arXiv:2602.21330v1 [math.CT] 24 Feb 2026

点的凝聚 ∞-范畴的分类anima

Peter J. Haine

2026年2月26日

摘要

我们比较与一个相干 ∞-拓扑斯相关联的两个自然的凝聚 ∞-范畴的分类anima。其一来自我们与Barwick和Glasman关于代数几何中出路范畴的工作，另一来自Lurie关于超范畴的工作。这一比较的关键推论是代数几何与模型论之间的一种联系：在相差一个温和完备化的意义下，概形的proétale 基本群与完备一阶理论的Lascar 群都是同一构造的特例。

目录

0 引言 1 1 关于Łoś超积定理 5 2 凝聚 ∞-范畴点的分类anima 9 A 关于 ∞-拓扑斯的补充 15

参考文献 **22**

0 引言

本札记旨在比较与相干 ∞-拓扑斯相关联的两种自然凝聚 ∞-范畴的分类anima。第一种凝聚 ∞-范畴对任意∞-拓扑斯 $\mathcal{X}$ 都有定义，并由 Lurie 在关于超范畴的工作中引入（当时是在 1-拓扑斯的框架下） [17]。我们称之为 $\mathcal{X}$的凝聚 ∞点的-范畴 $\mathbf{Pt}(\mathcal{X})$；它将极端不连通射有限集 K 映到 ∞-范畴

$$\mathbf{Pt}(\mathcal{X})(K) \coloneqq \mathrm{Fun}^{*}(\mathcal{X}, \mathrm{Sh}(K))$$

of left 精确左伴随 $f^{*}\colon \mathcal{X} \to \mathrm{Sh}(K)$。特别地， $\mathbf{Pt}(\mathcal{X})$ 的整体截面恢复了 th e ∞-c点的范畴 of $\mathcal{X}$。

我们考虑的第二种凝聚 ∞-范畴，只有当 $\mathcal{X}$ 是一个相干∞-topos（即概形理论中拟紧性和拟分离性的 topos 理论版本）时才有意义；它已在我们与 Barwick 和 Glasman 的合作工作 [1, §13.5] 中被隐式引入。我们称之为 $\mathcal{X}$的凝聚 ∞-相干点范畴 $\mathbf{Pt}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{X})$；它将极端不连通的丛有限集 K 映射到如下的 ∞-范畴

$$\mathbf{Pt}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{X})(K) \coloneqq \mathrm{Fun}^{*,\mathrm{coh}}(\mathcal{X}, \mathrm{Sh}(K))$$

由保持相干对象的左正合左伴随 $f^*:\mathcal{X}\to \mathrm{Sh}(K)$ 构成。特别地， $\mathbf{Pt}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{X})$是 $\mathbf{Pt}(\mathcal{X})$的全子范畴。以下给出两个例子，以说明这些凝聚 ∞-范畴的背景。

0.1 例子。 设 $\mathcal{X}$ 是谢尔宾斯基空间上层的 ∞-拓扑斯。则对每个极端不连通射有限集 K，包含 $\mathbf{Pt}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{X})(K)\hookrightarrow \mathbf{Pt}(\mathcal{X})(K)$ 就是

$$\mathrm{Clopen}(K)\hookrightarrow \mathrm{Open}(K)$$

K 的闭开子集偏序集到所有开子集偏序集中的包含。

更一般地，若 X 是谱拓扑空间且 $\mathcal{X}=\mathrm{Sh}(X)$，则 $\mathbf{Pt}(\mathcal{X})(K)$ 是连续映射 $K\to X$ 的偏序集 $\mathrm{Map}(K,X)$，其序由逐点特殊化： $f\le g$ 当且仅当对每个 $k\in K$，我们有 $f(k)\in\{g(k)\}$。在此情形下， $\mathbf{Pt}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{X})(K)$ 是子偏序集

$$\mathrm{Map}^{\mathrm{qc}}(K,X)\subset \mathrm{Map}(K,X)$$

拟紧映射的，即使得拟紧开集的原像为闭开集的映射。

0.2 例子。 设 T 是一个相干一阶理论，并设 $\mathcal{X}$ 是 T的分类 ∞-拓扑斯。则对每个极端不连通射有限集 K， ∞-范畴 $\mathbf{Pt}(\mathcal{X})(K)$ 是理论 T 在 K上的集合层的 1-范畴中取值的模型的 ∞-范畴 $\mathrm{Mod}_T(\mathrm{Sh}(K;\mathbf{Set}))$ 。我们记 $\mathbf{Mod}_T\coloneqq\mathbf{Pt}(\mathcal{X})$，并把 $\mathbf{Mod}_T$ 称为 T的模型的凝聚范畴。全子范畴 $\mathbf{Pt}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{X})(K)$ 在模型论中传统上并未被考虑，但它是满足额外有限性性质的模型的一个子范畴。

正如我们现在所说明的，在代数几何与模型论中，这些凝聚 ∞-范畴都会产生有趣的不变量。记 $\mathrm{B}:\mathbf{Cat}_\infty\to\mathbf{An}$ 为将anima含入 ∞-范畴之包含的左伴随；对于一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，将 $\mathrm{B}\mathcal{C}$ 称为 $\mathcal{C}$的分类*anima* 。由于B 保持有限积， B 的逐点应用定义了包含$\mathrm{Cond}(\mathbf{An})\hookrightarrow\mathrm{Cond}(\mathbf{Cat}_\infty)$ 的一个左伴随，该包含将凝聚anima映入凝聚 ∞-范畴。我们也将这个左伴随记为 B。

代数几何。 设 X 为一个拟紧拟分离概形。基于我们与Barwick–Glasman [1,§13.5], 的工作，在与 Holzschuh–Lara–Mair–Martini–Wolf [10], 的近期工作中，我们研究了凝聚分类 anima $\mathrm{B}\mathbf{Pt}^{\mathrm{coh}}(X_{\text{ét}})$，即凝聚 ∞-范畴——其对象为étale ∞-拓扑斯的凝聚点，而该拓扑斯属于 X。我们将这个凝聚anima称为 凝聚同伦型 ，对应于 X，并记为$\Pi^{\mathrm{cond}}_\infty(X)$。我们的主要结果之一是：对其基本群作温和完备化，该基本群属于 $\Pi^{\mathrm{cond}}_\infty(X)$，便可恢复Bhatt–Scholze的proétale基本群 [2]。参见 [10,定理1.9]。

模型论。 在即将与 Damaj 和 Zhang 合作开展的工作中， [6],我们将在模型论的背景下证明一个类似的结果。给定一个完备一阶理论 T，在 [15], Lascar 引入了一个拟紧拓扑群 $\mathrm{Gal}_{\mathrm{L}}(T)$，如今称为*Lascar* 群 的$T$。正如记号所示，Lascar 群在该理论的绝对伽罗瓦群中扮演相应角色 T。Campion– Cousins–Ye [3] 证明了 Lascar 群底层的离散群是以下范畴的分类anima的基本群：该范畴 $\mathrm{Mod}_T(\mathbf{集合})$ 中的模型 T 取值于集合范畴 [3, 定理 3。5]。正如 例子 0.2中所解释的，分类 ∞-topos of T 的点的凝聚范畴是对 $\mathrm{Mod}_T(\mathbf{集合})$ 作出的、将其提升为凝聚范畴的自然增强。在[6], 中，我们通过证明存在凝聚群的同构来细化 Campion、Cousins 和 Ye 的结果

$$\mathrm{Gal}_{\mathrm{L}}(T)\simeq\pi_1(\mathrm{B}\mathbf{Mod}_T)$$

凝聚分类 anima of$\mathbf{Mod}_T$ 的 Lascar 群与基本群之间。

要点在于，proétale 基本群和 Lascar 群都是相似构造的特例。但前者使用较小的凝聚 ∞-范畴 $\mathbf{Pt}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{X})$，后者则使用 $\mathbf{Pt}(\mathcal{X})$。本文的主要结果是，实际上，这两个不变量都是同一种构造的特例。[1] 具体而言，存在一大类相干 ∞-topoi $\mathcal{X}$，其中包含 $\mathbf{Pt}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{X}) \hookrightarrow \mathbf{Pt}(\mathcal{X})$ 会在凝聚分类 anima 上诱导出一个等价。

我们的主要结果涉及 谱的 ∞-*topoi*，这是我们与 Barwick 和 Glasman 合作的工作中引入的 [1]。这些是有界相干 ∞-topoi $\mathcal{X}$，其 ∞-点范畴 $\mathrm{Pt}(\mathcal{X})$ 满足如下性质：对于每个对象 $x^* \in \mathrm{Pt}(\mathcal{X})$，每个自同态 $x^* \to x^*$都是等价。简要回顾请见 §A.3 。最重要的例子是，拟紧拟分离概形的 étale∞-topos 是谱的。以下是我们的主要结果：

0.3 定理 (定理 2.20)**.** 设 $\mathcal{X}$ 是一个谱的 ∞-*topos*。那么，对每个极端不连通的 *d pro*有限集合 K，包含

$$\mathbf{Pt}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{X})(K) \hookrightarrow \mathbf{Pt}(\mathcal{X})(K)$$

有一个左伴随。因此，凝聚 ∞-范畴的包含 $\mathbf{Pt}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{X}) \hookrightarrow \mathbf{Pt}(\mathcal{X})$在凝聚分类 *anima* 上诱导出一个等价。

0.4 警告。 如果 $\mathcal{X}$ 是一个非谱的相干 ∞-topos，那么即使包含

$$\mathbf{Pt}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{X})(*) \hookrightarrow \mathbf{Pt}(\mathcal{X})(*)$$

从凝聚点到所有点的包含未必有左伴随。例如，如果 $\mathcal{X}$ 是阿贝尔群理论的分类 ∞-topos，那么这就是有限阿贝尔群子范畴到所有阿贝尔群的包含。

我们通过展开 定理 0.3 的两个最简单情形来结束引言。

0.5. 如 例子 0.1 中所述，先考虑 $\mathcal{X}$ 是 ∞-topos，即谢尔宾斯基空间上的层范畴。此时，结论是包含映射 $\mathrm{Clopen}(K) \hookrightarrow \mathrm{Open}(K)$ 有左伴随。这显然成立：该左伴随将 $U \subset K$ 映到闭包 U（它是开集，因为 K 是极端不连通的）。

0.6. 更一般地，若 $\mathcal{X}$ 是 ∞-topos，即谱拓扑空间 X 上的层范畴，那么定理 0.3 指出，包含映射

$$\mathrm{Map}^{\mathrm{qc}}(K, X) \hookrightarrow \mathrm{Map}(K, X)$$

从拟紧映射偏序集到所有映射的包含有左伴随。也就是说，任意映射 $f : K \to X$ 都有一个最佳拟紧映射近似，它是 f 的逐点一般化。

在这种情况下，我们可以展示我们对定理 0.3的证明方法。根据分配格与谱空间之间的 Stone 对偶等价，$\mathrm{Map}^{\mathrm{qc}}(K, X)$ 同构于偏序集

$$\mathrm{Map}_{\mathbf{Lat}}(\mathrm{Open}^{\mathrm{qc}}(X), \mathrm{Clopen}(K))$$

