arXiv:2602.21184v1 [math.CT] 24 Feb 2026

关于粘合数据、有限环化空间与概形

R. Fioresi*，A. Simonetti*，F. Zanchetta*

**FaBiT*，博洛尼亚大学，*Via Piero Gobetti 87*，*40129* 博洛尼亚，意大利

Abstract. 从下降理论到高阶几何，粘合的思想已融入许多优雅而强大的技术之中，并证明了它对解决诸多问题至关重要。本文介绍一个框架，可将可微流形或概形等重要几何对象，与源自二维半单纯集合上的层的某些有限环化空间联系起来，从而为它们在离散微分几何等领域的应用打开大门。

1. 引言 Introduction

近年来，随着机器学习和深度学习的发展，离散几何重新受到关注。图论和单纯同伦论中的方法对于几何深度学习（GDL）的发展至关重要 [BB2017，GB 2016] 以及拓扑深度学习，[Zam2024], 这些方法将深度学习扩展到具有几何或拓扑结构的数据。事实上，图神经网络（GNN）或单纯神经网络等算法（[Spi2009，BF2021]）在这一领域居于核心地位，正日益受到关注，并在应用中得到更广泛的使用。此外，附属于这些对象的层也备受关注：层神经网络（SNN）如今已成为一个颇具吸引力的研究领域，其基础是胞腔层理论[HG2019，Cu2014]。

另一方面，代数几何与微分几何常常借助离散几何所使用的同一套组合结构来描述其主要研究对象。例如，可微流形或概形往往更适合被理解为它的某个覆盖的Čech神经：这一简单却至关重要的想法最终在下降理论中得到形式化，而下降理论在概形理论、层叠理论以及导出几何中起到了关键作用。在这一语境中，单纯同伦论与范畴论为运用这一概念提供了背景语言。这些理论非常优雅而精深，需要引入许多技术工具，从而使该领域的专家能够识别并证明许多如今处于几何学核心的结果 [Ha1977,Ja2001, Lu2009]。然而，这些工具对于不具备这些技术专门知识的邻近领域从业者而言并不容易掌握。例如，与流形或概形相关联的单纯对象很少被视为“附着于离散对象上的数据”，因而也很少被认为可直接用于应用场景，而且它们的复杂度往往很高。因此，将微分几何、高阶几何或代数几何等领域中发展起来的思想与方法完整地迁移到离散几何一直受到限制，许多离散几何对象往往是

类比于其非离散对应物而构造的，而不是以更为概念化的方式由其非离散对应物（或反之亦然）构造出来。

代数几何领域的近期研究已开始着手解决这一问题。在近期的一项工作中，Salas及其合作者（参见 [S2017a]及其中的参考文献）更深入地研究了有限环化空间这一概念，即底层拓扑空间为有限拓扑空间的环化空间。他们找到了有限环化空间的一个适当子范畴，该子范畴在对某些弱等价局部化后，与普通概形范畴等价；他们也考察了某些有限环化空间与可微流形之间的关系，参见 [CM2019] 及其中的参考文献。这些工作为通过更简单、在某种意义上更离散的对象来理解概形等高度结构化的对象打开了大门。事实上，由于有限拓扑空间与偏序集之间存在等价 [Al2011], ，人们很容易注意到，一个有限环化空间的数据实际上相当于一个偏序集及其上的一个环层：由此，胞腔层理论（即定义在由正则胞腔复形 [HG2019]所导出的偏序集上的层（通常是向量空间层）的理论）与之相距不远；该理论近来已被引入并应用于离散几何和机器学习。

从有限拓扑空间上的环层构造概形，这并不令人意外：在某些假设下，我们可以设想利用离散环化空间中编码的信息，将若干仿射概形粘合起来，并让它们对应于环化空间中的各点。然而，有限拓扑空间（或者说偏序集）所包含的信息，其结构性和可直接获取性都不及半单纯集合或胞腔复形所提供的信息。回想粘合数据的概念（见 [GW2010]），我们便会自然地想到这些对象；可以将其视为维数 2 的截断切赫神经。事实上，考虑一个概形（或者更一般地，一个环化空间） X，以及它的一个由仿射开子概形构成的覆盖$\{U_i \subseteq X\}_{i\in I}$。由这些子概形、它们的交以及余循环条件所给出的恒等关系，便形成了“粘合数据”。将这些数据粘合起来，就是沿着交粘合这些子概形，使得涉及过渡映射的相应余循环条件得到满足；这一过程会得到一个与 X同构的空间。注意，我们可以从 X 构造一个二维有限半单纯集合：将这些子概形作为顶点，它们的交作为边，三重交作为二维单纯形。于是，我们可以将上述几何对象的粘合过程视为粘合与这个二维半单纯集合相关的适当数据。值得注意的是，为了重构 X，无需涉及更高维的单形。现在让我们聚焦于概形建模这一任务。基于前述推理，我们将一个范畴识别为 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$，其对象是由二维有限半单纯集合及其面关联偏序集上的环预层构成的有序对，并满足某些假设。拥有此类对象的范畴确实值得研究，因为在离散几何的许多领域及其应用中，图之类的简单几何对象往往就能为理论发展或实验开展提供足够的几何结构。此外，非交换几何中的基于层的量子化方法 [AFLW2021、Ma2013、DM1994] 也能受益于对代数几何对象的这种范畴化刻画。

我们的构造与单纯下降理论[Go2012、Ja2001], 中的一些构造相似，但我们未能在文献中找到这样一种范畴：它明确地将粘合数据这一概念编码为附加在低维半单纯集合上的额外数据，并探讨其与有限环化空间之间的关系（通常研究的是适当范畴中的单纯对象，而有限环化空间则很少被采用）。此外，我们使用半单纯集合的语言，这使我们的方法有别于 [S2017a]的方法以及胞腔层理论所采用的方法：我们将对象与明确的二维半单纯集合联系起来，而非偏序集；偏序集可能具有更高的复杂度（或者并非源自几何）。值得一提的是，Ladkani 在 [SP2006] 中研究了有限偏序集上的层范畴，而 Liu 在 [SQ2013] 中研究了箭图上的层叠和主丛。不过，他们的工作与我们的研究只有部分关联。

现在我们将介绍本文的内容，并重点阐述我们的主要结果。

在第2 节中，我们回顾半单纯集合的标准材料，特别关注图，并确立本文的记号，参考文献见 [GJ1999、SP2009、EW2018] 。

在第3 节中，我们将粘合数据理论重新表述为某些环化空间函子的理论，这些函子定义在二维半单纯集合的单形范畴上。我们研究由此得到的对象的性质。直观而言，我们将粘合数据视为“图上的环化空间层”。

在第4节中，我们回顾 [S2017a] 的一些构造，并引入和研究范畴 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$。随后，我们在该范畴中确定一类 $\mathcal{W}$ “弱等价”，它们可以提升为我们所谓的“概形右乘性系统”；这是普通右乘性系统的一种较弱概念（参见4.27 及其相关讨论）。由此便可以进行弱意义下的局部化；详情见第4 节。我们将范畴 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$ 按类 $\mathcal{W}$ 局部化，得到范畴$\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}[\mathcal{W}^{-1}]$。请注意，我们的局部化过程与通常的过程略有不同，因为自然的候选 $\mathcal{W}$ 并非右乘性系统。随后我们得到了主要结果。

定理 1.1 (4.34)。 该范畴 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}[\mathcal{W}^{-1}]$ 等价于由准紧半分离概形组成的范畴。

我们还将本文的构造与 Salas 的构造进行比较 [S2017a] ，并指出微分几何背景下若干可能的未来发展方向，同时也作出一些有助于进一步理解我们工作的说明[FSZ2026]。

致谢。 第一作者感谢 Barbara Fantechi 的宝贵讨论。第一作者和最后一位作者感谢 Francesco Vaccarino 的宝贵讨论以及他对我们工作的关注。本研究得到 GNSAGA-Indam、INFN Gast Initiative、PNRR MNESYS、PNRR 高性能计算、大数据与量子计算国家中心（CUP J33C22001170001）以及 PNNR SIMQuSEC（CUP J13C22000680006）的支持。本工作还得到欧盟地平线欧洲计划项目 MSCA-SE CaLIGOLA（项目编号：101086123）、MSCA-DN CaLiForNIA（项目编号：101119552）和 COST 行动 CaLISTA CA21109 的支持。

记号。 为方便读者，我们将在此记录本文通篇所采用的一些记号。

• 我们将以偏序集 $[n] = \{0 \to \cdots \to n\}$、 $n \in \mathbb{N}$为对象、以它们之间的（单射）保序映射为箭头的范畴记为(Δ_+) Δ。对任意 $n \in \mathbb{N}$，我们将其对象基数小于或等于 n的充满子范畴记为($\Delta_{n,+}$) Δ_n。

• 我们将分别用 Sets 和 $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ 表示集合范畴以及基域 $\mathbb{K}$ 上的有限生成向量空间范畴。我们将用 Top 表示拓扑空间范畴，用 RngSpcs、LRngSpcs 分别表示环化空间范畴和局部环化空间范畴。

• 给定一个集合 X， X 上的预序是指一种自反且传递的二元关系。如果该关系还具有反对称性，那么我们就得到一个偏序：此时我们称 X 为偏序集。

• 给定一个范畴 $\mathcal{C}$，我们将其对偶（或相反）范畴记为 $\mathcal{C}^{op}$。最后，给定两个范畴 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$，我们将协变函子 $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 的范畴记为 Fun($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$)，或记为$\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$；将反变函子 $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$的范畴记为 Pre($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$)：=Fun($\mathcal{A}^{op}$, $\mathcal{B}$)。我们将 Pre($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$) 的对象称为预层。如果范畴 $\mathcal{B}$ 是集合范畴 Sets，或者上下文明确，我们将 Pre($\mathcal{C}$, $\mathcal{B}$) 简记为 Pre($\mathcal{C}$)。

2. Semisimplicial sets、 graphs and sheaves

在本节中，我们首先回顾什么是（半）单纯集合，然后介绍这一背景下关于图的一些基本记号。最后，我们回顾基上的层以及与预序集相关联的亚历山德罗夫拓扑的一些基本概念。

2.1. （半）单纯集合与有向图的范畴。

定义 2.1. 我们将（半）单纯集合的范畴定义为范畴 sSets :=Pre(Δ,Sets)（ssSets :=Pre(Δ_+, Sets)）。对于给定的（半）单纯集合 X，对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们将集合 $X([n])$ 记作 X_n，并称其元素为单形。将集合范畴替换为任意范畴 $\mathcal{C}$，便得到中的（半）单纯对象 $\mathcal{C}$的概念。我们将（半）余单纯集合定义为 Fun(Δ,Sets)（Fun(Δ_+,Sets)），并分别将 n 维（半）单纯集合和（半）余单纯集合定义为 Pre(Δ_n,Sets)、（Pre($\Delta_{n,+}$,Sets)）、Fun(Δ_n, Sets)、（Fun($\Delta_{n,+}$, Sets)）。如果 $X_n \neq \emptyset$ 且对$m > n$有 $X_m = \emptyset$，我们称（余）半单纯集合 X 具有维数 n。

备注 2.2. 根据定义，我们的 n维单纯集合并非单纯集合，而在文献中，通常称单纯集合的维数为 n，如果它同构于其 n骨架 [GJ1999]。不过，包含函子 $\Delta_n \subseteq \Delta$诱导出一个截断函数 tr_n : sSets $\to$sSets$_n$，其全忠实左伴随为 sk_n : sSets$_n$ $\to$sSets 的 n骨架函子。对于给定的单纯集合 X，$sk_n \circ tr_n(X)$ 是通常意义下的 n骨架（另见 [Lu2018, 标签 04ZY]）。这就建立了我们的定义与最常见定义之间的联系。

定义 2.3. 我们将有向图 的范畴定义为 Pre($\Delta_{1,\ +}$，集合范畴)，并将其记作 diGraphs。将集合范畴替换为任意范畴$\mathcal{C}$，即可得到 中的有向图 $\mathcal{C}$这一概念。

给定一个有向图 G，我们将集合 G_0 和 G_1 （或 V_G 和 E_G）分别称为顶点 和边 的集合。我们可以用以下方式表示一个有向图

图表，其中映射 h_G 和 t_G 分别称为头和尾。

$$E_G \underset{t_G}{\overset{h_G}{\rightrightarrows}} V_G$$

请注意，这个有向图的定义允许图中存在具有相同头和尾的多条边（有时称为有向多重图），也允许存在自环。我们用 diGraphs$_{\leq 1}$ 表示 diGraphs 的充满子范畴，其对象中连接每一对顶点的边至多有一条。此外，请注意，对于给定的$G \in$ diGraphs，V_G 和 E_G 都可能是无限集合。

备注 2.4. 半单纯集合与单纯集合密切相关。后者范畴因其几何实现具有良好性质，在单纯同伦论中最常用 [Ma1992，GJ1999]。前者在早期现代代数几何中出现得更为频繁，例如 [SGA4]。就本文而言，半单纯对象因其组合结构较为简单，提供了更自然的背景。不过，读者不应认为它们是人为构造的范畴：半单纯对象存在几何实现（“胖实现”），而单纯集合 X 的几何实现总是与通过包含映射 X 预复合所得到的半单纯集合的几何实现 $\Delta_+^{op} \subseteq \Delta^{op}$ 同伦等价（参见[EW2018，第 2]节及其中的讨论）。此外，在维数小于或等于一时，单纯集合范畴与半单纯集合范畴等价，[Lu2018，命题 001N], 因此，有向图可以视为单纯集合。

由于半单纯集合不过是集合预层，我们有如下 [KS2006]。

命题 2.5. 半单纯集合范畴具有所有极限和余极限，并且它们是逐点计算的。

特别地，半单纯集合的纤维积存在。我们定义（半）单形之 X的范畴 $\Gamma(X)$，对于给定的（半）单纯集合 X，见 [Ho2007]。我们简要回顾其构造。

对于给定的（半）单纯集合 X，由米田引理，映射 $\Delta^n \to X$（相应地，$\Delta_+^n \to X$）与 $X([n]) = X_n$的元素成双射，其中 $\Delta^n = \mathrm{Hom}_{\Delta}(-, [n])$（相应地，$\Delta_+^n = \mathrm{Hom}_{\Delta_+}(-, [n])$）。因此，当 n变动时，我们把这样的映射取作 $\Gamma(X)$的对象。为了定义 $\Gamma(X)$的态射，我们说明何时在 $\Gamma(X)$的两个对象之间存在一个箭头，即 $a \in X_n$ 与 $b \in X_m$。每当我们可以写出一个交换图表时，我们就说存在这样的箭头：

(1)
$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & \longrightarrow & \Delta^m \\ & {\scriptstyle a}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle b} & \\ & X & \end{array}$$
分别。
$$\begin{array}{ccc} \Delta_+^n & \longrightarrow & \Delta_+^m \\ & {\scriptstyle a}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle b} & \\ & X & \end{array}$$

这里我们再次运用了米田引理。

定义 2.6。 给定一个（半）单纯集合 X，我们定义 $\Gamma(X)$ 为 X 的（半）单形范畴，其对象为映射 $\Delta^n \to X$（分别为 $\Delta_+^n \to X$），态射为（1）中的图表。注意，（半）单纯集合的态射 $f : X \to Y$会在它们各自的单形范畴之间诱导一个函子，我们将其记作 $\Gamma(f)$。

