arXiv:2602.21235v1 [math.DG] 11 Feb 2026

带有非光滑导子的微分空间

MASAKI TAHO

Abstract. 我们证明，在某些微分空间上存在满足莱布尼茨法则、但相对于给定微分学并不光滑的线性导子。这表明，通过所有此类导子定义的切空间严格大于仅通过光滑导子定义的切空间，也说明仅凭莱布尼茨法则无法恢复光滑性。

1. 引言 Introduction

为了研究流形之外的光滑结构，Souriau 在其 1980 年的论文中提出了“微分学”这一概念 [4]。由此产生了微分空间的概念，它将光滑流形范畴扩展至商、映射空间及其他非流形对象，同时保留了合理的光滑映射概念；例如参见 Baez–Hoffnung [1]。

Iglesias-Zemmour [3], Vincent [6], 和 Christensen-Wu [2]提出了几种针对微分空间的切空间概念。本文关注 [2]，中引入的外切空间 $\hat{} \; T_x(X)$，它是光滑导子的向量空间

$$D\colon G(X,x)\to\mathbb{R},$$

即满足莱布尼茨法则的光滑 $\mathbb{R}$-线性映射。不要求光滑性的版本称为右切空间 $\hat{} \; T_x^R(X)$，已在 [5], 中研究；研究表明，相应的函子与经典切函子的右 Kan 延拓一致。然而，正如 [2, 3.4.2] 和 [5], 中所指出的，对于某些微分空间，这两种构造是否会有所不同仍是未知的。

本文证明，对于某些微分空间，这两种构造确实有所不同。一个具体例子是由可数个 $\mathbb{R}$的副本组成的花束。在楔点处，光滑导子的外切空间是可数无穷维的，而右切空间则是不可数无穷维的（全文中， $\mathbb{N}$表示正整数集合）。

The理 3.1. 设 $X=\bigvee_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{R}$ 是由可数个 $\mathbb{R}$ 的副本组成的花束，并赋予其 *t* *he* *quot*伴随微分学，并令 $0\in X$ 为楔点。于是我们有向量空间同构 *es*

$$\hat{T}_0(X)\cong\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{R},\qquad \hat{T}_0^R(X)\cong\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{R},\mathbb{R}\right).$$

特别地，

$$\dim_{\mathbb{R}}\hat{T}_0(X)=\aleph_0\qquad \textit{and}\qquad \dim_{\mathbb{R}}\hat{T}_0^R(X)>\aleph_0.$$

因此，外部切空间与右切空间并不重合。

这表明，光滑性确实是一项额外要求。满足莱布尼茨法则的导子未必是光滑的。

2. Background on diffeological spaces and tangent spaces

我们简要回顾微分空间的概念，以及为其构造切空间的两种方法。更多细节请参见 [3], [2], [6], 和 [5]。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：57P05；次要分类：58A05。
Key words and phrases. 微分学，切空间。

2.1. 微分空间。

定义 2.1 ([3, 1。5])。 设 X 是一个集合。的一个参数化是一个映射 X ，其中 $U \to X$ ，且 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$取某个微分学于 X 是一个参数化集合 $\mathscr{D}_X$ （我们称 $\mathscr{D}_X$ 中的元素为一张图），并满足以下三条公理:

> **覆盖性：**每个常值参数化 $U \to X$ 都是一个图。**局部性：**设 $p\colon\ U \to\ X$ 为一个参数化。若存在 U 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$ ，使得对所有 α都有 $p|_{U_\alpha} \in \mathscr{D}_X$ ，则 p 本身是一个图。**光滑相容性：**对每个图 $p\colon\ U \to\ X$、 $\mathbb{R}^m$ 中的每个开集 V，以及作为欧几里得空间之间的映射是光滑的 $f\colon\ V \to\ U$， $p \circ f\colon\ V \to\ X$ 也是一个图。