从 X 中拟紧开集偏序集到 K 中既开又闭集偏序集的格同态。根据饱和空间与框架之间的等价，$\mathrm{Map}(K, X)$ 同构于框架映射的偏序集

$$\mathrm{Map}_{\mathbf{Frm}}(\mathrm{Open}(X), \mathrm{Open}(K))$$

[1] 直至为恢复 Bhatt–Scholze 所定义的 proétale 基本群所需的 $\pi_1(\Pi_\infty^{\mathrm{cond}}(X))$ 的温和完备化。

$\mathrm{Open}(X) \to \mathrm{Open}(K)$。由于拟紧开集构成 X 上拓扑的拓扑基，且对有限交封闭，限制定义了偏序集的一个同构

$$\mathrm{Map}_{\mathbf{Frm}}(\mathrm{Open}(X), \mathrm{Open}(K)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Map}_{\mathbf{Lat}}(\mathrm{Open}^{\mathrm{qc}}(X), \mathrm{Open}(K)) .$$

这里，目标由格同态 $\mathrm{Open}^{\mathrm{qc}}(X) \to \mathrm{Open}(K)$ 组成。在这些识别下，包含 $\mathrm{Map}^{\mathrm{qc}}(K,X) \hookrightarrow \mathrm{Map}(K,X)$ 被识别为显然的包含

$$\mathrm{Map}_{\mathbf{Lat}}(\mathrm{Open}^{\mathrm{qc}}(X), \mathrm{Clopen}(K)) \hookrightarrow \mathrm{Map}_{\mathbf{Lat}}(\mathrm{Open}^{\mathrm{qc}}(X), \mathrm{Open}(K)) . \tag{0.7}$$

为说明这有左伴随，注意到，同样由于 K 极端不连通，闭包算子 $\mathrm{Open}(K) \to \mathrm{Clopen}(K)$ 是包含的左伴随，而且保有限并和始对象。在极端不连通空间中，对于开子集 U 和 V，我们还有恒等式 $U \cap V = \overline{U \cap V}$。~~因此~~，逐点应用闭包算子$\mathrm{Open}(K) \to \mathrm{Clopen}(K)$ 定义了包含的左伴随（0.7）。

0.1 线性概述

在§1中，我们解释 Łoś 超积定理的层论解释。这一解释隐含于 Lurie 关于超范畴的工作 [17]，之中，并使我们得以分析点的凝聚 ∞-范畴的凝聚分类 anima $\mathbf{Pt}(\mathcal{X})$。在 §2中，我们引入将要详细考察的点的凝聚 ∞-范畴，并证明定理 0.3。由于这些结果需要用到 ∞-topoi 理论中的若干技术概念，因此我们在附录 A中汇集了关于有界且 Postnikov 完备 ∞-topoi、相干 ∞-topoi，以及以 ∞-pretopoi 和谱的 ∞-topoi 刻画有界相干 ∞-topoi 的背景知识。

0.2 记号约定

(1) 我们用$\mathbf{Cat}_\infty$ 表示大 ∞-范畴的 ∞-范畴；用$\mathbf{An} \subset \mathbf{Cat}_\infty$ 表示由大 anima（也称为空间或 ∞-群胚）张成的全子范畴。我们用$\mathbf{Cat}_\infty \subset \mathbf{Cat}_\infty$ 和$\mathbf{An} \subset \mathbf{An}$ 分别表示由小 ∞-范畴和 anima 张成的全子范畴。

(2) 我们用$\mathbf{RTop}_\infty$ 表示 ∞-topoi 及几何态射构成的 ∞-范畴，即左伴随 f^* 为左正合的右伴随f_*。

(3) 给定具有极限与余极限的 ∞-范畴 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$，我们记

$$\mathrm{Fun}_*(\mathcal{Y}, \mathcal{X}) \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$$

表示由左伴随为左正合的右伴随函子张成的全子范畴（当 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是 ∞-topoi 时，它们就是 ∞-topoi 之间的几何态射）。我们记

$$\mathrm{Fun}^*(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

对于由左正合左伴随张成的全子范畴（当 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是 ∞-topoi 时，这些是 ∞-topoi 的代数态射）。

(4) 给定一个 ∞-topos $\mathcal{X}$，我们记 $\mathrm{Pt}(\mathcal{X}) \coloneqq \mathrm{Fun}^*(\mathcal{X}, \mathbf{An})$ 为 $\mathcal{X}$ 的 ∞-类点范畴。

(5) 若 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是 相干 ∞-topoi（见 定义 A.10），我们记 $\mathrm{Fun}^{*,\ \mathrm{coh}}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \subset \mathrm{Fun}^{*}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 为由那些同时保持相干对象的左正合左伴随函子所张成的全子范畴。

(6) 给定 ∞-预拓扑 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ (参见 定义 A.18)，我们将 $\mathrm{Fun}^{\mathrm{pre}}(\mathcal{C},\mathcal{D}) \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 记为由 ∞-预拓扑的态射所张成的全子范畴。也就是说，它由保持有限极限、有限余积和有效满射的函子构成。

0.3 致谢

我们感谢 Clark Barwick 多年来围绕本文涉及的诸多主题进行的无数次富有启发性的交谈。我们感谢 Jacob Lurie 就他关于超范畴的工作所作的启发性讨论；尤其感谢他指出 推论 1.12 应当成立。

1 关于 Łoś 超积定理

在本节中，我们将解释 Łoś 超积定理的以下层论表述：对于任意集合 S 及其 Čech–Stone 紧化 $\beta(S)$，函子

$$\mathrm{Sh}(S) \hookrightarrow \mathrm{Sh}(\beta(S))$$

由沿包含 $S \hookrightarrow \beta(S)$ 的推前给出，它保持有限极限、有限余积和有效满射。参见推论 1.10。这一表述有一个重要推论：对于任意相干 ∞-拓扑 $\mathcal{X}$，限制函子

$$\mathrm{Fun}^{*}(\mathcal{X},\mathrm{Sh}(\beta(S))) \longrightarrow \mathrm{Fun}^{*}(\mathcal{X},\mathrm{Sh}(S)) \simeq \mathrm{Pt}(\mathcal{X})^{S}$$

存在一个全忠实右伴随（推论 1.12）。这使我们能够分析引言中定义的 ∞-范畴 $\mathbf{Pt}(\mathcal{X})$ 的点的凝聚分类 $\mathcal{X}$

在 §1.1中，我们说明如何从层论中通常的推前和拉回运算中提取超积运算。这对专家而言众所周知，但我们未能找到相关参考文献。在 §1.2中，我们说明 Łoś 超积定理的层论表述、它与通常表述的关系，以及一些拓扑斯论推论。

1.1 通过层论构造超积

我们先回顾一些关于 Čech–Stone 紧化的背景知识。我们建议不熟悉的读者参阅 [17,§3.2]了解详情。

1.1 记号。令 S 为一个集合。若将 S 视为拓扑空间，则总是赋予它离散拓扑。我们用 $j : S \hookrightarrow \beta(S)$ 表示 S的 Čech–Stone 紧化。我们将 $\beta(S)$与 S上的超滤子集合等同起来。通常用 μ表示一个超滤子。在这一等同下，j 将元素 $s \in S$ 映为由 s生成的主超滤子。

1.2 回顾。 令 S 为一个集合。那么偏序集之间的自然映射

$$\mathrm{Clopen}(\beta(S)) \to \mathrm{Sub}(S)\,,\ U \mapsto U \cap S$$

是一个同构。其逆映射将子集 $S_0 \subset S$ 映射到 $\beta(S)$中的闭包 $\overline{S_0}$。此外，闭包 $\overline{S_0} \subset \beta(S)$ 是自然闭浸入 $\beta(S_0) \overset{-}{\hookrightarrow} \beta(S)$的像。$\beta(S)$ 上的拓扑满足：超滤子 μ 属于 S_0，当且仅当子集 S_0 包含于 μ中。

1.3 回顾。 设 S 是一个集合。存在自然等价 $\mathrm{Sh}(S) \simeq \mathbf{An}^S$。沿一个方向，此映射将一个层 X 送到其茎的集合 $(X_s)_{s\in S}$。反过来，一个 anima 的集合$(X_s)_{s\in S}$ 被送到由如下赋值给出的层

$$S_0 \mapsto \prod_{s\in S_0} X_s\,,$$

其限制映射为投影。（更形式地说，这是沿包含 $S \hookrightarrow \mathrm{Sub}(S)^{\mathrm{op}}$ 对函子 $S \to \mathbf{An}$ （由 $s \mapsto X_s$ 给出）作右 Kan 延拓。）我们常通过这一等价将 $\mathrm{Sh}(S)$ 与 $\mathbf{An}^S$ 认同。

1.4 观察 （j_* 在既开又闭集上的公式）。给定一个层 $X \in \mathrm{Sh}(S)$，展开层的推前公式可知，对每个子集 $S_0 \subset S$，都有一个自然的认同

$$j_*(X)(\overline{S}_0) \simeq \prod_{s\in S_0} X_s\,.$$

现在我们固定超积的记号。

1.5 回顾（超积）。设 $\mathcal{E}$ 是一个具有滤余极限和积的 ∞-范畴， S 是一个集合， $\mu \in \beta(S)$ 是一个超滤子。超积函子 $\int_S(-)\mathrm{d}\mu : \mathcal{E}^S \to \mathcal{E}$ 是由以下赋值给出的函子

$$(X_s)_{s\in S} \mapsto \int_S X_s \mathrm{d}\mu \coloneqq \operatorname*{colim}_{S_0\in\mu^{\mathrm{op}}} \prod_{s\in S_0} X_s\,.$$

更形式地说， $\int_S(-)\mathrm{d}\mu$ 是以下复合

$$\mathcal{E}^S \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathrm{Sub}(S)^{\mathrm{op}}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\text{restrict}} \mathrm{Fun}(\mu^{\mathrm{op}}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\text{colim}} \mathcal{E}\,.$$

这里，最左侧的函子是将函子 $S \to \mathbf{An}$ 给定为$s \mapsto X_s$ 沿包含 $S \hookrightarrow \mathrm{Sub}(S)^{\mathrm{op}}$作右 Kan 延拓得到的。

以下是超积的层论解释。

1.6 命题。 设 S 是一个集合， $\mu \in \beta(S)$是 S上的一个超滤子。那么复合函子

$$\mathbf{An}^S \simeq \mathrm{Sh}(S) \xhookrightarrow{j_*} \mathrm{Sh}(\beta(S)) \xrightarrow{\mu^*} \mathbf{An}$$

等价于超积函子 $\int_S(-)\mathrm{d}\mu : \mathbf{An}^S \to \mathbf{An}$。

换句话说，层 $j_*(X)$ 的茎就是超积 $\int_S X_s \mathrm{d}\mu$。

证明。 令 $(X_s)_{s\in S} \in \mathbf{An}^S$ 为与层$X \in \mathrm{Sh}(S)$对应的一个 S-索引 anima 集合。由于 $\beta(S)$ 的闭开子集构成了$\beta(S)$上的拓扑基，我们可以得到自然

等价

$$\begin{aligned}
\mu^* j_*(X) &= \operatorname*{colim}_{U \ni \mu} j_*(X)(U) \\
&\simeq \operatorname*{colim}_{\overline{S}_0 \ni \mu} j_*(X)(\overline{S}_0) && \text{(回顾 1.2)} \\
&\simeq \operatorname*{colim}_{\overline{S}_0 \ni \mu} \prod_{s \in S_0} X_s && \text{(观察 1.4)} \\
&\simeq \operatorname*{colim}_{S_0 \in \mu^{\mathrm{op}}} \prod_{s \in S_0} X_s && \text{（} \beta(S) \text{ 上拓扑的定义）} \\
&= \int_S X_s \mathrm{d}\mu\,. && \square
\end{aligned}$$