观察 2.7。 对于半单纯集合 X， $\Gamma(X)$的对象和箭头可用于定义一个偏序集 P_X，其元素为 X 的单形，并且$x \leq y$ 当且仅当 $\mathrm{Hom}^{\Gamma(X)}(x,\ y)$ 非空。

备注 2.8。 注意，对于半单纯集合 X，范畴 $\Gamma(X)$ 与以偏序集P_X 为对象的范畴之间存在一个非典范同构，该偏序集的对象为 P_X 的元素，箭头为 $x \leq y$。

回顾一下，无向图 G 是由顶点和边组成的一对 $(V,\ E)$，其中边定义为顶点的无序对构成的多重集，态射也相应地定义（参见 [Di2006，GR2001]关于 V 和 E 有限集合的情况；不过这里我们采用更一般的定义）。记它们构成的范畴为 Graphs。我们称简单无向图的范畴为 $\mathbf{Graphs}_{\leq 1}$，即每对顶点之间至多有一条边相连的无向图所构成的范畴。

观察 2.9。 在观察2.7 中，我们给出了一种将偏序集与半单纯集合关联起来的方法，因此也能与有向图关联起来。我们也可以按如下方式对无向图做同样的处理。设 $G = (V,\ E) \in \mathbf{Graphs}$ 是一个无向图。定义与之关联的偏序集 $\mathcal{P}_G$，其底集为 $V \cup E$，并且$x \leq y$ 当且仅当 x 是边 y 的一个顶点，或者 $x = y$。

2.2. **预序集上的层**。 如果一个拓扑空间由有限个点组成，则称其为有限的 。对于给定的有限空间 X 及一点 $p \in X$，我们定义

$$U_p := \text{ smallest open subset of } X \text{ containing } p$$

$$C_p := \overline{p} = \text{ smallest closed subset of } X \text{ containing } p$$

给定有限拓扑空间 X，我们可以在 X 上定义一个（有限）预序结构：当且仅当 $U_p \supseteq U_q$ 时，令 $p \leq q$ （等价地， $p \in q$）。反过来，给定集合 $\bar{P}$上的一个（不一定有限的）预序 $\leq$，我们可以将 P 视为一个拓扑空间，其拓扑由以下开集构成的基生成：

$$U_p := \{q \in P \mid q \geq p\} \qquad p \in P$$

这个拓扑称为亚历山德罗夫拓扑 [Al2011] （另见 [S2017a]），我们用 $\mathcal{B}_P$ 表示用于生成该拓扑的基。

记号 2.10。 必要时，为避免混淆，我们将用不同的记号表示预序 P （即预序集）以及与之关联的拓扑空间 A（P），如上所述。类似地，对于有限拓扑空间 X，我们将用P（X）表示如上所述与之关联的预序。特别指出，若 X 是一个有限拓扑空间，且 P（X）是与之关联的预序，则 $X = A$（P（X））。我们用 $\mathbf{Open}(X)$ 表示拓扑空间 X 的开集范畴。回顾一下， X 上的层定义为 $\mathbf{Open}(X)$ 上满足恒等公理和粘合公理的预层（例如参见 [Va2025] 定义 2.2.6）。

我们得到以下结果，参见 [S2017a]，其中对这些陈述有清晰的综述。

定理 2.11. 以下陈述成立：

1) 上述构造通过以下函子定义了有限拓扑空间 FTop 与有限预序集 PreSets 之间的范畴等价：

$$P : \mathbf{FTop} \longrightarrow \mathbf{PreSets}, \qquad A : \mathbf{PreSets} \longrightarrow \mathbf{FTop}$$

2) 有限拓扑空间 X 是 T_0 （即不同点具有不同的闭包），当且仅当由拓扑诱导的预序关系 $\leq$ 是反对称的，也就是说， X 是一个偏序集。

备注 2.12. 对于给定的有限拓扑空间 X，不可约开集和不可约闭集分别是 U_p 和 C_p, $p \in X$。若 X 是形如 $A(P)$的拓扑空间，其中 P是某个（不一定有限的）预序，则同样成立。

观察 2.13. 若 X 是一个半单纯集合，我们便得到 P_X ，如观察2.7中所述，因此可以考虑 $A(P_X$上的层。众所周知（例如参见[Va2025] 2.5.1），拓扑空间上的层由其底层拓扑空间的一个基上的层唯一确定。在本例中， $\mathcal{B}_{P_X}$ 的基$A(P_X$由 $A(P_X$的不可约开子集构成。因此，基 $\mathcal{B}_{P_X}$ 上的预层自动就是基 $\mathcal{B}_{P_X}$上的层。此外，若考虑 Open($A(P_X$的充满子范畴，其对象为$\mathcal{B}_{P_X}$的元素，我们会发现它与 P_X同构。综上，我们得到以下命题。

命题 2.14。 设 X 是一个半单纯集合或有限拓扑空间。考虑其偏序集 P_X。则 $A(P_X)$ 上的层范畴等价于$\mathrm{Pre}(P_X)$范畴。

前一个命题不仅适用于集合层，也适用于取值于其他范畴的层，例如阿贝尔范畴等。

例 2.15。 设 $G = (V_G, E_G)$属于图范畴。空间 $A(\mathcal{P}_G)$的拓扑由以下开集基生成：

- $U_v = \{e \in E_G \mid v \leq e\} \cup \{v\}$，即 v的开星，对每个顶点$v \in V$而言，
- $U_e = \{e\}$，即边 e去掉其顶点后所得的集合，对每个 $e \in E$而言。

从现在起直到本文结尾，除非另有说明，我们都作如下通用假设：所考虑的所有半单纯集合都是有限的。

3. Finite ringed spaces、 gluing data and semisimplicial sets

如 [GW2010], [SP] 所述的粘合数据，使我们能够通过“粘合”满足某些相容条件的局部数据，来定义流形、概形或它们之间的态射等对象。本节旨在借助上一节的半单纯集合语言研究这一概念，以使其可用于各种应用。

3.1. 粘合数据。

我们回顾环化空间的粘合数据的定义（参见 [GW2010],中的 3.5 节，或 [SP]中的 6.33 节）。

环化空间是一个二元组 $(X, \mathcal{O}_X)$，由一个拓扑空间 X及其上的一个环层 $\mathcal{O}_X$ 组成；粘合数据通过一族环化空间及相容条件恢复出一个环化空间。

定义 3.1. 环化空间的粘合数据由以下部分组成：

- a collection of ringed spaces $(U_i, \mathcal{O}_{U_i})_{i \in I}$;
- a collection of open subspaces $(U_{ij} \subseteq U_i)_{i,j \in I}$, $U_{ii} = U_i$, for all $i \in I$.

- 一组环化空间的同构 $(\phi_{ji}: U_{ij} \to U_{ji})_{i,\ j\in I}$ 满足:

$$\phi_{ki} = \phi_{kj} \circ \phi_{ji} \quad \text{on} \quad U_{ij} \cap U_{ik}, \qquad \text{(cocycle condition)}$$

我们将此类数据记作 $((U_i)_{i\in I},\ (U_{ij})_{i,\ j\in I},\ (\phi_{ij})_{i,\ j\in I})$。

我们可以用阿贝尔群层、集合层、向量空间层等替换环层，并由此得到类似的粘合数据概念；下文给出的构造同样适用于这些概念。

按照惯例，只要不会造成混淆，我们有时会用同一个字母表示拓扑空间和环化空间。将环化空间及其间的态射替换为拓扑空间及开嵌入（分别地，概形及其间的开嵌入，等等），便得到拓扑空间（分别地，概形，等等）的粘合数据概念。为明确起见，我们将考察环空间范畴 RngSpcs 中的粘合数据，但我们将证明的许多定义、引理和命题，在用其他范畴（如拓扑空间范畴 Top、概形范畴 Sch 等）替换 RngSpcs 后也同样成立。从现在起，若有两个开嵌入 $f: U \hookrightarrow X$, $g: V \hookrightarrow X$，我们将使用直观记法 $U \cap V$，而不使用更精确的记法 $U \times_X V$。

定义 3.2。若存在由环化子空间 V_i 组成的 X 的一个开覆盖，使得 $V_i \cong U_i$，且这些同构的限制恰当地给出 $V_i \cap V_j \cong U_{ij}$ 及余循环条件，则环化空间 X 可由粘合数据 $((U_i)_{i\in I},(U_{ij})_{i,j\in I}, (\phi_{ij})_{i,j\in I})$ 粘合得到。

给定粘合数据，我们总能找到一个由它粘合得到的环化空间（例如参见 [GW2010] 或 [SP]）。粘合构造本质上相当于取环空间范畴中某个图表的余极限，也就是正向极限：我们现在来探讨这一说法，以便将其纳入我们的讨论。这是一个普遍已知的事实，不过我们更愿意重新表述它，使其适用于有限环化空间的研究（如 [S2017a]）。

我们先引入粘合立方体 这一概念，目前只考虑粘合三个环化空间的问题。

定义 3.3. 我们定义范畴 Ξ为由 7 个对象构成的指标范畴 X_1, X_2, X_3, X_{12}, X_{13}, X_{23}, X_{123} 以及图 3.1 中所示的箭头3.1；图中未画出恒等态射。函子 $F: \Xi \to$ RngSpcs 称为粘合立方体，如果 Ξ 中的所有态射都映为开嵌入，并且图 3.1 中图表的 3 个交换方块都映为笛卡尔方块。3.1

给定一个粘合立方体 F，我们可以沿着“交”（纤维积） $F(X_1)$、 $F(X_2)$ 和 $F(X_3)$ 粘合环化空间，使其满足余循环条件，从而得到一个环化空间 $F(X_{ij})$，它在视觉上占据粘合立方体图中“缺失的顶点” 3.1。这个过程相当于取粘合立方体 Y 的余极限 F。粘合构造自然地产生开嵌入$F(X_i) \hookrightarrow Y$（见 [SP] 6.33）。下面的观察将阐明这些陈述。

观察 3.4。粘合立方体 $F: \Xi \to$ RngSpcs 定义了粘合数据 GD(F)= $((U_i), (U_{ij}), (\phi_{ij}))_{i,\ j\in\{1,2,3\}}$ 反之亦然。要从 F 构造粘合数据，我们令 $U_i = U_{ii} := F(X_i)$，其中 $i = 1, 2, 3$。接着，我们如下定义 U_{ij}。我们知道映射 $F(\alpha_{ij}): F(X_{ij}) \to F(X_i)$ 是一个开嵌入，因此它可以分解为一个开嵌入 $e_{ij}: (U_{ij}, \mathcal{O}_{F(X_i)|U_{ij}}) \to F(X_i)$，其中 U_{ij} 是一个开

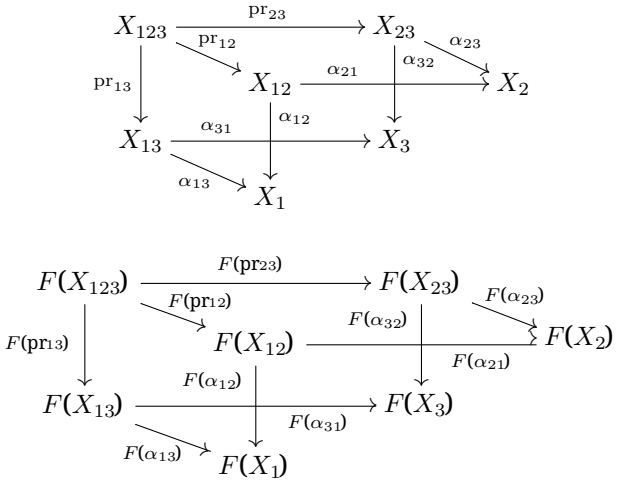


FIGURE 1. 范畴 Ξ与一个粘合立方体

$F(X_i)$ 的子集。这定义了所需的 U_{ij}。此外，我们有同构$\psi_{ij}\colon F(X_{ij}) \xrightarrow{\cong} U_{ij}$，使得 $e_{ij}\circ\psi_{ij} = F(\alpha_{ij})$。这里请注意，如果 $i>j$，严格来说，我们没有 X_{ij}：在这种情况下，$F(X_{ij})$ 指的是 $F(X_{ji})$。我们设定$\phi_{ji} := \psi_{ji}\circ\psi_{ij}^{-}1\colon U_{ij} \xrightarrow{=} U_{ji}$。可以验证这定义了粘合数据，我们将其记为 $\mathrm{GD}(F) := ((U_i),\ (U_{ij}),\ (\phi_{ij}))_{i,\ j\in\{1,2,3\}}$。

反过来，如果我们从仅涉及三个空间的粘合数据 $W = ((U_i),\ (U_{ij}),\ (\phi_{ij}))_{i,\ j\in\{1,2,3\}}$ 出发，就可以如下定义一个粘合立方体 F_W。我们令$F_W(X_i) = U_i$、$F_W(X_{ij}) := U_{ij}$ 以及 $F_W(\alpha_{ij})$ 为$i,\ j=1,\ 2,\ 3, i<j$对应的包含映射 $U_{ij}\subseteq U_i$。如果 $i>j$，我们就将 $F_W(\alpha_{ij})$ 定义为 ϕ_{ji} 与典范包含映射 $U_{ij}\subseteq U_i$的复合。最后，我们通过在 RngSpcs 中对映射 $F_W(\alpha_{ij})$ 取拉回并利用余循环条件，定义 $F_W(X_{123})$ 和 $F_W(\mathrm{pr}_{ij})$。

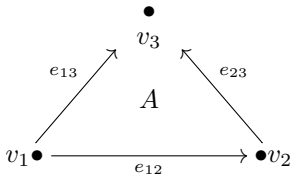
如果粘合数据 W 来自粘合立方体 F，那么很容易验证，这一过程会还原出粘合立方体 F，也就是说 $F_{\mathrm{GD}(F)}\cong F$。反过来，从上述粘合数据 W 出发，如果我们构造一个粘合立方体，再由它构造粘合数据，就会还原出 W。

3.2. 二维半单纯集合的粘合数据。现在我们考虑涉及多于 3 个空间的粘合数据。回想一下，Δ^2 同构于以下半单纯集合，我们将其称为 T:

$$T_2 = \{A\} \overset{\overset{\delta_0}{\longrightarrow}}{\underset{\underset{\delta_2}{\longrightarrow}}{\xrightarrow{\delta_1}}} T_1 = \{e_{12}, e_{23}, e_{31}\} \overset{\overset{\delta_0'}{\longrightarrow}}{\underset{\underset{\delta_1'}{\longrightarrow}}{\longrightarrow}} T_0 = \{v_1, v_2, v_3\}$$

照例，T_i 表示 $T([i])$，而 δ_i，δ_i' 是满足面恒等式 [GJ1999]的通常面映射。半单纯集合 T 可表示为如下

图表：



我们有，单形范畴 $\Gamma(T)$ 的相反范畴——其对象是 T_0 中的元素 T_1， T_2 （见定义2.6）——同构于 Ξ，因此它是由偏序集 P_T 产生的范畴的相反范畴（见注记 2.7）。因此，粘合立方体可以看作函子 $(\Gamma(T))^{op} \cong (P_T)^{op} \to \mathbf{RngSpcs}$。