微分空间是配备了微分学的集合。我们通常将 X 记作微分空间（$X, \mathscr{D}_X$）。

定义 2.2 ([3, 1.14]). 微分空间之间的映射 $f\colon\ X \to\ Y$ 是光滑的，如果对每个图 $p\colon\ U \to\ X$，复合 $f \circ p$ 是 Y的一个图。

微分空间与光滑映射构成范畴Dflg，它包含光滑流形作为一个满子范畴。

例 2.3。 若 M 是一个光滑流形，则所有从欧几里得开集 U 到 M 的光滑映射 $U \to M$ 构成一种微分学，称为 M上的标准微分学结构 。

Defi定义 2.4 ([3, 2.8])。 设 X 是一个微分空间。 X 上的 D-拓扑 是使所有图 : ! 连续的最细拓扑。st topology that makes all plots $p\colon\ U \to\ X$ 连续。

定义 2.5 ([3, 1.55])。 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是一个微分空间族。$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ 上的乘积微分结构是一种微分学，其图为满足以下条件的映射 $p\colon\ U \to \prod_\alpha X_\alpha$ ：对于每个 $\alpha \in A$， $p_\alpha \circ p$ 都是 X_α 的一个图，其中 $p_\alpha\colon \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \to X_\alpha$ 是典范投影。

定义 2.6 ([3, 1.50])。 设 X 为一个微分空间， $\sim$ 为 X上的一个等价关系。 $Y = X/\sim$ 上的商微分结构 是使商映射 $\pi\colon\ X \to\ Y$光滑的最小微分学（相对于图的包含关系而言）。等价地，参数化 $p\colon\ U \to\ Y$是一个图，当且仅当 U 的每个点都有一个邻域 U' ，使得$p|_{U'} = \pi \circ q$ ，其中$q\colon\ U' \to\ X$是某个图。

定义 2.7 ([3, 1.39])。 设 $\{X_i\}_{i \in I}$ 为一族微分空间。不交并 $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ 上的余积微分结构是使每个包含映射

$$\iota_i\colon X_i \hookrightarrow \bigsqcup_{i \in I} X_i$$

光滑。等价地，映射 $p\colon\ U \to \bigsqcup_{i \in I} X_i$ 是一个图，当且仅当对于每个 $u \in U$ ，都存在 u的一个邻域 U'以及一个指标 $i \in I$，使得 $p(U') \subset X_i$，且 $p|_{U'}$是 X_i的一个图。

定义 2.8 ([3, 1.57]). 设 X 与 Y 为微分空间。$C^\infty(X, Y)$上的函数微分结构 定义如下：参数化 $p\colon\ U_p \to\ C^\infty(X, Y)$是一个图，当且仅当映射

$$\mathrm{ad}(p)\colon U_p \times X \to Y; (u, x) \mapsto p(u)(x)$$

关于 $U_p \times X$上的乘积微分结构是光滑的。

例 2.9 （无理环面， [3, 习题 4]）. 设 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$。斜率为 α 的无理环面 是商微分空间

$$T_\alpha = \mathbb{R}/(\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z})$$

配备由 $\mathbb{R}$诱导的商微分结构。

例 2.10 （直线花束）. 设 $\{\mathbb{R}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 为 $\mathbb{R}$的可数多个副本，并定义

$$\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}_n = \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}_n \right) / (0_n \sim 0_m \text{ for all } n, m),$$

配备由余积诱导的商微分结构 $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}_n$ 在定义 2.7中。

例 2.11（芽代数，[2, 定义 3 之前的段落。10]）。设（X，x）为一个带基点微分空间。在 x 处的光滑函数芽的集合定义为余极限

$$G(X,x) = \operatorname{colim}_{x\in B\subset X} C^\infty(B,\mathbb{R}),$$

其中，余极限遍历 x 的所有 D-开邻域 B。空间 $G(X,x)$ 带有由空间 $C^\infty(B,\mathbb{R})$ 上的函数微分结构的余积所诱导的商微分结构，并在逐点运算下成为一个微分 $\mathbb{R}$-代数。