1.2 Łoś 超积定理及其推论

In o谨记于心，以下是 Łoś 超积定理最基本的表述 :

1.7 命题 （基本 Łoś 超积定理， [SAG，命题 E.3.3。8]）。设 S 是一个集合，且 $\mu \in \beta(S)$ 是 S上的一个超滤子。那么超积函子

$$\int_S (-)\mathrm{d}\mu : \mathbf{An}^S \to \mathbf{An}$$

是 ∞-预拓扑之间的态射，即保持有限极限、有限余积和有效满射。

命题 1.7 有如下直接推论:

1.8 推论 （Łoś 超积定理的范畴逻辑表述）。 设 $\mathcal{C}$ 为一个 ∞-预拓扑（见定义 *A.18*）。则全子范畴

$$\mathrm{Fun}^{\mathrm{pre}}(\mathcal{C}, \mathbf{An}) \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathbf{An})$$

由 ∞-预拓扑之间的态射所张成，并在超积的构造下封闭。

1.9 注记 （Łoś 超积定理的通常表述）。 逻辑中通常的 Łoś 超积定理可由推论 1.8推出。我们概述其做法。首先，推论 1.8 蕴含如下的 1-范畴陈述：若 $\mathcal{C}$是一个 1-预拓扑，则全子范畴

$$\mathrm{Fun}^{\mathrm{pre}}(\mathcal{C}, \mathbf{Set}) \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathbf{Set})$$

由 1-预拓扑之间的态射（即保持有效满射和有限余积的左正合函子）所组成，并在超积下封闭。关于此表述，见 [17,定理 2.1.1]。

设 T 是一个相干理论，其分类 1-拓扑斯为 **集合**$[T]$。令 $\mathrm{Syn}_0(T)$ 表示由 **集合**$[T]$ 中的相干对象张成的全子范畴。那么 $\mathrm{Syn}_0(T)$ 是一个 1-预拓扑，通常称为 弱句法范畴 [16, p。 2] 或 相干句法范畴 [4, 定义 1.4.1] of T。在这种情况下， $\mathrm{Fun}^{\mathrm{pre}}(\mathrm{Syn}_0(T)$,**集合**$)$ 是 T 的模型所构成的 1-范畴 Mod_T ，而 Łoś 超积定理的范畴逻辑表述指出， Mod_T 在更大的 1-范畴 $\mathrm{Fun}(\mathrm{Syn}_0(T)$,**集合**$)$ 中对超积封闭。由此可以相对直接地证明 Łoś 超积定理的通常表述；详情见 [18； 20] 。

根据超积的层论描述（命题 1.6），我们可以给出基本 Łoś 超积定理的一个等价表述：

1.10 推论（Łoś 超积定理的层论表述）。对于任意集合 S，直像函子 $j_*\colon \mathrm{Sh}(S) \hookrightarrow \mathrm{Sh}(\beta(S))$ 是 ∞- 前层范畴的态射。

证明。由于茎函子 $(\mu^*\colon \mathrm{Sh}(\beta(S)) \to \mathbf{An})_{\mu\in\beta(S)}$ 联合保守，并且也是 ∞-前层范畴的态射，因此，j_* 是 ∞-前层范畴的态射，当且仅当对于每个超滤子 $\mu \in \beta(S)$，复合函子

$$\mu^* j_*\colon \mathbf{An}^S \simeq \mathrm{Sh}(S) \to \mathbf{An}$$

是 ∞-前层范畴的态射。根据 命题 1.6，复合函子 $\mu^* j_*$ 是超积函子 $\int_S(-)\mathrm{d}\mu$。因此，该断言等价于命题 1.7。 □

这一 Łoś 超积定理的层论表述具有一些优点。首先，它没有明确提及超滤子或超积（事实上，它也没有引用 S 的 Čech–Stone 紧化的某种特定构造）。其次，它带来了一些有趣的拓扑斯论推论，而这些推论不容易直接从 命题 1.7 或推论 1.8 推导出来。现在我们来说明这样一个推论。

1.11 推论。设 S 是一个集合，且 $\mathcal{C}$ 是一个 ∞-预拓扑。则该伴随

$$\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathrm{Sh}(\beta(S))) \underset{j_*\circ -}{\overset{j^*\circ -}{\rightleftarrows}} \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathrm{Sh}(S)) \simeq \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathbf{An})^S$$

限制为一个伴随

$$\mathrm{Fun}^{\mathrm{pre}}(\mathcal{C}, \mathrm{Sh}(\beta(S))) \rightleftarrows \mathrm{Fun}^{\mathrm{pre}}(\mathcal{C}, \mathrm{Sh}(S)) \simeq \mathrm{Fun}^{\mathrm{pre}}(\mathcal{C}, \mathbf{An})^S\,.$$

证明。这直接由 推论 1.10得出。 □

1.12 推论。设 $\mathcal{X}$ 是一个相干 ∞-拓扑，且 S 是一个集合。则限制函子

$$\mathrm{Fun}^*(\mathcal{X}, \mathrm{Sh}(\beta(S))) \xrightarrow{j^*\circ -} \mathrm{Fun}^*(\mathcal{X}, \mathrm{Sh}(S)) \simeq \mathrm{Pt}(\mathcal{X})^S$$

存在一个完全忠实右伴随。

证明。由于 $\mathrm{Sh}(\beta(S))$ 和 $\mathrm{Sh}(S)$ 都是有界且 Postnikov 完备的，根据 命题 A.29，上述函子可识别为函子

$$\mathrm{Fun}^{\mathrm{pre}}(\mathcal{X}^{\mathrm{coh}}_{<\infty}, \mathrm{Sh}(\beta(S))) \xrightarrow{j^*\circ -} \mathrm{Fun}^{\mathrm{pre}}(\mathcal{X}^{\mathrm{coh}}_{<\infty}, \mathrm{Sh}(S))\,.$$

由推论 1.11，该函子具有一个由与 $j_*\colon \mathrm{Sh}(S) \hookrightarrow \mathrm{Sh}(\beta(S))$后复合给出的全忠实右伴随。 □

1.13 备注。Di Liberti [7, §1] 和 Di Liberti–Ye [8, §4。4] 研究了满足 1-topoi 推论 1.12结论的情形。

2 点的凝聚 ∞-范畴的分类anima

本节证明本文的主要结果（定理2.20）。为此，我们先在 §2.1 回顾所考虑的点的凝聚 ∞-范畴基础。在 §2.2，我们记录一些所需的分类anima相关事实。 小节 2.3 证明主要结果。

2.1 点的凝聚 ∞-范畴

现在我们定义本文所涉及的两个点的凝聚 ∞-范畴。需要注意的是，我们的凝聚 ∞-范畴的取值不仅仅是大 ∞-范畴，而是取值于 可达∞-范畴。因此，我们先回顾拓扑斯理论中的一些可达性结果。

2.1 回顾。 设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 为 ∞-拓扑斯。则

$$\mathrm{Fun}^*(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$$

是一个可达子范畴 [HTT， 命题 6.3.1。13]此外，由于滤余极限与∞-拓扑斯中的有限极限交换， $\mathrm{Fun}^*(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 在 $\mathrm{Fun}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$中关于滤余极限封闭。作为推论，对于所有左正合左伴随 $f^*\colon \mathcal{W} \to \mathcal{X}$ 和 $g^*\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$，所诱导的函子

$$\mathrm{Fun}^*(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \xrightarrow{-\circ f^*} \mathrm{Fun}^*(\mathcal{W},\mathcal{Z}) \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Fun}^*(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \xrightarrow{g^*\circ -} \mathrm{Fun}^*(\mathcal{X},\mathcal{Z})$$

保持滤余极限（特别地，它们是可达的）。

2.2 记号。 我们用 $\mathbf{Acc} \subset \mathbf{Cat}_\infty$ 表示非满的 ∞-范畴，其对象为可达的 ∞-范畴，态射为可达函子。令$\mathbf{Acc}^{\mathrm{fil}} \subset \mathbf{Acc}$ 表示非满子范畴，其对象为容许滤余极限的可达 ∞-范畴，态射为保滤余极限的函子。

2.3 回顾。 该 ∞-范畴 **Acc** 容许极限，且遗忘函子 $\mathbf{Acc} \to \mathbf{Cat}_\infty$保极限 [Ker，标签 06LQ]。类似地，该 ∞-范畴 $\mathbf{Acc}^{\mathrm{fil}}$ 容许极限，且遗忘函子$\mathbf{Acc}^{\mathrm{fil}} \to \mathbf{Cat}_\infty$ 保极限。

2.4 记号。 记极端不连通射有限集范畴为 **Extr** 。给定一个具有有限积的∞-范畴 $\mathcal{E}$，其 ∞-范畴中的凝聚对象 构成的全子范畴为

$$\mathrm{Cond}(\mathcal{E}) \subset \mathrm{Fun}(\mathbf{Extr}^{\mathrm{op}}, \mathcal{E})$$

由保有限积的预层张成。[2]

我们考虑的第一个点的凝聚 ∞-范畴对任意 ∞-拓扑斯都有意义。回顾一下，我们将对象为 ∞-拓扑斯、态射为几何态射（即左伴随为左正合的右伴随）的 ∞-范畴记作 $\mathbf{RTop}_\infty$ 。

[2]当然，需要谨慎处理通常的大小问题。我们选择通过使用宇宙来解决这些问题。关于为何这种处理方式的选择不会实质性地影响结果，详见 [10, 注 2.36]

2.5 定义（点的凝聚 ∞-范畴）。 我们记作

$$\mathbf{Pt}: \mathbf{RTop}_{\infty} \longrightarrow \mathrm{Cond}(\mathbf{Acc}^{\mathrm{fil}})$$

对于函子

$$\mathcal{X} \longmapsto [K \mapsto \mathrm{Fun}^{*}(\mathcal{X}, \mathrm{Sh}(K))] .$$

我们将 $\mathbf{Pt}(\mathcal{X})$ 称为凝聚 ∞-点范畴，它属于 $\mathcal{X}$。

2.6. 当然， $\mathbf{Pt}(\mathcal{X})$ 的整体截面 ∞-范畴就是 $\mathcal{X}$的点 ∞-范畴 $\mathrm{Pt}(\mathcal{X})$ 。

2.7 注。 设 $\mathcal{X}$ 是一个 ∞-topos。那么根据命题 A.29，自然几何态射$\mathcal{X} \to \mathcal{X}^{\flat}$ 到有界反射（见回顾 A.4）诱导出一个等价

$$\mathbf{Pt}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Pt}(\mathcal{X}^{\flat}) .$$