定义 3.5。 X ∈若对每个 n-单形 $a \in X_n$，包含 a 的最小子半单纯集 Δ^n [同构于 1990]，则称 ssSets 为正则。

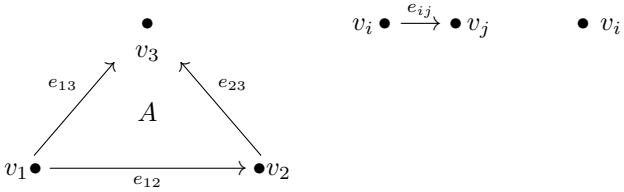
设 G 是 diGraphs$_{\leq 1}$ 或 Graphs$_{\leq 1}$ 中的一个有限图，并且其顶点带有全序。回顾一下，在这两个范畴中都定义了 k-团的概念： k-团是 k 个顶点的子集，其中任意两个不同的顶点都彼此相邻，即当 G 是无向图时，它们由一条边连接；或者当 G 是有向图时，它们在两个方向上都由边连接。

定义 3.6。 设 G 是 diGraphs$_{\leq 1}$ 或 Graphs$_{\leq 1}$ 中的一个对象。给定其顶点上的一个全序，我们将半单纯集合 $G_\bullet$ 定义为由 1-团、2-团和 3-团构成的维数 2 的正则半单纯集合。具体而言：

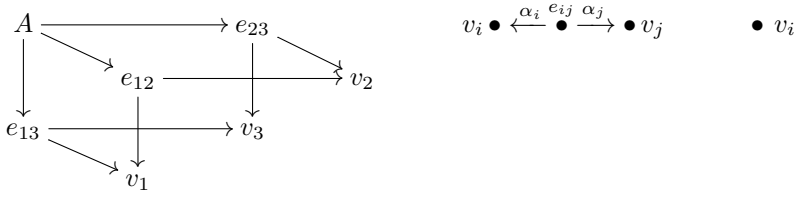
- G_0、 G_1、 G_2 分别是 1-团（顶点）、2-团和 3-团的集合。
- 面映射是通过利用 G 的顶点上的给定全序，对由 1-团、2-团和 3-团构成的复形进行排序来定义的。

顶点上的全序有不同的选取方式，由此得到的 $G_\bullet$彼此同构。这是因为有限集合上的所有全序都同构。

观察 3.7。 半单纯集合 $G_\bullet$ 的单形与同构于 T 的子半单纯集一一对应：$= T_2$ $\wr T_1 \rightrightarrows T_0$、 $E :=\bullet \rightrightarrows \bullet$ 和 P： $\overline{\equiv \bullet,}$ 分别由以下图表表示：



它们的单形范畴 $\Gamma(T)$、 $\Gamma(E)$ 和 $\Gamma(P)$ 的对偶范畴，分别与下列图表所定义的范畴 Ξ、Λ 和 $*$ 同构：



与通常一样，这些图表中未画出恒等态射。

定义 3.8。我们将函子 $\Lambda \to$RngSpcs 和 $* \to$ RngSpcs 分别称为粘合楔和粘合点，要求 Λ 和 $*$ 中的所有态射都映为开嵌入。

备注 3.9。粘合楔和粘合点分别导出粘合数据 $((U_i), (U_{ij}), (\phi_{ij}))_{i,\ j\in\{1,2\}}$ 和 $((U_1), (U_{11}), (\phi_{11}))$。

我们将此备注推广，以得到命题 3.11中的结果；该结果是后续论述的关键，并将观察结果 3.4一般化。所有细节留给读者。

定义 3.10。给定一个图 G，若函子 $F : \Gamma(G_\bullet)^{op} \to$RngSpcs 满足以下条件，我们称其为对应于 G 的粘合函子：

1. 对所有的 T， E， $P \subseteq G_\bullet$、 $F_{|\Gamma(T)^{op}}$、 $F_{|\Gamma(E)^{op}}$、 $F_{|\Gamma(P)^{op}}$ 分别是粘合立方体、粘合楔或点，其中
$$F_{|\Gamma(T)^{op}} : \Gamma(T)^{op} \to \mathrm{RngSpcs}, \qquad F_{|\Gamma(E)^{op}} : \Gamma(E)^{op} \to \mathrm{RngSpcs},$$
$$F_{|\Gamma(P)^{op}} : \Gamma(P)^{op} \to \mathrm{RngSpcs}$$
2. 对于所有粘合楔对 $F(a) \leftarrow F(b) \to F(c) \leftarrow F(d) \to F(e)$，若 a和 e之间没有边相连，则环化空间 $F(b) \times_{F(c)} F(d)$ 的拉回为空环空间。

设 G 是属于范畴 diGraphs$_{\leq 1}$ 或 Graphs$_{\leq 1}$的有限图，并配备其顶点的全序；设 $\Gamma(G_\bullet)$ 是 $G_\bullet$的单形范畴。

命题3.11。 设 F 是如上所述有限图 G 的粘合函子。 F定义了一个粘合数据$\mathrm{GD}(F) = ((U_i), (U_{ij}), (\phi_{ij}))_{i,\ j\in\{1,\dots,n\}}$，且余极限$F$同构于通过粘合$\mathrm{GD}(F)$得到的环化空间。

反之，给定粘合数据 $W = ((U_i),(U_{ij}),(\phi_{ij}))_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$，我们可以定义一个二维半单纯集合 $G_\bullet$，其*1*-骨架同构于一个图$G \in$ diGraphs，该图在每一对顶点之间至多有一条边相连，以及一个函子$F_W : \Gamma(G_\bullet)^{op} \to$RngSpcs，使得余极限$F_W$ 同构于通过粘合 W得到的环化空间。

备注 3.12. 考虑有限图 G的粘合函子 F。若 G 的两个顶点u、 v 不被任何边连接，则环化空间 $F(a)$与 $F(b)$是余极限F的互不相交开子环空间。

观察 3.13. 在前述命题中， G的顶点上全序的选取无关紧要： G 上两个不同的全序给出 $G_\bullet$ 的一个自同构，并在由此得到的两个粘合函子的余极限上诱导一个同构。

3.3. **粘合环空间**。 给定一个有限图 G，现在我们来说明，粘合函子 F: $\Gamma(G_\bullet)^{op} \to$ RngSpcs 中针对 G 所编码的信息，如何有效地还原一个环化空间。

我们有一个全忠实包含函子 Top $\subseteq$ RngSpcs，以及遗忘函子 LRngSpcs $\to$ RngSpcs $\to$ Top。由于这些遗忘函子都有右伴随，因此保持余极限。特别是，当我们粘合（局部）环化空间的粘合数据时，得到的底层拓扑空间与粘合拓扑空间的粘合数据所得的空间相同。将环层替换为阿贝尔群层等，结论也同样成立。

定义 3.14. 考虑一个环化空间 $(S, \mathcal{O}_S)$ 及其由开嵌入 $\mathcal{U} = \{U_i \hookrightarrow S\}_{i=1,\dots,n}$ 构成的有限覆盖。我们将每个 U_i 视为与其同构的 S 的子空间。该覆盖给出粘合数据 $(U_i, U_{ij} := U_i \cap U_j, \phi_{ij})$，其中 ϕ_{ij} 是同构。我们定义图 $G(\mathcal{U}) \in \mathbf{Graphs}^{\leq 1}$：其顶点为 U_i 构成的有序集；当且仅当 $U_{ij} \neq \emptyset$ 时，两个顶点 v_i 和 v_j $i \neq j$ 之间有一条边。

注意，由于 $G(\mathcal{U})$ 的顶点具有自然的顺序，我们可以立即根据定义3.6构造半单纯集合 $G(\mathcal{U})_\bullet$。它对每个 U_i都有一个 0-单形，对每个非空的 $U_i \cap U_j$ $(i < j)$都有一个 1-单形，并对每个对应于 $G(\mathcal{U})$ 中一个 3-团的三重交 $U_i \cap U_j \cap U_k$ 都有一个 2- 单形（这些三重交可以为空）。此外，二维半单纯集合 $G(\mathcal{U})_\bullet$ 是正则的。

备注 3.15。将给定环化空间 S 的覆盖 $\mathcal{U}$ 中的每个元素，通过开嵌入识别为与之同构的 S 的子空间，这仅仅是为了避免像 [Vi2005]中那样选择裂解。请注意，这种选择并不会在以下意义上“消除重复”。如果 $\mathcal{U}$ 中有两个概形嵌入到 S 的同一个开子空间中，那么在 $G(\mathcal{U})_0$ 中仍有两个不同的顶点，分别对应这两个环化空间。

给定 S，$\mathcal{U}$如上所述，我们可以定义一个有限环化空间（$S_{\mathcal{U}}$，$\mathcal{O}_{S_{\mathcal{U}}}$），如 [S2017a]中所述。

定义 3.16. 设（S，$\mathcal{O}_S$）为一个环化空间，且 $\mathcal{U}$ 为由开嵌入构成的有限覆盖。对每个点 $s \in S$，我们定义 $U^s :=\cap_{s\in U_i} U_i$。考虑如下等价关系：

$$s \sim s' \quad \text{if and only if} \quad U^s = U^{s'}$$

我们定义与 S及覆盖 $\mathcal{U}$相关联的有限环化空间（$S_{\mathcal{U}}$，$\mathcal{O}_{S_{\mathcal{U}}}$）为$S_{\mathcal{U}} := S/\sim$ 以及$\mathcal{O}_{S_{\mathcal{U}}} := \pi_*\mathcal{O}_S$，其中 $\pi : S \to S_{\mathcal{U}}$ 是连续投影态射。注意，π 可以提升为环化空间态射。

观察3.17. 设 $\pi : S \to S_{\mathcal{U}}$ 以及 $\mathcal{U}$ 如定义 3.16 中所述。可以验证，对每个 i、j、k，$U_i \cap U_j =: U_{ij}$ 与 $U_i \cap U_j \cap U_k =: U_{ijk}$ 在 π 下的像都是开子集。将 U_i、U_{ij}和 U_{ijk}视为环化空间，我们定义 $V_i := (\pi(U_i), (\pi_{|U_i})_*\mathcal{O}_{S|U_i})$、$V_{ij} := (\pi(U_{ij}), (\pi_{|U_{ij}})_*\mathcal{O}_{S|U_{ij}})$ 以及 $V_{ijk} := (\pi(U_{ijk}), (\pi_{|U_{ijk}})_*\mathcal{O}_{S|U_{ijk}})$。它们是 $S_{\mathcal{U}}$的开子环层空间：V_i通过开嵌入构成 $S_{\mathcal{U}}$ 的一个覆盖，而 V_{ij}、V_{ijk} 分别是它们的二重交与三重交，从而自然地定义了一个粘合数据，粘合后得到 $S_{\mathcal{U}}$。

我们将记作 $\mathbf{RngSpcs}_{\mathrm{Fin}}$ 底层拓扑空间为有限拓扑空间的环化空间所成的范畴。对于给定的环化空间 S 及其如上所述的给定开覆盖 $\mathcal{U}$，利用命题 3.11 和观察 3.17，我们可以定义：

- $F^{\mathcal{U}}{}_{\mathrm{can}} : \Gamma(G(\mathcal{U})_\bullet)^{op} \to \mathbf{RngSpcs}$，将 $\Gamma(G(\mathcal{U}))^{op}$ 的对象映射为 U_i, U_{ij}, U_{ijk}。
- $F^{\mathcal{U}}{}_{\mathrm{fin}} : \Gamma(G(\mathcal{U})_\bullet)^{op} \to \mathbf{RngSpcs}_{\mathrm{Fin}}$，将 $\Gamma(G(\mathcal{U}))^{op}$ 的对象映射为 V_i, V_{ij}, V_{ijk}。

引理 3.18。沿用上述记号。那么

$$\mathrm{colim} F^{\mathcal{U}}_{\mathrm{fin}} \cong S_{\mathcal{U}} \qquad \mathrm{colim} F^{\mathcal{U}}_{\mathrm{can}} \cong S.$$

此外，我们还有一个函子之间的自然变换 $\tilde{\pi}\colon\ F^{\mathcal{U}_{\text{可以}}} \to F^{\mathcal{U}}_{\text{fin}}$，它由 π 诱导；在同构余极限 $F^{\mathcal{U}}_{\text{fin}} \cong S_{\mathcal{U}}$ 和 余极限 $F^{\mathcal{U}}{}_{\text{可以}} \cong S$ 下，它重构了余极限上的态射 $\pi\colon\ S \to S_{\mathcal{U}}$。

证明。 我们将相容条件的验证留给读者。 □

我们通过构造一个与（$S_{\mathcal{U}}$，$\mathcal{O}_{S_{\mathcal{U}}}$）相似但不同的环化空间来结束本节，见定义 3.16，它在后文中将很重要。

观察 3.19. 若 $(S,\mathcal{O}_S)$ 是一个环化空间，且 $\mathcal{U}=\{U_i\}$ 是它由开嵌入构成的一个有限覆盖，则 $\Gamma(G(\mathcal{U})_\bullet)$ 是一个范畴，与偏序集 $P_{G(\mathcal{U})_\bullet}$ 所关联的范畴同构（见观察 2.7、备注 2.8）。展开这些定义，我们看到该偏序集对每个 U_i有一个元素 p_i，对每个 U_{ij} $(i<j,\ U_i\cap U_j\neq\emptyset)$ 有一个元素 p_{ij}，并且对对应于 $G(\mathcal{U})$ 的一个 3-团的每个 U_{ijk} 有一个元素 p_{ijk}。我们可以考虑借助亚历山德罗夫拓扑、与偏序集 $P_{G(\mathcal{U})_\bullet}$ 相关联的拓扑空间 $A(P_{G(\mathcal{U})_\bullet})$（见 2.10）。由亚历山德罗夫拓扑的定义本身即可验证，$P_{G(\mathcal{U})_\bullet}$ 视为范畴时，与 $A(P_{G(\mathcal{U})_\bullet})$ 的不可约开子集的对偶范畴同构。这个同构把每个 p_i、p_{ij}、p_{ijk} 分别对应到 $A(P_{G(\mathcal{U})_\bullet})$ 的不可约开子集 U_{p_i}、$U_{p_{ij}}$ 与$U_{p_{ijk}}$（记号见第 2.2 节）。因此，从 $P_{G(\mathcal{U})_\bullet}$到环的函子将在拓扑空间 $A(P_{G(\mathcal{U})_\bullet})$ 上给出一个层（见命题 2.14）。因此，该函子

$F^2_{\mathcal{U}}\colon\ P_{G(\mathcal{U})_\bullet}\cong\Gamma(G(\mathcal{U})_\bullet)\ \to$ 环　$p_i\mapsto\mathcal{O}_S(U_i)$　$p_{ij}\mapsto\mathcal{O}_S(U_{ij})$　$p_{ijk}\mapsto\mathcal{O}_S(U_{ijk})$ 是基 $\{U_{p_i},U_{p_{ij}},U_{p_{ijk}}\}$ 上的 $A(P_{G(\mathcal{U})_\bullet})$ 的一个环层。换句话说，$F^2_{\mathcal{U}}$是将函子 $F^{\mathcal{U}}_{\text{can}}$ 与整体截面函子复合定义得到的。

定义 3.20。 设 S 为一个环化空间，且设 $\mathcal{U}$ 是通过开嵌入对其进行的有限覆盖。我们定义环化空间（$S^2_{\mathcal{U}}$，$\mathcal{O}_{S^2_{\mathcal{U}}}$）：

