arXiv:2602.21894v1 [math.NT] 25 Feb 2026

数域的环合成调节子

TESS BOUIS* 和 q-uentin gazda†

我们构造了数域的 p-进调节子的 q-变形，称为环合成调节子，其构造以 Garoufalidis–Scholze–Wheeler–Zagier 的 Habiro 环为基础。我们构造中的关键新要素是对棱柱上同调中 Sulyma 范数映射的精化，它在不同素数 p 处插值经典幂运算与弗罗贝尼乌斯映射。此外，我们计算了环合成调节子在形如 $1-\zeta$ 的单位处的取值，其中 ζ 是一个单位根。

目录

1 引言 **1**

2 q-Witt 向量上的范数映射 **5**
2.1 Witt 向量回顾.5 2.2 q-Witt 向量回顾.6 2.3 关于 q-幽灵映射的另一种方法.7 2.4 q-Witt 向量上的范数映射.8 2.5 圆分环.10

3 分圆对数 **13**
3.1 数域的 Habiro 环上的 Frobenius 映射.13 3.2 分圆对数.15

4 环合成调节子 **20**
4.1 数域的环合成上同调.20 4.2 第一陈类.22 4.3 第一 q-多对数.25

1 引言

受新兴的 p-adicL-函数理论中的问题启发，Leopoldt [Leo62] 定义了数域 p的 -adic 调节子映射 K

$$\mathrm{reg}_p : \mathscr{O}_{\mathrm{K}}^{\times} \hookrightarrow \prod_{\sigma\in\mathrm{Hom}(\mathrm{K},\mathbb{C}_p)} \mathbb{C}_p^{\times} \xrightarrow{\log_p} \prod_{\sigma\in\mathrm{Hom}(\mathrm{K},\mathbb{C}_p)} \mathbb{C}_p$$

作为经典调节子映射的非阿基米德类比。这个 p-adic 调节子通过 pColmez 证明的 -adic 类数公式 [Col88]，尤其与 $s=1$ 处的 p 数域 K 的 -adic Dedekind ζ 函数的留数有关。Leopoldt 猜想 [Leo62、Leo75], 断言 -adic 调节子映射的像是秩为 p的格 r_1+r_2-1，但除K 是 $\mathbb{Q}$ 的阿贝尔扩张或某个虚二次数域的扩张的情形外，猜想仍未解决（综述见 [NSW08，第 X 章。3] ）。

Beilinson 开创的现代调节子理论 [Beĭ84], 将数域的调节子映射重新表述为映射到 Deligne 上同调的高阶陈类映射。在 p-adic 框架下，Kato 首先指出 [Kat87，注释 3.5] 合成上同调应当是 Deligne 上同调的一种良好类比，而这种针对 p-adic 调节子的上同调方法

*高等研究院，普林斯顿，tbouis@ias.edu
†索邦大学和巴黎西岱大学，法国国家科学研究中心，雅克-阿达马数学研究所—巴黎右岸几何研究所，75005 巴黎，quentin@gazda.fr

Gros 和 Kurihara 成功运用这一方法 [Gro90，Gro94]，开启了对 p-adic Beilinson 猜想的研究。

回顾合成上同调最初由 Fontaine–Messing [FM87]借助于p-进 de Rham 上同调引入，并且其定义的一个性质良好的整精细化由 Bhatt–Morrow–Scholze [BMS19] 与 Bhatt–Scholze [BS22]借助于棱柱上同调引入。按照后一种方法，p-进、数域K的调节映射则由合成上同调第一陈类诱导

$$c_1^{\mathrm{syn}} : \mathbb{G}_m(\mathrm{R}) \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\mathrm{syn}}(\mathrm{R}, \mathbb{Z}_p(1))$$

R:= $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}$ 的，其中 R 的权一合成复形借助 R 的 Breuil–Kisin 扭变的 $\mathbb{\Delta}_{\mathrm{R}}\{1\}$ 与 Nygaard 滤过的 $\mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathbb{\Delta}_{\mathrm{R}}\{1\}$ 棱柱上同调，由

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{syn}}(\mathrm{R}, \mathbb{Z}_p(1)) := \mathrm{fib}\left(\mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathbb{\Delta}_{\mathrm{R}}\{1\} \xrightarrow{\mathrm{can}-\mathrm{Frob}_p^{\mathbb{\Delta}}\{1\}} \mathbb{\Delta}_{\mathrm{R}}\{1\}\right).$$

本文的目标是引入并研究这一理论的去完备精细化（即，上同调群并非 p-完备的情形），这尤其使我们能够在不同的素数 p 之间对 p-进调节映射进行插值。

定义 1.1 (环合成上同调；见定义 4.7)。设 K 为一个数域，Δ_{K}为 K 的判别式，R 为 étale $\mathbb{Z}$-代数 $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}[\Delta^{-1}{}_{\mathrm{K}}]$，，而 $d \geqslant 2$ 为一个整数。R 的环合成复形为复形

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{CycSyn}}(\mathrm{R}, \mathbb{Z}(1)^{(d)}) := \left[\mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R}}\{1\} \xrightarrow{\mathrm{can}-\mathrm{Frob}_q^{\mathrm{cyc}}\{1\}} \mathscr{C}_{\mathrm{R}}^{(d)}\{1\}\right]$$

它位于导出范畴 $\mathscr{D}(\mathbb{Z})$ 中，其中 $\mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R}}\{1\}$ 和 $\mathscr{C}^{(d)}{}_{\mathrm{R}}\ \{1\}$ 是 $\mathbb{Z}[q]$-模，由棱柱对象 $\mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathbb{\Delta}_{\mathrm{R}}\{1\}$ 和 $\mathbb{\Delta}_{\mathrm{R}}\{1\}$的“去完备化版本”构造而成。

