arXiv:2602.21605v1 [math.AC] 25 Feb 2026

Fontaine 的幺半映射在完美塔中的应用

KAZUKI HAYASHI、SHINNOSUKE ISHIRO 和 KAZUMA SHIMOMOTO

摘要。为将混合特征环的算术性质和环论性质与正特征中的相应性质联系起来，我们为完美塔引入幺半群映射。利用这些映射，我们讨论完美塔及其倾斜的几乎整性。我们还证明，F. Andreatta 借助分歧理论构造的塔是完美塔，并应用幺半群映射推导出其小倾斜的正规性。

目录

1. 引言 1
2. 笛卡尔图表中的几乎整性 3
3. 完美塔的幺半群映射 6
3.1. Fontaine 的幺半映射回顾 6
3.2. 完美塔 8
3.3. 完美塔的幺半群映射 11
4. 源自分歧理论的完美塔 15
4.1. 构造 15
4.2. Frobenius 投影满射性的证明 18
附录 A. 完备化的平坦性 21
参考文献 23

1. 引言

我们首先回顾 Fontaine 的幺半群映射。该映射已广泛应用于p进 Hodge 理论和完美胚空间的基础理论。设 $p > 0$ 为素数，并假设 A 是一个 p进完备环。那么存在一个良定义的乘性映射 $\sharp\colon A^\flat \to A$，其中

$$A^\flat := \varprojlim_{i\geq 0} \{\cdots \to A/pA \xrightarrow{\mathrm{Frob}} A/pA \xrightarrow{\mathrm{Frob}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{Frob}} A/pA\},$$

它是倾斜的 A。在 [EHS24], 中，作者证明了某些环论性质可以从 A 转移到 $A^\flat$。由于不存在直接构造 A 与$A^\flat$之间环映射的方法，因此必须利用 $\sharp$ 的 $A^\flat \to A$ 乘法性来研究上述问题。其缺点在于，如果假设 A是诺特环，那么 $A^\flat$ 就太小而无用，因为作用于 A/pA 上的 Frobenius 映射远非满射。因此，[EHS24] 中采用的策略主要适用于完美化环等较大的环。

2020年 数学主题分类。13B22, 14G45。关键词与短语。完全整闭包、幺半群映射、完美塔、殆纯性。

另一方面，第二和第三作者 [INS25] 与 Kei Nakazato 引入了完美塔的概念，从而为完美化理论提供了一种诺特化。完美塔 $\{R_i, t_i\}_{i\geq 0}$ 是由环同态 $R_0 \xrightarrow{t_0} R_1 \xrightarrow{t_1} \cdots$ 和一个主理想 $I_0 = (f_0) \subset R_0$ 组成的序列，并满足七条公理（定理 3.6）。这样的塔可以逼近一个完美化环：$\widehat{\ }$余极限 $R_\infty = \varinjlim_{i\geq 0} R_i$ 的 I_0-进完备化 R_∞ 是一个完美化环（定理 3.12）。特别地，我们可以考虑 Fontaine 的幺半群映射 $\sharp\colon (\widehat{R_\infty})^\flat \to \widehat{R_\infty}$。本文旨在将此映射应用于完美塔。由于 [INS25],，完美塔 $\{R_i^{s.\flat}, t_i^{s.\flat}\}_{i\geq 0}$ 存在倾斜的概念 $\{R_i, t_i\}_{i\geq 0}$，且每一层 $R_i^{s.\flat}$（称为第 i 个小倾斜）都可以嵌入 $(\widehat{R_\infty})^\flat$。在此背景下，我们构造了映射 $\sharp\colon (\widehat{R_\infty})^\flat \to \widehat{R_\infty}$ 的一个精细化版本 $\sharp^{(i)}\colon R_i^{s.\flat} \to R_i + I_0\widehat{R_\infty}$（定理 3.23）。尽管 $\sharp^{(i)}$ 是通过限制 $\sharp$ 得到的，但它与一些已知结果相容（定理 3.28）。此外，我们应用这一概念证明，完全整闭这一性质（定理 2.1）可以从 $\{R_i, t_i\}_{i\geq 0}$ 转移到 $\{R_i^{s.\flat}, t_i^{s.\flat}\}_{i\geq 0}$。

定理 1.1（定理 3.16 和 3.29）。设 $\{R_i,\ t_i\}_{i\geq 0}$ 是由某个对 $(R,\ f_0)$ 所产生的完美塔，且 $f_0 \in R$。若 R 是 f_0-无挠的，则下列条件等价。

(1) 对每个 $i \geq 0$，R_i 在 $R_i[\frac{1}{f_0}]$ 中完全整闭。*(2)* R_∞ 在 $R_\infty[\frac{1}{f_0}]$ 中完全整闭。*(3)* $\widehat{R_\infty}$ 在 $\widehat{R_\infty}[\frac{1}{f_0}]$ 中完全整闭。

—

此外，若 $\{R_i, t_i\}_{i\geq 0}$ 满足这些条件，则倾斜 $\{R_i^{s.\flat}, t_i^{s.\flat}\}_{i\geq 0}$ 也满足这些条件。

由于在诺特情形下，完全整闭性与整闭性这一概念相同，读者或许会期待定理 1.1 可用于推出小倾斜的正规性 $R_i^{s.\flat}$。作为第二个主要定理，我们基于分歧理论给出这样一个例子。更准确地说，我们构造以下类型的完美塔，并证明其小倾斜的正规性。

定理 *1.2*（定理 *4.6* 和 *4.8*）。设 R 是混合特征 $(0, p)$ 的非分歧完备正则局部环，其剩余域 k 是完美的。设 $R \to S$ 是正规局部整环的有限扩张，使得 $R[\frac{1}{p}] \to S[\frac{1}{p}]$ 是 *étale* 的。设 $\{R_n\}_{n\geq 0}$ 是与 R 相关联的完美塔，并且对每个 $n \geq 0$，S_n 是 R_n 在 $(R_n \otimes_R S)[\frac{1}{p}]$ 中的整闭包。则存在一个有理数 $\varepsilon \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ 和一个整数 $N \geq 0$，使得 $\{S_n\}_{n\geq N}$ 是由 $(S_N, (p^\varepsilon))$ 产生的完美塔。此外，对于任意 $n \geq N$，小倾斜 $S_n^{s.\flat}$ 是正规的。

请注意，定理 1.2 的构造和证明在很大程度上基于 Andreatta 的工作 [。06]实际上，他早已构造了某些如定理 $\{S_n\}_{n\geq 0}$中出现的分歧塔，并利用它发展了范数域理论的广义理论。然而，我们的工作将他的研究与完美塔理论联系起来；此外，我们关于小倾斜的正规性 $S_n^{s.\flat}$的证明基于定理 1.1 以及完美化理论中的两个基本定理，即（Witt-perfect）殆纯性定理和完美拟-étale 对应。

记号与约定本文始终遵循以下记号和约定。

- 我们固定一个素数 p。
- 除非另有说明，所有环均假定为交换且含幺。
- 一个对 是一个有序对（A，I），由一个环 A 和 A的一个理想 I 组成。当理想 I 是主理想时，例如 $I = (a)$，我们通常用（A，a）代替（A，I）。

- 对于一个对（A, I）和一个 A-模 M，若一个元素 $x \in M$满足：对于所有$a \in I$，都存在一个整数 $n > 0$ 使得 $a^n x = 0$，则称它为 I-挠。令 $M_{I\text{-Tor}}$ 表示由 M中所有 I-挠元素组成的M 的 A-子模。若 $M_{I\text{-挠}} = 0$，则称 M 为 I-无挠。
- 对于一个对（A, I），当我们说一个 A-模 M 是 I-进完备时，我们始终是指M 关于 I-阿迪克拓扑是豪斯多夫完备的。

致谢。作者们衷心感谢 Kei Nakazato 的宝贵意见，尤其是他关于在完美塔上构造幺半群映射的见解。作者们也感谢 Ryo Ishizuka 的建议。

2. 笛卡尔图表中的几乎整性

在本节中，我们讨论环的笛卡尔图表中几乎整性的表现。本节的结果对于定理1.1的证明是必不可少的。

定义 2.1. 设 $A \subseteq B$ 为一个环扩张。

(1) 固定一个正整数 $n > 0$。如果每个满足 $b^n \in A$ 的 $b \in B$ 都属于 A，我们就说 A 在 B 中是次根闭的。(2) 如果 A-子代数 $A[b]$ 是 B 的有限生成A-模，我们就说元素 $b \in B$ 在 A 上整。如果每个在 A 上整的 $b \in B$ 都属于 A，我们就说 A 在 B 中整闭。(3) 如果 A-子代数 $A[b]$ 包含于 B 的一个有限生成 A-模中，我们就说元素 $b \in B$ 在 A 上几乎整。如果每个在 A 上几乎整的$b \in B$ 都属于 A，我们就说 A 在 B 中完全整闭。

根据定义，如果 A 在 B 中完全整闭，那么它就是整闭的，并且在 B中是 n 次根闭的。如果 A 是诺特的，那么当且仅当它在 B中整闭时，它才在 B 中完全整闭。

上述性质在拉回下以如下方式保持。

引理 2.2. 考虑一个环的笛卡尔图表

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \downarrow & \text{p.b.} & \downarrow \\ A' & \xrightarrow[\varphi']{} & B', \end{array}$$

其中竖直映射均为单射。若 B 在 B' 中是 n-根闭的（分别地，整闭、完全整闭），则 A 在 A' 中是 n- 根闭的（分别地，整闭、完全整闭）。

证明。 假设 B 在 B' 中是 n-根闭的。设 $a' \in A'$ 满足 $a'^n \in A$。则 $\varphi(a'^n) \in B$。但是 $\varphi(a'^n) = \varphi'(a'^n) = \varphi'(a')^n$，因此 $\varphi'(a') \in B$。于是 $a' \in \varphi'^{-1}(B) = A$。因此 A 在 A' 中是 n-根闭的。

接下来假设 B 在 B' 中是整闭的（分别地，完全整闭）。若 $a' \in A'$ 在 A 上是整的（分别地，几乎整），则 $\varphi'(a') \in B'$ 在 B 上是整的（分别地，几乎整），因此 $\varphi'(a') \in B$。于是 $a' \in \varphi'^{-1}(B) = A$。因此 A 在 A' 中是整闭的（分别地，完全整闭）。□

我们需要以下无挠情形下笛卡尔图表的判据 .