- $S^2_{\mathcal{U}}$ 是拓扑空间 $A(P_{G\ (\mathcal{U})\ \bullet})$。
- $\mathcal{O}_{S^2_{\mathcal{U}}}$ 是 $S^2_{\mathcal{U}}$ 上的环层，由观察3.19 中的层 $F^2_{\mathcal{U}}$ 在 $A(P_{G\ (\mathcal{U})\ \bullet})$的基上得到。

我们在这种情况下也称 $(S^2_{\mathcal{U}},\mathcal{O}_{S^2_{\mathcal{U}}})$ 为与 S及覆盖 $\mathcal{U}$相关联的环化空间。

备注 3.21. 给定一个环化空间 S 及一个由开嵌入构成的有限覆盖$\mathcal{U}$，一般而言，拓扑空间 $S^2_{\mathcal{U}}$ 和 $S_{\mathcal{U}}$ 并不同胚，因此，根据定义3.16和3.20得到的两个环化空间并不同构。事实上，考虑覆盖 $\mathcal{U}$，它由 S 自身和一个给定的非空开子空间 $U\subset S$ 组成。那么 $S_{\mathcal{U}}$ 是一个由两个点组成的有限拓扑空间，而 $S^2_{\mathcal{U}}$ 是一个由 3 个点组成的有限拓扑空间。

备注 3.22. 给定如上所述的覆盖 $\mathcal{U}$ of S，可以定义子半单纯~集 $i\colon\ G(\mathcal{U})_\bullet\hookrightarrow G(\mathcal{U})_\bullet$，它是通过从 $G(\mathcal{U})_\bullet$ 中移除 $G(\mathcal{U})_2$ 中与空三重交 U_{ijk} 相关联的元素p_{ijk} 而得到的。由 i 我们得到一个~映射 $\Gamma(i)\colon\ \Gamma(G(\mathcal{U})_\bullet)\ \to\ \Gamma(G(\mathcal{U})_\bullet)$，因此，由于 $P_{G(\mathcal{U})_\bullet}\ \cong\ \Gamma(G(\mathcal{U})_\bullet)$ 和~$P_{\widetilde{G}(\mathcal{U})_\bullet}\cong\Gamma(G(\mathcal{U})_\bullet)$，得到一个函子：

$$\widetilde{F}^2_{\mathcal{U}}:=F^2_{\mathcal{U}}\circ\Gamma(i),\quad \widetilde{F}^2_{\mathcal{U}}:P_{G(\mathcal{U})_\bullet}\cong\Gamma(\widetilde{G}(\mathcal{U})_\bullet)\to\text{Rings}$$

由 i 我们还得到一个拓扑空间 $\widetilde{S}^2_{\mathcal{U}}$、一个连续包含 $f\colon\ \widetilde{S}^2_{\mathcal{U}}\hookrightarrow S^2_{\mathcal{U}}$、一个由 $\widetilde{F}^2_{\mathcal{U}}$得到的、定义在 $\widetilde{S}^2_{\mathcal{U}}$上的层 $\mathcal{O}_{\widetilde{S}^2_{\mathcal{U}}}$，以及一个函子 $\widetilde{F}^{\mathcal{U}_{\text{可}}}=F^{\mathcal{U}}{}_{\text{可}}\circ\Gamma(i)^{op}$。对于每个

定义在拓扑空间上的层 $\mathcal{F}$，我们有 $F(\emptyset)$ 等于零环。根据 $\mathcal{O}_{\widetilde{S}^2_{\mathcal{U}}}$的定义，可以验证存在同构 $\varphi\colon \mathcal{O}_{S^2_{\mathcal{U}}} \xrightarrow{\cong} f_*\mathcal{O}_{\widetilde{S}^2_{\mathcal{U}}}$，从而得到一个环化空间态射 $(f,\varphi):(\widetilde{S}^2_{\mathcal{U}},\mathcal{O}_{\widetilde{S}^2_{\mathcal{U}}}) \to (S^2_{\mathcal{U}},\mathcal{O}_{S^2_{\mathcal{U}}})$，使得$\varphi$ 是一个层同构。这个环化空间态射不是同构，但这一性质再加上可以验证 $\widetilde{F}^{\mathcal{U}}$的余极限和 $F^{\mathcal{U}}_{\mathrm{can}}\circ\Gamma(i)^{op}$的余极限都同构于 S，或许会让我们认为 $(\widetilde{S}^2_{\mathcal{U}},\mathcal{O}_{\widetilde{S}^2_{\mathcal{U}}})$ 和 $(S^2_{\mathcal{U}},\mathcal{O}_{S^2_{\mathcal{U}}})$ 在某种有待定义的意义下是弱等价的。这一启发式论证构成了第4.2节部分推理的动机。

4. Finite ringed spaces, schemes and semisimplicial sets

本节将前文的一些构造专门应用于概形和流形的情形。我们还将引入一个便于研究概形粘合数据的范畴，并借助半单纯集合的语言来构造它，称之为 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$。

4.1. **有限环化空间与概形。** 本节将更详细地研究前一节中针对概形情形介绍的粘合构造。关于概形、Spec 等主要定义，请参阅 [Ha1977] 第 2 章。下一个定义直接受到概形空间理论的启发（见[S2017a]及其中的参考文献；关于可微范畴，另见第4.6 节）。

设有一个有限环化空间（X， $\mathcal{O}_X$），即其底层拓扑空间为有限拓扑空间的环化空间。按照第 X 节中的说明，2.2节，定理2.11，其上有一个自然预序。

定义 4.1. 若有限环化空间 $(X,\mathcal{O}_X)$ 满足：对所有 $p\geq q$, $p,q\in X$（回忆一下，$p\geq q$ 当且仅当 $U_q\subset U_p$），概形态射 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(U_q)) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(U_p))$ 都是开嵌入，则称其为拟概形的 。我们将副概形空间范畴记为 PSch。

回忆一下，若概形的对角态射是仿射态射，或者等价地说，其中任意两个仿射子概形的交都是仿射概形，则称该概形为半分离的。还要回忆一下，若概形存在由仿射开子概形构成的有限覆盖，则称其为拟紧的。值得注意的是，许多概形范畴都具有这些性质，例如所有拟射影概形（比如定义在正则环上时），或者更一般地，所有除子概形。我们将拟紧且半分离概形所成的范畴记为 Sch。除非另有说明，我们均假设概形属于此范畴。

现在，我们对定义$S_{\mathcal{U}}$*3.16*中引入的有限环化空间 $(\mathcal{O}_{S_{\mathcal{U}}}, S$ 在{v?}为概形的情形下，作如下观察。

观察 4.2。 设 S 是一个概形，并带有由仿射开子概形 $\mathcal{U}$ 构成的有限覆盖。与之前一样，我们可以将预序 $P(S_{\mathcal{U}})$ 视为一个范畴，它同构于 $S_{\mathcal{U}}$ 中不可约开子集所成范畴的对偶范畴。于是，函子：

$$P(S_{\mathcal{U}}) \longrightarrow \mathrm{Rings}, \qquad p \longrightarrow \mathcal{O}_{S_{\mathcal{U}}}(U_p)$$

是 $S_{\mathcal{U}}$上的一个（预）层，其中 U_p 表示 $S_{\mathcal{U}}$中包含 p 的最小开集（见第2.2节）。此外，它在整个 $S_{\mathcal{U}}$ 上的延拓为 $\mathcal{O}_{S_{\mathcal{U}}}$。

我们可以重复观察 4.2 中的构造，将 $S_{\mathcal{U}}$ 替换为拟概形空间 X，从而得到一个预层：

$$P(X) \longrightarrow \mathrm{Rings}, \qquad p \longrightarrow \mathcal{O}_X(U_p)$$

将层扩张为 $\mathcal{O}_X$ 在 X上的层。这引出了以下定义 [S2017a]。

定义 4.3. 设 $(X, \mathcal{O}_X)$ 是一个拟概形空间。我们定义函子:

$$F_X : (P(X))^{op} \to \mathrm{RngSpcs}, \qquad p \mapsto \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_X(U_p)$$

由此我们可以定义函子:

$$\mathrm{Spec}^S : \mathrm{PSch} \longrightarrow \mathrm{RngSpcs}, \qquad X \mapsto \mathrm{colim}\, F_X$$

其中 PSch 表示副概形空间范畴。

我们陈述一个出自 [S2017a], 的结果，不过这里采用了不同的语言，且假设略有不同（拟紧且拟分离概形）。证明很简单，只需直接验证。

命题 4.4. 设 S 是一个概形，且 $\mathcal{U}$ 是由仿射概形构成的 S 的有限覆盖。那么， $S_{\mathcal{U}}$ 是拟概形性的，并且 $\mathrm{Spec}^S(S_{\mathcal{U}}) \cong S$ 属于概形范畴。

现在我们来考察环化空间 $S^2_{\mathcal{U}}$ (见定义3.20)，它对我们的研究目的而言更有趣。

命题 4.5. 设 S 是一个概形，且 $\mathcal{U}$ 是由仿射开子概形构成的 S 的有限覆盖。那么，$S^2_{\mathcal{U}}$ 是拟概形性的。此外，$\mathrm{Spec}^S(S^2_{\mathcal{U}}) \cong S$ 属于 Sch 范畴。

证明。 首先，我们验证它是拟概形性的。由于 S 是半分离的，根据 $S^2_{\mathcal{U}}$ 的定义，这一点显然成立，因为对每个 $p \leq q$ ，环同态 $\mathcal{O}_{S^2_{\mathcal{U}}}(U_p) \to \mathcal{O}_{S^2_{\mathcal{U}}}(U_q)$ 通过仿射概形与环之间的反等价，对应于一个开嵌入。利用这一等价，我们看到函子 $F^2_{\mathcal{U}}$: $P_{G(\mathcal{U})_\bullet} \to$ Rings（见定义3.20）诱导函子

$$F_X : P^{op}_{G(\mathcal{U})_\bullet} \to \mathrm{Sch}$$

（见定义 4.3）同构于 $F^{\mathcal{U}}_{\mathrm{can}}$： Γ（G（$\mathcal{U}$）$_\bullet$）$^{op} \to$ RngSpcs。利用引理3.18，证明至此完成。□

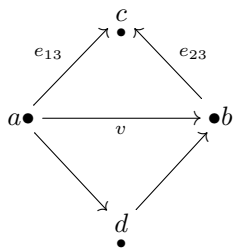
备注 4.6. 由命题 4.4、4.5，从概形 S 及其有限仿射覆盖 $\mathcal{U}$ 出发，我们可以构造两个不同的准概形空间，分别称为$S_{\mathcal{U}}$ 与 $S^2_{\mathcal{U}}$。前者是如 [S2017a] 中所述的概形空间，并具有一些良好的上同调性质（见 [CM2019]）。后者可能不是概形性的（见注 4.7），但其底层有限拓扑空间来源于一个正则二维半单纯集的单纯形偏序集，而对 $S_{\mathcal{U}}$而言并非总是如此。尽管存在这些差异，在两种情形下（见 [S2017a] 与命题 4.5），我们都有 Spec^S（$S_{\mathcal{U}}$）≅Spec^S（$S^2_{\mathcal{U}}$）$\cong S$。

在下一个备注中，我们指出，所得到的副概形空间 $S^2_{\mathcal{U}}$ 虽然是拟概形的，但原则上未必一般而言都具有 [S2017a]意义下的概形性。

注 4.7. 在 [S2017a] 中，若一个拟概形空间 $(X, \mathcal{O}_X)$ 对任意 $p, q \in X$、任意 $p' \geq p$ 以及任意 $i \geq 0$ ，自然态射 $H^i(U_p \cap U_q, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X(U_p)} \mathcal{O}_X(U_{p'}) \to H^i(U_{p'} \cap U_p, \mathcal{O}_X)$ 是同构（参见 [S2017a] 4.1 和 4.2），则称其为概形性的。

上述副概形空间 $S^2_{\mathcal{U}}$ 并不总是概形性的。事实上，假设覆盖 $\mathcal{U}$ 中有四个互不相同的仿射概形 U_1、U_2、U_3 和 U_4，使得 $U_1 \cap U_2 =:$ Spec(A)、Spec(B): $= U_1 \cap U_2 \cap U_3$、Spec(C): $= U_1 \cap U_2 \cap U_4$，并且

Spec(D): $= U_1 \cap U_2 \cap U_3 \cap U_4$ 非空。相应的单形在$G(\mathcal{U})_\bullet$ 中可表示如下。



其中 a, b, c, d 分别对应于 U_1, U_2, U_3, U_4，而 v 对应于 $U_1 \cap U_2$。我们将图中上方和下方的 3-团所对应的二维单纯形分别记为 p, q。在这种情况下，$U_a, U_b, U_c, U_d, U_v, U_p$ 和 U_q 作为 $S^2_{\mathcal{U}}$ 的开子空间来看，都是 Salas [S2017a，定义 3.10] 意义下的仿射环化空间；这是由 [S2017a]中的 4.11 得出的（注意，根据 [S2017a]中的 2.13，它们都是无环的）。现在，若$S^2_{\mathcal{U}}$ 具有概形性，那么 U_v 将是仿射且具有概形性的 [S2017a]，尤其应当是半分离的 [S2017a，命题 4.9]。然而，$\mathcal{O}_{S^2_{\mathcal{U}}}(U_p \cap U_q) \cong \mathbf{1}$是平凡环，因为 $U_p \cap U_q = \emptyset$，但 $\mathcal{O}_{S^2_{\mathcal{U}}}(U_p) \otimes_{\mathcal{O}_{S^2_{\mathcal{U}}}(U_v)} \mathcal{O}_{S^2_{\mathcal{U}}}(U_q) \cong B \otimes_A C \cong D$，这与 [S2017a]中的 4.12 (2) 矛盾。因此，$S^2_{\mathcal{U}}$ 不具有概形性。

我们以一则关于（准）概形空间上的拟凝聚模的备注结束本节。

注 4.8。设 S 是一个概形，qCoh(S) 表示 S [Ha1977第 2] 章中 W上的拟凝聚模范畴。对于给定的有限环化空间 W，我们也可以定义其上的拟凝聚模，并用 qCoh(W) 表示 W上的拟凝聚模范畴。于是，根据忠实平坦下降 [Vi2005],，我们得到范畴等价：

$$\mathrm{qCoh}(S) \cong \mathrm{qCoh}(S^2_{\mathcal{U}}, \mathcal{O}_{S^2_{\mathcal{U}}})$$

所有相关的验证都留给读者完成。

4.2. **范畴** $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}^\circ}$。设 S 是一个概形，$\mathcal{U}$ 是其由仿射开子概形构成的有限覆盖。回顾一下，我们假设所有概形都是拟紧且半分离的。此外，我们考虑的所有图都是有限的，且属于 diGraphs$^{\leq 1}$ 或 Graphs$_{\leq 1}$。

我们希望了解 $S^2_{\mathcal{U}}$ 中定义的有限环化空间的一些关键性质，见 3.20。为此，我们首先定义范畴 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$及其局部化，进而给出第 4 节 定理 4.34中的主要结果。