为定义定义 1.1中出现的对象，我们关键地用到了近期由 $\mathscr{H}_{\mathrm{R}}$ Garoufalidis–Scholze–Wheeler–Zagier 提出的 Habiro 环定义 [GSWZ24],，它可以看作是“在单位根处的单变量 q 解析函数”构成的环。例如，$\mathscr{H}_{\mathbb{Z}} := \lim^{m\geqslant 1} \mathbb{Z}[q]^{\wedge}_{(q^m-1)}$ 其中，完备化的极限取遍按整除关系偏序的整数集合 $m \geqslant 1$。关于这些 Habiro 环的定义，参见第 3.1 节；关于 Habiro 上同调更一般理论的最新进展，参见 [Sch25、Wag25、GW25]。

更准确地说，我们引入交换环 R 的圆分环 $\mathscr{C}_{\mathrm{R}}$ 这一概念，将其视为 Habiro 环 $\mathscr{H}_{\mathrm{R}}$ 的简化版本（例 2.23 (2)），并以 Wagner [Wag24]发展的大 q-Witt 向量理论为基础。例如，$\mathscr{C}_{\mathbb{Z}} := \lim_{m\geqslant 1} \mathbb{Z}[q]/(q^m-1)$。这些圆分环 $\mathscr{C}_{\mathrm{R}}$ 是交换 $\mathbb{Z}[q]$-代数；我们还定义其对应的 $\mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R}}\{1\}$ 和 $\mathscr{C}^{(d)}{}_{\mathrm{R}}\ \{1\}$，将其作为 $\mathscr{C}_{\mathrm{R}}$-模，并使之与 Nygaard 滤过棱柱复形和 Breuil–Kisin 扭 twist 棱柱复形的定义相容 [BMS19, BS22, BL22, AKN23]。

定理 A （第一陈类；见第 4.1节和第 4.2节）。设 K 为一个数域，R 为 *étale* $\mathbb{Z}$-代数 $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}[\Delta^{-1}]_{\mathrm{K}}$。对于每个素数 p，都有一个自然的 p-adic 实现映射

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{CycSyn}}(\mathrm{R}, \mathbb{Z}(1)^{(p)}) \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_{q\mathrm{syn}}(\mathrm{R}, \mathbb{Z}_p(1))$$

到相对于 q-棱柱R $(\mathbb{Z}_p[\![q-1]\!][p]_q)$的合成上同调。此外，对每个整数 $d \geqslant 2$，都存在一个自然的环合成上同调第一陈类

$$c_1^{\mathrm{CycSyn}} : \mathbb{G}_m(\mathrm{R})[-1] \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{CycSyn}}(\mathrm{R}, \mathbb{Z}(1)^{(d)})$$

which 恢复了在 $d = p$ 下，并在与先前的 p-进实现映射复合之后，*the synt*合成上同调第一陈类R。

根据 Bhatt–Lurie 的工作 [BL22], 整合成上同调理论配备了一套自然的陈类理论，它建立在他们提出的棱柱对数概念之上 log$\mathbb{\Delta}$。Mao 最近提出了他们构造的一种导出精化 dlog$\mathbb{\Delta}$ [Mao24]，我们也类似地定义了分圆对数

$$\mathrm{dlog}_{\mathrm{cyc}} : \mathbb{G}_m(\mathrm{R})[-1] \longrightarrow \mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R}}\{1\}$$

用于构造定理A中的环合成上同调第一陈类。定义这一分圆对数的关键，是对 Sulyma 在棱柱上同调中给出的范数映射作精化 [Sul23，Mao24]，我们将其称为分圆范数（命题2.20）。

注意，尽管可以完全用 $\mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R}}\{1\}$ 和 $\mathscr{C}_{\mathrm{R}}\{1\}$ 的q-Witt 向量来定义这些对象，但 [Wag24]，我们确实需要使用 [GSWZ24、Wag25] 的 Habiro 环来定义前面介绍的分圆对数（构造3.15）。相关地，可以证明，这个分圆对数无法提升为一种非平凡的 Habiro 对数概念（注3.19），这也是我们选择在圆分环层面而非 Habiro 环层面开展研究的主要原因。

借助这些上同调构造，我们现在回到促使我们研究这些调节子的数论问题。在 p-adic 的情形下，合成上同调的一个重要应用是 Kato 对显式互反律的上同调诠释 [Kat91]。在本文中，Kato 特别给出了基本表达式

$$c_1^{\mathrm{syn}} : u \longmapsto \frac{1}{p}\log\left(\frac{u^p}{\mathrm{Frob}_p(u)}\right) \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{syn}}(\mathrm{R}, \mathbb{Z}_p(1))$$

关于单位的合成上同调第一陈类 $u \in \mathrm{R}^\times$ （[Kat91，推论 2.9]，另见 [Gro90，命题 4.1]）。以下结果是我们这一语境中的类似计算。

定理 B （见推论4.18）。 设K 为一个数域，R 为 *étale* $\mathbb{Z}$-代数$\mathscr{O}_{\mathrm{K}}[\Delta_{\mathrm{K}}^{-1}]$，且$d \geqslant 2$ 为一个整数。对每个单位 $u \in \mathrm{R}^\times$，在 u 处的环合成上同调第一陈类由下式给出

$$c_1^{\mathrm{CycSyn}} : u \longmapsto \frac{1}{d}\log\left(\frac{\tilde{\Pi}_d(\tilde{u})}{\mathrm{Frob}_d^{\mathrm{Hab}}(\tilde{u})}\right) \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{CycSyn}}(\mathrm{R}, \mathbb{Z}(1)^{(d)})$$