2.8 注（ ∞-范畴版本的 Lurie 关于超范畴的工作）。 在 Lurie 关于超范畴的工作中，他引入了函子 **Pt**，至少在1-topoi 的情形下。Lurie 的主要结果之一是，将此函子限制到相干的 1-topoi 及所有几何态射时，该函子是完全忠实的 [17, 注 2.3.4、定理 4.3.3 和注 4.3。4]。鉴于注 2.7，这一陈述的正确 ∞-范畴版本需要更加谨慎。我们预期函子

$$\mathbf{Pt}: \begin{pmatrix} \text{bounded coherent } \infty\text{-topoi} \\ \text{and all geometric morphisms} \end{pmatrix} \longrightarrow \mathrm{Cond}(\mathbf{Acc}^{\mathrm{fil}})$$

应当是完全忠实的（甚至作为一个 $(\infty, 2)$-范畴函子也是如此）。此外，这个函子应当经由超范畴和左超函子的一个 ∞-范畴增强版分解（如 [17, §8] 中所述，使用超范畴包络来表述）。将其限制到 1-localic 相干 ∞-拓扑斯，便可恢复 Lurie 的结果。

W尽管 Lurie 的许多论证在 ∞-范畴情形下可以原样照搬，但似乎有少数地方需要格外谨慎，才能推广 Lurie 的证明。

我们考虑的第二种凝聚 ∞-点范畴，是由相干几何态射张成的 $\mathbf{Pt}(\mathcal{X})$ 的全子范畴；它只有在相干 ∞-拓扑斯的情形下才具有良好性质。我们将对象为相干 ∞-拓扑斯、态射为相干几何态射的子范畴记作 $\mathbf{RTop}_{\infty}^{\mathrm{coh}} \subset \mathbf{RTop}_{\infty}$。在这种情况下，相关的可达性结果是：对于一个相干 ∞-拓扑斯 $\mathcal{X}$ 和一个丛有限集 K， ∞-范畴

$$\mathrm{Fun}^{*,\mathrm{coh}}(\mathcal{X}, \mathrm{Sh}(K))$$

相干代数态射的 $f^{*}: \mathcal{X} \to \mathrm{Sh}(K)$ 是小且幂等完备的（见命题 A.29）。

2.9 记号。记$\mathbf{Cat}_{\infty}^{\mathrm{idem}} \subset \mathbf{Cat}_{\infty}$ 为由幂等完备的 ∞-范畴张成的全子范畴。注意，小可及 ∞-范畴恰好是小的幂等完备 ∞-范畴 [Ker，标签 06KS], 并且从小的幂等完备∞-范畴出发的每个函子都是可及的 [Ker，标签 06KW]。因此$\mathbf{Cat}_{\infty}^{\mathrm{idem}}$也是$\mathbf{Acc}$的全子范畴。

2.10 定义（凝聚点的凝聚 ∞-范畴）。我们记

$$\mathbf{Pt}^{\mathrm{coh}}: \mathbf{RTop}_{\infty}^{\mathrm{coh}} \longrightarrow \mathrm{Cond}(\mathbf{Cat}_{\infty}^{\mathrm{idem}})$$

为函子

$$\mathcal{X} \longmapsto [K \mapsto \mathrm{Fun}^{*,\mathrm{coh}}(\mathcal{X}, \mathrm{Sh}(K))] .$$

我们将 $\mathbf{Pt}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{X})$ 称为 凝聚点的凝聚 ∞-范畴，它属于 $\mathcal{X}$。

2.11 注记。 设 $\mathcal{X}$ 是一个相干 ∞-topos。那么根据 命题A.29，自然几何态射 $\mathcal{X} \to \mathcal{X}^{\mathrm{b}}$ 到有界反射的映射诱导出一个等价

$$\mathbf{Pt}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Pt}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{X}^{\mathrm{b}}) .$$

2.12 观察。由于包含

$$\mathbf{Acc}^{\mathrm{fil}} \subset \mathbf{Acc} \qquad \text{and} \qquad \mathbf{Cat}_{\infty}^{\mathrm{idem}} \subset \mathbf{Acc}$$

二者都保极限，因此我们可以将函子 $\mathbf{Pt}$ 和 $\mathbf{Pt}^{\mathrm{coh}}$ 视为取值于凝聚可达 ∞-范畴的 ∞-范畴Cond($\mathbf{Acc}$) 中。因此，对于任意有界相干 ∞-topos，根据定义，存在一个凝聚可达 ∞-范畴的自然包含

$$\mathbf{Pt}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{X}) \hookrightarrow \mathbf{Pt}(\mathcal{X}) .$$

2.13 备注（局部相干点的凝聚 ∞-范畴）。还有许多值得关注的 ∞-topoi仅局部相干而非相干。例如，非拟紧拟分离概形的 étale ∞-topos。对于这类更广泛的 ∞-topoi，最好考虑 $\mathbf{Pt}^{\mathrm{coh}}$的变体：它将 $\mathcal{X}$ 映至这样的凝聚 ∞-范畴，该范畴将一个极端不连通射有限集 K赋给由局部相干代数态射所张成的 $\mathrm{Fun}^{*}(\mathcal{X}, \mathrm{Sh}(K))$ 全子范畴。

2.2 自由余极限完备化的分类anima

我们感兴趣的是研究凝聚 ∞-范畴 $\mathbf{Pt}(\mathcal{X})$ 和 $\mathbf{Pt}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{X})$的凝聚分类 anima。出于多种原因，了解它们取值于小 anima 是很有用的。为了解释这一点，我们记录一些关于自由余极限完备化的分类 anima 的基本事实。特别是，可及 ∞-范畴的分类 anima 是小的（推论 2.17）。

2.14 回顾。 我们将 $\mathrm{B} : \mathbf{Cat}_{\infty} \to \mathbf{An}$ 记作包含 $\mathbf{An} \hookrightarrow \mathbf{Cat}_{\infty}$ 的左伴随。对于一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，我们称 $\mathrm{B}\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{C}$ 的分类 *anima* 。若函子 $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是弱同伦等价，则称之为弱同伦等价；也就是说，$\mathrm{B}f$ 是等价。若 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 是弱可缩，则称之为弱可缩；也就是说，$\mathrm{B}\mathcal{C} \simeq *$。最后请注意，若 $\mathcal{C}$ 是一个小 ∞-范畴，则 $\mathrm{B}\mathcal{C}$ 也很小。

首先观察到，每个 anima 都存在以弱可缩 ∞-范畴为指标的极限与余极限：

2.15 引理。 设 X 是一个 *anima*，$\mathcal{I}$ 是一个弱可缩的 ∞-范畴。那么：

(1) *anima* X 存在弱可缩极限与余极限。

(2) 设 $f : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ 是到任意 ∞-范畴的一个函子。若 f 存在一个（余）极限，则每个函子 $g : \mathcal{C} \to X$ 都保留这个（余）极限。

证明。 对于（1），只需证明常值函子

$$X \to \mathrm{Fun}(\mathcal{I}, X)$$

是一个等价。由于 $*$是一个 anima，唯一的函子 $\mathcal{I} \to *$分解为

$$\mathcal{I} \xrightarrow{p} \mathrm{B}\mathcal{I} \xrightarrow{q} * .$$

此外，由于 $\mathcal{I}$ 是弱可缩的， q 是一个等价。因此，常值函子分解为

$$X \xrightarrow[\sim]{q^*} \mathrm{Fun}(\mathrm{B}\mathcal{I}, X) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Fun}(\mathcal{I}, X)\,.$$

此外，由于 X 是一个 anima， p^* 是一个等价。因此常值函子 p^*q^* 是一个等价，此即所求。

对于（2），注意到由于 $X \simeq X^{\mathrm{op}}$，关于极限与余极限的断言是对偶的。我们证明关于余极限的断言。若 $f : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ 具有余极限，且 $g : \mathcal{C} \to X$ 为任意函子，则需证明自然映射

$$\mathrm{colim}_{\mathcal{I}}\, gf \to g(\mathrm{colim}_{\mathcal{I}}\, f)$$

在 X 中是一个等价。但在 X 中，每个映射都是等价，因此无需证明。 □

2.16 记号。 设 $\mathcal{K}$ 为一族小 ∞-范畴。给定一个小 ∞-范畴 $\mathcal{C}_0$，令 $\mathrm{PSh}_{\mathcal{K}}(\mathcal{C}_0)$ 为 $\mathcal{C}_0$ 在由 ∞-范畴（属于 $\mathcal{K}$）所指标的图表的余极限下的自由余完备化。 $\mathrm{PSh}_{\mathcal{K}}(\mathcal{C}_0)$ 的存在性由 [HTT, 命题 5.3.6.2]得出。具体而言， $\mathrm{PSh}_{\mathcal{K}}(\mathcal{C}_0)$可构造为 $\mathcal{C}_0$ 上 anima 的预层中包含 Yoneda 嵌入的像、且在由 ∞-范畴（属于 $\mathcal{K}$）所指标的余极限下封闭的最小全子范畴。

2.17 推论。 设 $\mathcal{C}_0$ 是一个小的 ∞-范畴，且设 $\mathcal{K}$ 是由小的弱可缩∞-范畴组成的集合。那么包含 $y : \mathcal{C}_0 \hookrightarrow \mathrm{PSh}_{\mathcal{K}}(\mathcal{C}_0)$ 诱导出一个等价

$$\mathrm{B}\mathcal{C}_0 \xrightarrow{\sim} \mathrm{B}(\mathrm{PSh}_{\mathcal{K}}(\mathcal{C}_0))\,.$$

特别地，*anima* $\mathrm{B}(\mathrm{PSh}_{\mathcal{K}}(\mathcal{C}_0))$ 是小的。

证明。 首先注意到，最后的结论源于以下事实：由于 $\mathcal{C}_0$ 是小的， $\mathrm{B}\mathcal{C}_0$ 也是小的。对于主要结论，我们证明，对于任意 anima X，函子

$$\mathrm{Fun}(\mathrm{B}(\mathrm{PSh}_{\mathcal{K}}(\mathcal{C}_0)), X) \xrightarrow{-\circ \mathrm{B}y} \mathrm{Fun}(\mathrm{B}\mathcal{C}_0, X)$$

是一个等价。注意，根据 引理 2.15， X 具有弱可缩余极限，并且每个函子 $\mathcal{D} \to X$ 都保留 $\mathcal{D}$ 所具有的全部弱可缩余极限。因此我们看到，包含

$$\mathrm{Fun}^{\mathcal{K}\text{-colim}}(\mathrm{PSh}_{\mathcal{K}}(\mathcal{C}_0), X) \subset \mathrm{Fun}(\mathrm{PSh}_{\mathcal{K}}(\mathcal{C}_0), X)$$

由保留以 ∞-范畴为指标且位于$\mathcal{K}$ 中的余极限的函子所张成的全子范畴是一个等式。因此，根据 $\mathrm{PSh}_{\mathcal{K}}(\mathcal{C}_0)$ 的泛性质，沿着包含$y : \mathcal{C}_0 \hookrightarrow \mathrm{PSh}_{\mathcal{K}}(\mathcal{C}_0)$ 进行限制定义了一个等价

$$\mathrm{Fun}(\mathrm{PSh}_{\mathcal{K}}(\mathcal{C}_0), X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fun}(\mathcal{C}_0, X)\,.$$

由伴随关系可得一个交换方形

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fun}(\mathrm{PSh}_{\mathcal{K}}(\mathcal{C}_0), X) & \xrightarrow[\sim]{-\circ y} & \mathrm{Fun}(\mathcal{C}_0, X) \\ \wr\downarrow & & \downarrow\wr \\ \mathrm{Fun}(\mathrm{B}(\mathrm{PSh}_{\mathcal{K}}(\mathcal{C}_0)), X) & \xrightarrow[-\circ \mathrm{B}y]{} & \mathrm{Fun}(\mathrm{B}\mathcal{C}_0, X)\,. \end{array}$$