2.2. **外切空间与右切空间**。接下来我们引入外切空间和右切空间。

定义 2.12. 设 (X,x) 是一个带基点微分空间，并设 $G(X,x)$ 是$\mathbb{R}$-代数，即 x (例 2.11) 中的 D: $G(X,x)\to\mathbb{R}$ 称为右切向量，若它是线性的且满足莱布尼茨法则：

$$D(gh) = g(x)D(h) + h(x)D(g) \quad \text{for all } g,h\in G(X,x).$$

所有右切向量构成的集合记为 $\hat{}\, T_x^R(X)$，它构成一个向量空间，称为 X 在 x处的右切空间。

一个元素 $D\in \hat{}\, T_x^R(X)$ 进一步称为外切向量，如果 D 作为微分空间 $\hat{}$ 之间的映射是光滑的。所有外切向量构成的子空间记为 $T_x(X)$，称为 在 x [2, 定义 3。10]的外切空间。

注 2.13。右切空间在 [5]，中被引入，其中证明了相应函子可刻画为经典切函子的右 Kan 延拓。然而，右切空间与外切空间是否总是相同，仍是一个悬而未决的问题。在 [2, 3.4.2]，中已经指出，导子的光滑性是否由莱布尼茨法则自动推出尚不明确。

命题 2.14 ([2, 命题 3。11])。设 (X,x) 为一个带基点微分空间，并令

$$I_x(X) = \{f\in G(X,x) \mid f(x) = 0\}$$

be 评价映射的核 $G(X,x)\,!\,\mathbb{R}$ 配备从 $G(X,$ 继承的子微分结构，$x)$。(1) 有如下同构：

$$\hat{T}_x(X) \cong L^\infty(I_x(X)/I_x^2(X),\mathbb{R}) = \{F\colon I_x(X)/I_x^2(X)\to\mathbb{R} \mid F \textit{ is smooth and linear}\}.$$

The isomorphism is given by

$$\alpha\colon \hat{T}_x(X)\to L^\infty(I_x(X)/I_x^2(X),\mathbb{R}),\quad \alpha(D)([f]) = D([f]),$$
$$\beta\colon L^\infty(I_x(X)/I_x^2(X),\mathbb{R})\to \hat{T}_x(X),\quad \beta(F)([f]) = F([f]-[f(x)]).$$

(2) 不施加光滑性条件时，同样的构造给出一个自然同构

$$\hat{T}_x^R(X) \cong L(I_x(X)/I_x^2(X),\mathbb{R}) = \{F\colon I_x(X)/I_x^2(X)\to\mathbb{R} \mid F \textit{ is linear}\}.$$

证明。第一条陈述由 [2, 命题 3.11]证明。第二条陈述通过相同的论证得出，只需省略光滑性假设。□

3. A diffeological space with non-smooth derivations

本节给出一个具体的微分空间，其中外切空间与右切空间并不相同。

定理 3.1。设 $X = \bigvee_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{R}$ 为可数多个 $\mathbb{R}$ 的花束，并赋予商微分结构，设 $0\in X$ 为楔点。则有如下向量空间同构：

$$\hat{T}_0(X) \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{R},\qquad \hat{T}_0^R(X) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{R},\mathbb{R}\right).$$

特别是，

$$\dim_{\mathbb{R}}\hat{T}_0(X) = \aleph_0 \qquad \textit{and} \qquad \dim_{\mathbb{R}}\hat{T}_0^R(X) > \aleph_0.$$