其中 $\tilde{\Pi}_d$ 是一个 q-形变，所形变的是 d^{th} 幂映射（命题 *3.17*），弗罗贝尼乌斯$_d^{\mathrm{Hab}}$是 d^{th} *Habiro Frobenius*（构造 *3.7*），且 $\tilde{u} := (\Pi_m^{\mathrm{Hab}}(u))_{m\geqslant 1}$ 是任意一列 *Habiro* 提升 $\Pi_m^{\mathrm{Hab}}(u)$，它们位于$\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}/(q^m-1)^2$ 之中，这些提升是分圆范数 $\Pi_m(u) \in \mathscr{H}_{\mathrm{R},m}/(q^m-1)$的提升，而该分圆范数属于 u （命题 *2.20*）。

展开定义后，定理 B归结为构造所需形式的同伦，使其模 q^m-1 成立，并且在不同整数 $m \geqslant 1$之间彼此相容。我们在构造 4.12中完成这一工作；此前，我们先在第 R 节 3.1介绍 Habiro 环上的相关 Frobenius 映射。

尽管对于完全一般的计算而言，前面给出的（圆分）合成上同调第一陈类公式略显棘手，但在分圆单位子群上可以将其写得更明确，即在由形如 $1-\zeta \in \mathrm{K}^\times$ 的元素生成的子群上，其中 ζ 是一个单位根。关于分圆单位的综述，参见 [Was97，第 8] 章；这里只指出，分圆单位构成圆分域单位群的一个有限指数子群。

在调节子的背景下，Deligne 构造的混合霍奇–泰特结构变分 $\mathscr{L}og^{\mathrm{H}}$ 于 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0,1,\infty\}$，即所谓的 多对数变分，在单位根处分裂 [Del89]。更具体地说，单位根处的这一特殊现象意味着第一多对数函数的特殊值

$$\mathrm{Li}_1(z) := \sum_{k\geqslant 1} \frac{z^k}{k}$$

在单位根处可以看作权一 Deligne 上同调中的自然类 [BD94，HW98]。类似的 p关于多重对数的 -进故事由 Coleman 开创 [Col82] （另见 [Del89，3。2]），他尤其定义了第一个 p-进多重对数函数

$$\mathrm{Li}_1^{(p)}(z) := \sum_{\substack{k\geqslant 1\\ p\nmid k}} \frac{z^k}{k}$$

其在单位根处的特殊值后来被证明自然地出现在权一合成上同调的类中 [Gro90]。

鉴于单位根在 Habiro 上同调中扮演着举足轻重的角色，以下结果可视为一次尝试，旨在更好地理解多重对数与分圆单位之间的关系。

定理C（第一 q-多重对数作为分圆合痕陈类；见定理 4.25）。 设 K 是一个数域，R 是 *étale* $\mathbb{Z}$-代数 $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}[\Delta_{\mathrm{K}}^{-1}]$，且 $d \geqslant 2$ 是一个整数。对于每个单位根$\zeta \in \mathrm{R} \setminus \{\pm 1\}$，其在 $1-\zeta \in \mathrm{R}^{\times}$ 处的环合成上同调第一陈类由下式给出

$$c_1^{\mathrm{CycSyn}} : 1-\zeta \longmapsto -\mathrm{Li}_1^{(d)}([\zeta])_q \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{CycSyn}}(\mathrm{R}, \mathbb{Z}(1)^{(d)})$$

其中

$$\mathrm{Li}_1^{(d)}(z)_q := \sum_{\substack{k \geqslant 1 \\ d \nmid k}} \frac{z^k}{[k]_q}$$

是首个 q多对数函数，可在适当意义下视为收敛的 q幂级数（第 *4.3* 节），而 $[\zeta]$ 是 ζ 的分圆范数的 *Habiro* 提升的自然序列（记号 *4.20*）。

特别地，通过定理 p 的 A-进实现映射，定理 C 的环合成上同调类也诱导出自然的 q-多对数类，它们属于相对于 R 的 q-棱柱的合成上同调。定理 C 的证明主要依赖于这样一个事实：分圆单位 u 存在自然的显式提升 $\tilde{u}$ 到 Habiro 环中，由此可以计算定理 B中的 Habiro Frobenius。

最后，我们以提及两个进一步的潜在研究方向来结束本引言。首先，可以将定义 1.1 中针对各种 $d \geqslant 2$ 构造的环合成复形组装成一个非平凡的阿贝尔群复形。所得的环合成复形计算了 Tate对象在某个 $\mathscr{C}_{\mathrm{R}}$-模范畴中的扩张，其中这些模配备了相容的 d^{th} Frobenius 映射，对所有整数 $d \geqslant 2$ 均如此。第二位作者将在本文的后记中讨论这一现象 [Gaz26]。

此外，我们预期，这里构造的第一个分圆合痕陈类应当属于更一般的高阶陈类理论，该理论将数域的高阶K群、高权重的分圆合痕复形以及更高阶的 q多重对数联系起来。尽管这类一般理论目前似乎仍遥不可及，我们预期，Habiro 上同调理论的持续发展或许能为这一方向的进一步进展提供启示。

