，而不仅仅几乎处处成立。

6. Some examples

6.1. 具有巨大核心的集合。 设 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ 为一个无界连通开集，并具有如下性质：存在一个有界开子集 $\Omega_0\subsetneq\Omega$（“巨大核心”），使得

$$\lambda^{\mathrm{LS}}_{k,p}(\Omega_0)<\mathcal{E}_p(\Omega), \qquad \text{for some } k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}. \tag{6.1}$$

由区域单调性，性质（6.1）进而蕴含

$$\lambda^{\mathrm{LS}}_{k,p}(\Omega)<\mathcal{E}_p(\Omega).$$

因此，我们的主定理适用，从而保证对每个 $\ell\in\{1,\dots,k\}$，极小极大值 $\lambda^{LS}_{\ell,\,p}(\Omega)$ 是 Ω 上狄利克雷 p–拉普拉斯算子的一个特征值。

作为这种情况的一个简单显式例子，我们可以考虑一条附有足够大的球的无限条带：这样的球即代表“巨大核心”。事实上，若我们取

$$\Omega_0=B_R \qquad\text{and}\qquad \Omega=\left(\left(-\frac12,\frac12\right)\times\mathbb{R}^{N-1}\right)\cup\Omega_0,$$

则不难证明

$$\lambda^{\mathrm{LS}}_{k,p}(\Omega_0)=R^{-p}\,\lambda^{\mathrm{LS}}_{k,p}(B_1), \qquad \mathcal{E}_p(\Omega)=\lambda_{1,p}\left(\left(-\frac12,\frac12\right)\right)=:(\pi_p)^p.$$

因此，对于任意给定的 $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$，只要将半径 R 选择为满足

$$\frac{\left(\lambda^{\mathrm{LS}}_{k,p}(B_1)\right)^{\frac1p}}{\pi_p}<R.$$

注意，对于这个集合 Ω，嵌入 $W^{1,\,p}_{0}(\Omega)\hookrightarrow L^p(\Omega)$ 不是紧的。

6.2. **弯曲波导**。 关于弯曲波导（线性）谱理论的分析已有大量文献，最早可追溯至 Exner 和 Šeba 的开创性工作 [18]（另见 [23] Goldstone 和 Jaffe 的论文）。

定理 4.1] 的里程碑式结果 [18, 可概括如下：直线平面条带 Ω 的谱是纯本质谱（因此，谱底 λ_1(Ω) 无法取到），而只需将其“稍微”弯曲~，就能得到一个新的区域 Ω，使得正特征函数可以取到 λ_1(Ω)。因此，这种几何变形至少会在本质谱底部之下产生一个特征值。关于旨在给出该曲率诱导特征值定量下界的相关结果，参见 [4] ；关于系统研究这一现象并兼顾高维情形的著作，参见 [19] 。

非线性情形中的此类现象研究要少得多：据我们所知，此类结果仅见于 [5]Baldelli 和 Krejˇciˇrı́k 的研究。更确切地说，作者考虑如下形式的开集

$$\Omega = \left\{ \Gamma(s) + \sum_{j=1}^{N-1} t_j\, \nu_j(s) \,:\, s \in \mathbb{R},\ \mathbf{t} := (t_1, \dots, t_{N-1}) \in B' \right\}, \tag{6.2}$$

其中：

- $\Gamma:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ 是一条 $C^{1,1}$ 曲线，使得对每一个 $s \in \mathbb{R}$都有 $|\Gamma'(s)| = 1$ ，其曲率函数κ属于 $L^\infty(\mathbb{R})$;
- 每个 $\nu_j \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ 几乎处处可微，且

$$\langle \nu_j(s), \nu_i(s) \rangle = \delta_{ij}, \qquad \langle \nu_j(s), \Gamma'(s) \rangle = 0, \qquad \text{for every } i, j \in \{1, \dots, N-1\},\ s \in \mathbb{R};$$

- B' 要么是一个以原点为中心的$(N-1)$–维球，要么是一个以原点为中心的$(N-1)$–维球壳，两种情形均如此。

此外，假定如下不重叠条件

$$\sup_{\mathbf{t} \in B'} |\mathbf{t}|\, \|\kappa\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < 1. \tag{6.3}$$