因此，外切空间与右切空间并不重合。

证明。我们首先计算楔点处的右切空间。对每个 n，用$\iota_n\colon \mathbb{R}_n \to X$ 表示典范包含。

根据商微分结构的泛性质，芽 $[f] \in G(X, 0)$ 对应于一族芽 $([f_n])_{n\in\mathbb{N}}$，其中 $[f_n] \in G(\mathbb{R}_n, 0)$，且对于所有 n，m，$f_n(0) = f_m(0)$。因此我们得到一个 $\mathbb{R}$-代数同构

$$G(X,0) \cong \Big\{(f_n)_n \in \prod_{n\in\mathbb{N}} G(\mathbb{R}_n,0) \;\Big|\; f_n(0) = f_m(0) \text{ for all } n,m\in\mathbb{N}\Big\}.$$

容易验证，$I_0(X)$ 对应于 $\prod_n I_0(\mathbb{R}_n)$，而 $I_0(X)^2$ 对应于 $\prod_n I_0^2(\mathbb{R}_n)$。因此我们得到

$$I_0(X)/I_0^2(X) \cong \prod_{n\in\mathbb{N}} I_0(\mathbb{R}_n)/I_0^2(\mathbb{R}_n) \cong \prod_{n\in\mathbb{N}} T_0(\mathbb{R}_n) \cong \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}.$$

根据命题 2.14(2)，因此我们有

$$\hat{T}_0^R(X) \cong L\big(I_0(X)/I_0^2(X), \mathbb{R}\big) \cong L\Big(\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}, \mathbb{R}\Big) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\Big(\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}, \mathbb{R}\Big).$$

接下来我们计算楔点处的外切空间。我们将 $[f]$ 记作$f \in I_0(X)$ 在 $I_0(X)/I_0^2(X)$ 中的等价类。将上文得到的同构具体写出，我们有

$$\Phi\colon I_0(X)/I_0^2(X) \to \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}, \quad \Phi([f]) = \Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\iota_n(t))\Big)_{n\in\mathbb{N}},$$

其逆映射为

$$\Psi\big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = [f], \qquad \text{where} \quad f(\iota_n(t)) = a_n t.$$

容易验证，Φ 和 Ψ 均定义良好，且互为逆映射。

映射 Φ 和 Ψ 实际上也是光滑的。对于 Φ，只需证明其每个分量 Φ_n 都是光滑的。设 $p\colon U \to I_0(X)/I_0^2(X)$ 是一个图，并固定 $u_0 \in U$。根据 $G(X,0)$ 上以及 $I_0(X)/I_0^2(X)$ 上的微分结构的定义，存在 u_0 的一个邻域 $W \subset U$、0 的一个 D-开邻域 $B \subset X$，以及一个图 $F\colon W \to C^\infty(B, \mathbb{R})$，使得对 $u \in W$，有 $p(u) = [F(u)]$。于是对于 $u \in W$，

$$(\Phi_n \circ p)(u) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \mathrm{ad}(F)\big(u, \iota_n(t)\big).$$

令 $B_n := \iota_n^{-1}(B)$，它是 $\mathbb{R}_n$ 中 0 的一个开邻域。由于 $\mathrm{ad}(F)\colon W \times B \to \mathbb{R}$ 是光滑的，且 $\mathrm{id}_W \times \iota_n|_{B_n}\colon W \times B_n \to W \times B$ 是光滑的，因此复合映射 $(u,t) \mapsto \mathrm{ad}(F)(u, \iota_n(t))$ 在 $(u_0,0)$ 附近是光滑的。因此 $\Phi_n \circ p$ 在 u_0 附近是光滑的。故 Φ_n 是光滑的，进而 Φ 也是光滑的。

反过来，对于图 $q\colon U_q \to \prod_n \mathbb{R}$，定义一个光滑映射

$$\tilde{q}\colon U_q \to C^\infty(X, \mathbb{R}), \qquad \tilde{q}(u)(\iota_n(t)) = q_n(u)t.$$