引理 2.3. 设 R为一个环，且 $f \in R$。设 $\varphi\colon M \to N$是 f-无挠R-模之间的同态。则以下条件等价。

(1) 诱导同态 $M/fM \to N/fN$ 是单射。
(2) R-模的交换图

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ M[\frac{1}{f}] & \xrightarrow[\varphi_f]{} & N[\frac{1}{f}] \end{array}$$

是笛卡尔的。

证明。 由于两者 M 和 N 都是 f-无挠的，我们有如下带正合行的交换图 s

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & M & \longrightarrow & M/fM & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow[f]{} & N & \longrightarrow & N/fN & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

注意，条件 (1) 等价于左侧方块是笛卡尔的条件。因此，蕴含关系“(1) $\Rightarrow$ (2)”由 R-模范畴中的滤过余极限与有限极限可交换这一事实得出。为证明逆命题，考虑交换图

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{f} & M & \hookrightarrow & M[\frac{1}{f}] \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_f} \\ N & \xrightarrow{f} & N & \hookrightarrow & N[\frac{1}{f}]. \end{array}$$

若条件 (2) 成立，则右侧的方块是笛卡尔的。此外，由于乘以 f的映射 $M[\frac{1}{f}]$ 是同构，我们可知外侧方块也是笛卡尔的。因此左侧的方块是笛卡尔的，也就是说，条件 (1) 成立。□

代数也有类似的结论：

命题 2.4。 设 $\varphi\colon A \to B$是一个环同态，且对于某个元素 $f \in A$， A和 B均为 f-无挠的。则以下条件等价。
(1) 诱导同态 $A/fA \to B/fB$是单射。*(2)* 下列环的交换图

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A[\frac{1}{f}] & \xrightarrow[\varphi_f]{} & B[\frac{1}{f}] \end{array} \tag{2.1}$$

是笛卡尔的。

证明。由于从环范畴到阿贝尔群范畴的遗忘函子保有限极限并反映有限极限，也保滤过余极限并反映滤过余极限，因此该命题可归结为定理2.3。 □

下面的引理稍后会用到。

引理 2.5. 设 $A \to B$ 是一个环同态，且对于某个元素 $f \in A$，A 和 B 都是 f-无挠的。假设环图表

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A[\frac{1}{f}] & \xrightarrow[\varphi_f]{} & B[\frac{1}{f}] \end{array}$$

是笛卡尔的（即 $\varphi_f^{-1}(B) = A$）。若 A 在 $A[\frac{1}{f}]$ 中完全整闭，则$\mathrm{Im}(\varphi_f)$ 中每一个在 B 上几乎整的元素都位于 $\mathrm{Im}\ \varphi$ 中。

证明。设 $y = \varphi_f(x) \in \mathrm{Im}(\varphi_f)$ 在 B 上几乎整，其中 $x \in A[\frac{1}{f}]$。存在某个$c > 0$，使得 $f^c x \in A$且对所有 $n > 0$ 有 $f^c y^n \in B$。于是$\varphi_f(f^c x^n) = f^c y^n \in B$，从而对所有 $n > 0$ 有$f^c x^n \in \varphi_f^{-1}(B) = A$。因此，$x \in A[\frac{1}{f}]$ 在 A 上几乎整，故由假设得$x \in A$。从而 $y = \varphi_f(x) = \varphi(x) \in \mathrm{Im}\ \varphi$，如所断言。□

对于类型为（2.1）的笛卡尔图，定理 2.2 的逆命题成立：

命题 2.6. 设 A 是一个环，$f \in A$ 是一个非零因子。设 $\varphi\colon A \to B$ 是一个 f-挠自由的 A-代数，它诱导出一个同构 $A/fA \xrightarrow{\sim} B/fB$。那么以下条件等价。

(1) A 在 $A[\frac{1}{f}]$ 中完全整闭。*(2)* B 在 $B[\frac{1}{f}]$ 中完全整闭。

证明。 由定理2.4 ，可知我们处于与定理2.5相同的情形。

(2) $\Rightarrow$ (1)：此蕴含由定理2.2得出。

(1) $\Rightarrow$ (2)：这一蕴含实际上已在 [NS22，推论 2.7] 的证明中得到；为方便读者，我们给出完整证明。取一个在 B 上几乎整的元素 $x \in B[\frac{1}{f}]$。于是对某个 $d > 0$，有 $f^d x \in B$。由于根据假设 $B = \varphi(A) + f^d B$，存在某个 $a \in A$ 使得 $f^d x - \varphi(a) \in f^d B$，或者等价地，$x - \varphi_f\left(\frac{a}{f^d}\right) \in B$。于是，由于$x$ 且 B 中的任意元素在 B 上几乎整，我们得到 $\varphi_f\left(\frac{a}{f^d}\right)$ 在 B 上几乎整。但由定理 2.5，$\varphi_f\left(\frac{a}{f^d}\right) \in B$。因此 $x \in B$，证毕。□

作为一个特例，我们得到 Beauville–Laszlo 引理（参见 [NS22，引理 2。6]）以及 [NS22，推论 2。8]。

推论 2.7。设 A是一个环，且 $f \in A$是一个非零因子。令 $\varphi\colon A \to A$表示 A的 f-进完备化。则以下断言成立。

(1) A 是 f-无挠的。*(2)* 环的交换图

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & \widehat{A} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A[\frac{1}{f}] & \xrightarrow[\varphi_f]{} & \widehat{A}[\frac{1}{f}] \end{array}$$

是笛卡尔的。

(3) A 在 $A[\frac{1}{f}]$ 中是完全整闭的，当且仅当 $\widehat{A}$ 在$\widehat{A}[\frac{1}{f}]$中是完全整闭的。

证明。 (1) 很容易；参见 [FKI，第二章，引理 1.1。5]。断言 (2) 和 (3) 分别由定理 2.4 和2.6推出。 □

最后，我们有如下陈述。

命题 2.8。 设 $\{A_i\}_{i\in I}$ 是由有向集 I 索引的环的归纳系统，并令$A := \varinjlim_{i\in I} A_i$。固定 $i \in I$，并选取一个元素 $f \in A_i$。假设对于任意$j \geq i$， A_j 都是 f-无挠的（因此 A 是 f-无挠的）。若环图

$$\begin{array}{ccc} A_j & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_j[\frac{1}{f}] & \longrightarrow & A[\frac{1}{f}] \end{array}$$

对于任意 $j \geq 0$ 都是笛卡尔的，则以下条件等价。

(1) 对于任意 $j \geq i$， A_j 在 $A_j[\frac{1}{f}]$ 中完全整闭。*(2)* A 在 $A[\frac{1}{f}]$ 中完全整闭。*(3)* f-进完备化 $\widehat{A}$ 在 $\widehat{A}[\frac{1}{f}]$ 中完全整闭。

证明。 (2) $\Rightarrow$ (1)：这由定理2.2得出。

(1) $\Rightarrow$(2)：由于 $A[\frac{1}{f}]$ 中的每个元素都可由某个元素 $A_j[\frac{1}{f}]$ 表示，其中 $j \geq i$，故断言由定理 2.5得出。

(2) $\Leftrightarrow$ (3)：这就是定理 2.7(3)。 □

3. 完美塔的幺半映射

本节简要回顾 Fontaine 的幺半映射和完美塔，构造幺半映射的一个改进版本，并给出定理 1.1 的证明。

3.1. **Fontaine 的幺半映射回顾**。 我们称一个 $\mathbb{F}_p$-代数为完美，如果其绝对 Frobenius 是双射。容易证明（参见 [EHS24，引理 2.2]），每个完美的 $\mathbb{F}_p$-代数都是约化的。给定任意环，我们可以如下构造一个完美的 $\mathbb{F}_p$- 代数。

定义 3.1. 设 A 是一个环。我们将 $A^\flat$ 记为 $\mathbb{F}_p$-代数

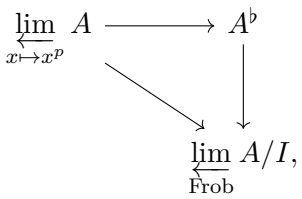
$$A^\flat := \varprojlim_{\text{Frob}} A/pA = \varprojlim(\cdots \xrightarrow{\text{Frob}} A/pA \xrightarrow{\text{Frob}} A/pA)$$

这称为 A 的逆完美化 （当 A 是一个 $\mathbb{F}_p$-代数时），或称为 A 的倾斜 （当 A 不是一个 $\mathbb{F}_p$-代数时）。

容易证明（参见 [EHS24，命题 2.6。1]） $A^\flat$ 是一个完美的 $\mathbb{F}_p$-代数。若 A 是p-进完备的，则 $A^\flat$ 还可用另一种方式描述如下。

引理 3.2. 设 A 是一个 I-进完备环，其理想 $I \subseteq A$ 包含 p (注意，由 A 是 p-进完备的这一点可知， [FKI，第 0 章，命题 7.2。5]) 。那么，在由典范投影诱导的拓扑幺半群的

co由典范投影诱导的拓扑幺半群交换图



所有箭头都是同构，其中 A/pA 和 A/I 均视为带有离散拓扑。

证明。 由于 A 是 p-进完备，只需证明 $\varprojlim_{x\mapsto x^p} A \to \varprojlim_{\mathrm{Frob}} A/I$ 是一个同构。要证明这一点，可以验证，与 [EHS24，引理 25],中一样，该映射

$$(x_n \bmod I)_{n\geq 0} \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n^{p^n} \tag{3.1}$$

给出了逆映射；另见 [ALB20，引理 24]。 □

由上述引理，我们得到以下概念。

定义 3.3. 设 A 是一个 p-进完备环。我们将幺半群映射 $\sharp\colon A^\flat \to A$ 定义为拓扑幺半群的复合映射

$$\sharp\colon A^\flat \xleftarrow{\cong} \varprojlim_{x\mapsto x^p} A \xrightarrow{\mathrm{pr}_0} A,$$

其中第一个映射是定理 3.2 中的同构，第二个映射是第 0个投影。

命题 3.4. 设 A 是一个 p-进完备环。则 $\sharp\colon A^\flat \to A$ 在幂等元集合上诱导一个双射 $\mathrm{Idem}(A^\flat) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Idem}(A)$。特别地， A 连通当且仅当 $A^\flat$亦连通。[1]

证明。 映射 $A \to A^\flat\colon e \mapsto (e, e, e, \ldots)$给出映射 $\sharp$的逆映射。 □

下面我们列出关于幺半群映射的若干基本结果。

定理 3.5. 设 A 是一个完美化环，它对满足 $p \in \varpi^p A$的某个 $\varpi \in A$ 是 ϖ-进完备的。设 $\varpi^\flat \in A^\flat$ 使得 $(\varpi^\flat)^\sharp$ 是 ϖ的单位倍数。

(1) $\sharp\colon A^\flat \to A$ 诱导出一个 $\mathbb{F}_p$-代数同构

$$A^\flat/(\varpi^\flat)^p A^\flat \xrightarrow{\cong} A/\varpi^p A.$$

特别地，理想 $(\varpi^\flat)$ 与 $\varpi^\flat$ 的选取无关。

(2) $\sharp\colon A^\flat \to A$ 诱导出阿贝尔群 $(A^\flat)_{\varpi^\flat\text{-挠}} \xrightarrow{\cong} A_{\varpi\text{-tor}}$之间的同构。特别地， A是无 ϖ 挠的，当且仅当 $A^\flat$ 是无 $\varpi^\flat$ 挠的。*(3)* 若 A 是无 ϖ 挠的，且 A 在 $A[\frac{1}{\varpi}]$ 中完全整闭（分别为整闭），则 $A^\flat$ 在 $A^\flat[\frac{1}{\varpi^\flat}]$ 中完全整闭（分别为整闭）。

证明。 断言 (1) 见 [ČS24, (2.1.2.5)] （本质上是 [BMS1, 引理 3.10 (i)] 的证明）。断言 (2) 见 [ČS24,(2.1.2.8)]。断言 (3) 见 [EHS24, 主定理 1.3 和 1.4]□

[1]容易证明（参见 [EHS24，命题 2.6。2]），若 A是一个整环，则 $A^\flat$也是。

3.2. **完美塔**。 我们所说的环塔 是指由 $R_0 \xrightarrow{t_0} R_1 \xrightarrow{t_1} R_2 \xrightarrow{t_2} \cdots$ 构成、以 $\mathbb{N}$ 为指标的环的归纳系统，记作 $\{R_i, t_i\}_{i\geq 0}$，或简记为$\{R_i\}_{i\geq 0}$。

定义 3.6 ([INS25，定义 3.4，定义 3.21])。 设 R 是一个环，$I \subset R$ 是一个理想。若环塔 $\{R_i,\ t_i\}_{i\geq 0}$ 满足以下三条公理，则称其为由 $(R,\ I)$ 导出的纯不可分塔。

(a) $R_0 = R$ 和 $p \in I$。(b) 对任意 $i \geq 0$，由 t_i 诱导的环映射 $t_i\colon R_i/IR_i \to R_{i+1}/IR_{i+1}$ 是单射。(c) 对任意 $i \geq 0$，Frobenius 自同态 $F\colon R_{i+1}/IR_{i+1} \to R_{i+1}/IR_{i+1}$ 可分解 as

$$\begin{array}{ccc} R_{i+1}/IR_{i+1} & \xrightarrow{F} & R_{i+1}/IR_{i+1} \\ & \overset{F_i}{\searrow} & \uparrow{\scriptstyle \overline{t_i}} \\ & & R_i/IR_i \end{array}$$