由于所有其他函子都是等价，底部水平函子是等价。因此，$\mathrm{B}y : \mathrm{B}\mathcal{C}_0 \to \mathrm{B}(\mathrm{PSh}_{\mathcal{K}}(\mathcal{C}_0))$ 是等价，正如所需。 □

2.18 推论。 如果 $\mathcal{C}$ 是一个可访问的 ∞-范畴，那么分类*anima* $\mathrm{B}\mathcal{C}$ 是小的。

证明。 由于 $\mathcal{C}$ 是可达的，因此存在一个正则基数 κ 以及小 ∞-范畴 $\mathcal{C}_0$，使得 $\mathcal{C}$ 等价于 $\mathrm{Ind}_\kappa(\mathcal{C}_0)$ 在 $\mathcal{C}_0$ 下的自由余完备化 κ-滤余极限。由于 κ- 滤余 ∞-范畴是弱可缩的 [Ker, 标签 02PJ & 02QL],由此即得所述结论推论 2.17。 □

2.19 观察 （可访问 ∞-范畴的分类anima）。 注意，每个小 anima 都是幂等完备的；根据 引理 2.15，小 anima 之间的每个函子都是可访问的。因此，我们有一个包含 $\mathbf{An} \subset \mathbf{Acc}$。由于可访问的 ∞-范畴的分类anima是小的（推论 2.18），我们得出分类 anima 函子 $\mathrm{B} : \mathbf{Cat}_\infty \to \mathbf{An}$ 限制为该包含的左伴随

$$\mathrm{B} : \mathbf{Acc} \to \mathbf{An}$$

到该包含。此外，由于 $\mathbf{Acc} \subset \mathbf{Cat}_\infty$ 在极限下封闭， $\mathrm{B} : \mathbf{Acc} \to \mathbf{An}$ 保持有限积。因此， B的逐点应用定义了包含映射的一个左伴随

$$\mathrm{Cond}(\mathbf{An}) \hookrightarrow \mathrm{Cond}(\mathbf{Acc}) .$$

我们也将此左伴随记作 $\mathrm{B} : \mathrm{Cond}(\mathbf{Acc}) \to \mathrm{Cond}(\mathbf{An})$。给定一个凝聚可及$\infty$范畴 $\mathcal{C}$，我们将 $\mathrm{B}\mathcal{C}$ 称为 $\mathcal{C}$的凝聚分类 *anima* 。

2.3 谱的 ∞-topoi 的情形

现在我们已经准备好证明本文的主要结果。该结果适用于 谱的 ∞-*topoi*，这是我们与 Barwick 和 Glasman 合作的工作中引入的 [1]。不熟悉此内容的读者可以参阅§A.3以快速回顾。

2.20 定理。 设 $\mathcal{X}$ 是一个谱的 ∞-*topos*。则：

（1）对于每个极端不连通射有限集 K，包含 $\mathbf{Pt}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{X})(K) \hookrightarrow \mathbf{Pt}(\mathcal{X})(K)$ 存在一个左伴随。

(2）包含 $\mathbf{Pt}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{X}) \hookrightarrow \mathbf{Pt}(\mathcal{X})$在凝聚分类 *anima* 上诱导出一个等价 .

证明。 首先注意到，分类 anima 函子将伴随映为等价，因此（2）是（1）的直接推论。对于（1），注意由 Gleason 定理 [9；14，第三章，第 3 节。7] 存在一个集合 S，使得 K 是 Čech–Stone 紧化 $\beta(S)$的一个收缩。因此，包含 $\mathbf{Pt}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{X})(K) \hookrightarrow \mathbf{Pt}(\mathcal{X})(K)$ 是包含的一个收缩

$$\mathbf{Pt}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{X})(\beta(S)) \hookrightarrow \mathbf{Pt}(\mathcal{X})(\beta(S)) . \tag{2.21}$$

由于 $\mathbf{Pt}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{X})(K)$是幂等完备的，根据 [SAG，引理 21.1.2。14] 只需证明包含（2.21）存在左伴随。也就是说，我们可以将问题归结为 $K = \beta(S)$ 的情形。

在这种情况下，我们有一个交换三角形 e

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Pt}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{X})(\beta(S)) = \mathrm{Fun}^{*,\mathrm{coh}}(\mathcal{X}, \mathrm{Sh}(\beta(S))) & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \mathbf{Pt}(\mathcal{X})(\beta(S)) = \mathrm{Fun}^{*}(\mathcal{X}, \mathrm{Sh}(\beta(S))) & \xrightarrow[j^* \circ -]{} & \mathrm{Fun}^{*}(\mathcal{X}, \mathrm{Sh}(S)) \simeq \mathrm{Pt}(\mathcal{X})^S \text{。} \end{array}$$

由于 $\mathcal{X}$ 是谱的，对角函子是一个等价（见 引理 A.38）。由于 $\mathcal{X}$ 是相干的，根据 推论 1.12，底部水平函子有一个全忠实右伴随$\mathrm{Pt}(\mathcal{X})^S \hookrightarrow \mathbf{Pt}(\mathcal{X})(\beta(S))$。因此，在等价 $\mathbf{Pt}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{X})(\beta(S)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pt}(\mathcal{X})^S$下，左侧垂直包含对应于水平函子的全忠实右伴随 $\mathrm{Pt}(\mathcal{X})^S \hookrightarrow \mathbf{Pt}(\mathcal{X})(\beta(S))$。于是，左侧垂直函子也有一个左伴随。 □

2.22 警告。 如果 K 是一个并非极端不连通的丛有限集，那么包含映射

$$\mathrm{Fun}^{*,\mathrm{coh}}(\mathcal{X}, \mathrm{Sh}(K)) \hookrightarrow \mathrm{Fun}^{*}(\mathcal{X}, \mathrm{Sh}(K))$$

通常不具有左伴随。特别地，按照 [19,定义 3.1.1 和命题 3.2.9]的含义，包含映射 $\mathbf{Pt}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{X}) \hookrightarrow \mathbf{Pt}(\mathcal{X})$ 通常不是凝聚 ∞-范畴的右伴随。为说明这一点，设 $K = \mathbf{N}^+$ 是自然数的一点紧化，$\mathcal{X}$ 是谢尔宾斯基空间上的层 ∞-topos。那么我们考虑的是包含映射

$$\mathrm{Clopen}(\mathbf{N}^+) \hookrightarrow \mathrm{Open}(\mathbf{N}^+) \tag{2.23}$$

从 $\mathbf{N}^+$ 的闭开子集到所有开子集的包含映射。

要证明（2.23）不具有左伴随，回想一下，子集 $U \subset \mathbf{N}^+$ 是闭开子集，当且仅当 U 或者是有限集且不包含 ∞，或者 U 是余有限集且包含 ∞。考虑子空间

$$Y = 2\mathbf{N} \cup \{\infty\}$$

由偶自然数组成，并且 ∞；那么 Y 不是既开又闭的。如果包含映射（2.23）有一个左伴随 L，那么就会存在一个包含 $L(Y)$ 的最小既开又闭子集 Y。要看出这样的既开又闭子集不存在，注意到对于每个奇自然数 n，既开又闭子集 $U_n \coloneqq \mathbf{N}^+ \smallsetminus \{n\}$ 包含Y。因此

$$L(Y) \subset \bigcap_{n \text{ odd}} U_n = Y\,.$$

由于 $Y \subset L(Y)$，这意味着 $L(Y) = Y$；但这是不可能的，因为 Y 不是既开又闭的。

A 关于 ∞-拓扑斯的补充

本文正文中，我们需要用到相干 ∞-topoi 理论中的若干结果。这些结果并不难，但难以从现有文献中直接引用。鉴于该理论的某些部分颇为技术性，为方便读者，我们在本附录中回顾所需内容。在§A.1中，我们回顾有界且 Postnikov 完备的 ∞-topoi 的背景知识。本文大部分内容并不需要这些知识，但我们证明了一些技术性引理，以便在正文中更简洁地陈述若干结果。在§A.2中，我们回顾相干 ∞-topoi 的基础知识，以及用 ∞-pretopoi 对有界相干 ∞-topoi 进行分类的方法。最后，附录小节 A.3 回顾了我们与 Barwick 和 Glasman 合作时引入的谱的 ∞-topoi 理论 [1]。

A.1 有界且 Postnikov 完备的 ∞-拓扑斯

现在我们回顾 ∞-拓扑斯的两个技术条件，它们会在我们的证明中出现：*有界性* 和 *Postnikov 完备性*。这两个条件都保证 ∞-拓扑斯由其截断对象构成的全子范畴控制，并且是 ∞-拓扑斯理论所特有的（也就是说，在 1-拓扑斯理论中没有类似概念）。读者可参阅 [SAG，§A.7]以了解完整细节，或参阅 [1, 第 3] 章，其中的概述比这里提供的更为详细。

关于有界性，我们先回顾一些关于 n-局部型 ∞-拓扑斯 的内容。其基本思想是，n-局部型 ∞-拓扑斯是由其底层的、由 $(n-1)$-截断对象构成的 n-拓扑斯决定的 ∞-拓扑斯。

A.1 记号。给定一个 ∞-拓扑斯 $\mathcal{X}$ 和整数 $n \geq -2$，我们将由 n-截断对象张成的全子范畴记为 $\mathcal{X}_{\leq n} \subset \mathcal{X}$。包含 $\mathcal{X}_{\leq n} \hookrightarrow \mathcal{X}$ 有一个称为 n 的左伴随$\tau_{\leq n} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}_{\leq n}$-截断。我们用 $\mathcal{X}_{<\infty} := \bigcup_{n \geq -2} \mathcal{X}_{\leq n}$ 表示由截断对象张成的全子范畴。

A.2 定义 [HTT，§6.4。5]。设 $n \geq 0$ 是一个整数。我们称一个 ∞-topos $\mathcal{X}$ 为 n-局部化的，如果对于每个 ∞-topos $\mathcal{Y}$，自然函子

$$\mathrm{Fun}_*(\mathcal{Y}, \mathcal{X}) \to \mathrm{Fun}_*(\mathcal{Y}_{\leq n-1}, \mathcal{X}_{\leq n-1})$$

是 ∞-范畴之间的一个等价。由 n-局部化的 ∞-topoi 张成的 $\mathbf{RTop}_\infty$ 全子范畴的包含有一个左伴随 L_n。我们称 $\mathcal{X}$ 的 n-局部化反射 为 $\mathrm{L}_n(\mathcal{X})$。

A.3. HTT [的证明，命题 6.4.5。9]表明，一个 ∞-topos $\mathcal{X}$ 是 n-局部化的，当且仅当存在一个具有所有有限极限的小 n-site，$(\mathcal{C}, \tau)$ 以及一个等价 $\mathcal{X} \simeq \mathrm{Sh}_\tau(\mathcal{C})$。

A.4 回顾 (有界性**)**。设 $\mathcal{X}$ 是一个 ∞-topos。$\mathcal{X}$ 的有界反射 是如下的余滤极限

$$\mathcal{X}^{\mathrm{b}} := \lim_{n \in \mathbf{N}^{\mathrm{op}}} \mathrm{L}_n(\mathcal{X})$$