考虑复合映射

$$U_q \xrightarrow{\tilde{q}} C^\infty(X,\mathbb{R}) \longrightarrow G(X,0),$$

其中第二个箭头是指向芽代数的典范映射。其像落在理想$I_0(X) \subset G(X, 0)$中，因此我们可以将此复合映射视为映射 $U_q \to I_0(X)$。然后，$\Psi \circ q$ 通过进一步将此映射与商映射 $I_0(X) \to I_0(X)/I_0^2(X)$复合得到。因此，复合映射$\Psi \circ q$ 是 $I_0(X)/I_0^2(X)$的一个图，故 Ψ 是光滑的。

因此，Φ 和 Ψ 是微分同胚，根据命题 2.14，我们得到一个同构

$$\hat{T}_0(X) \cong L^\infty\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}, \mathbb{R}\right).$$

为了完成论证，我们来确定右侧的空间。对每个 $i \in \mathbb{N}$，令 $e_i \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ 表示一个向量，其 i-个分量为 1，其余分量均为 0（特别是 $e_i \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$），并令 $e_i^*\colon \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为第 i个坐标投影。定理由下面的命题 3.2得证。□

命题 3.2。 典范线性映射

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{R}\longrightarrow L^{\infty}\left(\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{R},\mathbb{R}\right);\quad (a_i)_i\longmapsto\sum_{i\in\mathbb{N}}a_ie_i^*,$$

是向量空间的同构。特别地，每个光滑线性映射 D: $\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{R}$! $\mathbb{R}$ 都是坐标投影的有限线性组合。

证明。 由于单射性是显然的，我们证明该映射是满射。设 $D\in L^{\infty}\left(\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{R},\mathbb{R}\right)$ 为光滑线性映射。对每个 $N\in\mathbb{N}$，令

$$\pi_N\colon\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^N$$

为到前 N 个坐标的投影。我们断言存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 at

$$D(x)=0\qquad\text{for all } x\in\ker(\pi_N)=\{x\in\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{R}\mid x_1=\cdots=x_N=0\}.$$

假设不然。则对每个 $N\in\mathbb{N}$，存在 $x_N\in\ker(\pi_N)$，满足 $D(x_N)\neq 0$。将x_N替换为一个标量倍，我们可以假设 $D(x_N)=N$。令 $U=(-1,1)\subset\mathbb{R}$。定义

$$t_k=2^{-3k},\qquad I_k=\left(2^{-3k-1},2^{-3k+1}\right)\subset U\qquad(k\in\mathbb{N}).$$

则 $t_k\to 0$，且区间 I_k 两两不交，并满足 $t_k\in I_k$。对每个 $k\in\mathbb{N}$，选取光滑函数 φ_k: $U\to\mathbb{R}$，使得

$$\operatorname{supp}(\varphi_k)\subset I_k\qquad\text{and}\qquad\varphi_k(t_k)=1.$$

定义映射 p: U ! $\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{R}$ 如下:

$$(p(u))_n=\sum_{k=1}^{n}(x_k)_n\,\varphi_k(u)\qquad(n\in\mathbb{N}).$$

对每个固定的 n，该和是有限的，因此分量 u ↦! $(p(u))_n$ 是光滑的。因此， p 是赋予乘积微分结构的 $\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{R}$ 的一个图。

对每个 $k\in\mathbb{N}$，都有 $p(t_k)=x_k$。事实上，由于各个 φ_ℓ 的支集两两不相交，对于 $\ell\neq k$，有 $\varphi_\ell(t_k)=0$，因此

$$(p(t_k))_n=\begin{cases}(x_k)_n & \text{if } k\le n,\\ 0 & \text{if } k>n.\end{cases}$$

若 $k>n$，则 $(x_k)_n=0$，因为 $x_k\in\ker(\pi_k)$。因此，对于所有 $n\in\mathbb{N}$，都有 $(p(t_k))_n=(x_k)_n$，从而$p(t_k)=x_k$。于是，

$$(D\circ p)(t_k)=D(p(t_k))=D(x_k)=k.$$

由于在 U 中 t_k ! 0，而 $(D\circ p)(t_k)=k$! ∞，映射 $D\circ p$: U ! $\mathbb{R}$ 在 0 处不连续。这与 $D\circ p$ 的光滑性矛盾。因此，该断言对某个 $N\in\mathbb{N}$ 成立。