简而言之，集合Ω是曲线 Γ的像的一个（足够薄的）光滑管状邻域。

接着，在 [5, 推论 1] 中证明了，如果 Ω 是一个弯曲管，即 $\kappa \neq 0$ ，那么以下结果成立：

$$\lim_{|s| \to \infty} \kappa(s) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_{1,p}(\Omega) < \mathcal{E}_p(\Omega). \tag{6.4}$$

因此，我们可以应用主定理，并确保值 $\lambda_{1,\ p}$(Ω) 由某个 ˇ 正特征函数取得，也就是说，Exner-Seba 结果的非线性对应结论成立。

6.3. **无限鞭子**。 现在我们给出一个无界连通开集 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$的例子，它具有以下性质：

- $\mathcal{E}_p(\Omega) < +\infty$
- 成立

$$\lambda^{\mathrm{LS}}_{k,p}(\Omega) < \mathcal{E}_p(\Omega), \qquad \text{for every } k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

因此，根据我们的主定理，无穷多个极小极大值 $\lambda_{k,\,p}^{\mathrm{LS}}(\Omega)$ 均为狄利克雷 p–拉普拉斯算子的特征值。

将按平面弯曲波导的形式构造这样的集合（见上一小节）。更准确地说，我们定义 $C^{1,\,1}$ 曲线

$$\gamma_n(t) = \begin{cases} \left(t, \dfrac{1+\cos t}{n+1}\right), & \text{if } t \in (-\pi, \pi), \\ (t, 0), & \text{if } |t| \geq \pi, \end{cases},$$

并首先考虑一族开集 Ω_n，其定义依据（6.2），取

$$B' = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad \text{and} \qquad \Gamma_n(s) = \gamma_n(\phi_n(s)).$$

这里 $\phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是递增的变量替换，满足 $\phi_n(0) = 0$ 且 $|\Gamma_n'(s)| = 1$，对每个$s \in \mathbb{R}$均成立。注意，Γ_n 是一条 $C^{1,\,1}$ 曲线。在这种情形下，曲率函数 κ_n 为

$$\kappa_n(s) = -\frac{(n+1)^2\,\cos\phi_n(s)}{\left((n+1)^2 + \sin^2\phi_n(s)\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{if } s \in (-s_0, s_0), \qquad \text{where } s_0 := \int_0^\pi \sqrt{1 + \frac{\sin^2 t}{(n+1)^2}}\, dt,$$

否则为零。特别地，对于每个$n \in \mathbb{N}$，不重叠条件（6.3）均成立。我们还注意到，对于每个 $R \geq 2\,\pi$，有

$$(-\infty, -R) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \subseteq \Omega_n \setminus \overline{B_R} \subseteq \mathbb{R} \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

回顾一下，对于形如 $(-\infty,\ b) \times (-a,\ a)$ 的半条带，我们有

$$\lambda_{1,p}\big((-\infty, b) \times (-a, a)\big) = \lambda_{1,p}\big((-a, a)\big) = \left(\frac{\pi_p}{2\,a}\right)^p,$$

于是我们得到

$$\lambda_{1,p}(\Omega_n \setminus \overline{B_R}) = \big(\pi_p\big)^p, \quad \text{for every } R \geq 2\,\pi \qquad \text{and thus} \qquad \mathcal{E}_p(\Omega_n) = \big(\pi_p\big)^p,$$

得益于 $\lambda_{1\,\text{关于}\,p}$ 集合包含的单调性。因此，应用（6.4），可得

$$\lambda_{1,p}(\Omega_n) < \mathcal{E}_p(\Omega_n) = \big(\pi_p\big)^p, \qquad \text{for every } n \in \mathbb{N}.$$

连续性论证表明，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $L_n > \pi$，使得有界开集

$$\mathcal{O}_n := \Omega_n \cap \Big((-L_n, L_n) \times \mathbb{R}\Big),$$

仍然满足

$$\lambda_{1,p}(\mathcal{O}_n) < \pi_p^p \qquad \text{for every } n \in \mathbb{N}. \tag{6.5}$$

现在，通过适当地将集合 $\mathcal{O}_n$ 拼接起来，就得到了所需的开集 Ω，从而构造出如图 1 所示的“无限鞭子”。更确切地说，我们记

$$\widetilde{\mathcal{O}_n} := \Omega_n \cap \Big([-L_n, L_n] \times \mathbb{R}\Big),$$