在 $\mathbf{RTop}_\infty$ 中构造。我们称 $\mathcal{X}$ 是 有界的，如果自然几何态射 $b_* : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^{\mathrm{b}}$ 是一个等价。赋值 $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}^{\mathrm{b}}$ 是由有界的 $\mathbf{RTop}_\infty$ -topoi 张成的全子范畴的包含的左伴随 ∞-topoi [SAG，命题 A.7.1。5]。

第二个条件直接以 ∞-范畴 $\mathcal{X}_{\leq n}$ 中 n-截断对象的范畴来定义。请注意，这些子范畴本身并不是 ∞-托扑斯。

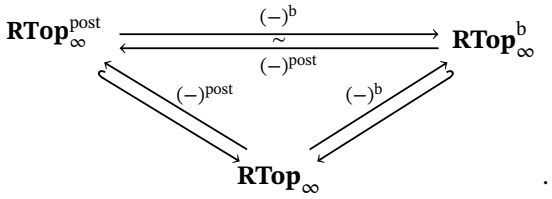
A.5 回顾（Postnikov完备性）。设 $\mathcal{X}$ 是一个 ∞-拓扑斯。$\mathcal{X}$ 的 *Postnikov* 完备化 是由下式给出的极限

$$\mathcal{X}^{\mathrm{post}} := \lim \left(\cdots \longrightarrow \mathcal{X}_{\leq n+1} \xrightarrow{\tau_{\leq n}} \mathcal{X}_{\leq n} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\tau_{\leq 0}} \mathcal{X}_{\leq 0} \right)$$

在 ∞-范畴中形成。我们将自然比较函子记作 $t^*: \mathcal{X} \to \mathcal{X}^{\mathrm{post}}$。如果 $t^*: \mathcal{X} \to \mathcal{X}^{\mathrm{post}}$ 是一个等价，则称 ∞-拓扑斯 $\mathcal{X}$ 为*Postnikov* 完备。

Postnikov 完备化 $\mathcal{X}^{\mathrm{post}}$ 也是一个 ∞-topos；此外，$t^*: \mathcal{X} \to \mathcal{X}^{\mathrm{post}}$ 是一个左正合左伴随 [SAG，定理 A.7.2.4]。赋值 $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}^{\mathrm{post}}$ 是包含由 Postnikov 完备的 ∞-topoi [SAG，推论 A.7.2.6]张成的 RTop_∞ 全子范畴的右伴随。此外，函子 $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}^{\mathrm{post}}$ 和 $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}^{\mathrm{b}}$ 在 RTop_∞ 的全子范畴之间定义了互逆等价，这些全子范畴分别由有界且 Postnikov 完备的 ∞-topoi [SAG，推论 A.7.2.6]张成。

总之，若我们分别用 $\mathbf{RTop}_\infty^{\mathrm{b}}$ 和 $\mathbf{RTop}_\infty^{\mathrm{post}}$ 表示 $\mathbf{RTop}_\infty$ 中由有界且 Postnikov 完备的相干 ∞-topoi 张成的全子范畴，则有以下图表



.

特别地，对于任意 ∞-topos $\mathcal{X}$，存在自然的识别

$$\mathcal{X}^{\mathrm{b}} = (\mathcal{X}^{\mathrm{post}})^{\mathrm{b}} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{X}^{\mathrm{post}} = (\mathcal{X}^{\mathrm{b}})^{\mathrm{post}}.$$

A.6 观察。设 $\mathcal{X}$ 是一个 ∞-topos。那么自然几何态射

$$\mathcal{X}^{\mathrm{post}} \to \mathcal{X} \to \mathcal{X}^{\mathrm{b}}$$

在截断对象上限制为等价

$$(\mathcal{X}^{\mathrm{post}})_{<\infty} \simeq \mathcal{X}_{<\infty} \simeq (\mathcal{X}^{\mathrm{b}})_{<\infty}$$

。参见 [SAG、引理 A.7.1.4 和命题 A.7.3。7]。

A.7 例子。对于任意小 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，预层 $\mathcal{C}$ 上的 ∞-topos $\mathrm{PSh}(\mathcal{C})$ 是 Postnikov 完备的。

A.8 例子。若 X 是有限覆盖维数的副紧拓扑空间，或是有限 Krull 维数的谱空间，则 $\mathrm{Sh}(X)$ 是 Postnikov 完备的 [HTT，推论 7.2.1.12，定理 7.2.3.6 & 注 7.2.4.18；5，定理 3。12]。特别地，∞丛有限集上的层的 -topos 是 Postnikov 完备的。

A.9 示例 [13]。设 X 是一个拓扑空间。若 X 具有 CW 结构，则该 ∞-topos$\mathrm{Sh}(X)$ 是 Postnikov 完备的。

A.2 相干 ∞-topoi 与 ∞-pretopoi

现在我们回顾相干 ∞-topoi 以及对有界相干 ∞-topoi 的分类，该分类以 ∞-pretopoi 为依据。读者可参阅 [SAG，附录 A] 了解完整细节，或参阅 [1,第 3]章，以获得比此处概述更为详细的介绍。

A.10定义 （相干性）。设 $\mathcal{X}$ 是一个 ∞-topos。我们称 $\mathcal{X}$ 为 0-相干 （或 拟紧），如果对于每个有效满射 $e: \coprod_{i \in I} U_i \twoheadrightarrow 1_{\mathcal{X}}$，都存在一个有限子集 $I_0 \subset I$，使得 e 在 $\coprod_{i \in I_0} U_i \twoheadrightarrow 1_{\mathcal{X}}$ 上的限制仍是有效满射。设 $n \geq 0$，并递归地如下定义 ∞-topoi 及其对象的 n-相干性。

（1）如果 $\mathcal{X}_{/U}$ 这个 ∞-topos 是 n-相干的，则称对象 $U \in \mathcal{X}$ 是 n-相干 的。

(2) 若每个对象 $U \in \mathcal{X}$ 都有一个覆盖 $\{V_i \to U\}_{i\in I}$，且其中每个 V_i 都是 n-相干的，则 ∞-层位 $\mathcal{X}$ 是局部 n-相干的。

(3) 若 $\mathcal{X}$ 局部为 n-相干，且 n 的 $\mathcal{X}$ 的 n-相干对象对有限积封闭，则 ∞-层位 $\mathcal{X}$ 是 $(n+1)$-相干的。

若对每个 $n \geq 0$， ∞-层位 $\mathcal{X}$ 都是 n-相干的，则称 ∞-层位 $\mathcal{X}$ 为相干的。∞-层位 $\mathcal{X}$ 的对象 U 若使 $\mathcal{X}_{/U}$ 成为相干的 ∞- 层位，则称其为相干的。最后，若每个对象 $U \in \mathcal{X}$ 都有一个覆盖 $\{V_i \to U\}_{i\in I}$，且其中每个 V_i 都是相干的，则称 ∞-层位 $\mathcal{X}$ 为局部相干的。

A.11 记号。设 $\mathcal{X}$ 是一个 ∞-层位。记 $\mathcal{X}^{\mathrm{coh}} \subset \mathcal{X}$ 为 $\mathcal{X}$ 中由相干对象张成的全子范畴，记 $\mathcal{X}^{\mathrm{coh}}_{<\infty} \subset \mathcal{X}$ 为 $\mathcal{X}$ 中由截断相干对象张成的全子范畴。

A.12 定义 (相干几何态射)。 相干∞-topoi 之间的几何态射 $f_*\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ 是 相干的，如果对于每个相干对象 $U \in \mathcal{X}$，对象 $f^*(U) \in \mathcal{Y}$ 都是相干的。这等价于要求 f^* 将 $\mathcal{X}^{\mathrm{coh}}_{<\infty}$ 映至 $\mathcal{Y}^{\mathrm{coh}}_{<\infty}$ [1, 推论 3.4。5]。

A.13 回顾(相干性可由 Postnikov 完备化和有界反射检测)。给定一个 ∞-topos $\mathcal{X}$，自然几何态射 $\mathcal{X}^{\mathrm{post}} \to \mathcal{X} \to \mathcal{X}^{\mathrm{b}}$ 限制后成为等价

$$(\mathcal{X}^{\mathrm{post}})^{\mathrm{coh}}_{<\infty} \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}^{\mathrm{coh}}_{<\infty} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{X}^{\mathrm{b}})^{\mathrm{coh}}_{<\infty}.$$

此外， $\mathcal{X}$ 相干当且仅当 $\mathcal{X}^{\mathrm{post}}$ 相干，当且仅当 $\mathcal{X}^{\mathrm{b}}$ 相干。参见 [1,引理 3.4.12]。此外，若 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 相干，则几何态射 $f_*\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ 相干当且仅当 $f^{\mathrm{post}}_*\colon \mathcal{Y}^{\mathrm{post}} \to \mathcal{X}^{\mathrm{post}}$ 相干，当且仅当 $f^{\mathrm{b}}_*\colon \mathcal{Y}^{\mathrm{b}} \to \mathcal{X}^{\mathrm{b}}$ 相干[1, 3。4.13]

下面给出一些例子。主要的例子来自某个有限型 ∞-site 上的层。

A.14 定义。 ∞-site $(\mathcal{C}, \tau)$ 称为有限型 的，如果 $\mathcal{C}$ 有纤维积，并且对于每个对象$U \in \mathcal{C}$ 和每个覆盖筛 $S \subset \mathcal{C}_{/U}$，都存在一个生成覆盖筛的有限子集 $\{U_i\}_{i\in I} \subset S$。

A.15 命题 [SAG，命题 A.3.1。3]。设 $(\mathcal{C}, \tau)$ 是一个有限型 ∞-*site*。那么：

(1) ∞-*topos* $\mathrm{Sh}_\tau(\mathcal{C})$ 局部相干。

(2) 对于每个对象 $U \in \mathcal{C}$， U 在层化 *Yoneda* 嵌入下的像是 $\mathrm{Sh}_\tau(\mathcal{C})$中的一个相干对象。

(3) 此外，如果 $\mathcal{C}$ 有终对象，那么 $\mathrm{Sh}_\tau(\mathcal{C})$是相干的。

下面是一些可以由此推导出的更多几何例子。

A.16 例子。 若 X 是清醒拓扑空间，则 $\mathrm{Sh}(X)$ 相干当且仅当 X 是谱的，即此外还拟紧、拟分离，并且具有拟紧开集基。在此情形下， $\mathrm{Sh}(X)^{\mathrm{coh}}_{<\infty}$ 是由 X上 anima 的可构造层所张成的全子范畴。若 $f\colon Y \to X$ 是谱空间之间的映射，则几何态射 $f_*\colon \mathrm{Sh}(Y) \to \mathrm{Sh}(X)$相干当且仅当映射 f 拟紧。

A.17 例子。 概形 X 拟紧且拟分离，当且仅当其 étale ∞-拓扑斯$X_{\text{ét}}$相干。在此情形下，$(X_{\text{ét}})^{\text{coh}}_{<\infty}$是由 X上 anima 的可构造 étale 层所张成的全子范畴。若 $f: Y \to X$ 是拟紧拟分离概形之间的任意态射，则几何态射 $f_*: Y_{\text{ét}} \to X_{\text{ét}}$相干。