记号。

我们用 Δ_{K} 表示数域 K 的判别式。整数 $m \geqslant 1$ 的 q类比 $1+q+\cdots+q^{m-1} \in \mathbb{Z}[q]$记作 $[m]_q$。对于每个整数 $e \geqslant 1$，我们用 $\Phi_e(q) \in \mathbb{Z}[q]$ 表示e^{th} 分圆多项式。给定一个整数 $m \geqslant 1$ 和一个素数 p，我们用 $v_p(m)$表示 m的 p进赋值。给定整数 $a, b \geqslant 1$，我们用(a,b)（分别用 $[a,b]$）表示 a 和 b的最大公因数（分别表示最小公倍数）。给定一个交换环 R，我们用 $\mathscr{D}$(R)表示 R-模的导出 ∞ 范畴。关于 Λ-环的定义和基本性质，参见 [AT69 的 I.1 节和 I.4] 节。若一个 Λ-环 R 的 Adams 运算$\psi^n : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ 均为同构，则称 R 为完美的。

最后，固定一个整数 $\mathrm{N} \geqslant 1$，在本文余下部分中，它表示一个将在我们的构造中舍弃的素数有限集。形如 $\lim_{m \geqslant 1}$ 的极限通常取遍整数集 $m \geqslant 1$，其中的整数与 N (即，$(m, \mathrm{N}) = 1$) 按整除关系构成偏序集。整数 N 的选择只有在第 4节中才会变得重要，因为届时我们需要单位根 $\zeta \in \mathrm{R}$ 的阶整除 N这一事实；在此之前，读者可以假定 $\mathrm{N} = 1$。

致谢。

我们谨向 Michel Gros、Peter Scholze、Ferdinand Wagner 和 Campbell Wheeler 致谢，感谢他们围绕本项目开展的诸多启发性且富有洞见的讨论。本项目获得了 SFB 1085 高阶不变量、高等研究院和 Simons 基金会的资助。本工作也标志着法国国家研究署项目 ANR-25-CE40-3307-01 AlKtraZ：代数K理论、迹映射与 *Zagier* 猜想的启动，我们两位作者均为该项目成员。我们很高兴向法国国家研究署和匿名评审专家表达谢意，感谢他们对本项目给予的宝贵支持。

2 q-Witt 向量上的范数映射

本节将介绍后续章节所需的大 q-Witt 向量工具。更具体地说，我们构造交换环的大 q-Witt 向量上的范数映射（第 2.4 节），遵循 Angeltveit 关于经典大 Witt 向量的类似理论 [Ang 15]，并引入圆分环和分圆 Frobenius 的概念（第 2.5 节）。

2.1 Witt 向量回顾

在本小节中，我们回顾大 Witt 向量的经典理论，更详尽的综述请参见 [Hes15，第 1] 节。

设 R 是一个交换环。给定一个整数 $m \geqslant 1$， m-截断大 *Witt* 向量 $\mathbb{W}_m(\mathrm{R})$，其属于 R，是一个交换环，其特征[1] 为它与集合$\prod_{e|m}\mathrm{R}$抽象同构，且映射

$$\mathrm{gh} : \mathbb{W}_m(\mathrm{R}) \longrightarrow \prod_{e|m} \mathrm{R}, \quad x := (x_e)_{e|m} \longmapsto (\mathrm{gh}_e(x))_{e|m} := \left(\sum_{d|e} d x_d^{e/d} \right)_{e|m}$$

其中目标上的交换环结构是按分量定义的，该映射是一个环同态。映射 $\mathrm{gh}_e : \mathbb{W}_m(\mathrm{R}) \to \mathrm{R}$ 称为 e^{th} 幽灵坐标[2] （而映射$\mathbb{W}_m(\mathrm{R}) \to \mathrm{R}$，$(x_e)_{e|m} \mapsto x_e$ 称为 e^{th} *Witt* 坐标）。

Bi大 Witt 向量通过以下重要引理与 Frobenius 提升相关（[引理 2.1 5, Lem（1]）。

引理 2.1（Dwork 引理）。设R 是一个交换环，且 $m \geqslant 1$ 是一个整数。假设对每个整除 p 的素数 m，都存在一个环同态 $\varphi_p : \mathrm{R} \to \mathrm{R}/p^{v_p(m)}\mathrm{R}$，使得 $\varphi_p(x) \equiv x^p$ 模 $p\mathrm{R}$。[3] 那么，对每个元素 $(x_e)_{e|m} \in \prod_{e|m}\mathrm{R}$，以下条件等价：

(1) $(x_e)_{e|m} \in \prod_{e|m}\mathrm{R}$ 属于幽灵映射gh的像；

(2) 对每个整除 m 的素数 p 以及每个满足 $p|e|m$的整数 $e \geqslant 1$，都有$x_e \equiv \varphi_p(x_{e/p})$ 模 $p^{v_p(e)}\mathrm{R}$。

定义 2.2（大 Witt 向量）。设 R 是一个交换环。给定满足 $m|m'$的整数 m，$m' \geqslant 1$，存在一个自然的限制映射，其定义于交换环

$$\mathrm{R}_{m'/m} : \mathbb{W}_{m'}(\mathrm{R}) \longrightarrow \mathbb{W}_m(\mathrm{R}), \quad (x_e)_{e|m'} \longmapsto (x_e)_{e|m},$$

而 R 的大 *Witt* 向量 $\mathbb{W}(\mathrm{R})$ 构成交换环

$$\mathbb{W}(\mathrm{R}) := \lim_{m \geqslant 1} \mathbb{W}_m(\mathrm{R})$$

其中转移映射由这些限制映射给出。类似地，若将范围限制为整数$m \geqslant 1$，这些整数是给定素数 p 的幂，则此极限定义了 R 的 p-典型 *Witt* 向量环。