并定义平移参数

$$\tau_0 = L_0 \qquad \text{and} \qquad \tau_n = 2\,(L_0 + \cdots + L_{n-1}) + L_n, \quad \text{for } n \geq 1.$$

于是我们得到以下结果



FIGURE 1. 引理 6.1中的“无限鞭子”。这可以看作虚线所示曲线的管状邻域，该曲线在无穷远处是“渐近直线”。

引理6.1 (无限鞭子). 沿用前面的记号，我们定义

$$\Omega = \left((-\infty,0)\times\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)\cup\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}\left(\widetilde{\mathcal{O}_n}+\tau_n\,\mathbf{e}_1\right)\right),$$

其中 $\mathbf{e}_1=(1,0)$。于是我们有：

(1) $\mathcal{E}_p(\Omega)=\left(\pi_p\right)^p$;(2) $\lambda_k^{\mathrm{LS},\,p}(\Omega)<\mathcal{E}_p(\Omega)$，
对每个 $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$。

证明。 我们先计算 $\mathcal{E}_p(\Omega)$。根据构造，对每个 $n\in\mathbb{N}$，都有以下包含关系

$$(-\infty,-\tau_n)\times\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\subseteq\Omega\setminus\overline{B_{\tau_n}}\subseteq\mathbb{R}\times\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{2}{n+1}\right),$$

由此立即得到

$$\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{-p}\left(\pi_p\right)^p\le\lambda_{1,p}(\Omega\setminus\overline{B_{\tau_n}})\le\left(\pi_p\right)^p.$$

后者在 n 趋于 ∞时取极限，证明了 $\mathcal{E}_p(\Omega)=(\pi_p)^p$。

现在，我们可以利用（6.5）证明第（2）点。具体而言，我们固定 $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$，并对每个 $1\le n\le k$，取 $U_n\in\mathcal{S}_p(\Omega)$ 为与 $\lambda_{1,p}(\mathcal{O}_n+\tau_n\mathbf{e}_1)$相关联的唯一正特征函数。我们将其在 $\Omega\setminus(\mathcal{O}_n+\tau_n\mathbf{e}_1)$ 中延拓为零。注意，这样的特征函数存在，因为该集合有界。

由于 $\{U_1,U_2,\dots,U_k\}$ 的支集互不相交，我们可知它们生成了 $W^{1,p}_0(\Omega)$ 的一个 $k-$ 维向量子空间

$$K_k:=\mathrm{Vect}\Big(\{U_1,\dots,U_k\}\Big).$$

那么 $K_k \cap \mathcal{S}_p(\Omega)$ 是 $W^1_{\cdot 0}{}^{p}(\Omega)$ 的一个紧对称子集，其属等于 k(例如参见[36,第二章，命题 52])。此外，我们注意到

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i U_i \in K_k \cap \mathcal{S}_p(\Omega) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^p \int_\Omega |U_i|^p \, dx = 1$$
$$\Longleftrightarrow \qquad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{S}^{k-1}_{\ell^p} := \left\{ x \in \mathbb{R}^N \, : \, \sum_{i=1}^k |x_i|^p = 1 \right\}.$$

因此，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\begin{aligned} \lambda^{\mathrm{LS}}_{k,p}(\Omega) \le \max_{\varphi \in K_k \cap \mathcal{S}_p(\Omega)} \int_\Omega |\nabla \varphi|^p \, dx &= \max_{\alpha \in \mathbb{S}^{k-1}_{\ell^p}} \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^p \int_\Omega |\nabla U_i|^p \, dx \\ &= \max_{\alpha \in \mathbb{S}^{k-1}_{\ell^p}} \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^p \, \lambda_{1,p}(\mathcal{O}_i) \\ &< \max_{\alpha \in \mathbb{S}^{k-1}_{\ell^p}} \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^p \, \pi_p^p = \pi_p^p. \end{aligned}$$

注意，我们用到了每个函数的最优性 U_i 以及（6.5）。由此我们得到了所需的结论。□

Appendix A. Technical tools

下面这个不等式是众所周知的；为完整起见，并为了精确控制常数，我们给出证明。

引理 A.1. 对于每个 $1 < p < \infty$，都存在一个常数 $c_p > 0$，使得

$$\Big| |a+b|^p - |a|^p \Big| \le \varepsilon \, |a|^p + \frac{1}{\varepsilon^{p-1}} \, c_p \, |b|^p, \qquad \textit{for every } a, b \in \mathbb{R}^N \textit{ and every } 0 < \varepsilon < 1. \tag{A.1}$$