现在让我们来说明，既有界又相干的 ∞-topos 如何由其截断相干对象决定。以下给出了对截断相干对象所满足的形式性质的公理化描述：

A.18 定义 (∞-预拓扑)。 ∞-范畴 $\mathcal{C}$是一个 ∞-预拓扑，如果：

(1) ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 存在有限极限。

(2) ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 存在有限余积，且这些余积是万有且互不相交的。

(3) $\mathcal{C}$ 中的群胚对象是有效的，且其几何实现是万有的。

若 $\mathcal{C}$和 $\mathcal{D}$是 ∞-预拓扑，则函子 $f^*: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是一个-预拓扑态射，如果 f^*保有限极限、有限余积和有效满射。

A.19 记号。我们用$\mathbf{Pretop}_\infty \subset \mathbf{CAT}_\infty$表示由 ∞-预拓扑和 ∞-预拓扑的态射构成的子范畴。给定 ∞-预拓扑 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$，我们记作

$$\mathrm{Fun}^{\mathrm{pre}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

表示由 ∞-预拓扑的态射张成的全子范畴。

A.20 例子 [SAG，推论 A.6.1。7]。每个 ∞-拓扑都是一个 ∞-预拓扑。如果 $\mathcal{X}$ 是一个相干∞-拓扑，那么由相干对象 $\mathcal{X}^{\mathrm{coh}} \subset \mathcal{X}$ 张成的全子范畴是一个 ∞-预拓扑。

A.21 定义。 ∞-预拓扑 $\mathcal{C}$ 称为有界的，如果 $\mathcal{C}$ 是小的，且 $\mathcal{C}$ 的每个对象都是截断的。我们记作

$$\mathbf{Pretop}^{\mathrm{b}}_\infty \subset \mathbf{Pretop}_\infty$$

表示由有界 ∞-预拓扑张成的全子范畴。

A.22 例子。如果 $\mathcal{X}$ 是一个相干 ∞-拓扑，那么全子范畴 $\mathcal{X}^{\mathrm{coh}}_{<\infty}$ 是一个有界 ∞-预拓扑。

为了陈述关于有界相干 ∞-topoi 的关键分类定理，我们需要固定一些记号。第一个记号用于任意 ∞-前拓扑上的一个自然格罗滕迪克拓扑。

A.23 记号 （有效满射拓扑）。 设 $\mathcal{C}$ 是一个 ∞-前拓扑。我们用 eff 表示 $\mathcal{C}$ 上的拓扑，其中筛 S 在 $X \in \mathcal{C}$ 上是覆盖的，当且仅当存在有限个对象 $U_1, ..., U_n \in S$，使得诱导映射 $U_1 \sqcup \cdots \sqcup U_n \to X$ 是有效满射。这是一个有限型拓扑，我们称之为有效满射拓扑 [SAG，§A.6。2]。重要的是， ∞-前拓扑上的有效满射拓扑是子正则拓扑[SAG，推论 A.6.2。6]。

A.24 记号。 我们用$\mathbf{RTop}^{\mathrm{coh}}_\infty \subset \mathbf{RTop}_\infty$表示其对象为相干$\infty$-topoi、态射为相干几何态射的子范畴。给定相干 ∞-topoi $\mathcal{X}$和 $\mathcal{Y}$，我们记作

$$\mathrm{Fun}^{*,\mathrm{coh}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subset \mathrm{Fun}^*(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

由那些保持相干对象的代数态射 $f^*: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 所张成的全子范畴，即相干 代数态射。我们将$\mathbf{RTop}^{\mathrm{bc}}_\infty \subset \mathbf{RTop}^{\mathrm{coh}}_\infty$ 记为由那些同时有界的相干 ∞-topoi 所张成的全子范畴。

A.25 定理 （有界相干 ∞-topoi 的分类， [SAG，定理 A.7.5。3]）。 这些构造

$$\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}^{\mathrm{coh}}_{<\infty} \qquad \textit{and} \qquad \mathcal{C} \mapsto \mathrm{Sh}_{\mathrm{eff}}(\mathcal{C})$$

是 ∞-范畴的互逆等价

$$\mathbf{RTop}^{\mathrm{bc}}_{\infty} \simeq \mathbf{Pretop}^{\mathrm{b,op}}_{\infty} .$$

此外，对于有界相干 ∞-拓扑斯 $\mathcal{X}$ 与 $\mathcal{Y}$，沿包含 $\mathcal{X}^{\mathrm{coh}}_{<\infty} \hookrightarrow \mathcal{X}$ 的限制定义了 ∞-范畴的一个等价

$$\mathrm{Fun}^{*,\mathrm{coh}}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fun}^{\mathrm{pre}}(\mathcal{X}^{\mathrm{coh}}_{<\infty}, \mathcal{Y}^{\mathrm{coh}}_{<\infty}) .$$

我们以汇集若干未能找到参考文献的技术结果来结束本小节。它们涉及如何用截断相干对象描述从相干∞-拓扑斯出发的任意代数态射，以及相干代数态射的 ∞-范畴的幂等完备性。我们首先记录有界情形中的情况：

A.26 命题。 设 $\mathcal{X}$ 与 $\mathcal{Y}$ 为 ∞-拓扑斯。若 $\mathcal{X}$ 是有界相干的，则沿包含 $\mathcal{X}^{\mathrm{coh}}_{<\infty} \hookrightarrow \mathcal{X}$ 的限制定义了 ∞-范畴的一个等价

$$\mathrm{Fun}^{*}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fun}^{\mathrm{pre}}(\mathcal{X}^{\mathrm{coh}}_{<\infty}, \mathcal{Y}) .$$

证明。 由于 $\mathcal{X}$ 是有界相干的，由定理 A.25 我们有 $\mathcal{X} \simeq \mathrm{Sh}_{\mathrm{eff}}(\mathcal{X}^{\mathrm{coh}}_{<\infty})$。因此该断言由 [SAG，命题 A.6.4.4]推出。 □

A.27 引理。 设 $\mathcal{X}$ 是一个有界相干 ∞-拓扑。则全子范畴 $\mathcal{X}^{\mathrm{coh}}_{<\infty} \subset \mathcal{X}$ 在缩回下封闭。特别地，$\mathcal{X}^{\mathrm{coh}}_{<\infty}$ 是一个小的幂等完备 ∞-范畴。

证明。 参见 [SAG中的推论 A.7.5。4]。 □

A.28 引理。 设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是有界相干 ∞-拓扑。则全子范畴

$$\mathrm{Fun}^{*,\mathrm{coh}}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \subset \mathrm{Fun}^{*}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$$

在缩回下封闭。因此， $\mathrm{Fun}^{*,\ \mathrm{coh}}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 是一个小的幂等完备 ∞-范畴 .

证明。 根据有界相干 ∞-拓扑的分类，

$$\mathrm{Fun}^{*,\mathrm{coh}}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \simeq \mathrm{Fun}^{\mathrm{pre}}(\mathcal{X}^{\mathrm{coh}}_{<\infty}, \mathcal{Y}^{\mathrm{coh}}_{<\infty}) .$$

由于 $\mathcal{X}^{\mathrm{coh}}_{<\infty}$ 和 $\mathcal{Y}^{\mathrm{coh}}_{<\infty}$ 都是小的 ∞-范畴， $\mathrm{Fun}^{*,\ \mathrm{coh}}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 也是一个小的 ∞-范畴。

对于关于缩回下闭性的陈述（它立即蕴含幂等完备性），设 $f^{*}: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 是 $\mathrm{Fun}^{*}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 中的一个代数态射，且它是代数态射 $g^{*}: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 的缩回，而后者保留截断相干对象。那么对于每个截断相干对象 $X \in \mathcal{X}$，对象 $f^{*}(X)$ 都是截断相干对象 $g^{*}(X)$的缩回。引理 A.27 于是蕴含 $f^{*}(X)$ 是截断相干的；也就是说， f^{*} 保留截断相干对象，证毕。

□

对于本文所讨论的凝聚 ∞-范畴中的点，我们关注从任意相干 ∞-topos 到丛有限集上的层 ∞-topos 的（相干）几何态射。后者有界且 Postnikov 完备。在这种情况下，命题 A.26 和引理 A.28 的变体在不对 $\mathcal{X}$施加有界性假设时仍成立。

A.29 命题。 设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是 ∞-*topoi*。若 $\mathcal{Y}$ 有界且 *Postnikov* 完备，则：

(1) 自然几何态射 $\mathcal{X} \to \mathcal{X}^{\flat}$ 诱导出一个等价

$$\mathrm{Fun}^{*}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fun}^{*}(\mathcal{X}^{\flat}, \mathcal{Y}) .$$

(2) 若 $\mathcal{X}$ 相干，则沿包含 $\mathcal{X}^{\mathrm{coh}}_{<\infty} \hookrightarrow \mathcal{X}$ 的限制定义了一个∞-范畴之间的等价

$$\mathrm{Fun}^{*}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fun}^{\mathrm{pre}}(\mathcal{X}^{\mathrm{coh}}_{<\infty}, \mathcal{Y}) .$$

(3) 若 $\mathcal{X}$和 $\mathcal{Y}$相干，则自然几何态射 $\mathcal{X} \to \mathcal{X}^{\flat}$ 诱导出一个等价 e

$$\mathrm{Fun}^{*,\mathrm{coh}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fun}^{*,\mathrm{coh}}(\mathcal{X}^{\flat}, \mathcal{Y}) .$$

此外， $\mathrm{Fun}^{*,\ \mathrm{coh}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是一个小的幂等完备 ∞-范畴。

证明。 对于（1），注意到，由于 $\mathcal{Y}$ 根据回顾 A.5既是有界的又是 Postnikov 完备的，我们有自然等价

$$\begin{aligned} \mathrm{Fun}^{*}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) &\simeq \mathrm{Fun}^{*}(\mathcal{X}^{\mathrm{post}}, \mathcal{Y}) \\ &\simeq \mathrm{Fun}^{*}((\mathcal{X}^{\mathrm{post}})^{\flat}, \mathcal{Y}) \\ &\simeq \mathrm{Fun}^{*}(\mathcal{X}^{\flat}, \mathcal{Y}) . \end{aligned}$$

对于（2），注意到，由于自然几何态射 $\mathcal{X} \to \mathcal{X}^{\flat}$ 在截断相干对象上的限制是一个等价，因此结论由（1）和 命题 A.26得出。类似地， （3）中的等价由以下事实得出：自然几何态射 $\mathcal{X} \to \mathcal{X}^{\flat}$ 在截断相干对象上的限制是一个等价，再结合第（2）项和 定理 A.25。由此，根据 $\mathrm{Fun}^{*,\ \mathrm{coh}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是小的且幂等完备这一陈述可由引理 A.28得出。 □

A.3 谱的 ∞-topoi

现在我们简要回顾谱的谱的 ∞-*topoi* 理论，该理论由我们与 Barwick 和 Glasman [1]合作提出。除了有界相干性之外，谱性还要求 ∞-topos 的点的 ∞-范畴满足一个额外条件。

A.30 回顾。若一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 满足：对每个对象 $x \in \mathcal{C}$，其每个自同态$x \to x$ 都是等价，则称其为分层的。等价地， $\mathcal{C}$ 是分层的，当且仅当存在一个偏序集 P 和一个保守函子 $\mathcal{C} \to P$。我们用**Lay** $\subset$ **Cat**$_\infty$ 表示由分层的 ∞-范畴构成的全子范畴。