我们称映射 F_i （由公理 (b) 可知其唯一）为第 i次 ***Frobenius*** 投影。若环塔 $\{R_i,\ t_i\}_{i\geq 0}$ 进一步满足以下公理，则称其为由 $(R,\ I)$ 导出的完美塔。

(d) 对任意 $i \geq 0$，i 次 Frobenius 投影 $F_i\colon R_{i+1}/IR_{i+1} \to R_i/IR_i$ 是满射。(e) 对任意 $i \geq 0$，R_i 是 IR_i-进 Zariskian 的（即 IR_i 包含于 R_i 的 Jacobson 根中）。(f) I 是一个主理想，并且存在一个主理想 $I_1 \subset R_1$ 满足以下条件。(f-1) $I_1^p = IR_1$。(f-2) 对任意 $i \geq 0$，$\mathrm{Ker}(F_i) = I_1(R_{i+1}/IR_{i+1})$。(g) 对任意 $i \geq 0$，$I(R_i)_{I\text{-tor}} = 0$，并且存在一个（唯一的）双射 $(F_i)_{\mathrm{tor}}\colon (R_{i+1})_{I\text{-tor}} \to (R_i)_{I\text{-tor}}$，使得以下图表可交换：

$$\begin{array}{ccc} (R_{i+1})_{I\text{-tor}} & \longrightarrow & R_{i+1}/IR_{i+1} \\ {\scriptstyle (F_i)_{\mathrm{tor}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_i} \\ (R_i)_{I\text{-tor}} & \longrightarrow & R_i/IR_i \end{array}$$

给定一个纯不可分塔，我们有其准逆完美化。

定义 3.7 ([INS25，定义 3.8])。 设 $\{R_i,\ t_i\}_{i\geq 0}$ 是由某个对 $(R,\ I)$所产生的纯不可分塔。

(1) 对任意 $j \geq 0$，我们将与 $(R,\ I)$ 相关联的 j 阶 $\{R_i,\ t_i\}_{i\geq 0}$ 的逆准完美化定义为拓扑环的极限

$$R_j^{q.\mathrm{frep}} := \varprojlim \left\{ \cdots \to R_{j+i+1}/IR_{j+i+1} \xrightarrow{F_{j+i}} R_{j+i}/IR_{j+i} \xrightarrow{F_{i-1}} \cdots \xrightarrow{F_j} R_j/IR_j \right\},$$

其中我们为每个 R_i/IR_i 赋予离散拓扑。

(2) 对任意 $j \geq 0$，我们按照以下规则定义一个单射环映射 $t_j^{q.\mathrm{frep}}\colon R_j^{q.\mathrm{frep}}, \to R_{j+1}^{q.\mathrm{frep}}$

$$t_j^{q.\mathrm{frep}}((a_i)_{i\geq 0}) := (\overline{t}_{j+i}(a_i))_{i\geq 0}.$$

(3) 我们称塔 $\{R_i^{q.\mathrm{frep}}, t_i^{q.\mathrm{frep}}\}_{i\geq 0}$ 为与$\{R_i, t_i\}_{i\geq 0}$ 相关联的逆完美化(R, I)。若$\{R_i, t_i\}_{i\geq 0}$ 是一个完美塔，则其第 j 次逆准完美化称为其 j次小倾斜，记作 $R_j^{s.\flat}$。环映射 $t_j^{q.\mathrm{frep}}$ 也记作 $t_j^{s.\flat}$。于是，塔$\{R_i^{s.\flat}, t_i^{s.\flat}\}_{i\geq 0}$

称为与$\{R_i, t_i\}_{i\geq 0}$相关联的倾斜(R, I)。我们还将 $R_0^{s.\flat}$ 的理想 $I^{s.\flat}$ 定义为第零投影 $R_0^{s.\flat} \to R/I$ 的核。

我们注意到，完美塔 $\{R_i^{s.\flat},\ t_i^{s.\flat}\}_{i\geq 0}$ 的倾斜 $\{R_i,\ t_i\}_{i\geq 0}$ 源自某个对 $(R,\ I)$，也是一个源自 $(R_0^{s.\flat},\ I_0^{s.\flat})$ 的完美塔（见 [INS25，推论 3。52]）。下面给出一些例子。

例 3.8。 (1) 对于约化 $\mathbb{F}_p$-代数 R，由 Frobenius 自同态 $R \xrightarrow{\text{Frob}} R \xrightarrow{\text{Frob}} R \xrightarrow{\text{Frob}} \cdots$ 组成的塔是一个源自 $(R,\ (0))$的完美塔。反之，源自某个对 $(R,\ (0))$ 的完美塔，在同构意义下具有上述形式（[INS25，引理 3。24]）。

(2) 以下例子是混合特征中最典型的例子之一，并将在下一节中使用。设 R 是一个 d 维的非分歧完备正则局部环，其完美剩余域为 k，特征为 p。那么我们有 $R \cong W(k)[[x_2, \ldots, x_d]]$。考虑塔

$$R_0 := R \hookrightarrow R_1 := R[p^{1/p}, x_2^{1/p}, \ldots, x_d^{1/p}] \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow R_i := R[p^{1/p^i}, x_2^{1/p^i}, \ldots, x_d^{1/p^i}] \hookrightarrow \cdots,$$

其中每个过渡映射都是典范单射。那么对每个 $i \geq 0$，都有 $R_i/pR_i \cong k[[x_2, \ldots, x_d]][x_2^{1/p^i}, \ldots, x_d^{1/p^i}]$。由此可推得，塔 $\{R_i\}_{i\geq 0}$ 是由 $(R, (p))$ 导出的完美塔。在这种情况下，Frobenius 投影 F_i: $R_{i+1}/pR_{i+1} \to R_i/pR_i$ 由 p 次幂映射给出。其倾斜 $R_0^{s.\flat} \to R_1^{s.\flat} \to R_2^{s.\flat} \to \cdots$ 由下式给出

$$k[[p^\flat, x_2^\flat, \ldots, x_d^\flat]] \hookrightarrow k[[(p^\flat)^{1/p}, (x_2^\flat)^{1/p}, \ldots, (x_d^\flat)^{1/p}]] \hookrightarrow k[[(p^\flat)^{1/p^2}, (x_2^\flat)^{1/p^2}, \ldots, (x_d^\flat)^{1/p^2}]] \hookrightarrow \cdots$$

其中 $p^\flat$、$x_2^\flat$、……、$x_d^\flat$ 是与 p、x_2、……、x_d 相对应的变量。通过类似的构造，我们可以得到由局部对数正则环导出的完美塔（[INS25，§3F]）。

(3) Ishizuka [Ish26] 给出了由弗罗贝尼乌斯提升生成的完美塔的一种构造。因此，可以得到由非正规环或非 Cohen–Macaulay 环导出的完美塔。其他例子（包括含有 p-扭元的例子）见 [IS25，§5]。

以下三个引理给出了验证定理 3.6 中公理 (b)、(e) 和 (f) 的有用充分条件。

引理 3.9（参见 [NS22，引理 4.11]的证明）。设 R，$\to S$ 是环的一个单射，且 $f \in R$ 是一个非零因子。若 R 在 $R[\frac{1}{f}]$ 中整闭，且 S 在 R 上整，则诱导映射 $R/fR \to S/fS$ 是单射。

证明。我们需要证明 $fS \cap R = fR$。取 $r \in fS \cap R$。我们可以将 $r = fs$ 写成某个 $s \in S$ 的形式。于是 $s = r/f \in R[\frac{1}{f}]$，它在 R 上是整的。因此 $s \in R$，从而 $r = fs \in fR$。□

对于环 A，用 rad(A) 表示它的 Jacobson 根。

引理 3.10。设 $f\colon\ R \to S$ 是环之间的整映射，且 $I \subseteq R$ 是一个理想。

(1) $\text{rad}(R) \subset \text{rad}(S) \cap R$，若 f 是单射，则等号成立。*(2)* 若 R 是 I- 进 *Zariskian* 的，则 S 是 IS- 进 *Zariskian* 的。

证明。（1）若 f 是单射，则断言由 [BouAC，第五章 §2.1，推论3]得出。在一般情形下，我们只需注意到 f（rad R）$=\text{rad}\, f$（R），这由 f 的满射性推出。（2）由（1）立即得到。□

引理 3.11。 设 $\{R_i, t_i\}_{i\geq 0}$ 是由某个对 (R, I_0) 产生的纯不可分塔。假设 I_0 是一个主理想，且 R_1 包含一个满足 (*f-1*) 的主理想 $I_1 = (f_1)$ 。此外，假设 f_1 在 R_i 中的像是非零因子。那么，当且仅当对于每个 $i \geq 0$， I_1 在 $R_{i+1}[\frac{1}{f_1}]$ 中是 p-根闭的， I_1 满足 (*f-2*) 。

证明。 由于 (f-2) 等价于说 Frobenius 自同态在 $R_{i+1}/I_0R_{i+1} = R_{i+1}/f_1^pR_{i+1}$ 上的核由 f_1生成，因此该断言可由以下一般事实推出：若 A 是一个环， 且 $t \in A$是一个满足 $p \in t^pA$的非零因子，则 A 在 p中是 $A[\frac{1}{t}]$-根闭的，当且仅当 Frobenius 自同态在 A/t^pA上的核由 t([ČS24,(2.1.7.1)]) 生成。 □

N记号 3.12. 本文始终 , 对环塔使用以下记号 gs.

(1) 考虑一个满足某个对 (R, I) 的公理 (a) 的环塔 $\{R_i, t_i\}_{i\geq 0}$。

- 我们定义 $R_\infty := \varinjlim\{R_0 \xrightarrow{t_0} R_1 \xrightarrow{t_1} R_2 \xrightarrow{t_2} \cdots\}$
- 记 R_∞ 表示 I-进完备化 R_{∞}。 若 $\{R_i, t_i\}_{i\geq 0}$是一个完美塔（[INS25，推论 3。52]）。

(2) 考虑由某个对 $(R, I$ 导出的纯不可分塔 $\{R_i, t_i\}_{i\geq 0}$).

- 对于任意 $j \geq 0$和任意 $m \geq 0$, 我们考虑映射 $\Phi_j^{q.\mathrm{frep}}$: $R_j \to R_j$, $x \mapsto x^q - t_j^{q.\mathrm{frep}} m$。 若 $m = 0$，我们简记为 $\Phi^{(j)} = \Phi_0^{(j)}$。
- 我们定义 $R_\infty^{q.\mathrm{frep}} := \varinjlim\{R_0^{q.\mathrm{frep}} \xrightarrow{t_0^{q.\mathrm{frep}}} R_1^{q.\mathrm{frep}} \xrightarrow{t_1^{q.\mathrm{frep}}} R_2^{q.\mathrm{frep}} \xrightarrow{t_2^{q.\mathrm{frep}}} \cdots\}$。

(3) 考虑一个由某个对 $(R,\ I)$ 导出的完美塔 $\{R_i,\ t_i\}_{i\geq 0}$。

- We set $R_\infty^{s.\flat} := \varinjlim\{R_0^{s.\flat} \xrightarrow{t_0^{s.\flat}} R_1^{s.\flat} \xrightarrow{t_1^{s.\flat}} R_2^{s.\flat} \xrightarrow{t_2^{s.\flat}} \cdots\}$.
- We set $R_\infty^\flat := (R_\infty)^\flat \cong (\widehat{R_\infty})^\flat \cong$ [2] $\widehat{R_\infty^{s.\flat}}$ where $\widehat{R_\infty^{s.\flat}}$ is the $I^{s.\flat}$-adic completion of $R_\infty^{s.\flat}$.