覆盖$\mathcal{U}$确定了二维半单纯集合 $G(\mathcal{U})_\bullet$，其 1-骨架同构于一个有向图，该图中每对不同顶点之间至多有一条边（顶点对应于$\mathcal{U}$中的开集，而边对应于两个开集的交）。回想一下，有限环化空间 $S^2_{\mathcal{U}}$ 使我们能够定义两个函子（见第3.3节）：

$$F^2_{\mathcal{U}} : P_{G(\mathcal{U})_\bullet} \cong \Gamma(G(\mathcal{U})_\bullet) \to \text{环} \quad p_i \mapsto \mathcal{O}_S(U_i) \;\; p_{ij} \mapsto \mathcal{O}_S(U_{ij}) \;\; p_{ijk} \mapsto \mathcal{O}_S(U_{ijk})$$

$$F^{\mathcal{U}}_{\mathrm{can}} : \Gamma(G(\mathcal{U})_\bullet)^{op} \to \mathrm{RngSpcs}, \quad p_i \mapsto U_i,\, p_{ij} \mapsto U_{ij},\, p_{ijk} \mapsto U_{ijk}$$

将 $\Gamma(G(\mathcal{U}))^{op}$ 中的对象与$P_{G(\mathcal{U})_\bullet} \cong \Gamma(G(\mathcal{U})_\bullet)$ 中的对象等同起来（略微滥用记号），（另见注 2.9 和 3.19）。

设 T 是一个由 $G(\mathcal{U})_\bullet$ 构成的 2-子半单纯集合，如定义 3.3、3.14所述。注意, (), 因此根据命题 3.11 （$F^{\mathcal{U}}$可以） $|\Gamma(T)^{op}$是一个粘合立方体，因而对应于一个粘合数据（定义 3.1、3.2，第 3.1节）。利用仿射概形与环之间的反等价，以及 $\mathcal{U}$ 由仿射概形构成这一事实，我们看到，($F^{\mathcal{U}}$可以) $|\Gamma(T)^{op}$是一个粘合立方体等价于

$F^2_{\mathcal{U}}$ 保持推出，即纤维余积。我们的目的是定义一个范畴 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$，其对象由迄今引入的半单纯集合构造而成；对某一类态射进行局部化后，我们可以得到一个与概形范畴等价的范畴。直观地说，若 S 是一个概形，且 $\mathcal{U}$是一个有限仿射覆盖，我们就将 S与 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$ 中的对象 $(G(\mathcal{U})_\bullet,\ F^2_{\mathcal{U}})$ 等同起来。然而，要定义 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$ 以及范畴等价，我们需要先给出一个定义，然后进行讨论。

定义 4.9。设 G 是一个图，且 $F:\ \Gamma(G_\bullet)^{op} \to$ RngSpcs 是一个粘合函子（定义 3.10）。我们将 退化扩张 $\boldsymbol{G}_\bullet$ 定义为 $G_\bullet$ 的二维半单纯集合，具体做法是向 $G_\bullet$ 添加且仅添加 G 的每个顶点各一个自环，以及所有可能的二维单形 $u \to u \to u$、$u \to u \to v$、 $u \to v \to v$ 和 $v \to v \to v$ ，使得 u、$v \in G_0$ 以及 $u \to v$ 是 G_1 的元素。注意，除了自环以外，我们既不添加额外的顶点，也不添加边。

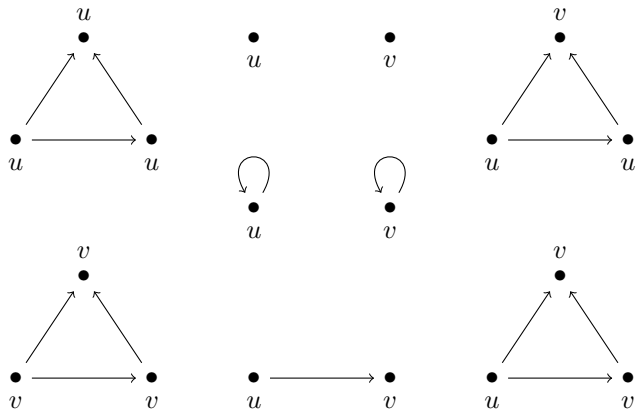


FIGURE 2. 退化扩张 $\boldsymbol{G}_\bullet$ of$G_\bullet$ 的所有单形： $u \to v$

我们将添加的单形称为 $\boldsymbol{G}_\bullet$的退化单形 。

我们还将 $\boldsymbol{F}$ 的退化扩张 F 定义为函子 $\boldsymbol{F}$:$\Gamma(\boldsymbol{G}_\bullet)^{op} \to$RngSpcs，如下所示。

1) $\boldsymbol{F}|_{\Gamma(G_\bullet)^{op}} = F$2) 设 $u, v \in G_0$ 和 $u \to v \in G_1$。
我们令

$$\boldsymbol{F}(u \to u) := F(u), \qquad \boldsymbol{F}(u \to u \to u) := F(u),$$
$$\boldsymbol{F}(u \to u \to v) := F(u \to v), \quad \boldsymbol{F}(u \to v \to v) := F(u \to v)$$

3) 对于 $\Gamma(\boldsymbol{G}_\bullet)$ 中的每个态射 $u \to (u \to u)$，其像 $\boldsymbol{F}(u \to u) = F(u) \to \boldsymbol{F}(u) = F(u)$ 定义为恒等态射；对于每个态射 $(u \to v) \to (u \to u \to v)$ 和 $(u \to v) \to (u \to v \to v)$, $\boldsymbol{F}(u \to u \to v) \to \boldsymbol{F}(u \to v)$ 和

$\boldsymbol{F}(u \to v \to v) \to \boldsymbol{F}(v \to v)$ 定义为恒等态射；对于每个态射 $(u \to u) \to (u \to u \to v)$ 和 $(u \to u) \to (v \to u \to u)$，$\boldsymbol{F}(u \to u \to v) \to \boldsymbol{F}(u \to u)$ 和 $\boldsymbol{F}(v \to u \to u) \to \boldsymbol{F}(u \to u)$ 分别定义为开嵌入 $F(u \to v) \hookrightarrow F(u)$ 和 $F(v \to u) \hookrightarrow F(u)$。

观察 4.10。 按照定义 4.9 的记号，可以验证函子 F 和 $\boldsymbol{F}$ 的余极限同构。

我们现在可以定义范畴 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$，并将其关于某一类态射局部化，再与概形范畴进行比较。

定义 4.11。 我们如下定义范畴 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$。

对象： $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$ 的对象是形如 $A = (\mathcal{A}, F_A : \Gamma(\mathcal{A}) \to \text{环})$的对，其中 $\mathcal{A}$ 是与某个给定半单纯集合 $G_\bullet$的退化扩张$\boldsymbol{G}_\bullet$ 同构的二维有限半单纯集， G 是一个图，并且函子 $\mathrm{Spec} \circ F_A$ 可经由粘合函子 $\Gamma(G_\bullet)^{op} \to$RngSpcs 的退化扩张进行分解。

箭头： $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$的态射是形如 $\psi = (f, \varepsilon) : A = (\mathcal{A}, F_A) \to B = (\mathcal{B}, F_B)$的对，其中 $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是二维有限半单纯集之间的一个态射，而 $\varepsilon : F_B \circ \Gamma(f) \to F_A$ 是一个自然变换。

观察 4.12. 我们注意到关于范畴 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$的若干关键事实。

(1) 给定 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$中的一个对象$(\mathcal{A}, F_A)$，函子 $F_A : \Gamma(\mathcal{A}) \to$ 环给出拓扑空间 $A(P_\mathcal{A})$的一个基上的层。因此，我们可以将环化空间$(A(P_\mathcal{A}), \mathcal{O}_A)$与$(\mathcal{A}, F_A)$相关联，其中 $\mathcal{O}_A$ 由F 得到，这是因为注意到 F_A 是一个基上的环层。容易看出，该空间也是拟概形的。(2) 给定 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$中的两个对象 $A = (\mathcal{A}, F_A)$、 $B = (\mathcal{B}, F_B)$，态射 $\psi = (f, \varepsilon) : A \to B$ 给出相应准概形空间之间的一个映射。事实上， f 诱导一个连续映射 $|f| : A(P_\mathcal{A}) \to A(P_\mathcal{B})$。由自然变换 ε 我们得到一个层态射 $\bar{\varepsilon} : |f|^{-1}\mathcal{O}_B \to \mathcal{O}_A$，从而由伴随得到一个态射 $\varepsilon^\flat : \mathcal{O}_B \to |f|_*\mathcal{O}_A$，见 [GW 2010] 第55页。

给定一个对象 $A = (\mathcal{A}, F_A) \in \mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$，通过将函子 Spec^S 应用于 $(A(P_\mathcal{A}), \mathcal{O}_A)$（如观察 4.12 中所得），我们得到一个概形。因此，我们可以给出如下定义。

定义 4.13. 记号如上。我们定义函子：

$$\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}} \to \mathrm{Sch}, \qquad \mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(\mathcal{A}, F) := \mathrm{Spec}^S(A(P_\mathcal{A}), \mathcal{O}_A),$$

在态射上的定义是显然的。

我们以一个关键定义以及后文所需的一个观察来结束本节。

定义 4.14. 设 S 为一个概形， $\mathcal{U}$ 为 S的开仿射子概形的一个有限覆盖。定义函子

$$\boldsymbol{F}^2_{\mathcal{U}} : P_{\boldsymbol{G}(\mathcal{U})_\bullet} \cong \Gamma(\boldsymbol{G}(\mathcal{U})_\bullet) \to \mathrm{Rings},$$

经由 $\boldsymbol{F}^{\mathcal{U}}$典范，即 $F^{\mathcal{U}}_{\mathrm{can}}$ 的退化扩张。并定义：

$$(\mathcal{U})^2_{\mathrm{sch}} := (\boldsymbol{G}(\mathcal{U})_\bullet, \boldsymbol{F}^2_{\mathcal{U}})$$

观察 4.15. 我们有 $(\mathcal{U})^2_{\mathrm{sch}}$ 是 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$ 的一个对象，并且 $\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}((\mathcal{U})^2_{\mathrm{sch}}) \cong S$ 根据观察4.10。

4.3. **范畴 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$ 与弱等价。** 我们想要将范畴 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$ 对一类态射局部化，这类态射包含所有同构且对复合封闭。我们稍微宽泛地将其称为一组弱等价。

定义 4.16。 我们将集合 $\mathcal{W}$ 在 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$ 定义为如下态射的集合：$\psi = (f, \varepsilon)$，使得映射 $\varepsilon^\flat$ (注 4.12) 是同构，且 $\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(\psi)$ 是仿射的。容易验证，$\mathcal{W}$ 是一个包含所有同构且在复合下封闭的态射集合，因此 $\mathcal{W}$ 是一个弱等价集合。我们将其元素称为弱等价。

现在，我们在以下命题中记录关于弱等价集合 $\mathcal{W}$ 的一些有用事实。

命题 4.17。 以下结论成立。

1) 函子 $Spec^{\mathcal{C}}$ 将弱等价映为概形之间的同构。*2)* 若 $A = (\mathcal{A}, F_A) \in \mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$ 且 $Spec^{\mathcal{C}}(\mathcal{A}, F_A) =: S$，则有 $\mathcal{U}_A := \{Spec(F_A(p))\}_{p \in \mathcal{A}_0}$ 是 S 的仿射开覆盖，并且存在一个典范弱等价 $i_A = (f, \varepsilon) : (\mathcal{U}_A)^2_{\mathrm{sch}} \hookrightarrow A$，使得 f 是二维半单纯集合的包含映射，而 ε 是恒等态射。*3)* 使用 *2)* 中的记号，设 $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ 是 S 的一个由开仿射子概形构成的有限覆盖，且是 $\mathcal{U}_A$ 的加细。假设对于所有 $p \in \mathcal{A}_0$，都存在一个子集 $J_p \subseteq J$，使得 $\{V_j\}_{j \in J_p}$ 是 $Spec(F_A(p)) \subseteq S$ 的一个覆盖，且 J_p 是 J 的一个划分。那么存在一个典范弱等价 $(\mathcal{V})^2_{\mathrm{sch}} \to (\mathcal{U}_A)^2_{\mathrm{sch}}$，它在底层二维半单纯集合上是包含映射。

证明。1）考虑一个弱等价 $\psi = (f, \varepsilon) : A = (\mathcal{A}, F_A) \to B = (\mathcal{B}, F_B)$。记 $\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(A) =: X$、$\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(B) =: Y$，并考虑按照观察 4.12 (2) 与 A 和 B 相关联的拟概形空间 $(A(P_{\mathcal{A}}), \mathcal{O}_A)$ 和 $(A(P_{\mathcal{B}}), \mathcal{O}_B)$。我们要证明 $\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(\psi) : X \to Y$ 是一个同构。由于同构在目标上是局部的（关于这一概念，见 [GW2010] 附录 C），只需证明对所有 $v \in \mathcal{B}_0$，态射 $\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(\psi)^{-1}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_B(U_v)) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_B(U_v))$ 都是同构。根据弱等价的定义，我们知道 $\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(\psi)$ 是仿射的。因此，$\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(\psi)^{-1}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_B(U_v))$ 是 X 的一个仿射开子概形，所以 $\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(\psi)^{-1}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_B(U_v)) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_B(U_v))$ 是仿射概形之间的态射。因此，要验证它是同构，只需证明它在整体截面上诱导的映射是环同构。首先，$\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(\psi)^{-1}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_B(U_v)) \cong \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_A(|f|^{-1}(U_v)))$.此外，由于 ψ 是一个弱等价，$\varepsilon^\flat$ 是一个同构。因此，我们得到了所需的同构。

现在证明 2）。根据定义，$\mathcal{A} \cong \boldsymbol{G}_\bullet$ 对某个图 G 成立，并且 $\mathrm{Spec} \circ F_A$经由某个粘合函子的退化扩张分解。因此，$\mathcal{U}_A$是 $\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(A)$ 的一个由仿射开子概形构成的覆盖。这里需要说明一点：严格来说，一个概形的开嵌入覆盖是一个集合，因此，由于开嵌入 $\mathrm{Spec}(F_A(p)) \hookrightarrow S$ 和 $\mathrm{Spec}(F_A(q)) \hookrightarrow S$ 有可能相等（所以特别地，$\mathrm{Spec}(F_A(p)) = \mathrm{Spec}(F_A(q))$），最终得到的 S 的覆盖未必先验地对每个 $p \in \mathcal{A}_0$ 都包含一个元素。这并不重要，因为在这种情况下，例如我们可以用另一个与其同构的概形替换其中一个涉及的概形。

现在考虑半单纯集合 $G(\mathcal{U}_A)_\bullet$。根据构造，我们有一个 $\varphi : G(\mathcal{U}_A)_0 \xrightarrow{\cong} G_0$。考虑 $u, v \in G(\mathcal{U}_A)_0$，并假设 $\varphi(u)$ $\varphi(v)$ $\in G_0$ 由一条边 $e \in G_1$ 连接，且 $F_A(e)$ 非平凡。那么，由于 $\mathrm{Spec} \circ F_A$ 经由某个粘合函子的退化扩张分解，我们有 u 和 v 也由一条边连接。反过来，如果 $F_A(e)$ 平凡，或者 $\varphi(u)$ 与 $\varphi(v)$ 不连通，那么 u 和 v 不连通。因此，φ 可以扩张为图的一个包含映射 $G(\mathcal{U}_A) \subseteq G$，从而 $G(\mathcal{U}_A)_\bullet$ 和 $\boldsymbol{G}(\mathcal{U}_A)_\bullet$ 分别是 $G_\bullet$ 和 $\boldsymbol{G}_\bullet$ 的子半单纯集合。定义 f 为刚得到的包含映射 $\boldsymbol{G}(\mathcal{U}_A)_\bullet \subseteq \boldsymbol{G}_\bullet$。给定一个 $p \in \boldsymbol{G}(\mathcal{U}_A)_\bullet$，我们定义环态射 $\varepsilon(p) : (F_A \circ \Gamma(f))(p) \to \mathcal{O}_S(U_p)$ 为由同构 $\mathrm{Spec}(F_A(p))$ 以及与之对应的开子概形 U_p 在 S 中的对应关系所诱导的态射（注意，此定义不需要作出选择）。由于 (f, ε) 显然是一个弱等价，这就完成了 2）的证明。