证明。我们首先写出

$$|a+b|^p - |a|^p = \int_0^1 \frac{d}{dt} |a + t\, b|^p \, dt = p \int_0^1 \langle |a + t\, b|^{p-2} \, (a + t\, b), b \rangle \, dt.$$

由柯西-施瓦茨不等式可得

$$\Big| |a+b|^p - |a|^p \Big| \le p \int_0^1 |a + t\, b|^{p-1} \, |b| \, dt \le p \int_0^1 (|a| + t\, |b|)^{p-1} \, |b| \, dt.$$

对最后一项应用杨氏不等式，可推出

$$\begin{aligned} \Big| |a+b|^p - |a|^p \Big| &\le (p-1)\, \delta \int_0^1 (|a| + t\, |b|)^p \, dt + \delta^{1-p} \, |b|^p \\ &\le 2^{p-1} \delta \, (p-1) \, (|a|^p + |b|^p) + \delta^{1-p} \, |b|^p. \end{aligned}$$

对每个 $\delta > 0$。在第二个不等式中，我们还利用了函数 $\tau \mapsto \tau^p$ 的凸性。最后，取 $\varepsilon > 0$ 并选择 δ，使得

$$2^{p-1} \, (p-1) \, \delta = \varepsilon \, .$$

我们得出结论。□

引理 A.2。 设$(X, \|\cdot\|_X)$和$(Y, \|\cdot\|_Y)$是两个巴拿赫空间。假设 $X \subseteq Y$连续嵌入，即存在一个常数 $C > 0$，使得

$$\|x\|_Y \le C\,\|x\|_X, \qquad \textit{for every } x \in X.$$

那么，对于每个在 X 的范数拓扑下对称且紧的闭集 $K \subseteq X$，有

$$\gamma(K;X) = \gamma(K;Y).$$

证明。 我们首先注意到，序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ 在 X 的范数拓扑下收敛，当且仅当它在 Y 的范数拓扑下收敛。由于包含映射的连续性，其中一个方向显然成立。另一方面，假设

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - \overline{x}\|_Y = 0.$$

由 K 的紧性可知，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 存在一个子列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 及一个点 $y \in K$，使得

$$\lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - \overline{y}\|_X = 0.$$

注意到

$$\|\overline{x} - \overline{y}\|_Y \le \lim_{k\to\infty} \|\overline{x} - x_{n_k}\|_Y + C \lim_{k\to\infty} \|\overline{y} - x_{n_k}\|_X = 0,$$

因此 $y = x$。此外，对每个子列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，我们都可以重复上述论证，并得到它总是存在一个进一步的子列，在 X 中仍收敛到同一极限 x。由此最终可知，整个序列在 X 中收敛，即

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - \overline{x}\|_X = 0,$$

也是如此。

得益于前述性质，对每一个 $k \in \mathbb{N}$，下列事实成立：函数 $f : K \to \mathbb{S}^{k-1}$关于 X 的范数拓扑连续，当且仅当它关于 Y的范数拓扑连续。鉴于Krasnosel'skiĭ属的定义，这足以得出结论。□

Appendix B. The case $p = 2$

在希尔伯特情形 $p = 2$中，我们使用如下特定记号

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{\varphi\in\mathcal{S}_2(\Omega)\cap W_0^{1,2}(\Omega)} \int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx,$$

如引言中那样。在本节中，我们证明主定理中构造的极小极大值与通常的Courant-Fischer极大极小值相重合

$$\lambda_k(\Omega) = \inf\left\{ \max_{u\in K\cap\mathcal{S}_2(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \,:\, K \subseteq W_0^{1,2}(\Omega) \text{ subspace with } \dim K = k \right\},$$

即引言中所回顾的那些。因此，对于 $p = 2$，我们的结果归结为经典情形。

命题 B.1. 设$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$为一个开集，并假设存在 $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ 使得

$$\lambda_{k,2}^{\mathrm{LS}}(\Omega) < \mathcal{E}(\Omega) := \sup_{R>0} \lambda_1(\Omega \setminus \overline{B_R}). \tag{B.1}$$