引理 3.13. 设 $\{R_i, t_i\}_{i\geq 0}$ 是由某个对 $(R,\ I_0)$ 导出的完美塔。则我们有（可能非幺）环的同构

$$\begin{array}{ccc} (R_\infty^{s.\flat})_{I_0^{s.\flat}\text{-tor}} & \xrightarrow{\cong} & (R_\infty^\flat)_{I_0^{s.\flat}\text{-tor}} \\ \cong\downarrow & & \\ (R_\infty)_{I_0\text{-tor}} & \xrightarrow{\cong} & (\widehat{R_\infty})_{I_0\text{-tor}} \end{array} \tag{3.2}$$

证明. 竖直同构由 [INS25，定理 3.35 (2)] 得到。此外，由公理 (g) 可知 $I_0(R_\infty)_{I_0}$-tor $= (0)$。于是，典范同态 $\frown \sim \frown R_\infty \to R_\infty$ 的限制诱导出同构 $(R_\infty)_{I_0}$-tor $\xrightarrow{=} (R_\infty)_{I_0}$-tor，见 [INS25，引理 3.16]。由于 $\{R_i^{s.\flat}, t_i^{s.\flat}\}_{i\geq 0}$ 是由 $(R^{s.\flat}, I_0^{s.\flat})$ 导出的完美塔（见 [INS25，命题 3.41], ），我们可以应用相同的论证得到同构 $(R_\infty^{s.\flat})_{I_0^{s.\flat}}$-tor $\to (R_\infty^\flat)_{I_0^{s.\flat}}$-tor。□

注 3.14. 该复合 $(R_\infty^\flat)_{I_0^{s.\flat}\text{-tor}} \xleftarrow{\cong} (R_\infty^{s.\flat})_{I_0^{s.\flat}\text{-tor}} \xrightarrow{\cong} (R_\infty)_{I_0\text{-tor}} \xrightarrow{\cong} (\widehat{R_\infty})_{I_0\text{-tor}}$ 与由 $\sharp\colon\ R_\infty^\flat \to \widehat{R_\infty}$ 诱导的同构一致（定理 3.5 (2)）。

命题—定义 3.15. 设 $\{R_i, t_i\}_{i\geq 0}$ 是由某个对(R, I_0)产生的完美塔。则下列条件等价。

(1) R_0 是 I_0-无挠的。*(2)* 对任意 $i \geq 0$,
R_i 都是 I_0-无挠的。

[2]此同构由 [INS25的引理 3.55]推出。

(3) R_∞ 是 I_0-无挠的。 *(4)* R_∞ 是 I_0-无挠的。*(5)* $R_0^{s.\flat}$是 $I_0^{s.\flat}$-无挠的。*(6)* 对任意 $i \geq 0$， $R_i^{s.\flat}$都是 $I_0^{s.\flat}$-无挠的。*(7)* $R_\infty^{s.\flat}$是 $I_0^{s.\flat}$-无挠的。*(8)* $R_\infty^\flat$ 是 $I_0^{s.\flat}$-无挠的。

若这些条件中有一个（因而全部）成立，则称完美塔 $\{R_i, t_i\}_{i\geq 0}$ 是 I_0-无挠的。

证明。由 [INS25, 定理 3.35 (2)], ，等价关系“(1) $\Longleftrightarrow$ (5)”（或“(2) $\Longleftrightarrow$ (6)”）成立。另一方面，由 [INS25, 命题 3.41] 可知，倾斜 $\{R_i^{s.\flat}, t_i^{s.\flat}\}_{i\geq 0}$ 是由 $(R^{s.\flat}, I_0^{s.\flat})$ 得到的完美塔。因此，只需在将 $\{R_i, t_i\}_{i\geq 0}$ 替换为 $\{R_i^{s.\flat}, t_i^{s.\flat}\}_{i\geq 0}$后，证明从 (1) 到 (4) 的等价关系。特别地，我们可以假设映射 t_i 是单射。

(1) $\Leftrightarrow$ (2)：这立即由公理 (g) 得出。 (2) $\Rightarrow$ (3)：这由余极限的正合性得出。 (3) $\Rightarrow$ (2)：这是显然的，因为这些映射 t_i 是单射。 (3) $\Leftrightarrow$ (4)：这由定理 3.13 得出。 □

下面的引理是上一节结果的一个应用：

引理 3.16。 设 $\{R_i, t_i\}_{i\geq 0}$ 是满足条件 *(a)* 和 *(b)* 的环塔，其中某个对 $(R、 I)$，且I 由一个元素 f生成。假设对于每个 $i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$， R_i 都是 I-无挠的。

(1) 设 $i \geq 0$。如果 R_{i+1} 在 $R_{i+1}[\frac{1}{f}]$ 中整闭（分别地，完全整闭），那么R_i 在 $R_i[\frac{1}{f}]$中整闭（分别地，完全整闭）。*(2)* 以下条件等价。*(a)* 对每个 $i \geq 0$， R_i 在 $R_i[\frac{1}{f}]$ 中完全整闭。*(b)* R_∞ 在 $R_\infty[\frac{1}{f}]$ 中完全整闭。*(c)* $\widehat{R_\infty}$ 在 $\widehat{R_\infty}[\frac{1}{f}]$ 中完全整闭。

证明。 （1）由定理2.2和2.3可得。（2）由定理2.8可得。 □

3.3. **完美塔的幺半群映射**。 设 $\{R_i, t_i\}_{i\geq 0}$ 是由某个对 (R, I)得到的完美塔。那么， $R_\infty^\flat$ （ p-进完备环 $\widehat{R_\infty}$ 的倾斜）同构于乘法幺半群 $\lim_{\longleftarrow} \widehat{R_\infty}$ （定理3.2）。这里我们将针对小倾斜 $R_i^{s.\flat}$对这一结果作进一步细化。$x\mapsto x^p$关键在于以下引理。

引理 3.17。 设 $\{R_i, t_i\}_{i\geq 0}$是满足某个对的公理（*a*）和（*b*）的环塔 (R, I)。假设理想 $IR_\infty \subseteq R_\infty$ 有限生成（例如满足公理（*f*））。那么，对任意$i \geq 0$，环映射

$$R_i/IR_i \to \widehat{R_\infty}/I\widehat{R_\infty}$$

由复合映射 $R_i \to R_\infty \to R_\infty$ 诱导的映射是单射。

证明。 $R_i/IR_i \to R_\infty/IR_\infty$ 可分解为

$$R_i/IR_i \to R_\infty/IR_\infty \to \widehat{R_\infty}/I\widehat{R_\infty}.$$

第一个箭头由单射 $R_i/IR_i \hookrightarrow R_j/IR_j$ $(j \geq i)$ 诱导，因此是单射。根据 IR_∞ 有限生成的假设，第二个箭头是同构。□

特别地， R_i $/IR_i$ 同构于其在 R_∞/IR_∞ 中的像。我们将使用以下记号 :

记号 3.18. 对于满足条件 (a) 的环塔 $\{R_i, t_i\}_{i\geq 0}$，其中存在一对 (R, I)，且对每个$i \geq 0$均成立，令

$$R_i + I\widehat{R_\infty} \subseteq \widehat{R_\infty}$$

表示 R_∞中（作为加法子群的） R_i 在 R_∞ 中的像与 R_∞的理想 IR_∞ 之和。注意， $R_i + IR_\infty$ 是 R_∞的子环，它与由子集 $IR_\infty \subseteq R_\infty$生成的 R_∞ 的 R_i-子代数一致 。

在此记号下，假设 $\{R_i, t_i\}_{i\geq 0}$是由 (R, I) 引出的纯不可分塔。 那么，定理 R_i/IR_i $\to R_\infty/IR_\infty$ 中的注入 3.17 诱导出一个同构

$$R_i/IR_i \xrightarrow{\cong} (R_i + I\widehat{R_\infty})/I\widehat{R_\infty}. \tag{3.3}$$

注意，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} R_i & \longrightarrow & R_i + I\widehat{R_\infty} \\ {\scriptstyle t_i}\downarrow & & \downarrow \\ R_{i+1} & \longrightarrow & R_{i+1} + I\widehat{R_\infty}, \end{array}$$

其中，右侧的竖直箭头是包含映射 $R_i + IR_\infty \subseteq R_{i+1} + IR_\infty$。此外，公理 (c) 意味着， R_∞ 上的 p 次幂映射在子环之间诱导出一个乘性映射

$$R_{i+1} + I\widehat{R_\infty} \to R_i + I\widehat{R_\infty}$$

对于任意 $i \geq 0$。这促使我们给出以下定义。

定义 3.19 （乘法小倾斜）。 设 $\{R_i, t_i\}_{i\geq 0}$ 是由某个对 (R, I) 导出的纯不可分塔，其中 IR_∞ 为有限生成。对于每个 $i \geq 0$，我们在 $R_i + IR_\infty$ 上赋予 R_∞的子空间拓扑。对于任意 $j \geq 0$，我们将 j 次乘法小倾斜$\{R_i, t_i\}_{i\geq 0}$ （与 (R, I) 相关联）定义为拓扑幺半群的极限

$$R_j^{\mathrm{mult}\,\flat} := \varprojlim\{\cdots \to R_{j+i+1} + I\widehat{R_\infty} \xrightarrow{x\mapsto x^p} R_{j+i} + I\widehat{R_\infty} \to \cdots \xrightarrow{x\mapsto x^p} R_j + I\widehat{R_\infty}\}.$$

我们列出环 $R_i + IR_\infty$的一些基本拓扑性质。

引理 3.20。 设 $\{R_i, t_i\}_{i\geq 0}$ 是满足条件 *(a)* 的环塔，其中某个对 (R, I) 满足理想 $IR_\infty \subseteq R_\infty$ 为有限生成。设 $i \geq 0$。

(1) $R_i + IR_\infty$ 是 R_∞的开子环。

(2) IR_∞ 是 $R_i + IR_\infty$的理想，并且 $R_i + IR_\infty \subseteq R_\infty$ 上的子空间拓扑与 IR_∞-阿迪克拓扑以及 $I(R_i + IR_\infty)$-阿迪克拓扑一致。

(3) $R_i + IR_\infty$ 是 IR_∞-进完备的。

证明。 </style>断言（1）由$R_i + IR_\infty$ 包含 IR_∞这一事实可得。断言（2）由 $I^2\widehat{R_\infty} \subseteq I\,(R_i + I\widehat{R_\infty})\ \subseteq I\widehat{R_\infty}$可得。最后，由（1）可知， $R_i + I\widehat{R_\infty}$ 在 R_∞中是闭的。因此，关于子空间拓扑（由（2）可知，该拓扑是 IR_∞-进拓扑），它是完备的。故断言（3）成立。□

注记 3.21。 </style}环 $R_i + IR_\infty$ 很少是诺特的。事实上，我们有一个环的交换图

$$\begin{array}{ccc} R_i/IR_i & \longrightarrow & (R_i + I\widehat{R_\infty})/I(R_i + I\widehat{R_\infty}) \\ & \searrow^{\cong} & \downarrow \\ & & (R_i + I\widehat{R_\infty})/I\widehat{R_\infty}. \end{array}$$

这意味着存在 R_i-模的一个分解

$$\frac{R_i + I\widehat{R_\infty}}{I(R_i + I\widehat{R_\infty})} \cong (R_i/IR_i) \oplus \frac{I\widehat{R_\infty}}{I(R_i + I\widehat{R_\infty})}.$$

因此，如果 I 由一个元素 f 生成，且对于每个 $i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$， R_i 都是 f-无挠的，那么 $(R_i + IR_\infty)/I(R_i + R_\infty)$ 有一个直和项同构于包含$R_i + I\widehat{R_\infty}$，$\to \widehat{R_\infty}$的余核，而该余核同构于典范单射 R_i/IR_i，$\to R^\flat_\infty/IR^\flat_\infty$的余核。例如，考虑与正则局部环 $\mathbb{Z}_p$相关联的完美塔。那么， $\mathbb{F}_p[[T]] \to \mathbb{F}_p[T^{p^\infty}]$的余核 $\widehat{\quad}_{11}$ 在 $\mathbb{F}_p$ 上不是有限维的，因此 $(\mathbb{Z}_p + p\mathbb{Z}_p[p^{p^\infty}])/p(\mathbb{Z}_p + p\widehat{\mathbb{Z}_p[p^{p^\infty}]})$ 也是如此。$\widehat{\quad}^{1}_{1}$ 因此， $\mathbb{Z}_p + p\mathbb{Z}_p[p^{p^\infty}]$ 不是 $\mathbb{Z}_p$ 上的有限型。