现在，我们将通过显式构造一个典范弱等价 $(r,\ \varepsilon_r) : (\mathcal{V})^2_{\mathrm{sch}} \to (\mathcal{U}_A)^2_{\mathrm{sch}}$ 来证明 3)。为简化记号，记覆盖 $\mathcal{U}_A$ 为 $\{U_i \subseteq S\}_{i \in I = \mathcal{A}_0}$；对每个 $i \in I$，记假设中所述的 U_i 的子覆盖为 $\{V_{ij} \subseteq U_i\}_{j \in J_i}$。由于 $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{U}_A$ 的加细，且每个 V_{ij} 都是某个特定 U_i 的子概形，我们可以用显然的方式定义一个图态射 $\tilde{r} : G(\mathcal{V}) \to G(\mathcal{U}_A)$：$\tilde{r}(V_{ij}) := U_i$，以及 $\tilde{r}(V_{ij} \cap V_{lk}) = U_i \cap U_l$（这里，如果所考虑的交非空，我们用交来表示相应的边）。显然，此映射可扩展为映射 $r : \boldsymbol{G}(\mathcal{V})_\bullet \to \boldsymbol{G}(\mathcal{U}_A)_\bullet$。最后，我们通过考虑仿射概形 $V_{ij} \subseteq U_i$、$V_{ij} \cap V_{lk} \subseteq U_i \cap U_l$ 和 $V_{ij} \cap V_{lk} \cap V_{mn} \subseteq U_i \cap U_l \cap U_m$ 的包含映射，构造所需的 ε_r。□

定义 4.18。设 S 是一个概形，$\mathcal{U} = \{U_k\}_{k \in K}$ 是由开子概形（但不一定是仿射子概形）构成的有限覆盖。若由仿射概形构成的有限加细 $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ 是 $\mathcal{U}$ 的一个完全仿射子覆盖，则称其为 $\mathcal{U}$ 的完全仿射子覆盖，当且仅当对每个 $k \in K$，都存在一个子集 $J_k \subseteq J$，使得 $\{V_j\}_{j \in J_k}$ 是 $\mathrm{Spec}(U_k) \subseteq S$ 的一个覆盖，且 J_k 构成 J 的一个划分。

定义 4.19。设 S 是一个概形，$\mathcal{V} = \{V_j \subseteq S\}_{j \in J}$、$\mathcal{U} = \{U_i \subseteq S\}_{i \in I}$ 是它的两个有限开仿射覆盖。我们将 S 的覆盖 $\mathcal{V} \times_S \mathcal{U}$ 定义为

$$\mathcal{V} \times_S \mathcal{U} := \{U_i \times_S V_j \subseteq S\}_{(i,j) \in I \times J}$$

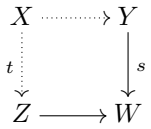
观察 4.20。注意，由于 S 是半分离的，覆盖 $\mathcal{V} \times_S \mathcal{U}$ 是 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 的一个完全仿射子覆盖。因此，仿照命题 4.17 3) 的证明，我们可以定义弱等价 $p_{\mathcal{V}} : (\mathcal{V} \times_S \mathcal{U})^2_{\mathrm{sch}} \to (\mathcal{V})^2_{\mathrm{sch}}$，$p_{\mathcal{U}} : (\mathcal{V} \times_S \mathcal{U})^2_{\mathrm{sch}} \to (\mathcal{U})^2_{\mathrm{sch}}$。

4.4. **概形局部化 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$**。我们希望将范畴 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$ 在弱等价处局部化。实现这一点的经典方法之一，是证明给定的弱等价类构成右乘性系统或左乘性系统。我们不会采用这种方法，但由于我们将对这种构造作出修改，下面简要回顾右乘性系统的定义，参见 [SP, Tag 04VC]。

定义 4.21。设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴。$\mathcal{C}$ 中的一组态射 $\mathcal{S}$ 称为**右乘性系统**，如果它满足以下性质：

RMS1) $\mathcal{C}$ 中每个对象的恒等态射都属于 $\mathcal{S}$，且 $\mathcal{S}$ 中任意两个可复合元素的复合都属于 $\mathcal{S}$。

RMS2) 对于每个实线图表



给定 $s \in \mathcal{S}$，存在一个 X（通常不唯一），使得该图表可以补成一个带有 $t \in \mathcal{S}$ 的交换虚线方块。

RMS3）对于任意一对态射 $f, g\colon X \longrightarrow Y$ 和 $s \in \mathcal{S}$，其源为 Y 且满足 $s \circ f = s \circ g$，都存在一个以 X 为目标的 $t \in \mathcal{S}$，使得 $f \circ t = g \circ t$。

当弱等价的集合构成右（或左）乘法系统时，可以使用通常的分式演算来构造所需局部化的显式模型（参见 [SP, Tag 04VB]或 [Bor1994]中的非常精彩的论述）。

然而，在我们的情形中，弱等价的集合 $\mathcal{W}$ 并不构成乘法系统，正如我们将在下一个例子中看到的；该例给出了性质 RMS3 的一个显式反例。

例 4.22. 设 R_X 是一个交换环，并令 $X := \mathrm{Spec}(R_X)$。考虑对象 $A = (\mathcal{A}, F_A)$ 和 $B = (\mathcal{B}, F_B)$，其中 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 分别是 $G_\bullet$ 和 $H_\bullet$ 的退化扩张； G 是仅由一个顶点组成的图，而 H 是一个由两个顶点和连接它们的一条边组成的图 $a \to b$ 。 F_A 和 F_B 分别定义为单形范畴上的常值函子，其值为 R_X ，范畴分别对应于 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 。注意，$\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(A)$ 和 $\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(B)$ 均同构于 X。考虑两个态射 $\psi_a = (f_a, \varepsilon_a)$ $\psi_b = (f_b, \varepsilon_b)\colon A \to B$ ，其中 f_a 和 f_b 的定义是扩张唯一的包含映射，分别将 u 映至 a 和 b ；而 ε_a 和 ε_b 则利用恒等态射 $R_X \to R_X$ 得到。考虑映射 $\pi : (f_\pi, \varepsilon_\pi)\colon B \to A$，其中 f_π 是半单纯集合映射，它将 $\mathcal{B}$ 的两个不同顶点压缩为 u 的单个顶点； ε_π 则利用 R_X 的恒等态射定义。 π 是弱等价，且 $\pi \circ \psi_a = \pi \circ \psi_b$ ，但不可能找到半单纯集合 $\mathcal{Q}$ 和态射 $f_s\colon \mathcal{Q} \to G(\mathcal{U})_\bullet$ 使得 $f_a \circ f_s = f_b \circ f_s$，因此我们得到，弱等价的集合不满足 RMS3。不过，可以验证 $\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(\psi_a \circ \pi) = \mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(\psi_b \circ \pi)$。由于 $\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(\pi \circ \psi_a) = \mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(\pi \circ \psi_b)$，我们由此观察到，在这个例子中，由 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$ 中的态射诱导的概形态射满足性质 RMS3 的一个修正版。这启示我们给出右乘性系统的新定义，其中 RMS3 的形式较弱；正如我们将看到的，这种定义允许局部化。

前面的例子引出了以下定义。

定义 4.23. 如果两个态射 $\psi, \psi'\colon A \to B$ in $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$ 满足 $\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(\psi) = \mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(\psi')$ ，我们就称它们图式相等 。如果 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$ 中的一个图表满足：其中具有相同源和目标的所有态射都图式相等，那么就称该图表图式交换 。

根据定义， $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$ 中的交换图表也是图式交换的。我们将需要图式相等态射的一些有用性质。先给出一个技术引理。

引理 4.24. $\psi = (f, \varepsilon)\colon A = (\mathcal{A}, F_A) \to B = (\mathcal{B}, F_B)$ 中每个属于 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$ 的态射都可限制为一个态射 $\psi' = (f', \varepsilon') : (\mathcal{U}_A)^2_{\mathrm{sch}} \to (\mathcal{U}_B)^2_{\mathrm{sch}}$，使得 $\psi \circ i_A = i_B \circ \psi'$。

证明. 注意，对于一维单形 $e \in \mathcal{A}$，如果 $F_A(e)$ 非平凡（即 e 属于子半单纯集 $\boldsymbol{G}(\mathcal{U}_A)_\bullet \subseteq \mathcal{A}$），那么 $F_B(f(e))$ 也必定非平凡（即 $f(e)$ 属于子半单纯集 $\boldsymbol{G}(\mathcal{U}_B)_\bullet \subseteq \mathcal{B}$），因为不存在从平凡环到非平凡环的环同态。对于二维单形，同样成立。因此，f 可限制为映射 $\boldsymbol{G}(\mathcal{U}_A)_\bullet \to \boldsymbol{G}(\mathcal{U}_B)_\bullet$，故 ε也如此。□

注 4.25。明确指出，若 $\psi = (f, \varepsilon_f)$ $\psi' = (g, \varepsilon_g)$：$A \rightrightarrows B$在概形意义下相等，则存在一个同构 φ：$|f|_*\mathcal{O}_A \to |g|_*\mathcal{O}_A$，使得$\varepsilon_g^\flat = \varphi \circ \varepsilon_f^\flat$。此外，若 A和 B分别具有 $(\mathcal{U})^2_{\mathrm{sch}}$和 $(\mathcal{V})^2_{\mathrm{sch}}$的形式，且它们来自两个概形 X 和 Y的给定开仿射覆盖，则可以令 φ 为恒等态射。

现在我们证明一个重要的技术命题，它可以理解为：我们的弱等价满足 RMS2 和 RMS3 的一个变体，其中这两个条件对态射所要求的所有相等关系都放宽为概形相等。

引理 4.26。以下结论成立：

1）设 $f : A \to B$ 是一个弱等价，且 $g : C \to B$ 是 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$的一个态射。那么存在 $Q \in \mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$、一个弱等价 $f' : Q \to C$ 以及一个态射 $g' : Q \to A$，使得 $g \circ f'$ 和 $f \circ g'$ 在概形意义下相等。此外，若 g 是一个弱等价，则可以构造 g'，使得g' 也是一个弱等价。2）给定两个映射 $f, g : A \rightrightarrows B$，若存在 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$ 中的一个弱等价 $s : B \to Q$，使得 $s \circ f$ 在概形意义下等于 $s \circ g$，则存在一个弱等价 $t : Q \to A$，使得 $f \circ t$ 和 $g \circ t$ 在概形意义下相等。

证明。我们先证明 1)。记 $Y := \mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(B)$，$X := \mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(A)$，$Z :=\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(C)$。由引理 4.24，我们可以假设 $A = (\mathcal{U}_A)^2_{\mathrm{sch}} =: (\mathcal{A}, F_A)$,$B = (\mathcal{U}_B)^2_{\mathrm{sch}} =: (\mathcal{B}, F_B)$ 且 $C = (\mathcal{U}_C)^2_{\mathrm{sch}} =: (\mathcal{C}, F_C)$。由于 f是弱等价，我们知道 $\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(f)(\mathcal{U}_A) =\{\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(\mathrm{Spec}(F_A(q))\}_{q\in\mathcal{A}_0}$ 是由开仿射子概形构成的、对 Y 的覆盖。因此，$\mathcal{U}_{g^{-1}\mathcal{U}_A} := \{\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(g)^{-1}(\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(\mathrm{Spec}(F_A(q)))\}_{q\in\mathcal{A}_0}$ 是对 Z 的一个开覆盖（可能不是仿射覆盖）：令 $\mathcal{V}^{\mathrm{aff}}$ 为其一个完全仿射子覆盖。我们定义$Q := (\mathcal{Q}, F_Q) := (\mathcal{U}_C \times_Z \mathcal{V}^{\mathrm{aff}})^2_{\mathrm{sch}}$和 $f' := p_{\mathcal{U}_C}$。根据定义 4.19 f'是一个弱等价。现在我们需要定义 $g' =: (\tilde{g}', \varepsilon_{g'})$。我们将 $\tilde{g}'$ 定义为以下典范映射的复合：$\boldsymbol{G}(\mathcal{U}_C \times_Z \mathcal{V}^{\mathrm{aff}})_\bullet \to \boldsymbol{G}(\mathcal{V}^{\mathrm{aff}})_\bullet \to \boldsymbol{G}(\mathcal{U}_{g^{-1}\mathcal{U}_A})_\bullet \cong \boldsymbol{G}(\mathcal{U}_A)_\bullet = \mathcal{A}$。我们如下定义 $\varepsilon_{g'}$。对于每个 $a \in \Gamma(\boldsymbol{G}(\mathcal{U}_C \times_Z \mathcal{V}^{\mathrm{aff}})_\bullet)$，我们将映射$\varepsilon_{g'}(a) : F_A(\tilde{g}'(a)) \to F_Q(a)$定义为如下概形态射的整体截面所给出的环同态：将开嵌入 $\mathrm{Spec}(F_Q(a)) \to\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(g)^{-1}(\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(\mathrm{Spec}(F_A(\tilde{g}'(a))))$（回忆一下，$\mathcal{V}^{\mathrm{aff}}$ 是 $\mathcal{U}_{g^{-1}\mathcal{U}_A}$的一个完全仿射子覆盖）与映射

$$\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(g)^{-1}(\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(\mathrm{Spec}(F_A(\tilde{g}'(a))))) \to \mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(\mathrm{Spec}(F_A(\tilde{g}'(a))))$$

通过沿着该态射对 $\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(g)$ 取拉回而得到

$$\mathrm{Spec}(F_A(\tilde{g}'(a))) \hookrightarrow X \xrightarrow{f} Y$$

可以验证，g' 是所需的态射，并且如果 g 是弱等价，那么它也是弱等价。

现在来证明 2）。记 $Y := \mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(B)$，$X := \mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(A)$，$Z :=$

$\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(Q)$。同样，可以假设 $A = (\mathcal{U}_A)^2_{\mathrm{sch}} =: (\mathcal{A}, F_A)$，且 $B = (\mathcal{U}_B)^2_{\mathrm{sch}} =: (\mathcal{B}, F_B)$。考虑由开（可能非仿射）子概形 $\mathcal{U}_f := \mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(f)^{-1}(\mathcal{U}_B)$ 和 $\mathcal{U}_g := \mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(g)^{-1}(\mathcal{U}_B)$ 对 X 的覆盖。由于 s 是弱等价，$\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(s)$ 是一个同构。假设意味着 $\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(s) \circ \mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(f) = \mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(s) \circ \mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(g)$，因此 $\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(s) = \mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(f)$。由此可得 $\mathcal{U}_f = \mathcal{U}_g$：考虑它的一个完全仿射子覆盖 $\mathcal{V}$。定义 $Q := (\mathcal{U}_A \times_X \mathcal{V})^2_{\mathrm{sch}}$ 和 $t := p_{\mathcal{U}_A}$。可以验证，这就是所需的对象和态射。□