那么，对于每个 $\ell \in \{1,\dots,k\}$，我们有

$$\lambda_{\ell,2}^{\mathrm{LS}}(\Omega) = \lambda_\ell(\Omega).$$

证明。 我们只需考虑以下情形： $\mathcal{E}(\Omega) < +\infty$，否则结论已包含在[12, 定理 A.2]中。我们可以假设 $k \geq 2$，否则结论显然成立。首先注意，对于每个维数为 ℓ 的向量子空间 $K \subseteq W^{1,2}_0(\Omega)$，都有

$$K \cap \mathcal{S}_2(\Omega) \in \mathcal{W}_{\ell,2}(\Omega),$$

即 $K \cap \mathcal{S}_2(\Omega)$ 是 $W^{1,2}_0(\Omega)$ 的一个紧对称子集，其属等于 ℓ （例如参见[36,第二章，命题 5.2]）。由此可得

$$\lambda^{\mathrm{LS}}_{\ell,2}(\Omega) \leq \lambda_\ell(\Omega).$$

为了证明反向不等式，我们将使用逼近论证[4]。具体而言，让我们考虑命题 4.2，即

$$\varphi \mapsto -\Delta\varphi + V_n\,\varphi,$$

带有齐次狄利克雷边界条件。与该算子自然相关联的二次型由泛函 $\mathcal{G}_n$ 给出，其定义见命题 4.2。根据经典谱理论，对每个固定的 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$，嵌入 $W^{1,2}_0(\Omega; V) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ 的紧性保证该算子具有离散谱，由一列发散的正特征值组成，每个特征值都具有有限重数。它们可通过 Courant-Fischer 公式来刻画

$$\lambda_\ell(\Omega; V_n) := \inf\left\{ \max_{u \in K \cap \mathcal{S}_2(\Omega)} \mathcal{G}_n(u) \,:\, K \subseteq W^{1,2}_0(\Omega; V) \text{ subspace with } \dim K = \ell \right\}.$$

此外，右侧的下确界可由以下对象取得：

$$K_\ell = \mathrm{Vect}\Big(\{u_{1,n}, \dots, u_{\ell,n}\} \Big),$$

即由该算子的前 ℓ 个特征函数生成的向量子空间。事实上，可以选择这些特征函数，使得

$$\int_\Omega u_{i,n}\, u_{j,n}\, dx = \delta_{ij}, \qquad \text{for every } n \in \mathbb{N},\ i,j \in \{1,\dots,\ell\},$$

并且以下刻画也成立：

$$\lambda_\ell(\Omega; V_n) = \min_{\varphi \in \mathcal{S}_2(\Omega) \cap W^{1,2}_0(\Omega; V)} \left\{ \mathcal{G}_n(\varphi) \,:\, \int_\Omega \varphi\, u_{i,n}\, dx = 0,\ i \in \{1,\dots,\ell-1\} \right\}.$$

现在我们可以完成证明了：根据 [12, 定理 A.2], 对每个 $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 我们有

$$\lambda^{\mathrm{LS}}_{\ell,2}(\Omega; V_n) = \lambda_\ell(\Omega; V_n) = \int_\Omega |\nabla u_{\ell,n}|^2\, dx + \int_\Omega V_n\, |u_{\ell,n}|^2\, dx,$$

也就是说，陈述中所声称的等式对近似算子成立。由主定理的证明可知，至多取一个子列后，每个 $\{u_{i,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 都在 $L^2(\Omega)$ 中强收敛于 Ω 上狄利克雷拉普拉斯算子的一个特征函数u_i。特别地，我们仍有

$$\int_\Omega u_i\, u_j\, dx = \delta_{ij}, \qquad \text{for every } i,j \in \{1,\dots,\ell\}. \tag{B.2}$$

[4]这条路径可以避免考虑 Ω 上狄利克雷拉普拉斯算子的谱分解（例如参见 [7, 第 6] 章）。事实上，在对开集所作的假设下，后一个算子的谱可能包含连续部分。相比之下，逼近论证只需要具有离散谱的算子的谱性质。谱理论造诣足够深的读者肯定会觉得我们的论证有些笨拙。

根据命题 4.2 以及狄利克雷积分的下半连续性，我们由此对每个 $\ell \in \{1, \dots, k\}$

$$\lambda^{\mathrm{LS}}_{\ell,2}(\Omega) = \lim_{n\to\infty} \lambda^{\mathrm{LS}}_{\ell,2}(\Omega; V_n) \geq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_{\ell,n}|^2 \, dx \geq \int_\Omega |\nabla u_\ell|^2 \, dx$$