A.31 回顾（谱的 ∞-topoi）。若一个 ∞-topos $\mathcal{X}$ 满足 $\mathcal{X}$ 有界相干，且点的 ∞-范畴 $\mathrm{Pt}(\mathcal{X})$ 是分层的，则称其为谱的。若 $\mathcal{X}$ 是谱的 ∞-topos，则 $\mathcal{X}$ 的每个点都是相干的。我们用 $\mathbf{RTop}_{\infty}^{\mathrm{spec}} \subset \mathbf{RTop}_{\infty}^{\mathrm{coh}}$ 表示由谱的 ∞-topoi 构成的全子范畴。

下面是最重要的例子：

A.32 例子。 如果 X 是一个拟紧拟分离概形，那么 X 的 étale ∞-拓扑斯是谱的。

主要结果之一是，谱的 ∞-topoi 的分类比有界相干 ∞-topoi 更为简单，可用 *profinite* 分层的 ∞-categories 来描述。正确的有限性概念如下：

A.33 回顾。若 anima X π-有限，则 $\pi_0(X)$ 有限，X 截断，并且对每个整数$n \geq 1$ 和点 $x \in X$，群 $\pi_n(X,x)$ 都有限。若 ∞-category $\mathcal{C}$ π-有限，则 $\mathcal{C}$ 在等价意义下只有有限个对象，且所有映射 anima 都是 π-有限。我们将由 π-有限的 ∞-categories 张成的全子范畴记为 $\mathbf{Cat}_{\infty,\pi} \subset \mathbf{Cat}_\infty$，并将由 π-有限的分层 ∞-categories 张成的全子范畴记为 $\mathbf{Lay}_\pi \subset \mathbf{Cat}_{\infty,\pi}$。

A.34 例子。如果 $\mathcal{C}$ 是一个 π-有限分层的 ∞-范畴，那么存在一个自然等价 e

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pt}(\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathbf{An}))\,.$$

此外，∞-topos $\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathbf{An})$ 是谱的。

A.35 回顾（∞-范畴 Hochster 对偶）。将 $\mathcal{C} \mapsto \mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathbf{An})$ 赋予由右 Kan 延拓给出的函子性，定义了一个左正合函子

$$\mathbf{Lay}_\pi \to \mathbf{RTop}_\infty^{\mathrm{coh}}\,.$$

∞-范畴 $\mathbf{RTop}_\infty^{\mathrm{coh}}$ 具有极限，因此根据原对象的泛性质，此函子延拓为一个保持极限的函子

$$\mathrm{Pro}(\mathbf{Lay}_\pi) \to \mathbf{RTop}_\infty^{\mathrm{coh}}\,. \tag{A.36}$$

我们与 Barwick 和 Glasman 合作取得的主要成果之一是，该函子是完全忠实的，其像为 $\mathbf{RTop}_\infty^{\mathrm{spec}}$ [1, 定理 9.3。1]。我们将这一结果称为 ∞-范畴 *Hochster* 对偶；它将有限偏序集范畴中的原对象范畴与谱空间及拟紧映射范畴之间的 Hochster 等价推广了 [12； 11]。

更妙的是，全忠实函子（A.36）是一个右伴随。我们将左伴随记为

$$\widehat{\Pi}_{(\infty,1)} \colon \mathbf{RTop}_\infty^{\mathrm{coh}} \to \mathrm{Pro}(\mathbf{Lay}_\pi)\,,$$

并且对于相干的 ∞-topos $\mathcal{X}$，将 $\widehat{\Pi}_{(\infty,1)}(\mathcal{X})$ 称为 $\mathcal{X}$的原有限分层形状。复合

$$\mathbf{RTop}_\infty^{\mathrm{spec}} \xrightarrow[\sim]{\widehat{\Pi}_{(\infty,1)}} \mathrm{Pro}(\mathbf{Lay}_\pi) \xrightarrow{\lim} \mathbf{Cat}_\infty$$

i等价于将一个谱的 ∞-topos $\mathcal{X}$ 映射到其点的 ∞-范畴 $\mathrm{Pt}(\mathcal{X})$ 的函子 .

A.37 回顾（与凝聚数学的关系）。常值层函子

$$\mathbf{Cat}_{\infty,\pi} \hookrightarrow \mathrm{Cond}(\mathbf{Cat}_\infty)$$

沿余滤极限延拓为一个全忠实函子

$$\mathrm{Pro}(\mathbf{Cat}_{\infty,\pi}) \hookrightarrow \mathrm{Cond}(\mathbf{Cat}_\infty)\,.$$

根据 ∞-范畴的霍赫斯特对偶性，复合

$$\mathbf{RTop}_\infty^{\mathrm{spec}} \xrightarrow[\sim]{\widehat{\Pi}_{(\infty,1)}} \mathrm{Pro}(\mathbf{Lay}_\pi) \hookrightarrow \mathrm{Pro}(\mathbf{Cat}_{\infty,\pi}) \hookrightarrow \mathrm{Cond}(\mathbf{Cat}_\infty)$$

由该指派给出

$$\mathcal{X} \mapsto [K \mapsto \mathrm{Fun}^{*,\mathrm{coh}}(\mathcal{X}, \mathrm{Sh}(K))]\,.$$

也就是说，该复合是函子 $\mathbf{Pt}^{\mathrm{coh}}$（见定义 2.10）。因此，

$$\mathbf{Pt}^{\mathrm{coh}} \colon \mathbf{RTop}_\infty^{\mathrm{spec}} \to \mathrm{Cond}(\mathbf{Cat}_\infty)$$

是完全忠实的。

证明主要结果（ ∞所需的谱的定理 2.20）的一个关键性质是， $\mathbf{Pt}^{\mathrm{coh}}(\mathcal{X})$ 在 Čech–Stone 紧化上的取值特别简单：

A.38 引理。 设 $\mathcal{X}$ 是一个谱的 ∞-*topos*，且设 S 是一个集合。那么限制函子

$$\mathrm{Fun}^{*,\mathrm{coh}}(\mathcal{X},\mathrm{Sh}(\beta(S))) \xrightarrow{j^*\circ -} \mathrm{Fun}^{*}(\mathcal{X},\mathrm{Sh}(S)) \simeq \mathrm{Pt}(\mathcal{X})^{S}$$

是 ∞-范畴之间的等价。

证明。 对此有两种证明方法；二者都利用了谱的 ∞-topos 的每个点都是相干的这一事实（参见回顾 A.31）。第一种方法是利用以下事实：对于完全忠实嵌入 $\mathrm{Pro}(\mathbf{Cat}_{\infty,\pi}) \hookrightarrow \mathrm{Cond}(\mathbf{Cat}_{\infty})$像中的每个凝聚 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，限制映射

$$\mathcal{C}(\beta(S)) \longrightarrow \mathcal{C}(S) = \prod_{s\in S} \mathcal{C}(\{s\})$$

是 ∞-范畴之间的等价 [10,命题 2。22]。由此即可推出该结论回顾 A.37。

下面给出第二种更直接的证明。极限函子 lim：$\mathrm{Pro}(\mathbf{Cat}_{\infty,\pi}) \to \mathbf{Cat}_{\infty}$ 有一个左伴随 $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}^{\wedge}_{\pi}$，我们称之为 有限概形完备化。对于任意集合 S，其有限概形完备化$S^{\wedge}_{\pi}$ 就是丛有限集 $\beta(S)$ [SAG， 注 E.5.2。6]。因此，结合∞-范畴 Hochster 对偶性与有限概形完备化的泛性质，即可得到该结论。 □

参考文献

HTT J. Lurie，《高阶拓扑斯理论》（数学年刊研究丛书）。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2009年，第170卷，第xviii+925页，isbn：978-0-691-14049-0；0-691-14049-9。doi：10.1515/9781400830558，math.ias.edu/~lurie/papers/HTT.pdf。SAG J. Lurie，《谱代数几何》，2018年2月，math.ias.edu/~lurie/papers/SAG-rootfile.pdf。Ker J. Lurie，Kerodon，2026年7月，kerodon.net。1. C. Barwick、S. Glasman 与 P. J. Haine，《外单值性》，2020年8月，arXiv:1807.03281v7。2. B. Bhatt 与 P. Scholze，《概形的原 étale 拓扑》，Astérisque，第369期，第99–201页，2015年。3. T. Campion、G. Cousins 与 J. Ye，《分类空间与 Lascar 群》，《符号逻辑杂志》，第86卷，第4期，第1396–1431页，2021年。doi：10.1017/jsl.2021.74。4. O. Caramello，《理论、位点与拓扑斯》。牛津大学出版社，牛津，2018年，第xii+368页，isbn：978-0-19-875891-4，通过拓扑斯理论的“桥梁”关联并研究数学理论。5. D. Clausen 与 A. Mathew，《超下降与 étale K-理论》，《数学发明》，第225卷，第3期，第981–1076页，2021年。doi：10.1007/s00222-021-01043-3。6. J. Damaj、P. J. Haine 与 D. Zhang，《作为凝聚群的 Lascar 群》，2026年，准备中。7. I. Di Liberti，《相干拓扑斯的几何与超结构》，2022年11月，arXiv:2211.03104。8. I. Di Liberti 与 L. Ye，《拓扑斯的 2-范畴中的逻辑与概念》，2025年5月，arXiv:2504.16690。9. A. M. Gleason，《射影拓扑空间》，《伊利诺伊数学杂志》，第2卷，第482–489页，1958年。10. P. J. Haine、T. Holzschuh、M. Lara、C. Mair、L. Martini 与 S. Wolf，《概形的凝聚同伦型》，2025年10月，附 B. Zavyalov 所撰附录。arXiv:2510.07443。

11. M. Hochster，《交换环中的素理想结构》，博士学位论文，普林斯顿大学，1967年，第116页。12. M. Hochster，《交换环中的素理想结构》，《美国数学会汇刊》，第142卷，第43–60页，1969年。doi：10.2307/1995344。13. M. Hoyois，对 Math Overflow 问题168526的回答：当 X 为 CW 复形时， ∞-拓扑斯是否 $\mathrm{Sh}(X)$ 超完备？2016年10月，MO:168526。14. P. T. Johnstone，《Stone 空间》（剑桥高等数学研究丛书）。剑桥大学出版社，剑桥，1986年，第3卷，第xxii+370页，isbn：0-521-33779-8，1982年版的重印本。15. D. Lascar，《论完备理论的模型范畴》，《符号逻辑杂志》，第47卷，第2期，第249–266页，1982年。doi：10.2307/2273140。16. J. Lurie，第2讲：句法，2018年1月，范畴逻辑课程讲义，math.ias.edu/~lurie/278x。17. J. Lurie，《超范畴》，2018年，math.ias.edu/~lurie/papers/Conceptual.pdf。18. M. Makkai，《一阶逻辑的 Stone 对偶》，《数学进展》，第65卷，第2期，第97–170页，1987年。doi：10.1016/0001-8708(87)90020-X。19. L. Martini 与 S. Wolf，《内在高阶范畴论中的余极限与余完备化》，《高阶结构》，第8卷，第1期，第97–192页，2024年，arXiv:2111.14495。20. nLab 作者，《Łoś 超积定理》，2025年12月，第8次修订。ncatlab.org。