构造 2.3（Frobenius 映射与 Verschiebung）。设 R 为交换环。给定满足 $m|m'$ 的整数m，$m' \geqslant 1$，以及 $d := \frac{m'}{m}$，还存在自然的*Frobenius* 映射与 *Verschiebung* 映射

$$\mathrm{F}_d : \mathbb{W}_{m'}(\mathrm{R}) \longrightarrow \mathbb{W}_m(\mathrm{R}) \qquad \mathrm{V}_d : \mathbb{W}_m(\mathrm{R}) \longrightarrow \mathbb{W}_{m'}(\mathrm{R})$$

分别是交换环之间以及加法阿贝尔群之间的映射。这些映射在幽灵坐标中表示为 $\mathrm{F}_d : (x_e)_{e|m'} \mapsto (x_{de})_{e|m}$ 和 $\mathrm{V}_d : (x_e)_{e|m} \mapsto (d x_{\frac{e}{d}} \mathbb{1}_{d|e})_{e|m'}$。它们满足关系 $\mathrm{F}_d \circ \mathrm{V}_d = d$，并且对每个与 d 互素的整数 $d' \geqslant 1$，都有 $\mathrm{F}_d \circ \mathrm{V}_{d'} = \mathrm{V}_{d'} \circ \mathrm{F}_d$。

[1]这确实刻画了 $\mathbb{W}_m(\mathrm{R})$，这是引理 2.1 的推论。[2]之所以采用这一术语，是因为对于每个平坦$\mathbb{Z}$-代数 R（或稍一般地，对于每个对每个整除 m 的素数 p 都是 p-挠无关的交换环 R），幽灵映射 $\mathrm{gh} : \mathbb{W}_m(\mathrm{R}) \to \prod_{e|m}\mathrm{R}$ 都是单射。[3]陈述 [Hes15，引理 1.1] 时采用了稍强的假设，即存在一个环同态 $\varphi_p : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$，提升 R 的 Frobenius 自同态。然而，[Hes15，引理 1.1] 的证明很容易调整以适用于我们的情形，而这种情形的优点是涵盖了所有光滑的 $\mathbb{Z}$-代数。

注 2.4. 大 Witt 向量 $\mathbb{W}_m(\mathrm{R})$ 交换环 R 对应于R 的大 de Rham–Witt 复形的第零项R ([Hes15])。

注记 2.5. 极限 $\lim_{m\geqslant 1}\mathbb{W}_m(\mathrm{R})$ 沿构造 2.3 的 Frobenius 映射通常没有名称。然而，当 $\mathrm{R}:=\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}$ 是 p-进复数的整数环，且该极限取遍素数 p的各次幂时，这一构造对应于 Fontaine 的周期环 $\mathrm{A}_{\mathrm{inf}}$ 在 p-进 Hodge 理论中（[BMS18，引理 3.2]）。

记号 2.6 (Teichmüller 提升)。 设 R 为交换环，且 $m\geqslant 1$ 为整数。R 上的*Teichmüller* 提升 是乘法幺半群的自然态射

$$\Pi_m:\mathrm{R}\longrightarrow\mathbb{W}_m(\mathrm{R})$$

由 $x\mapsto(x^{m/e})_{e|m}$ 在幽灵坐标下给出。[4] 特别地，Teichmüller 提升是第一幽灵坐标 $\mathrm{gh}_1:\ \mathbb{W}_m(\mathrm{R})\to\mathrm{R}$ 的一个截面。

2.2 q-Witt 向量回顾

在本小节中，我们回顾 Wagner 关于 q-Witt 向量的理论，其引入见于 [Wag24第 2] 节。

定义 2.7 （大 q-Witt 向量）。 设 R 为交换环。对每个整数 $m\geqslant 1$，m截断大 q-*Witt* 向量 q-$\mathbb{W}_m$(R) （属于 R）是交换 $\mathbb{Z}[q]$-代数

$$q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R}):=\mathbb{W}_m(\mathrm{R})[q]/\mathbb{I}_m$$

其中 $\mathbb{I}_m\subseteq\mathbb{W}_m(R)[q]$ 是由以下元素生成的理想

（i）(q^e-1)im$(\mathrm{V}^{m/e})$，对每一个整数 $e\geqslant 1$ （满足 $e|m$），以及

（ii）im$([e/d]_{q^d}\mathrm{V}^{m/e}-\mathrm{V}^{m/d}\circ\mathrm{F}^{e/d})$，对所有整数 $d,\ e\geqslant 1$ （满足 $d|e|m$）。

例 2.8. 设 $m\geqslant 1$ 是一个整数。在以下情形中，R 的大 q-Witt 向量可以明确写出。

(1) (R $=\mathbb{Z}$) q-$\mathbb{W}_m(\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}[q]/(q^m-1)$. 更一般地，对于每个完美 Λ-环 R（例如，任意素数 p对应的 R $=\mathbb{Z}_p$、任意交换 $\mathbb{Q}$-代数 R、任意完美棱镜 R，或 R $=\mathbb{Z}[\mathrm{T}^{\mathbb{Q}}]$），$q$-$\mathbb{W}_m$(R) $\cong$ R$[q]/(q^m-1)$ ([Wag24，推论 2.37])。
(2) (R $=\mathscr{O}_{\mathrm{K}}[\Delta^{-1}]_{\mathrm{K}}$) q-$\mathbb{W}_m(\mathrm{R})\cong\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}/(q^m-1)$ 对于每个数域 K，其中 R $=\mathscr{O}_{\mathrm{K}}[\Delta^{-1}]_{\mathrm{K}}$ 且 $\mathscr{H}_{\mathrm{R},\ m}$ 是 m截断阶数为 - 的 Habiro 环 R ([Wag25，定理 2.9])。
(3) (R $=\mathbb{Z}[\mathrm{T}]$) q-$\mathbb{W}_m(\mathbb{Z}[\mathrm{T}])\cong\sum_{e|m}[e]_{q^{m/e}}\mathbb{Z}[\mathrm{T}^{m/e},q]/(q^m-1)\ \subseteq\mathbb{Z}[\mathrm{T}\ q]/(q^m-1)$ ([Wag24，命题 2.36]）。等价地，q-$\mathbb{W}_m$(R)可自然地识别为算子