固定这样一个 N。若 $\pi_N(x)=\pi_N(y)$，则 $x-y\in\ker(\pi_N)$，从而 $D(x)=D(y)$。因此 D通过 π_N分解，且存在唯一的线性映射 $\bar{D}$: $\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ 使得 $D=\bar{D}\circ\pi_N$。由于$\mathbb{R}^N$是有限维的，存在 $c_1,\ldots,c_N\in\mathbb{R}$ 使得

$$\bar{D}(u_1,\ldots,u_N)=\sum_{i=1}^{N}c_iu_i.$$

由于 $x-(x_1,\ldots,x_N,0,\ldots)\in\ker(\pi_N)$，我们有

$$D(x)=D(x_1,\ldots,x_N,0,\ldots)=\sum_{i=1}^{N}c_ix_i=\sum_{i=1}^{N}c_ie_i^*(x).$$

因此 $D=\sum_{i=1}^{N}c_ie_i^*$，这证明了满射性。 □

注 3.3. 令 $Y = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ 配备乘积微分结构。受 命题 3.2的启发，我们预期存在一个微分空间向量空间的同构

$$I_0(Y)/I_0(Y)^2 \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R},$$

其中右侧赋予细微分学；参见 [3, 3。7] 关于其定义和基本性质。如果这一条件成立，那么两者 $\hat{}\, T_0(Y)$ 和 $\hat{}\, T_0^R(Y)$ 均可识别为

$$L^\infty\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}, \mathbb{R}\right) = L\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}, \mathbb{R}\right) \cong \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R},$$

特别是，$\hat{}\, T_0(Y) = \hat{}\, T_0^R(Y)$。我们不提供证明，因为本文不会用到这一结果，而且证明它需要单独进行详尽分析。

Acknowledgments

谨向我的导师 Takuya Sakasai 致以诚挚谢意，感谢他在整个研究过程中给予的宝贵指导和持续支持。我也感谢 Katsuhiko Kuribayashi 与我进行了许多富有见地的讨论，并给予我有益的建议。感谢 Toshiyuki Kobayashi 作为我的协助导师，慷慨地给予我支持和鼓励。本研究得到了日本学术振兴会特别研究员制度和科研费项目编号 JP24KJ0881 的资助。最后，感谢 WINGS-FMSP 项目提供经费支持。

References

[1] John C. Baez 与 Alexander E. Hoffnung。光滑空间的便利范畴。 *Transactions of the American Mathematical Society* 363 11 5789 5825, 2011 , ()：–。 1

[2] J. Daniel Christensen 与 Enxin Wu。微分空间的切空间与切丛。 *Cah. Topol.*, ()：–。..... *Géom. Différ. Catég.* 57 1 3 50, 2016 1, 2, 2 11, 2 12, 2 13, 2 14, 2 2

[3] *Diffeology* 185 Patrick Iglesias-Zemmour。, *Mathematical Surveys and Monographs* 卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2013。1, 2, 2.1, 2.2, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 3.3[4] J.-M. Souriau。Groupes diff´erentiels。载于，卷，第 – 页。施普林格，柏林，。1[5] Masaki Taho。微分空间的切空间及其变体。 *Differential geometrical methods in mathematical physics (Proc. Conf., Aix-en-Provence/Salamanca, 1979)* 836 *Lecture Notes in Math.* 91 128 1980 *Topology and its Applications* 381 109741, , ：。arXiv：。.. 1, 2, 2.[6] Martin Vincent。微分空间微分几何。硕士论文，哥本哈根大学，2008。1, 2 2026 2406.04703 13

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, THE UNIVERSITY OF TOKYO, 3-8-1KOMABA, MEGURO-KU, TOKYO, 153-8914, JAPAN*Email address*: taho@ms.u-tokyo.ac.jp