命题 3.22. 设 $\{R_i, t_i\}_{i\geq 0}$ 是由某个对 (R, I) 得到的纯不可分塔，其中 R_∞ 的理想 IR_∞ 有限生成。那么对任意 $j \geq 0$，典范映射的复合

$$R_i + I\widehat{R_\infty} \to (R_i + I\widehat{R_\infty})/I\widehat{R_\infty} \xleftarrow{\cong} R_i/IR_i \quad (i \geq j)$$

诱导出拓扑幺半群的一个同构

$$R_j^{\text{mult}\,.\flat} \xrightarrow{\cong} R_j^{q.\text{frep}}.$$

证明. 我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim_{x\mapsto x^p} \widehat{R_\infty} & \xrightarrow{\cong} & (\widehat{R_\infty})^\flat \\ \uparrow & & \uparrow \\ R_j^{\text{mult}\,.\flat} & \longrightarrow & R_j^{q.\text{frep}}, \end{array} \tag{3.4}$$

其中，左侧的竖直箭头是典范单射，右侧的竖直箭头是由 $\{t_{j+i}\}_{i\geq 0}$ 的极限定义的单射，而上方的水平箭头是同构，因为 $\widehat{\quad}R_\infty$ 是 p-进完备的。

由于交换图 (3.4)，只需证明上方水平箭头的逆映射 (3.1) 将 $R_j^{q.\text{frep}}$ 映入 $R_j^{\text{mult}\,.\flat}$。但这立刻由以下事实得出： $R_i + I\widehat{R_\infty}$ 在 R_∞ 中是闭的（定理3.20 (1)). □

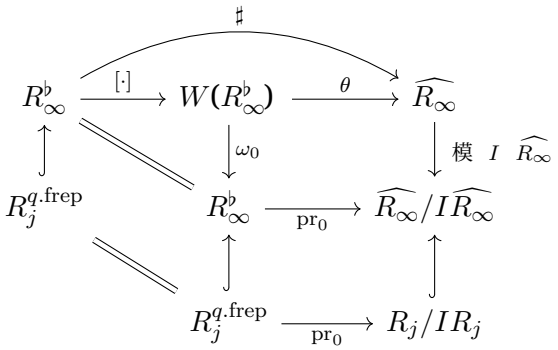
一旦我们证明了定理 3.22，自然可以如下定义精细化方丹映射：

定义 3.23 （精细化方丹映射）。 设 $\{R_i,\ t_i\}_{i\geq 0}$ 是由某个对 $(R,\ I)$ 产生的纯不可分塔，其中 IR_∞ 为有限生成的。对于任意 $j \geq 0$，我们将拓扑幺半群的映射 $\sharp^{(j)}$: $R_j^{q.\text{frep}} \to R_{j+m} + I\widehat{R_\infty}$ 定义为以下复合映射

$$\sharp^{(j)}\colon R_j^{q.\text{frep}} \xleftarrow{\cong} R_j^{\text{mult}\,.\flat} \xrightarrow{\text{pr}_0} R_j + I\widehat{R_\infty},$$

其中第一个同构 态射源自定理3.22，第二个映射是0-次投影 .

注 3.24. 尽管精化单幺映射 $\sharp^{(j)}$ 不过是普通单幺映射 $\sharp\colon R^\flat_\infty \to \widehat{R_\infty}$（参见交换图（3.4）），但我们的构造证实 $\sharp$ 将 $R_j^{q.\mathrm{frep}}$ 映射到 $R_j + I\widehat{R_\infty}$。下面给出这一结果的另一种证明。我们使用所谓的 *theta* 映射 $\theta\colon W(R^\flat_\infty) \to \widehat{R_\infty}$，它是良定义的，因为 p-进$\widehat{\ }$完备性；关于其构造，参见 R_∞；参见 [BMS1，§3] 。事实上，我们有如下交换图



其中 $[\cdot]$ 是 Teichmüller 映射，而 ω_0 是第零分量映射。因此， $\sharp$ 将 $R_j^{q.\mathrm{frep}}$ 映射到 R_j/IR_j ↪ R_∞/IR_∞的像$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$，如所述。

注记 3.25. 根据定义，我们有以下交换图

$$\begin{array}{ccc} R_j^{q.\mathrm{frep}} & \xrightarrow{\sharp^{(j)}} & R_j + I\widehat{R_\infty} \\ & \searrow^{\Phi^{(j)}} & \downarrow \\ & & R_j/IR_j. \end{array} \tag{3.5}$$

本节余下部分，我们给出定理 3.5 的一个类似结果。

命题 3.26. 设 $\{R_i, t_i\}_{i\geq 0}$ 是由某个对 (R, I) 得到的纯不可分塔，其中IR_∞ 是有限生成的。固定 $j \geq 0$。若 R_j 是 I-进制亨泽尔的，则映射

$$\mathrm{Idem}(R_j) \to \mathrm{Idem}(R_j^{q.\mathrm{frep}}); \quad e \mapsto (e, e, e, \ldots)$$

是双射。特别地， R_j 连通当且仅当 $R_j^{q.\mathrm{frep}}$ 也连通。

证明。 断言由交换图可得

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Idem}(R_j) & \longrightarrow & \mathrm{Idem}(R_j^{q.\mathrm{frep}}) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sharp^{(j)}} \\ \mathrm{Idem}(R_j/IR_j) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{Idem}(R_j + I\widehat{R_\infty}), \end{array}$$

其中，下方的水平映射由定理3.20 (3)以及 [Ford，推论 3.4 可知是双射。16]。此外，左侧的垂直映射是双射，因为 R_j 是 I-进制亨泽尔的（[Sta，标签 09XI]）。 □

引理 3.27. 设 $\{R_i, t_i\}_{i\geq 0}$ 是由某个对 (R, I_0)产生的完美塔。设 $\{I_i\}_{i\geq 0}$ 是完美类柱系统（[INS25，定义 3.27]）。那么我们有一列主

理想 $\{I_i^{s.\flat}\}_{i\geq 0}$，如 [INS25，定义 3.29 (2)]所述。固定 $j \geq 0$。若 $f_j^{s.\flat} \in I_j^{s.\flat}$表示 $I_j^{s.\flat}$的一个生成元，则 $\sharp^{(j)}(f_j^{s.\flat})$ 生成理想 $I_j(R_j + I_0\widehat{R_\infty})$。特别地，若 $\widehat{R_\infty}$ 是 I_0-无挠的，则

$$\sharp^{(j)}(f_j^{s.\flat}) = f_j u_j$$

对于某个单位 $u_j \in \widehat{R_\infty}^\times$，其中 f_j 表示 I_j的一个生成元。

证明。根据 [INS25，引理 3。30], 我们有 $\Phi^{(j)}(I_j^{s.\flat}) = I_j(R_j/I_0R_j)$。这里 $\Phi_i^{(j)}(I_j^{s.\flat})$ 由 $\sharp^{(j)}(f_j^{s.\flat})$ 模 $I_0\widehat{R_\infty} \in R_j/I_0R_j$ 生成，依据 (3.5)。因此，将其拉回到$\widehat{R_j + I_0R_\infty}$即可得到所述结论。□

命题 3.28。设 $\{R_i, t_i\}_{i\geq 0}$ 是由某个对 (R, I_0)得到的完美塔。对于每个 $j \geq 0$, $\sharp^{(j)}$: $R_j^{s.\flat} \to R_j + I_0\widehat{R_\infty}$ 都会诱导一个环同构

$$R_j^{s.\flat}/I_0^{s.\flat}R_j^{s.\flat} \xrightarrow{\cong} R_j/I_0R_j \tag{3.6}$$

以及（可能是）非幺环的一个同构

$$(R_j^{s.\flat})_{I_0^{s.\flat}\text{-tor}} \xrightarrow{\cong} (R_j)_{I_0\text{-tor}} \tag{3.7}$$

证明。(3.6)由 [INS25，引理 3.39] 结合 (3.5)可得。为证明 (3.7)，注意到 $\sharp$诱导出一个同构 $(R_\infty^\flat)_{I_0^{s.\flat}\text{-挠}} \xrightarrow{\cong} (\widehat{R_\infty})_{I_0\text{-挠}}$，根据定理 3.27。将此与 [INS25，定理 3.35 (2)],结合，即得所述结论。

$$\begin{array}{ccc}
(R_\infty^\flat)_{I_0^{s.\flat}\text{-tor}} & \xrightarrow[\cong]{\sharp} & (\widehat{R_\infty})_{I_0\text{-tor}} \\
\uparrow & & \uparrow \\
 & & (R_j + I_0\widehat{R_\infty})_{I_0\text{-tor}} \\
 & \overset{\sharp^{(j)}}{\nearrow} & \uparrow \\
(R_j^{s.\flat})_{I_0^{s.\flat}\text{-tor}} & \xrightarrow{\cong} & (R_j)_{I_0\text{-tor}}
\end{array}$$

□

定理 3.29。设 $\{R_i, t_i\}_{i\geq 0}$ 是由某个对 (R, I_0)产生的 I_0-无挠完美塔。设 $I_0 = (f_0)$ 以及 $I_0^{s.\flat} = (f_0^{s.\flat})$。若对于每个 $i \geq 0$， R_i 在 $R_i[\frac{1}{f_0}]$ 中完全整闭，则对于每个 $i \geq 0$，$R_i^{s.\flat}$在$\widehat{R_i^{s.\flat}[\frac{1}{f_0^{s.\flat}}]}$ 中完全整闭。

证明。这由定理3.27、定理3.16以及定理 3.5 (3) . □

4. 由分歧理论产生的完美塔

本节中，我们给出一种源于分歧理论背景下的完美塔构造。这种构造最初归功于 Faltings [Fa88] 和 [Fa02]。这里，我们采用 Andreatta [An06]的方法。

4.1. 构造。我们从以下关于整闭包有限性的命题开始。

命题 4.1。设 $R \to R'$ 是正规环之间的平坦同态。设 $R \to S$ 是一个整的环同态，使得存在 $g \in R$ 满足 R 和 S 均为 g-无挠，且诱导映射 $R[\frac{1}{g}] \to S[\frac{1}{g}]$ 是弱 *étale*。[3] 那么以下断言成立。

[3] 我们称环映射 $A \to B$ 为弱 *étale*，如果 $A \to B$ 和平坦的乘法映射 $B \otimes_A B \to B$ 均为平坦映射。

(1) $R' \otimes_R S$ 是 g-无挠的。*(2)* $(R' \otimes_R S)[\frac{1}{g}]$ 是正规环。*(3)* $R' \otimes_R S$ 在全分式环 $Q(R' \otimes_R S)$ 中的整闭包 S' 与 R' 在 $(R' \otimes_R S)[\frac{1}{g}]$ 中的整闭包相同。*(4)* 假设 $R \to S$ 是有限的，且 R' 是长田环（例如，完备诺特局部环）。那么 $R' \to S'$ 是有限的。因此，特别地，S' 是诺特环。

证明。(1)由以下事实可得：S 是 g-无挠的，且 $R \to R'$ 是平坦的。

(2) 由于 $R[\frac{1}{g}] \to S[\frac{1}{g}]$ 是弱 étale 的，其基变换 $R'[\frac{1}{g}] \to (R' \otimes_R S)[\frac{1}{g}]$ 也弱 étale。于是 $(R' \otimes_R S)[\frac{1}{g}]$ 是正规的，因为 $R'[\frac{1}{g}]$ ([Sta、Tag 0950]) 也是正规的。