$$\mathbb{Z}[\mathrm{T},q]/(q^m-1)\longrightarrow\mathbb{Z}[\mathrm{T},q]/(q^m-1),\quad f(\mathrm{T},q)\longmapsto(q-1)\nabla_q(f(\mathrm{T},q))$$

其中 $\nabla_q(f(\mathrm{T}\ q))$是 q-导数 $f(\mathrm{T}\ q)$（参见 [Wag24，定理 4.27]，其中给出了在 $(q-1)$-完备化之后的类似计算）。

构造 2.9 （Frobenius 映射和 Verschiebung）。 设 R 为一个交换环。给定满足 $m|m'$ 的整数m, $m'\geqslant 1$，以及 $d:=\frac{m'}{m}$，R 的大 q-Witt 向量自然带有*Frobenius* 和 *Verschiebung* 映射

$$\mathrm{F}_d:q\text{-}\mathbb{W}_{m'}(\mathrm{R})\longrightarrow q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R})\qquad\mathrm{V}_d:q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R})\longrightarrow q\text{-}\mathbb{W}_{m'}(\mathrm{R})$$

的 $\mathbb{Z}[q]$-代数和 $\mathbb{Z}[q]$-模分别为（[Wag24，引理 2 的证明。9]）。它们由其 $\mathbb{Z}[q]$-线性以及与大 Witt 向量上的 Frobenius 和 Verschiebung 映射的相容性（构造 2.3）刻画。它们满足关系式 $\mathrm{F}_d\circ\mathrm{V}_d=d$ 以及$\mathrm{V}_d\circ\mathrm{F}_d=[d]_{q^m}$。

[4]Th x 的 Teichmüller 提升通常记作 $[x]$。我们选择记号 $\Pi_m(x)$，以避免可能的混淆 on with q-整数 $[k]_q\in\mathbb{Z}[q]$ 的记号。

注 2.10. 交换环 R 的大 q-Witt 向量 q-$\mathbb{W}_m$(R)，连同其 Frobenius 与 Verschiebung 映射，满足一个泛性质：即，$\mathbb{Z}[q]$-代数系统 $(q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R}))_{m\geqslant 1}$ 是 R 上的初始 q-FV-系统（[Wag24，定义 2.8 与引理 2.9]）。另请注意，对每个整数 $m \geqslant 1$，我们有 $q^m - 1 \in \mathbb{I}_m$（定义 2.7 (i)，针对 $e = m$），从而q-$\mathbb{W}_m$(R) 是一个交换 $\mathbb{Z}[q]/(q^m - 1)$-代数。

警告 2.11。尽管名称如此，大 q-Witt 向量并不是大 q-Witt 向量的变形，也就是说，交换环的自然态射 $\mathbb{W}_m(\mathrm{R}) \to q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R})/(q-1)$ 一般而言并非同构（[Wag24，注 2。11]）。

注 2.12。定义 2.2 中的限制映射 $\mathrm{R}^{m'/m} : \mathbb{W}_{m'}(\mathrm{R}) \to \mathbb{W}_m(\mathrm{R})$ 对一般交换环 R 并不能扩展为交换 $\mathbb{Z}[q]$-代数之间的态射 $\mathrm{R}^{m'/m}$：q-$\mathbb{W}_{m'}$(R) $\to$ q-$\mathbb{W}_m$(R)（[Wag24，2.14]）。特别是，无法像定义 2.2 那样定义大 q-Witt 向量环q-$\mathbb{W}$(R) := $\lim_{m\geqslant 1} q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R})$。因此，鉴于注 2.5 以及 [Wag25 第 2.2] 节中建立的 q-Witt 向量与 Habiro 环之间的关系，本文将转而考虑沿构造 2.9 中的 Frobenius 映射取极限 $\lim_{m\geqslant 1} q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R})$，通常将其称为圆分环（第 2.5 节）。

2.3 q-幽灵映射的另一种方法

在 [Wag24 中，2.13], Wagner 构造了 q-大 q-Witt 向量的幽灵映射，将其表示为若干 Verschiebung 映射之像的某个显式商。在本小节中，我们利用大 q-Witt 向量的泛性质（注释 2.14），给出这些 q-幽灵映射的另一种描述（定义2.10）。

构造 2.13 (圆分 q-FV 系统)。设 R 是一个交换环。这里我们在交换 q-代数系统 R 上定义一个 $\mathbb{Z}[q]$-FV 系统$(\prod_{e|m}\mathrm{R}[q]/\Phi_e(q))_{m\geqslant 1}$，其含义参见 [Wag24，定义 2.8]。为此，对于每个整数 $m \geqslant 1$，令

$$\mathbb{W}_m(\mathrm{R})[q]/(q^m-1) \longrightarrow \prod_{e|m} \mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)$$