定义 4.27。 称 $\mathcal{S}$ 的 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$ 箭头集为概形右乘性系统，若其满足以下性质：

sRMS1) $\mathcal{C}$ 中每个对象的恒等态射都属于 $\mathcal{S}$，且 $\mathcal{S}$ 中两个可复合元素的复合也属于 $\mathcal{S}$。sRMS2) 对于每个实线图表

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{t'}{\cdots\!\rightarrow} & Y \\ {\scriptstyle t}\,\vdots & & \downarrow{\scriptstyle s} \\ Z & \xrightarrow{s'} & W \end{array}$$

其中 $s \in \mathcal{S}$，存在一个 X（通常不唯一），使得该图表可补成一个带有 $t \in \mathcal{S}$ 的概形交换图表。若 $s' \in \mathcal{S}$，则可以用一种使 $t' \in \mathcal{S}$ 也成立的方式补全该图表。

sRMS3) 对于每一对态射 $f,\ g : X \longrightarrow Y$ 和 $s \in \mathcal{S}$，其源为 Y，且 $s \circ f$ 在概形意义下等于 $s \circ g$，都存在一个以 X 为目标的 $t \in \mathcal{S}$，使得 $f \circ t$ 在概形意义下等于 $g \circ t$。

由引理 4.26 我们立即得到以下结果，它是将 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$ 在 $\mathcal{W}$ 处局部化的关键。

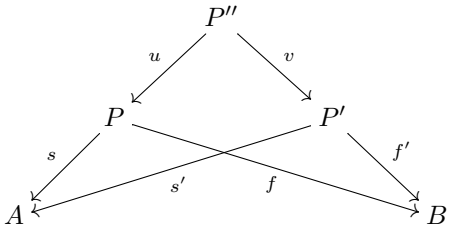
命题 4.28。 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$ 中的弱等价集合 $\mathcal{W}$ 是一个概形右乘性系统。

现在我们可以定义局部化范畴 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}[\mathcal{W}^{-1}]$，仿照右乘性系统局部化时使用的通常构造（例如参见 [Bor1994，5.2。4]或 [S2017a]，其中给出的构造与我们的情形更为接近）。

定义 4.29。 我们将 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$ 关于概形乘性系统 $\mathcal{W}$ 的概形局部化 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}[\mathcal{W}^{-1}]$ 定义为如下范畴：

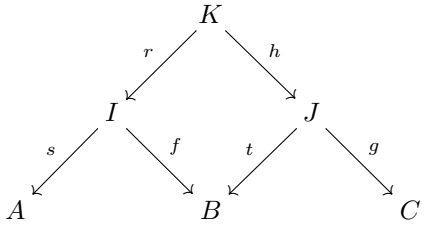
1) $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}[\mathcal{W}^{-1}]$ 的对象与 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$ 的对象相同。2) 从对象 A 到对象 B 的态射，可通过考虑之字形集合 $A \xleftarrow{s} P \xrightarrow{f} B$ 得到，其中 s 是弱等价，而 f 是 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$ 的态射；再对由以下方式定义的等价关系取商：若存在一个之字形 $A \xleftarrow{s} P \xrightarrow{f} B$，$A \xleftarrow{s'} P' \xrightarrow{f'} B$ 使得 $P \xleftarrow{u} P'' \xrightarrow{v} P'$ 和 u 是弱等价，v 且 $s \circ u$ 与 $s' \circ v$ 图式相等，并且 $f \circ u$ 与 $f' \circ v$ 图式相等（见图表 2）。

(2)



3) 两个之字形 $A \xleftarrow{s} I \xrightarrow{f} B$ 和 $B \xleftarrow{t} J \xrightarrow{g} C$ 的复合定义为任意一个之字形 $A \xleftarrow{s\circ r} K \xrightarrow{g\circ h} C$，其中 $K \xrightarrow{r} I$ 是弱等价，而$K \xrightarrow{h} J$ 是一个态射，并且 $f \circ r$ 与 $t \circ h$ 图式相等（见图表 3）。

(3)



观察 4.30。我们明确指出，范畴 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}[\mathcal{W}^{-1}]$ 并不是通常意义下的范畴局部化，即并非满足某种泛性质的范畴，例如 [Bor1994，5.2 中所述的泛性质。1]在我们的情形中，只有命题 4.32中所述的性质成立。

命题 4.31。$\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}[\mathcal{W}^{-1}]$ 定义良好。

证明。证明可仿照将范畴在一组态射的右乘法集合处进行局部化的情形，形式化地完成（例如参见 [Bor1994]5.2.4 及其中的图表），并以性质 sRMS2 和 sRMS3 代替右乘性系统的性质 RMS2 和 RMS3（见定义4.27 和 4.21）。请注意，在前一定义的第 2) 点中，我们要求 u 和 v 均为弱等价（例如 [S2017a], 中也是如此）；而在对右分式演算进行局部化时，通常只需较弱的假设（确实，在 sRMS2 的情形下，使用命题 4.26 第 1) 点的术语，如果 g是弱等价，则可推出我们也可以取 g' 为弱等价）。□

4.5. **范畴等价 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}[\mathcal{W}^{-1}]$ 与概形**。为了在 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}[\mathcal{W}^{-1}]$ 与概形范畴之间建立范畴等价，我们首先定义它们之间的一个函子。

命题 4.32。我们有如下结论：

1）存在一个函子

$$I_{\mathcal{W}} : \mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}} \to \mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}[\mathcal{W}^{-1}]$$

它在对象上是恒等态射，并将 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$ 中的态射 $f\colon A \to B$ 映射到之字形 $A \xleftarrow{id_A} A \xrightarrow{f} B$（的等价类）。

2) 函子 $I_{\mathcal{W}}$ 经过一个函子进行分解

$$\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{W}} : \mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}[\mathcal{W}^{-1}] \to \mathrm{Sch}$$

使得 $\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{W}} \circ I_{\mathcal{W}} = \mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}$。这个函子在对象上是恒等态射，并将之字形 $A \xleftarrow{s} P \xrightarrow{f} B$ 发送为 $\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(f) \circ \mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(s)^{-1} : \mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(A) \to \mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(B)$。

证明。 证明过程与 [SP 中的论证完全类似，标签 04VK] （或参见[Bor1994，第 186] 页），利用弱等价经函子 Spec 映射后成为同构这一事实$^{\mathcal{C}}$。 □

观察 4.33。 设 S 是一个概形，且 $\mathcal{U}$ 是由仿射开子概形构成的有限覆盖。那么可以验证，$\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{W}}((\mathcal{U})^2_{\mathrm{sch}}) \cong S$。

定理 4.34。 这个函子

$$\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{W}} : \mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}[\mathcal{W}^{-1}] \to \mathrm{Sch}$$

是一个范畴等价，其中 Sch 是拟紧半分离概形范畴。

证明。 我们要证明 $\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{W}}$ 本质满、忠实且充满。它是本质满的，这是因为观察4.33。

我们证明该函子是忠实的。为此，需要证明：如果两个锯齿 $F := A \xleftarrow{s} I \xrightarrow{f} B$ 和 $G := A \xleftarrow{s'} J \xrightarrow{f} B$ 经 $\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{W}}$映射后得到相同的态射，那么它们等价。我们可以假设 $A = (\mathcal{U}_A)^2_{\mathrm{sch}}$, $B = (\mathcal{U}_B)^2_{\mathrm{sch}}$,$I = (\mathcal{U}_I)^2_{\mathrm{sch}}$ 以及 $J = (\mathcal{U}_J)^2_{\mathrm{sch}}$。由于 $\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(s)$ 和 $\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(s')$ 是同构，因此覆盖 $\mathcal{U}^A_I := \mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(s)(\mathcal{U}_I)$ 和 $\mathcal{U}^A_J := \mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(s)(\mathcal{U}_J)$ 是 $X := \mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(A)$ 的开仿射子概形覆盖。我们明确指出，$\boldsymbol{G}(\mathcal{U}^A_I)_\bullet \cong \boldsymbol{G}(\mathcal{U}_I)_\bullet$以及 $\boldsymbol{G}(\mathcal{U}^A_J)_\bullet \cong \boldsymbol{G}(\mathcal{U}_J)_\bullet$。因此，利用仿射概形同构的整体截面

$$\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(\boldsymbol{F}^2_{\mathcal{U}_A}(s'(p))) \supseteq \mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(s')(\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(\boldsymbol{F}^2_{\mathcal{U}_J}(p))) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(\boldsymbol{F}^2_{\mathcal{U}_J}(p)),\ p \in \boldsymbol{G}(\mathcal{U}_J)_\bullet$$

我们可以定义映射 $s'_A : (\mathcal{U}^A_J)^2_{\mathrm{sch}} \xrightarrow{\cong} J$。类似地，我们可以构造映射$s_A : (\mathcal{U}^A_I)^2_{\mathrm{sch}} \xrightarrow{\cong} I$。现在考虑覆盖 $\mathcal{V} := \mathcal{U}_A \times_X \mathcal{U}^A_J \times_X \mathcal{U}^A_I$以及定义 4.19 中定义的投影 $p_I := p_{\mathcal{U}^A_I}$、$p_J := p_{\mathcal{U}^A_J}$和 $p_A := p_{\mathcal{U}_A}$。设 $Q := (\mathcal{V})^2_{\mathrm{sch}}$。那么之字形 $I \xleftarrow{p_I} Q \xrightarrow{p_J} J$ 给出了 F与 G之间的等价。事实上，根据我们所构造的对象和态射的定义本身，可以验证 $s \circ p_I$ 与 $s' \circ p_J$ 图式相等，且 $f \circ p_I$ 与 $g \circ p_J$ 图式相等。

现在证明 $\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{W}}$ 是充满的。考虑两个对象 A、$B \in \mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}[\mathcal{W}^{-1}]$ 以及它们之间的任意映射 $f : X := \mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(A) \to \mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(B) := Y$。我们需要证明存在一个之字形 $F := A \xleftarrow{s} Q \xrightarrow{f'} B$，使得 $\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{W}}(F) = f$。由引理 4.24 可知，我们可以假设 $A = (\mathcal{U}_A)^2_{\mathrm{sch}}$, $B = (\mathcal{U}_B)^2_{\mathrm{sch}}$。考虑由开子概形（可能非仿射）构成的覆盖 $f^{-1}(\mathcal{U}_B)$，它覆盖 X。取其一个完备仿射覆盖 $\mathcal{Q}$，考虑覆盖 $\mathcal{V} := \mathcal{U}_A \times_X \mathcal{Q}$ （它仍是 $f^{-1}(\mathcal{U}_B)$ 的完备仿射子覆盖），并定义 $Q := (\mathcal{V})^2_{\mathrm{sch}}$, $s := p_{\mathcal{U}_A} : Q \xrightarrow{\simeq} A$。由于 $\mathcal{V}$ 是 $f^{-1}(\mathcal{U}_B)$ 的开仿射子覆盖，我们得到一个诱导的半单纯态射 $\tilde{f} : \boldsymbol{G}(\mathcal{V})_\bullet \to \boldsymbol{G}(f^{-1}(\mathcal{U}_B))_\bullet \cong \boldsymbol{G}(\mathcal{U}_B)_\bullet$。利用函子 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(-, \mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(B))$ 是一个层这一事实 [GW2010，命题

3.5] 我们得到，对于所有 $p \in \Gamma(\boldsymbol{G}(\mathcal{V})_\bullet)$，存在一个仿射概形之间的概形态射$X \supseteq \mathrm{Spec}(\boldsymbol{F}^2_{\mathcal{V}}(p)) \to \mathrm{Spec}(\boldsymbol{F}^2_{\mathcal{U}_B}(\tilde{f}(p))) \subseteq Y$，它经由 $f^{-1}(\mathcal{U}_B)$ 中的一个元素分解，并且粘合到 f。我们可以利用这些态射，通过取整体截面，定义一个映射 ε_f: $\boldsymbol{F}^2_{\mathcal{U}_B} \circ \Gamma(\tilde{f}) \to \boldsymbol{F}^2_{\mathcal{V}}$。我们定义 $f' := (\tilde{f}, \varepsilon_f)$。之字形$A \xleftarrow{s} Q \xrightarrow{f'} B$ 正是完成证明所需的，因为可以验证 $\mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(f') = f \circ \mathrm{Spec}^{\mathcal{C}}(s)$。□

4.6. 有限空间与流形。 本节对可微流形范畴作一些评论。

设 M 是一个可微流形，并稍微滥用一下记号，将 M 也视为环化空间（M, C^∞_M），其中 C^∞_M 是 M 上可微函数的层。整体截面代数 C^∞_M（M）使我们能够通过 Milnor 练习恢复 M 的点（见 [KM1993，N2003]）。更准确地说，若极大理想 $\mathfrak{m} \subseteq C^\infty_M$（$M$）满足 C^∞_M（M）$/\mathfrak{m} \cong \mathbb{R}$，则称其为实极大理想。实极大理想的集合 Spec_m（C^∞_M（M））称为 C^∞_M（M）的实谱，并且有以下自然对应（Milnor 练习）：

$$\mathrm{Hom}(C^\infty_M(M), \mathbb{R}) \cong M \tag{4}$$

类似于复仿射概形的 $\mathbb{C}$点（S, $\mathcal{O}_S$）与 $\mathcal{O}_S$（S）的极大谱之间的对应关系， $\mathcal{O}_S$ 的整体截面。于是可以给可微流形的实谱赋予一种拓扑，使得对应关系（4）是一个同胚。光滑流形范畴（从现在起，我们假设它们具有有限图册）Man 与仿射概形之间还有更多相似之处（见 [NS2003]）。事实上：

- 存在一个从 Man 到 $\to \mathbb{R}$-代数的充满忠实反变函子， $M \mapsto \mathcal{C}^\infty_M$。
- 我们可以定义一个函子 Spec_m： $\mathbb{R}$-代数 $\to$ RngSpcs，使得对于某个流形 M，$\mathrm{Spec}_m(A) \cong M$， $A \cong \mathcal{C}^\infty_M$。

然而，正如 [NS2003], 所指出的，光滑流形范畴缺少概形范畴所具有的一些理想性质。因此，要获得类似于 [S2017a] 中的结果及其在第4 节中的推广，就应当转向可微空间范畴，正如 [NS2003]中所做的那样。无须深入讨论这种构造的技术细节，值得注意的是，第3 节的大部分内容都可以毫无困难地推广到光滑流形和可微空间的情形，特别是：

- 第3.1节中的粘合数据和粘合立方体概念。
- 给定一个光滑流形 S 和一个开覆盖 $\mathcal{U}$，构造两个环化空间 $S_{\mathcal{U}}$， $S^2_{\mathcal{U}}$以及函子 $F^2_{\mathcal{U}}$在第3.3节中。

至于范畴 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Man}}$，其构造更为复杂，下面我们将作一些说明。

注4.35。 我们可以 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Man}}$ 逐字重复构造范畴 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Sch}}$ ，并得到与第4 节类似的结果，使用 [NS2003第 30] 页中的可微代数代替环和函子 Spec_m ，并使用 [NS2003第 44] 页中的 Spec 代替 Spec。给定一个 M 允许有限图册的流形 $\mathcal{U}$，我们可以重复观察 4.33 中的推理，得到 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Man}}$的一个对象。我们认为范畴 $\mathcal{C}^2_{\mathrm{Man}}$ 的对象对应用很有用：我们将把对该范畴的研究，以及更一般地对可微流形和空间情形的研究，留待未来工作。同样，我们注意到，我们所