(3) 由(2)，S' 与 $(R' \otimes_R S)[\frac{1}{g}]$ 中 $R' \otimes_R S$ 的整闭包一致。因此，只需验证 $R' \otimes_R S$ 在 R' 上整。但这显然成立，因为 $R' \to R' \otimes_R S$ 是整映射 $R \to S$ 的基变换。

(4) 根据假设，$(R' \otimes_R S)[\frac{1}{g}]$ 在长田环 R' 上本质上是有限型的。因此，[Sta，Tag 03GH] 结合 (3) 表明 $R' \to S'$ 是有限的。□

我们固定记号。

记号 4.2。在本节其余部分，我们使用以下记号。

- R：一个混合特征 $(0, p)$ 的 d 维非分歧完备正则局部环，其剩余域 k 是完美的。
- $\{R_n\}_{n\geq 0}$：由 $(R,(p))$ 导出的相关完美塔3.8）。
- $R \hookrightarrow S$：一个正规整环的有限扩张，使得 $R[\frac{1}{p}] \to S[\frac{1}{p}]$ 是 étale 的。
- S_n $(n \geq 0)$：$R_n \otimes_R S$ 在 $Q(R_n \otimes_R S)$ 中的整闭包。根据定理4.1 (3) (4)，S_n 是 R_n 在 $(R_n \otimes_R S)[\frac{1}{p}]$ 中的整闭包，并且 $R_n \to S_n$ 是有限的，使得 $R_n[\frac{1}{p}] \to S_n[\frac{1}{p}] = (R_n \otimes_R S)[\frac{1}{p}]$ 是 étale。

我们的目的是证明，对于某个 $N \geq 0$，塔 $\{S_n\}_{n\geq N}$ 是一个完美塔。关键在于以下命题，它依赖于分歧理论：

命题 4.3 (Faltings)。存在一个递减的正有理数序列 $\{\delta_n\}_{n\geq 0}$，满足以下条件。

(1) $p^{\delta_n} \in W(k)[p^{\frac{1}{p^n}}]$。*(2)* 极限 $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$。*(3)* 对每个 $n \geq 0$，$R_{n+1} \otimes_{R_n} S_n \to S_{n+1}$ 的余核都被 p^{δ_n} 消去。

证明见 [An06，3.6. 命题]。

注 4.4. 条件 $p^{\delta_n} \in W(k)[p^{\frac{1}{p^n}}]$ 蕴含 $\delta_n p^n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$。事实上，由于 $(W(k)[p^{\frac{1}{p^n}}], (p^{\frac{1}{p^n}}))$ 是一个离散赋值环，我们可以写成 $p^{\delta_n} = p^{\frac{m}{p^n}} u_n$，其中 $m \geq 0$ 是整数，$u_n \in W(k)[p^{\frac{1}{p^n}}]^\times$ 是单位。于是 $p^{\delta_n p^n} = p^m u_n^{p^n}$ 且 $u_n^{p^n} \in W(k)^\times$。因此我们得到 $\delta_n p^n = m \in \mathbb{Z}$，因为 $(W(k), (p))$ 是一个离散赋值环。

对于一个环 A 和一个整数 $n > 0$，我们用 A^n 表示 n 次幂映射的像 $(-)^n : A \to A$。因此 A^n 是 A 的一个乘法子幺半群。下一个结果归功于 Andreatta（参见[An06，3.7 推论]）。为便于参考，我们给出证明。

推论 4.5. 存在一个有理数 $\varepsilon \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ 和一个整数 $N \geq 0$，使得 $p^\varepsilon \in W(k)[p^{p^N}]$ 且

$$(S_{n+1})^p \subseteq S_n + p^\varepsilon S_{n+1}$$

对所有 $n \geq N$ 均成立。

证明。 注意到 $(R_{n+1})^p + p^p R_{n+1} = R_n + p^p R_{n+1}$，这由 Frobenius 投影 $R_{n+1}/pR_{n+1} \to R_n/pR_n$(模 p^p) 的满射性得出。令 $\{\delta_n\}_{n\geq 0}$ 为定理 4.3 中取出的序列。我们有

$$\begin{aligned} p^{\delta_n p}(S_{n+1})^p &\subseteq (R_{n+1} \otimes_{R_n} S_n)^p \\ &\subseteq (R_{n+1})^p \otimes_{R_n} S_n + p(R_{n+1} \otimes_{R_n} S_n) \\ &\subseteq (R_n + p^{\frac{1}{p}} R_{n+1}) \otimes_{R_n} S_n + p(R_{n+1} \otimes_{R_n} S_n) \\ &\subseteq S_n + p^{\frac{1}{p}}(R_{n+1} \otimes_{R_n} S_n) \subseteq S_n + p^{\frac{1}{p}} S_{n+1}. \end{aligned}$$

因此

$$(S_{n+1})^p \subseteq \frac{1}{p^{\delta_n p}} S_n + p^{\frac{1-\delta_n p^2}{p}} S_{n+1} = \left(\frac{1}{p^{\delta_n p}} S_n + p^{\frac{1-\delta_n p^2}{p}} S_{n+1} \right) \cap S_{n+1}$$

由于 $p^n \delta_n \geq 1$ 由定理 4.4，我们有 $p^{\frac{1-\delta_n p^2}{p}} \in S_{n+1}$ 对所有 $n \geq 3$。因此

$$(S_{n+1})^p \subseteq \frac{1}{p^{\delta_n p}} S_n \cap S_{n+1} + p^{\frac{1-\delta_n p^2}{p}} S_{n+1} \quad (n \geq 3).$$

取 $x \in \frac{1}{p^{\delta_n p}} S_n \cap S_{n+1}$。由于 S_n , $\to S_{n+1}$ 是整的，我们可知 x 在 S_n 上是整的。S_n 的正规性意味着 $x \in S_n$ ，于是得到

$$(S_{n+1})^p \subseteq S_n + p^{\frac{1-\delta_n p^2}{p}} S_{n+1}. \tag{4.1}$$

另一方面，由定理 4.3，我们得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\delta_n p^2}{p} = \frac{1}{p}.$$

因此固定 $N \gg 0$，使得 $\varepsilon := (1-\delta_N p^2)/p$ 属于 $(0,1) \cap \mathbb{Q}$。于是(4.1) 给出

$$(S_{n+1})^p \subseteq S_n + p^{\frac{1-\delta_n p^2}{p}} S_{n+1} \subseteq S_n + p^{\varepsilon} S_{n+1}$$

对所有 $n \geq N$成立。最后，由于 $\varepsilon p^N = p^{N-1} - \delta_N p^{N+1} \in \mathbb{Z}$ 由定理4.4可知，从而 $p^{\varepsilon} = (p^{\frac{1}{p^N}})^{\varepsilon p^N} \in W(k)[p^{\frac{1}{p^N}}]$。□

现在，本节的主要定理陈述如下。

定理 4.6. 存在某个 $N' \geq N$ ，使得$\{S_n\}_{n\geq N'}$ 是一个完美塔，它产生于$(S_{N'}, (p^{\varepsilon}))$。

除(d)之外，这些公理不难验证：

断言 4.7. $\{S_n\}_{n\geq N}$ 是一个纯不可分塔，它产生于$(S_N, (p^{\varepsilon}))$。此外，它满足公理(e) ∼(g) （定理3.6中）。

证明。 (a) 显然。

(b) 由定理3.9得出，因为每个 S_n 是 p-无挠正规环。(c) 正是定理4.5。(e) 由于 R 是 p-进扎里斯基的，且 $R \to S$ 有限，故 S 也是 p-进扎里斯基的（定理3.10）。对每个 $n \geq 0$，由于 $S \to S_n$ 有限， S_n 也是 p-进扎里斯基的（定理3.10）。这等价于 S_n 是 p^{ε}-进扎里斯基的。

(f) 令 $I_1 := p^{\varepsilon_p} S_{N+1}$。则条件 (f-1) 成立。此外，条件 (f-2) 由定理3.11 得出，因为每个 S_n 是 p-无挠诺特正规环。

(g) 由于对每个 $n \geq N$， S_n 都是 p-无挠的，因此 (g) 自动成立。 □

我们将在后续的第 4.2 节中给出公理 (d) 的证明。在此之前，先提及一个应用。令

$$p^\flat := (p, p^{\frac{1}{p}}, p^{\frac{1}{p^2}}, \dots) \in R_0^{s.\flat}$$

并且，稍微滥用一下记号，我们用同一个 $p^\flat$ 表示它在 $R_n^{s.\flat}$、 $S_n^{s.\flat}$、 $R_\infty^{s.\flat}$、$\widehat{R_\infty^{s.\flat}} \cong R_\infty^\flat$ 等中的像。

Coro论 4.8. 沿用上述记号。那么，对任意 $n \geq N'$，以下结论成立 .

(1) $R_n^{s.\flat} \to S_n^{s.\flat}$ 是有限扩张。*(2)* $R_n^{s.\flat}[\frac{1}{p^\flat}] \to S_n^{s.\flat}[\frac{1}{p^\flat}]$ 是 *étale*。*(3)* $S_n^{s.\flat}$ 是正规环。

证明。 (1) 由 [INS25，引理 3。39] 以及拓扑中山引理 [Mat，定理 8。4]得出。

(2) 只需证明基变换

$$R_\infty^{s.\flat}[\tfrac{1}{p^\flat}] \to S_\infty^{s.\flat}[\tfrac{1}{p^\flat}]$$

沿着忠实平坦映射 $R_n^{s.\flat}[\frac{1}{p^\flat}] \to R_\infty^{s.\flat}[\frac{1}{p^\flat}]$ 有限 étale。由 Witt-完美几乎纯性定理 [NS22，定理 5。9] 结合 [NS22，定理 5。7]，， p-进完备化 $\widehat{R_\infty} \to \widehat{S_\infty}$ 是 $(p)^{\frac{1}{p^\infty}}$-几乎有限 étale。但 $\widehat{R_\infty} \to \widehat{S_\infty}$ 倾斜为 $\widehat{R_\infty^{s.\flat}} \to \widehat{S_\infty^{s.\flat}}$，它是 $(\overline{p^\flat})^{\frac{1}{p^\infty}}$-几乎有限 étale，这由完美拟-étale 对应得出（见 [SW，定理 7.4。5]）。这便得证。

(3) 由定理 3.29 可知 $S_n^{s.\flat}$在 $S_n^{s.\flat}[\frac{1}{p^\flat}]$中整闭。但由 (2) 可推得 $S_n^{s.\flat}[\frac{1}{p^\flat}]$是正规的（[Sta，标签 0950]）。因此 $S_n^{s.\flat}$是正规的，证毕。□

4.2. **Frobenius 投影满射性的证明。** 尚需验证 (d)。证明实质上已见于 [An06, 5.1 定理]；为方便读者，我们在此给出详细证明。首先需要以下结果，该结果同样依赖于分歧理论：

定理 4.9 ([An06, 3.8. 定理])。 序列 $\{p^n \delta_n\}_{n \geq 0}$ 有界。因此存在常数 $c = c(S)$，使得 $p^n \delta_n \leq c$ 对所有 $n \geq 0$均成立。

我们先准备几个引理。以下是定理 4.9的一个推论。

推论 4.10 ([An06, 3.10. 推论])。 设 $n \geq N$ 是一个整数。

(1) $R_{n+1} \otimes_{R_n} S_n \xrightarrow{c} S_{n+1}$ 的余核被 $p^{\frac{c(S)}{p^n}}$ 湮灭。*(2)* $R_\infty \otimes_{R_n} S_n \to S_\infty$ 的余核被 $p^{\frac{p}{(S)p^n\ p-1()}}$湮灭。