是交换 $\mathbb{Z}[q]$-代数的态射，其特征是它由以下方式给出 y

$$x \longmapsto (\mathrm{gh}_{m/e}(x))_{e|m}$$

在子环 $\mathbb{W}_m(\mathrm{R}) \subseteq \mathbb{W}_m(\mathrm{R})[q]/(q^m-1)$。[5] 给定整数 m，$m' \geqslant 1$ 满足 $m|m'$，并且$d := \frac{m'}{m}$，令 —

$$\mathrm{F}_d : \prod_{e|m'} \mathrm{R}[q]/\Phi_e(q) \longrightarrow \prod_{e|m} \mathrm{R}[q]/\Phi_e(q) \qquad \mathrm{V}_d : \prod_{e|m} \mathrm{R}[q]/\Phi_e(q) \longrightarrow \prod_{e|m'} \mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)$$

分别为由 $\mathrm{F}_d : (c_e(q))_{e|m'} \mapsto (c_e(q))_{e|m}$ 和 $\mathrm{V}_d : (c_e(q))_{e|m} \mapsto (dc_e(q)\mathbb{1}_{e|m})_{e|m'}$给出的态射。这些态射满足关系 $\mathrm{F}_d \circ \mathrm{V}_d = d$ 和 $\mathrm{V}_d \circ \mathrm{F}_d = [d]_{q^m}$，并且与大 Witt 向量上的 Frobenius 和 Verschiebung 映射相容，从而赋予系统 $(\prod_{e|m}\mathrm{R}[q]/\Phi_e(q))_{m\geqslant 1}$ 一个 R 上的 q-FV 系统结构。

定义 2.14 (q-幽灵映射)。设 R 为交换环。对于每个整数 $m \geqslant 1$，大 q-Witt 向量上的q-幽灵映射 是交换 $\mathbb{Z}[q]$-代数的态射

$$q\text{-gh} : q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R}) \longrightarrow \prod_{e|m} \mathrm{R}[q]/\Phi_e(q), \quad c \longmapsto (c_e(q))_{e|m} := (q\text{-gh}_e(c))$$

由 $(q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R}))_{m\geqslant 1}$ 作为 q-FV-系统的初始对象 R (注 2.10和构造 2.13) 的泛性质所诱导。映射 q-gh_e：q-$\mathbb{W}_m(\mathrm{R}) \to \mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)$ 称为 e^{th} q-幽灵坐标。[6]

[5]注意，与第 2.1 节中用于幽灵映射的约定相比，幽灵坐标的顺序是相反的。这与大 q-Witt 向量理论中不存在限制映射这一事实有关（注记 2.12）。[6]这一术语的合理性由结果 [Wag24，引理 2.23], 所说明，该结果指出，对每一个平坦 $\mathbb{Z}$-代数 R（或者稍更一般地，对每一个交换环 R，只要它是 p-无挠的，对每一个素数 p 整除 m 而言），q-幽灵映射q-gh : q-$\mathbb{W}_m$(R) $\to \prod_{e|m}\mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)$ 都是单射。

注 2.15。定义 2.14 中的 q-幽灵映射与 q-幽灵映射一致，后者定义于 [Wag24, 2.13]。事实上，可以证明， q-幽灵映射 [Wag24, 2.13] 定义了一个从 $(q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R}))_{m\geqslant 1}$ 到 $\prod_{e|m}\mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)$ 的 R 上 q-FV-系统映射（其配备了构造 2.13 中的 q-FV-系统结构），而由泛性质（注 2.10），这样的映射必定唯一。

以下结果是大2.1 -Witt 向量的类比 q。

引理 2.16 (q-Dwork 引理)。 设 R 为一个交换环，且 $m\geqslant 1$ 为一个整数。假设对于每个整除 m的素数 p，都存在一个环同态 $\varphi_p:\mathrm{R}\to\mathrm{R}/p^{v_p(m)}\mathrm{R}$，使得 $\varphi_p(x)\equiv x^p$ 模 $p\mathrm{R}$。那么对于每个元素 $(c_e(q))_{e|m}\in\prod_{e|m}\mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)$，以下条件等价:

(1) $(c_e(q))_{e|m}\in\prod_{e|m}\mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)$ 属于 q-幽灵映射 q-gh 的像;

(2) 存在 $(\tilde{c}_e(q))_{e|m}\in\prod_{e|m}R[q]$，它是 $(c_e(q))_{e|m}\in\prod_{e|m}R[q]/\Phi_e(q)$ 的一个提升，并且对于每个素数 p 以及满足 $pe|m$ 的每个整数 $e\geqslant 1$，都有 $\tilde{c}_e(q)\equiv\varphi_p(\tilde{c}_{pe}(q))$ 属于 $(R/p^{v_p(m/e)})[q]$，其中 $\varphi_p: R[q]\to(R/p^{v_p(m/e)})[q]$ 是唯一的 $\mathbb{Z}[q]$- 线性环同态，它扩张了 $\varphi_p: R\to R/p^{v_p(m/e)}R$。

证明。 由构造可得一个 $\mathbb{Z}[q]$-代数的交换图

$$\begin{array}{ccccc}\mathbb{W}_m(\mathrm{R})[q] & \xrightarrow{\mathrm{gh}} & \prod_{e|m}\mathrm{R}[q] & \twoheadrightarrow & \prod_{e|m}\mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)\\ \downarrow & & & & \downarrow\\ q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R}) & & \xrightarrow{q\text{-gh}} & & \prod_{e|m}\mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)\end{array}$$