针对可微流形所述的一切，都可以推广到其超类比物[CC2011]。

我们以一个观察结束本节，该观察对于研究 [FSZ2026] 上的图上的向量丛

观察 4.36. 给定一个可微（或复）流形 M，$\mathcal{C}^\infty$（或全纯）向量丛（配备平坦联络）的同构类与 M 上实（复）向量空间的局部常值层的同构类之间存在自然对应（例如参见 [Voi2002] 第 9.2 节）。特别地，若 M 是一个可微流形，且 (V,∇) 是其上的一个配备平坦联络的向量丛，则在此对应下所需的 M 上的实向量丛局部常值层 L_V 为 $\ker(\nabla)$（将其视为 V 的平坦截面所构成的局部系统，即被 ∇ 消去的那些截面），并且有 $V \cong L_V \otimes \mathcal{O}_M$。现在，固定一个可微流形 M、一个配备平坦联络的向量丛 (V,∇)，并假设存在一个有限开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_i \subseteq M\}$，覆盖 M，使 V 平凡化，且如前所述得到的 L_V 限制到覆盖 $\mathcal{U}$ 的每个开子流形上时，同构于一个向量空间的常值层；也就是说，对所有 i 和给定的 $n \in \mathbb{N}$，都有 $L_{V|U_i} \cong \mathbb{R}^n$。现在考虑例如定义 3.20 中所述的空间 $(M^2_{\mathcal{U}}, \mathcal{O}_{M^2_{\mathcal{U}}})$。

—

- $V \cong L_V \otimes \mathcal{O}_M$ 定义了一个局部自由模 $V_{M^2_{\mathcal{U}}} \otimes \mathcal{O}_{M^2_{\mathcal{U}}}$，其中 $V_{M^2_{\mathcal{U}}}$ 是 $M^2_{\mathcal{U}}$ 上取值于 $\mathbb{R}$ 的层。
- $V_{M^2_{\mathcal{U}}}$ 等价于偏序集$P_{G(\mathcal{U})}$上的一个向量空间预层的数据，其中所有限制态射都是同构。后者这一组合数据相当于：对图 $G(\mathcal{U})$ 的每个顶点 v，选取一个 n维向量空间F_v；对 $G(\mathcal{U})$ 中连接两个顶点 v 和 w 的每条边，选取一个同构 $F_v \cong F_w$；并满足由覆盖 $\mathcal{U}$ 中各元素的三重交的组合结构所导出的某些余循环条件（如果覆盖的三重交均为空，则不存在这类余循环条件）。

因此，我们对图上的向量丛的处理，见 [FSZ2026]，受到 [BY2024]的工作启发，在适当假设下，似乎是对带平坦联络的向量丛研究的离散类比（另见 [DM1994]）。

4.7. **同调与上同调**。我们讨论第 4.1 $(S_{\mathcal{U}}, \mathcal{O}_{S_{\mathcal{U}}})$ 和 $(S^2_{\mathcal{U}}, \mathcal{O}_{S^2_{\mathcal{U}}})$ 小节中考察的两个有限环化空间的同调与上同调。

设 X 是一个有限拓扑空间，且 $\mathcal{F}$ 是其上的阿贝尔群层。那么，在 X 上给出一个阿贝尔群层，相当于根据命题 2.14，在与 X 相关联的偏序集上给出一个阿贝尔群预层。回顾一下，这相当于对每个 $\mathcal{F}(U_p)$ 给定一个阿贝尔群 $p \in X$，并对每个 $\mathcal{F}(U_p) \to \mathcal{F}(U_p)$ 给定态射 $p \leq q$。按照 [CM2019, 1.6.1] 我们定义层 $C^i\mathcal{F}$ 和余层 $C_i\mathcal{F}$ 在 X 上为

$$C^i\mathcal{F}(U) = \prod_{(x_0<\ldots<x_i)\in U} \mathcal{F}(U_{x_i}) \qquad C_i\mathcal{F}(U) = \bigoplus_{(x_0<\ldots<x_i)\in U} \mathcal{F}(U_{x_i}) \quad U \subseteq X$$

这些层组合起来构成一个层复形：

$$C^\bullet \quad 0 \to C^0\mathcal{F} \to C^1\mathcal{F} \to \ldots \to C^n\mathcal{F} \to 0 \quad n = \dim X$$

~类似地，如果 $\mathcal{F}$ 是一个余层，也就是说，它是在通过考虑 X 的对偶拓扑所得到的拓扑空间上的一个层（开集是 X的闭集），我们

得到一个余层复形:

$$C_\bullet \quad 0 \to C_n\widetilde{\mathcal{F}} \to C_{n-1}\widetilde{\mathcal{F}} \to ... \to C_0\widetilde{\mathcal{F}} \to 0 \quad n = \dim X$$

我们有如下结论。

定理 4.37 ([CM2019] 1.6.2, 1.6.4)。 若 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}$ 分别是有限拓扑空间 X上的阿贝尔群层和余层，则对于任意开子集 $U \subseteq X$ 和闭子集 $Z \subseteq X$，对所有自然数 i

$$H^i(C^\bullet\mathcal{F}(U)) \cong H^i(U, \mathcal{F}) \qquad H_i(C_\bullet\widetilde{\mathcal{F}}(Z)) \cong H_i(Z, \widetilde{\mathcal{F}})$$

其中 $H^i(U, \mathcal{F})$、 $H_i(Z, \widetilde{\mathcal{F}})$ 是通常的层上同调群和同调群。

设 S 是拟紧且半分离的概形，或是可微流形， $\mathcal{U}$ 而 S 是 S的一个有限（若$S_\mathcal{U}$是概形，则为仿射）开嵌入覆盖。由此数据可关联得到拟概形空间（$S_\mathcal{U}, \mathcal{O}_{S_\mathcal{U}}$）和（$S^2_\mathcal{U}, \mathcal{O}_{S^2_\mathcal{U}}$）。令$M$ 是 S上的一个拟凝聚模。我们将 π_*M 记为由沿典范投影 $\mathcal{O}_{S_\mathcal{U}}$从 M 推前得到的拟凝聚 π-模： $S \to \widetilde{S_\mathcal{U}}$； 将 M 记为通过备注 4.8 给出的等价关系所得到的拟凝聚模。

命题 4.38。 沿用上述记号。那么

$$H^i(C^\bullet\pi_*M(S_\mathcal{U})) \cong H^i(S, M) \cong H^i(C^\bullet\widetilde{M}(S^2_\mathcal{U})), \qquad i = 0, 1$$

证明。 第一个同构的证明见 [S2017a] 而第二个同构则可由以下观察得出： $C^\bullet\widetilde{M}(S^2_\mathcal{U})$) 在 0、1、2 次上与$M$ 关于覆盖 $\mathcal{U}$的 Čech 复形一致。□

注意，对于 $i \geq 2$，一般来说有 $H^i(C^\bullet\pi_*M(S_\mathcal{U})) \ncong H^i(C^\bullet\widetilde{M}(S^2_\mathcal{U}))$，参见注 4.7。

References

[Al2011] Alexandrov, P. S., *Combinatorial Topology I, II, III*, Dover, 2011, 1957年再版。[AFLW2021] Aschieri, P., Fioresi, R., Latini, E., Weber, T., *Dif- ferential Calculi on Quantum Principal Bundles Over Projective Bases* 405, , 《数学物理通讯》, 2021。[SGA4] *Théorie des topos et cohomologie étale des schemas 1 2 3* Artin, M., Grothendieck, A., Verdier, J. L., , , 1972, Springer-Verlag, 。[EGA 4] *Theorie de Topos et Cohomologie Etale des Schemas I II III* Artin, M., Grothendieck, A., Verdier, J. L., , , 269, 270, 305, 1971, Springer《数学讲义》。[AM1969] Artin, M., Mazur, B., *Etale homotopy*, 《数学讲义》第100号，Springer-Verlag，1969年。[BM2020] Beggs, E. J., Majid, S., *Quantum Riemannian Geometry*, Springer，2020年。[Bj1984] Bjorner, A., *Posets, Regular CW complexes and Bruhat Order*, 《欧洲组合学杂志》，1984年。[BD2022] Bodnar, C., Di Giovanni, F., Chamberlain, B. P., Lio, P., Bronstein, M. M., *Neural sheaf diffusion: A topological perspective on heterophily and oversmoothing in GNNs*，载于 ICLR，2022年。[BF2021] Bodnar, C., Frasca, F., GuangWang, Y., Otter, N., Montufar, G., Lio, P., Bronstein, M., *Weisfeiler and Lehman Go Topological: Message Passing Simplicial Networks*，第38届国际机器学习会议论文集，PMLR 139，2021年。[Bor1994] Borceux, F., *Handbook of Categorical Algebra I: Basic Category Theory*，数学及其应用百科全书（50），1994年。[BY 2024] *A Discrete Exterior Calculus of Bundle-valued Forms* Braune, T., Tong, Y., Gay-Balmaz, F., Desbrun, M., , 2406 05383, https://arxiv.org/abs/。

[BB2017] *Geometric Deep Learning going beyond euclidean data* 34 4 18 42, 2017 Bronstein, M. M., Bruna, J., LeCun, Y., Szlam, A., Vandergheynst, P., , 《IEEE信号处理杂志》 (), -。[BB2021] Bronstein, M., Bruna, J., Cohen, T., Veli˘ckovi´c, P., *Geometric deep learning: Grids, groups , graphs, geodesics, and gauges*, ArXiv:2104.13478, 2021年。[CC2011] Carmeli, C., Caston, L., Fioresi, R., *Mathematical Foundations of Supersymmetry*, EMS, 2011年。[CM2019] *Homology* Carmona *and Cohomology of Finite Spaces* 224, 2019 Sanchez, V., Maestro perez, C., de Salas, F. S., Torres Sancho, J.F., , 《纯粹与应用代数杂志》。[Cu2014] Curry, J.M., *Sheaves, cosheaves and applications*, 博士论文, 2014年。[SP] De Jong, J., *Stacks project*, 可在线获取的层叠开源项目: http://stacks.math.columbia.edu。[Di2006] Diestel, R., *Graph Theory*, Springer GTM 173, 第5版, 2016年。[DM1994] *Discrete differential calculus graphs topologies and* Dimakis, A., *gauge theory* 35 6703 6735, 1994 Mueller-Hoissen, F., , , 《数学物理杂志》-。[EW2018] Ebert, J., Williams, O. R., *Semisimplicial spaces*, 《代数与几何拓扑》, 2017年。[FZ2023] Fioresi, R., Zanchetta, F., *Deep learning and geometric deep learning: An introductionfor mathematicians and physicists*, 《现代物理学中的几何方法国际杂志》, 第12期, 论文编号2330006, 2023年。[FSZ2026] *Sheaves on Graphs and their Differential Cal-* Fioresi R., *culi* Simonetti A. Zanchetta F., , 编写中。[FP1990] Fritsch, R., Piccinini, R., *cellular Structures in Topology*, 《剑桥高等数学研究丛书》19, 1990年。[GR2001] Godsil, C., Royce, F. G., *Algebraic Graph Theory*, GTM, Springer, 2001年。[GJ1999] Goerss, P. G., Jardine, J. F., *Simplicial Homotopy Theory*, 《数学进展》174卷, Birkhäuser, 1999年。[Go2012] Gonzalez, B. R., *Simplicial descent categories*, 《纯粹与应用代数杂志》第216卷第4期, 2012年。[GB2016] Goodfellow, I., Bengio, Y., Courville, A., *Deep Learning*, MIT出版社, 2016年。[GW2010] G¨ortz, U., Wedhorn, T., *Algebraic geometry I*, Vieweg-Teubner-Verlag, 2010年。[EGA] Grothendieck, A., *Elements de Géométrie algébrique*, 数学科学基础丛书（法文）166（第2版）, Springer-Verlag, 1971年。[HY2017] *Inductive Representation Learning on Large* Hamilton, *Graphs* 1706 02216, 2017 W.L., Ying, R., Leskovec, J., , arXiv:。[HG2019] Hansen, J., Ghrist, R., *Toward a spectral theory of cellular sheaves*, 《应用与计算拓扑杂志》3, 315–358, 2019年。[HG2020] Hansen, J., Gebhart, T., *Sheaf Neural Networks*, NeurIPS, 2020年。[Ha1977] Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*, GTM, Springer, 1977年。[Ho2007] Hovey, M., *Model Categories*, 美国数学学会, 2007年。[Ja2001] Jardine, R., *Stacks and the homotopy theory od simplicial sheaves*。《同调、同伦与应用》第3卷第2期, 2001年。[KS2006] Kashiwara, M., Shapira, P., *Categories and Sheaves*, Springer, 2006年。[KM1993] Kolar, J., Michor, P., Slovak, J., *Natural Operations in Differential Geometry*, GTM, Springer Verlag, 1993年。[Lu2009] Lurie, J., *Higher Topos Theory*, 《数学研究年刊》第170卷, 2009年。[Lu2018] Lurie, J., *Kerodon*。https://kerodon.net, 2018年。[SP2006] Ladkani, S., *On derived equivalences of categories of sheaves over finite posets*, 《纯粹与应用代数杂志》212, 2006年。[SQ2013] Liu, Y., *Stacks and Torsors over Quivers* 17, , 《代数与表示论》, 2013年。[Ma2013] Majid, S., *Noncommutative Riemannian Geometry on Graphs*, 《几何与物理杂志》第69卷, 74-93页, 2013年。[Ma1992] May, J. P., *Simplicial Objects in Algebraic Topology*, 芝加哥大学出版社, 1992年。[NS2003] Navarro Gonzalez, J.A., Sancho de Salas, J.B., *$\mathcal{C}^\infty$-Differentiable Spaces*, 《数学讲义》1824, Springer, 2003年。[N2003] Nestruev, J., *Smooth manifolds and observables*, GTM, Springer Verlag, 2003年。[S2017a] *Finite spaces and schemes* 122, 3 27, Salas, F.S. de., , 2017 《几何与物理杂志》-。

[SS2017] Salas, F.S. de, Salas, P.S. de., *Affine Ringed Spaces and Serre's criterion* 《落基山数学杂志》 47, no. 6: 2051–81, 2017.[SG2010] Scarselli, F., Gori, M., Tsoi, A. C., Hagenbuchner, M., Monfardini, G., *Neural Network Model* *The Graph* 61 , IEEE《神经网络汇刊》, vol. 20, no. 1, pp. -80, 2009.[SP2009] Spivak, D. I., *Higher-Dimensional Models of Networks*, arXiv:0909.4314v1, 2009. [Spi2009] Spivak, D. I., *Higher-dimensional models of networks*, ArXiv abs/0909.4314, 2009. [Va2025] Vakil, R., *The Rising Sea. Foundations of Algebraic Geometry*. 普林斯顿大学出版社, 2025.[Vi2005] Vistoli, A., *Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory*, pg. 1-104, in B. Fantechi et al. editors *Fundamental algebraic geometry*, Math. surveys and monographs 123, 美国数学学会, 2005.[Voi2002] Voisin, C., *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry, I*, 剑桥高等数学研究丛书 76, 2002. [Zam2024] *Position: Topological Deep Learning is the New Frontier for Relational Learning* 235, 2024 Zamzmi, G. et al., , 机器学习研究论文集 .