证明。 (1) 可由定理 4.3 和不等式 $\delta_n \leq {}^{c}{}_{(S)}\ p^n$ 立即得出。

(2) 对每个 $m \geq 0$，令 $C_{n,m} :=$ 余核$(R_{n+m} \otimes_{R_n} S_n \hookrightarrow S_{n+m})$。于是我们得到如下交换图，其中正合行与列（其中 C 定义为余核）

$$\begin{array}{ccccccc}
R_{n+2} \otimes_{R_{n+1}} (R_{n+1} \otimes_{R_n} S_n) & \longrightarrow & R_{n+2} \otimes_{R_{n+1}} S_{n+1} & \longrightarrow & R_{n+2} \otimes_{R_{n+1}} C_{n,1} & \longrightarrow & 0 \\
\cong\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
R_{n+2} \otimes_{R_n} S_n & \longrightarrow & S_{n+2} & \longrightarrow & C_{n,2} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & C_{n+1,1} & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0. & &
\end{array}$$

由 (1) 可得 $p^{\frac{c(S)}{p^n}} C_{n,1} = 0$ 以及 $p^{c_{(S)} p^{n+1}} C_{n+1,1} = 0$。然后利用右侧列的正合性，我们有 $p^{\frac{c(S)}{p^n} + c_{(S)} p^{n+1}} C_{n,2} = 0$。归纳可得，对于每个 $m \geq 0$，余核$C_{n,m} = \mathrm{Cok}(R_{n+m} \otimes_{R_n} S_n \to S_{n+m})$ 都被

$$p^{\frac{c(S)}{p^{n+m-1}} + \cdots + \frac{c(S)}{p^n}} = p^{c(S)\left(\frac{1}{p^{n+m-1}} + \cdots + \frac{1}{p^n}\right)}.$$

由于

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p^{n+m-1}} + \cdots + \frac{1}{p^n} = \frac{1 + p + \cdots + p^{m-1}}{p^{n+m-1}} &= \frac{p^m - 1}{p^{n+m-1}(p-1)} \\
&= \frac{p^m - 1}{p^m} \cdot \frac{p}{p^n(p-1)} \nearrow \frac{p}{p^n(p-1)} \quad (m \to \infty),
\end{aligned}$$

我们得出 $\mathrm{Cok}(R_\infty \otimes_{R_n} S_n \to S_\infty) = \varinjlim_{m \geq 0} C_{n,m}$ 被 $p^{c_{(S)} p^n \frac{p}{p-1}()}$ 消去。 □

引理 4.11 (参见 [An06，4.15. 引理])。设 $n \geq N$ 为一个整数。

(1) $S_n^{s.\flat}$是$(p^\flat)^\varepsilon$-进完备。*(2)* $R_{n+1}^{s.\flat} \otimes_{R_n^{s.\flat}} S_n^{s.\flat} \to S_{n+1}^{s.\flat}$ 的余核被$(p^\flat)^{\frac{c(S)}{p^n}}$湮灭。*(3)* $R_\infty^\flat \otimes_{R_n^{s.\flat}} S_n^{s.\flat} \to S_\infty^\flat$ 的余核被$(p^\flat)^{c p^n \frac{p}{p-1}(S)()}$湮灭。

证明。(1) 由于 $(p^\flat)^{p^n \varepsilon} \in$核$(\Phi_0^{(n)})$，断言由 [INS25，命题 3.10 (a)]得出。(2) 对每个 $m \geq 0$，定理 4.10 (1) 表明我们有一个正合序列

$$0 \to R_{n+m+1} \otimes_{R_{n+m}} S_{n+m} \to S_{n+m+1} \to C_{n+m} \to 0$$

其中 $p^{c(S) p^{n+m}} \cdot C_{n+m} = 0$。模掉 p^ε 后，我们得到一个 $R_{n+m+1}/p^\varepsilon R_{n+m+1}$-模的正合列

$$(R_{n+m+1}/p^\varepsilon R_{n+m+1}) \otimes_{R_{n+m}} S_{n+m} \to S_{n+m+1}/p^\varepsilon S_{n+m+1} \to C_{n+m}/p^\varepsilon C_{n+m} \to 0,$$

它与弗罗贝尼乌斯投影相容。取射影极限后，我们得到一个 $R_n^{s.\flat}$-模复形

$$\varprojlim_m \left((R_{n+m+1}/p^\varepsilon R_{n+m+1}) \otimes_{R_{n+m}} S_{n+m}\right) \to S_{n+1}^{s.\flat} \to \varprojlim_m \left(C_{n+m}/p^\varepsilon C_{n+m}\right),$$

其中右端项被 $(p^\flat)^{\frac{c(S)}{p^n}}$ 消去。还需证明存在一个典范同构

$$R_{n+1}^{s.\flat} \otimes_{R_n^{s.\flat}} S_n^{s.\flat} \cong \varprojlim_m \left((R_{n+m+1}/p^\varepsilon R_{n+m+1}) \otimes_{R_{n+m}} S_{n+m} \right).$$

由于 $R_{n+1}^{s.\flat}$ 是有限生成自由的 $R_n^{s.\flat}$-模，(1) 蕴含 $R_{n+1}^{s.\flat} \otimes_{R_n^{s.\flat}} S_n^{s.\flat}$ 是 $(p^\flat)^\varepsilon$-进完备的。因此，我们有典范映射

$$\begin{aligned}
R_{n+1}^{s.\flat} \otimes_{R_n^{s.\flat}} S_n^{s.\flat} &\xrightarrow{\cong} \varprojlim_m \left(R_{n+1}^{s.\flat} \otimes_{R_n^{s.\flat}} \frac{S_n^{s.\flat}}{(p^\flat)^{p^m\varepsilon} S_n^{s.\flat}} \right) \\
&\xrightarrow{(*)} \varprojlim_m \left(R_{n+1}^{s.\flat} \otimes_{R_n^{s.\flat}} \frac{S_{n+m}}{p^\varepsilon S_{n+m}} \right) \\
&\xrightarrow{\cong} \varprojlim_m \left(\frac{R_{n+1}^{s.\flat}}{(p^\flat)^{p^m\varepsilon} R_{n+1}^{s.\flat}} \otimes_{\frac{R_n^{s.\flat}}{(p^\flat)^{p^m\varepsilon} R_n^{s.\flat}}} \frac{S_{n+m}}{p^\varepsilon S_{n+m}} \right) \\
&\xrightarrow{\cong} \varprojlim_m \left(\frac{R_{n+m+1}}{p^\varepsilon R_{n+m+1}} \otimes_{\frac{R_{n+m}}{p^\varepsilon R_{n+m}}} \frac{S_{n+m}}{p^\varepsilon S_{n+m}} \right) \cong \varprojlim_m \left(\frac{R_{n+m+1}}{p^\varepsilon R_{n+m+1}} \otimes_{R_{n+m}} S_{n+m} \right),
\end{aligned}$$

其中映射 $(*)$ 是由 m 次投影 $\Phi_{n+m}^{(n)}\colon S_n^{s.\flat} \to S_{n+m}/p^\varepsilon S_{n+m}$ 所诱导的映射。由于 $R_{n+1}^{s.\flat}$ 是有限生成自由的 $R_n^{s.\flat}$-模，我们得出 $(*)$ 是一个同构（更一般的情形见定理 A.5 ）。[4]

(3) 可由 (2) 通过类似于定理 4.10 (2) 的证明论证得出，只需注意到典范同构

$$R_\infty^\flat \otimes_{R_n^{s.\flat}} S_n^{s.\flat} \xrightarrow{\cong} (R_\infty^{s.\flat} \otimes_{R_n^{s.\flat}} S_n^{s.\flat})^\wedge$$

由定理A.1 (1) 得到，其中$(-)^\wedge$ 表示 $(p^\flat)^\varepsilon$-进完备化 . □

现在通过验证 (d)，完成定理 4.6的证明。

定理 *4.6*的证明。 如有必要，我们将 N替换为一个更大的数，使得 $(N+1)\varepsilon \geq c$。于是，只需证明 0 次投影 $\Phi^{(N)}\colon S_N^{s.\flat} \to S_N/p^\varepsilon S_N$是满射。一般而言，若$f\colon A \to B$ 是一个环同态，且 $I \subseteq A$ 是一个理想，满足 $I^n B = (0)$ 对某个 $n > 0$成立，那么复合映射 $A \xrightarrow{f} B \to B/IB$ 的满射性 f蕴含 [5] 的满射性。因此，只需证明复合映射 $S_N^{s.\flat} \xrightarrow{\Phi^{(N)}} S_N/p^\varepsilon S_N \to S_N/p^{\varepsilon - \frac{c}{p^N}} S_N$是满射。根据交换图

$$\begin{array}{ccccc}
S_N^{s.\flat} & \xrightarrow{\Phi^{(N)}} & S_N/p^\varepsilon S_N & \longrightarrow & S_N/p^{\varepsilon - \frac{c}{p^N}} S_N \\
{\scriptstyle (p^\flat)^c}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & & & {\scriptstyle \cong}\downarrow{\scriptstyle p^{\frac{c}{p^N}}} \\
(p^\flat)^c S_N^{s.\flat} & \dashrightarrow^{\Phi^{(N)}} & & & p^{\frac{c}{p^N}} S_N/p^\varepsilon S_N \\
\cap & & & & \cap \\
S_N^{s.\flat} & & \xrightarrow[\Phi^{(N)}]{} & & S_N/p^\varepsilon S_N,
\end{array}$$

于是我们归结为 c 验证虚线映射是满射。只需证明以下 g.

[4]也可以利用 $S_n^{s.\flat}/(p^\flat)^{p^m\varepsilon} S_n^{s.\flat} \to S_{n+m}/p^\varepsilon S_{n+m}$ 的正规性来验证其单射性 S_{m+i}，对于 $i \geq 0$ (参见 [An06，4.5. Proposition (1)的证明[5]) 。注意， $B \subseteq f(A) + IB \subseteq f(A) + I^2 B \subseteq \cdots \subseteq f(A) + I^n B = f(A)$。

断言 4.12。 (i) $p^{\frac{c}{p^N}} S_N/p^\varepsilon S_N$ 属于像 $\Phi^{(N)}(S_N^{s.\flat})$。

(ii) 如果 x_N 模 $p^N S_N/p^\varepsilon S_N$ 是 $p^{\frac{c}{p^N}}$ $x = (x_m \text{ 模 } p^\varepsilon S_m)_{m\geq N} \in S_N^{s.\flat}$的像，那么 $x \in (p^\flat)^c S_N^{s.\flat}$。

断言的证明。 (i) 我们证明 $S_N/p^\varepsilon S_N$ — $p^{\frac{c}{p^N}}$ C = $\Phi^{(N)}$ $S_N^{s.\flat}$ →会湮 $R_N^{s.\flat} \to R_\infty^\flat$

灭余核： Cok(:)。只需沿忠实平坦态射作基变换后证明此结论（参见定理 A.3）。由定理 4.11(3)，余核

$$C' := \mathrm{Cok}(S_N^{s.\flat} \otimes_{R_N^{s.\flat}} R_\infty^\flat \to S_\infty^\flat)$$

被 $(p^\flat)^c$ 湮灭。另一方面，由于

$$(R_N/p^\varepsilon R_N) \otimes_{R_N^{s.\flat}} R_\infty^\flat \cong R_N^{s.\flat}/(p^\flat)^\varepsilon R_N^{s.\flat} \otimes_{R_N^{s.\flat}} R_\infty^\flat \cong R_\infty^{s.\flat}/(p^\flat)^\varepsilon R_\infty^{s.\flat} \cong R_\infty/p^\varepsilon R_\infty,$$

我们得到一个映射

$$\begin{aligned}(S_N/p^\varepsilon S_N) \otimes_{R_N^{s.\flat}} R_\infty^\flat &\cong S_N \otimes_{R_N} (R_N/p^\varepsilon R_N) \otimes_{R_N^{s.\flat}} R_\infty^\flat \\ &\cong S_N \otimes_{R_N} (R_\infty/p^\varepsilon R_\infty) \\ &\cong (S_N \otimes_{R_N} R_\infty) \otimes_{R_\infty} (R_\infty/p^\varepsilon R_\infty) \\ &\to S_\infty \otimes_{R_\infty} (R_\infty/p^\varepsilon R_\infty) \cong S_\infty/p^\varepsilon S_\infty.\end{aligned}$$