另一方面，通过定义 $\ell-$ 维向量子空间

$$\overline{K} = \mathrm{Vect}\Big(\{u_1, \dots, u_\ell\} \Big),$$

我们得到

$$\begin{aligned} \lambda_\ell(\Omega) \leq \max_{\varphi \in \overline{K} \cap \mathcal{S}_2(\Omega)} \int_\Omega |\nabla \varphi|^2 \, dx &= \max_{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_\ell)\in \mathbb{S}^{\ell-1}} \int_\Omega \left| \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \nabla u_i \right|^2 \, dx \\ &= \max_{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_\ell)\in \mathbb{S}^{\ell-1}} \sum_{i=1}^{\ell} |\alpha_i|^2 \int_\Omega |\nabla u_i|^2 \, dx \leq \int_\Omega |\nabla u_\ell|^2 \, dx, \end{aligned}$$

得益于正交关系（B.2），以及每个 u_i 都是特征函数这一事实。进而，我们得到反向估计

$$\lambda^{\mathrm{LS}}_{\ell,2}(\Omega) \geq \lambda_\ell(\Omega),$$

正如所需。 □

References

[1] S. Agmon, *Lectures on exponential decay of solutions of second-order elliptic equations: bounds on eigenstates of N-body Schrödinger operators* **29**, 。数学札记，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州；东京大学出版社，东京，1982 3。R. Ahlrichs、M. Hoffmann-Ostenhof、T. Hoffmann-Ostenhof、J. D. Morgan III，[2] 屏蔽作用下电子密度衰减的界，物理评论 A（3 **23** 1981 2106 2117 3），（），–。C. A. Antonini，$p-$Laplace 型和 $C^{1,\beta}-$[3] Orlicz-Laplace 型方程的局部与整体正则性，预印本（2026 https://arxiv.org/abs/2601.07140 29），可在以下网址获取 M. S. [4] Ashbaugh、P. Exner，弯曲管中束缚态能量的下界，物理快报 A，150（1990），183–186。30[5] L. Baldelli、D. Krejčiřík，曲线非线性波导，非线性分析，258（2025），论文编号 113814，共 14 页。30[6] F. Bianchi、L. Brasco、R. Ognibene，关于由核心和管道构成的集合的谱，凸分析杂志，31（2024 315 358 13），–。M. Sh. Birman、M. Z. Solomjak，[7] *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space.* 由 S. Khrushchev 和 V. Peller 从 1980 年俄文原版翻译。数学及其应用（苏联丛书）。D. Reidel 出版公司，Dordrecht，1987 2, 3, 35 。A. Braides，牛津数学应用讲座丛书，22，牛津大学出版社，牛津，2002。6[8] L. Brasco，*$\Gamma-$convergence for beginners.* *Handbook of Calculus of Variations for absolute beginners.* Unitext，163，《数学与……》，施普林格，查姆，2025。2、8、12[9] L. Brasco、L. Briani、F. Prinari，尖锐 Poincaré-Sobolev 不等式的极值函数：周期穿孔集合及其他，预印本（2025 https://arxiv.org/abs/2511.20260 9），可在以下网址获取 L. Brasco、L. [11] Briani、F. Prinari，Steiner 对称集合中 Poincare-Sobolev 尖锐常数的极值函数，预印本（2025 https://arxiv.org/abs/2505.11084 13 23 26），可在以下网址获取，,, L. Brasco、E. [12] Parini、M. Squassina，分数阶 $p-$拉普拉斯算子的变分特征值稳定性，离散连续动力系统，**36** 2016 1813 1845 35（），–。R. Carmona、B. Simon，$N-$体量子系统中特征函数和波包的逐点界。[13] V. 下界与路径积分，数学物理通讯，80（1981），59–98。3

[14] T. Champion、L. De Pascale，涉及 $p-$拉普拉斯型算子的非线性特征值问题的渐近行为，爱丁堡皇家学会学报 A 辑，**137** 2007 1179 1195 6, 20 （），–。R. Courant、D. Hilbert，Interscience [15] *Methods of mathematical physics. Vol. I.* 出版社，纽约，纽约州，1953。2[16] G. Dal Maso， *An introduction to* $\Gamma-$*convergence.* 非线性微分方程及其应用进展，8，Birkh¨auser，波士顿，1993。6[17] E. DiBenedetto， $C^{1+\alpha}$ 退化椭圆方程弱解的局部正则性，非线性分析，7（ 1983 827 850 29 ），–。P. [18] Exner、P. ˇSeba，弯曲量子波导中的束缚态，数学物理杂志，**30** 1989 2574 2580 30 （），–。P. Exner、[19] *Quantum waveguides* 2015 H. Kovaˇrik，。理论与数理物理。施普林格，查姆，。 30 [20] E. R. Fadell、P. H. Rabinowitz，奇势算子的分岔与一种替代性拓扑指标，泛函分析杂志，**26** 1977 48 67 4 （），–。G. Franzina，„ *Existence Uniqueness* [21] *Optimization and Stability for low Eigenvalues of some Nonlinear Operators* 2012 `https://cvgmt.sns.it/paper/2102/` 4 ，博士论文（），可在以下网址获取 J. P. Garcıa [22] Azorero、I. Peral Alonso，拉普拉斯算子的存在性与非唯一性：非线性特征值，偏微分方程通讯，$p-$ **12** 1987 1389 1430 4 （），–。J. Goldstone、R.L. Jaffe，扭曲管中的束缚态，物理评论 B，[23] **45** 1992 14100 14107 30 （），–。B. Helffer，Agmon [24] 估计及其应用，美国数学会通告（），即将出版 2026 3, 6 [25] B. Helffer，Agmon 估计及其应用（扩展版），可在网页 `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/∼bernard.helffer/` 3 6 获取，P. D. Hislop、I. M. Sigal，[26] *Introduction to spectral theory. With applications to Schrödinger operators*，应用数学科学丛书，**113** 1996 2 。施普林格出版社，纽约，P. Juutinen、P. Lindqvist，关于 ∞-特征值问题的高 [27] 阶特征值，变分法与偏微分方程，**23** 2005 169 192 4 （），–。A. Lˆe，拉普拉斯算子的特征值问题，非线性分析，$p-$ [28] **64** 2006 1057 1099 4 （），–。P. Lindqvist，一个非线性特征 [29] *Topics in mathematical analysis* 175 203 值问题，载于，–。分析与应用计算丛书，3。世界科学出版公司，Hackensack，新泽西州，2008。4[30] V. Maz'ya，*Sobolev spaces with applications to elliptic partial differential equations*。第二版，修订并增补。数学科学基础丛书 [数学科学基本原理], **342** 2011 2 。施普林格，海德堡，。A. Persson，半有界 Schr¨odinger 算子离散谱部分的界，数学斯 [31] 堪的纳维亚，**8** 1960 143 153 2 （），–。B. Simon， $N-$体量子系统中特征函数和波包的逐点界。I，美国数学会会刊，[32] **42** 1974 395 401 3 （），–。B. Simon， $N-$体量子系统中特征函数和波包的逐点界。II，美国数学会会刊，[33] **45** 1974 454 456 3, 5 （），–。D. Smets，一个用于奇异特征值问题的集中紧性引理及其应用，泛函分析杂志，167（[34] 1999），463–480。6[35] `È. `E. ˇSnol，关于 Schr¨odinger 方程特征函数的行为（俄文），数学文集（新系列），42（ **84** 1957 273 286 3, 5 ）（），–。M. Struwe，[36] *Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems. Fourth edition* 。数学及其交界领域成果。3 数学现代综述系列，34。施普林格出版社，柏林，2008。4、7、22、33、35[37] A. Szulkin， C^1-流形上的 Ljusternik-Schnirelmann 理论，亨利·庞加莱研究所分析非线性年刊，5（1988），119–139。4、25

(L. Brasco) Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di FerraraVia Machiavelli 35,
44121 Ferrara, Italy*Email address*: lorenzo.brasco@unife.it

(L. Briani) School of Computation, Information and Technology,
Technical University of MunichBoltzmannstrasse 3,
85748 Garching bei München, Germany.*Email address*: luca.briani@tum.de

(F. Prinari) Dipartimento di Scienze Agrarie,
Alimentari e Agro-ambientaliUniversità di PisaVia del Borghetto 80,
56124 Pisa, Italy*Email address*: francesca.prinari@unipi.it