这些识别构成如下具有正合行的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & S_N^{s.\flat} \otimes_{R_N^{s.\flat}} R_\infty^\flat & \longrightarrow & S_\infty^\flat & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \Phi^{(N)}\otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi^{(N)}} & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & (S_N/p^\varepsilon S_N) \otimes_{R_N^{s.\flat}} R_\infty^\flat & \longrightarrow & S_\infty/p^\varepsilon S_\infty & \longrightarrow & C'' & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

其中我们定义 C'' 为余核。由于根据 Witt-完美几乎纯性定理 [NS22，定理 5，9]，蛇引理表明我们有一个满射$\mathrm{Ker}(C' \to C'') \twoheadrightarrow C \otimes_{R_N^{s.\flat}} R_\infty^\flat$。因此我们得到如下推论

$$(p^\flat)^c \cdot \mathrm{Ker}(C' \to C'') = 0 \Longrightarrow p^{\frac{c}{p^N}} \cdot (C \otimes_{R_N^{s.\flat}} R_\infty^\flat) = 0.$$

前者成立是因为 $(p^\flat)^c \cdot C' = 0$。

^{c} (ii) 取 $m \geq N$，并令 $y_m := x_m/p^{p^m} \in \mathrm{Frac}(S_m)$。由于 $x_N \in p^{p^N} S_N$，我们有

$$y_m^{p^m} = \frac{x_m^{p^m}}{p^c} \in \frac{x_N^{p^N}}{p^c} + p^{(N+1)\varepsilon - c} S_N \subset S_N \subset S_m.$$

由于 S_m 是正规的，我们得到 $y_m \in S_m$。因此 $x/(p^\flat)^c = (y_m \text{ 模 } p^\varepsilon S_m)_{m\geq N} \in S_N^{s.\flat}$，从而 $x \in (p^\flat)^c S_N^{s.\flat}$。$\diamondsuit$

定理 4.6 的证明至此完成。 □

Appendix A. Flatness of completions

众所周知，如果 R 是一个带有理想 $I \subset R$的诺特环，那么其 I-进完备化$\frown R \to R$ 是平坦的。在本附录中，我们将讨论对更一般的环而言的这种平坦性（特别是，与一个完备正则局部环相关联的完美塔的余极限的$\frown$$p$-进完备化 $R_\infty \to R_\infty$ ）。其主要思想基于 [An06，A.7. 引理]。为了发展这一理论

在最一般的设定下，我们考虑如下关于一对（A，I）的条件，该条件在[FKI，第 0 章，§7.4.(c)]中引入。

(APf) 对于任意有限生成的 A-模 M 以及任意有限生成的 A-子模 $N \subseteq M$，由 M 的 I-进滤过在 N 上诱导的滤过 $\{N \cap I^n M\}_{n\geq 0}$ 是 I-进的。

由 Artin–Rees 引理，若 A 是诺特的，则对任意理想 $I \subset A$，它满足 **(APf)** 。此外，若 V 是一个关于元素 $a \in \mathfrak{m}_V$ 的 a-进分离赋值环，其中 $\setminus\{0\}$，则对 $(V,(a))$ 满足 **(APf)** (参见 [FKI，第 0 章，例 8.5。14])。

引理 A.1。 设 A 是一个环，$I \subseteq A$ 是一个有限生成理想。假设 A 是 I-进完备的，且满足 **(APf)**。设 F 是一个平坦（分别地，忠实平坦） A-模。令 $(-)^\wedge$ 表示 I-进完备化。

(1) 对于任意有限表示的 A-模 M，典范映射

$$M \otimes_A \widehat{F} \to (M \otimes_A F)^\wedge$$

是一个同构。

(2) $\widehat{F}$ 是一个平坦（分别地，忠实平坦） A-模。

证明。 (1) 取一个有限表示

$$A^{\oplus m} \to A^{\oplus n} \to M \to 0,$$

并考虑如下具有正合行的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} A^{\oplus m} \otimes_A \widehat{F} & \longrightarrow & A^{\oplus n} \otimes_A \widehat{F} & \longrightarrow & M \otimes_A \widehat{F} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ (A^{\oplus m} \otimes_A F)^\wedge & \longrightarrow & (A^{\oplus n} \otimes_A F)^\wedge & \longrightarrow & (M \otimes_A F)^\wedge & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

这里第二行的正合性是 **(APf)** 的推论（参见 [FKI，第 0 章，命题 7.4。10]）。由于前两个竖直箭头显然是同构，第三个也同样是同构。

(2) 由于任意 A-模都同构于有限表现 A-模的一个归纳极限，它^只需证明函子 $- \otimes_A F$ 在有限表现 A-模的范畴上是正合的（相应地，忠实正合的）。鉴于(2)，这相当于证明函子$(- \otimes_A F)^\wedge$ 是正合的（相应地，忠实正合的），而这由 F 的假设以及**(APf)**得出。□

引理 A.2. 设$\{f_i\}_{i\in I}$: $\{A_i\}_{i\in I} \to \{B_i\}_{i\in I}$ 是由有向集 I标号的环的归纳系统的态射。若每个 f_i 是平坦的（相应地，忠实平坦的），则$\varinjlim$亦然

$$f_i\colon \varinjlim_{i\in I} A_i \to \varinjlim_{i\in I} B_i.$$

证明。 由于余核$(\varinjlim f_i) = \varinjlim$余核$(f_i)$，因此只需在“平坦”情形下证明该断言，这很容易；参见 [BouAC，第一章，§2.7，命题 9]。 □

引理 A.3 (参见 [An06，A.7. 引理])。 设 R 是一个环，且 $I \subseteq R$ 是一个有限生成理想。设 $\{R_i, t_i\}_{i\geq 0}$ 是一个环塔，满足 $R_0 = R$。假设对每个 $i \geq 0$，R_i 都是 I-进完备的，并满足 **(APf)**。若对每个 $R_i \to R_\infty$ ， $i \geq 0$都是平坦的（分别地，忠实平坦的），则$\widehat{R_\infty} \to R_\infty$也如此。

证明。 由定理 A.1 (2)， $R_i \to R_\infty$ 对每个 $i \geq 0$都是平坦（分别地，忠实平坦）。因此，$\widehat{R_\infty} \to R_\infty$ 由定理 A.2，也具有这一性质。 □

注记 A.4。 如果 R_∞ 是 I-进 Zariski 化的，那么 $R_\infty \to R_\infty$ 是平坦当且仅当它是忠实平坦（[FKI，第 0 章，命题 7.3。8]）。

最后，我们补充以下引理，讨论张量积与射影极限可交换的情形。

引理 *A.5*（参见 [*MSE*，*q*181004]）。设 A 为一个环。设 M 为一个有限表示的 A-模，且 $\{N_i\}_{i\in I}$ 为以有向集 I 为指标的 A-模的严格[6] 射影系统。若对任意 $i \in I$ 都有 $\mathrm{Tor}_1^A(M, N_i) = 0$（例如，$M$ 或每个 N_i 都是平坦的），则典范映射

$$M \otimes_A (\varprojlim_{i\in I} N_i) \to \varprojlim_{i\in I}(M \otimes_A N_i)$$

是一个同构。

证明。 取一个有限表示

$$A^{\oplus m} \xrightarrow{\varphi} A^{\oplus n} \xrightarrow{\pi} M \to 0,$$

并考虑具有正合行的交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
A^{\oplus m} \otimes_A (\varprojlim_{i\in I} N_i) & \longrightarrow & A^{\oplus n} \otimes_A (\varprojlim_{i\in I} N_i) & \longrightarrow & M \otimes_A (\varprojlim_{i\in I} N_i) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\varprojlim_{i\in I}(A^{\oplus m} \otimes_A N_i) & \longrightarrow & \varprojlim_{i\in I}(A^{\oplus n} \otimes_A N_i) & \longrightarrow & \varprojlim_{i\in I}(M \otimes_A N_i) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

这里，第二行的正合性源于 $\mathrm{Tor}_1^A(M, N_i) = 0$ 的消失，以及射影系统 $\{(\text{核 } \pi) \otimes_A N_i\}_{i\in I}$ 与 $\{(\text{核 } \varphi) \otimes_A N_i\}_{i\in I}$ 再次为严格这一事实。由于前两个竖直映射显然是同构，第三个也是同构。□

参考文献

[An06] F. Andreatta，广义范数环与广义（ϕ,Γ）-模，Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 39，（2006），599–647。[ALB20] J. Anschütz，A.-C. Le Bras，2 阶的 p-完备分圆迹，Ann. K-Theory 5(3)，（2020年），539–580。[BL95] A. Beauville，Y. Laszlo，下降引理，C.R. Acad. Sc. Paris 320，（1995），335–340。[BMS1] B. Bhatt，M. Morrow，P. Scholze，整 p-adic 霍奇理论，Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 128，（2018），219–397。[BouAC] N. Bourbaki，数学原理：交换代数。由法文译出。Hermann, Publishing Co., Reading, MA 等，1972。[ČS24] K. Česnavičius，P. Scholze，平坦上同调的纯性，Ann. of Math. (2) 199(1)，（2024），51–180。[EHS24] K. Eto，J. Horiuchi，K. Shimomoto，借助 Frobenius 和幺半群映射研究环的某些环论性质，Tokyo J. Mathematics 47，（2024），395–409。[Fa88] G. Faltings，p-adic 霍奇理论，J. Amer. Math. Soc. 1，（1988），255–299。[Fa02] G. Faltings，几乎 étale 扩张，《étale 上同调与算术应用》，II。Astérisque 279，（2002），185–270。[Ford] T. J. Ford，可分代数，Graduate Studies in Mathematics，183，American Math Society，2017。[FKI] K. Fujiwara，F. Kato，刚性几何基础 I，EMS Monographs in Mathematics，2018。[INS25] S. Ishiro，K. Nakazato，K. Shimomoto，完美塔及其倾斜：及其在局部对数正则环的 étale 上同调群中的应用，Algebra Number Theory 19(12)，（2025年），2307–2358。

[6]由有向集 I 标号的范畴中诸对象的射影系统 $\{X_i, f_{ij}\colon X_j \to X_i\}_{i\in I}$ 称为严格，如果对 $i \le j$ 而言所有转移映射 f_{ij} 都是满态射。

[IS25] S . Ishiro, K . Shimomoto, δ-环、完美塔及极限 *Cohen-Macaulay* 序列，预印本，（2025年） . arXiv:2509.06527.[Ish26] R. Ishizuka，由棱镜生成的完美塔，即将在名古屋数学杂志第261卷刊出（2026年）。[MSE] 数学 Stack Exchange， https://math.stackexchange.com。[Mat] H. Matsumura，《交换环论》，剑桥大学出版社，第8卷，1986年。[NS22] K. Nakazato、K. Shimomoto，Tate 环的有限 étale 扩张与完美拟代数的去完备化，《代数杂志》第589卷（2022年），114–158。[SW] P. Scholze、J. Weinstein，《Berkeley Lectures on p-adic Geometry》，《数学年刊研究》第207卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿（新泽西州），2020年。[Sta] Stacks Project 作者，Stacks Project， http://stacks.math.columbia.edu/browse。

东京科学大学数学系，日本东京目黑区大冈山2-12-1，邮编152-8551电子邮箱： hazuki0694@gmail.com

国立高等专门学校机构群马工专，日本群马县前桥市鸟羽町580，邮编371-8530电子邮箱：shinnosukeishiro@gmail.com

东京科学大学数学系，日本东京目黑区大冈山2-12-1，邮编152-8551电子邮箱： shimomotokazuma@gmail.com