其中，上方的水平映射由第 2.1 节的幽灵映射诱导，右侧的垂直映射由 $(c_e(q))^{e|m}\mapsto(c_{m/e}(q))^{e|m}$ 给出。所需结论由 Dwork 引理（引理 2.1）得出。 □

注 2.17。 设 R 是一个平坦的 $\mathbb{Z}$-代数。引理 2.16 表明，大 q-Witt 向量 q-$\mathbb{W}_m$(R) 可以看作 $\mathrm{R}[q]/(q^m-1)$ 的一种“Frobenius 扭曲”版本。[7] 更准确地说，可以证明，自然投影映射 $\mathrm{R}[q]/(q^m-1)\to\prod_{e|m}\mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)$ 的像由满足下述条件的元素 $(c_e(q))_{e|m}\in\prod_{e|m}\mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)$ 构成：存在一个提升 $(\tilde{c}_e(q))_{e|m}\in\prod_{e|m}\mathrm{R}[q]$，使得对于每个素数 p 和每个满足 $pe|m$ 的整数 $e\geqslant 1$，都有 $\tilde{c}_e(q)\equiv\tilde{c}_{pe}(q)$ in $(\mathrm{R}/p^{v_p(m/e)})[q]$。

记号 2.18 (q-Teichmüller 提升)。 设 R 为一个交换环，且 $m\geqslant 1$ 为一个整数。R 上的*q-Teichmüller 提升* 是乘法幺半群之间的态射

$$\Pi_m:\mathrm{R}\longrightarrow q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R})$$

定义为记号 2.6 中的 Teichmüller 提升 $\Pi_m:\mathrm{R}\to\mathbb{W}_m(\mathrm{R})$ 与典范映射 $\mathbb{W}_m(\mathrm{R})\to q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R})$ 的复合。特别地， q-Teichmüller 提升是第一个q-幽灵坐标 $q\text{-gh}_1:q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R})\to\mathrm{R}[q]/\Phi_1(q)\cong\mathrm{R}$ 的截面，并且一般在 q-幽灵坐标下由 $x\mapsto(x^{m/e})_{e|m}$ 给出。

2.4 q-Witt 向量上的范数映射

在 [Ang15], Angeltveit 构造了大 Witt 向量上的乘法范数映射，将 Teichmüller 提升自然地推广了。在本小节中，我们证明大 q-Witt 向量类似地也存在乘法范数映射 $\Pi_{m'/m}:q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R})\to q\text{-}\mathbb{W}_{m'}(\mathrm{R})$（命题 2.20）。

引理 2.19. 设 R 为一个交换环，且 m、$m'\geqslant 1$ 为满足 $m|m'$ 的整数。假设对每一个整除 m 的素数 p，存在环同态 $\varphi_p:\mathrm{R}\to\mathrm{R}/p^{v_p(m')}\mathrm{R}$，使得 $\varphi_p\equiv x^p$ 模 $p\mathrm{R}$。则对每一个元素 $c\in q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R})$，其 q-幽灵坐标为$(c_e(q))^{e|m}$，该元素

$$\Pi_{m'/m}((c_e(q))_{e|m}):=\left(c_{(e,m)}(q^{\frac{e}{(e,m)}})^{\frac{m'}{[e,m]}}\right)_{e|m'}\in\prod_{e|m'}\mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)$$

位于 q-幽灵映射 $q\text{-gh}:q\text{-}\mathbb{W}_{m'}(\mathrm{R})\to\prod_{e|m'}\mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)$ 的像中。

[7] Th这与数域的 Habiro 环的定义直接相关，见 [GSWZ24, Wag25], ，其中 the Habiro 环$\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}$ 一个 étale $\mathbb{Z}$-代数 R 是 $\mathrm{R}^{[q]^\wedge_{(q^m-1}}$的一种“Frobenius 扭曲”版本)。

证明。 首先注意乘法幺半群的态射

$$\Pi_{m'/m}:\prod_{e|m}\mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)\to\prod_{e|m'}\mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)$$

是良定义的，因为在交换环 $\mathbb{Z}[q]$ 中， $\Phi_e(q)$ 整除 $\Phi_{(e,m)}(q^{\frac{e}{e\,m_{(,)}}})$。此外，对于满足 $m|m'|m''$ 的任意整数 $m,m',m''\geqslant 1$ ，我们有等式

$$\Pi_{m''/m'}\circ\Pi_{m'/m}=\Pi_{m''/m}.$$

事实上，这是等式链的结果

$$c_{((e,m'),m)}\big(q^{\frac{(e,m')}{((e,m'),m)}\cdot\frac{e}{(e,m')}}\big)^{\frac{m'}{[(e,m'),m]}\cdot\frac{m''}{[e,m']}}=c_{(e,m)}\big(q^{\frac{e}{(e,m)}}\big)^{\frac{m'}{[(e,m'),m]}\cdot\frac{m''}{[e,m']}}=c_{(e,m)}\big(q^{\frac{e}{(e,m)}}\big)^{\frac{m''}{[e,m]}}$$

其中，等式 $[e\,m']^{\frac{m'}{(,)\,m]\cdot[e,m']}}=[e,m]^{\frac{1}{[e,m]}}$ 源于以下事实：对于满足 $c\leqslant b$ 的任意整数 $a,b,c\geqslant 0$，我们有等式 $b-\max(\min(a,b)\ c)\ -\max(a,b)\ =-\max(a,c)$。

特别地，只需在 m'/m 是素数的情况下证明所需结论，以下我们均作此假设。

设 $(c_e(q))_{e|m}\in\prod_{e|m}\mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)$ 是 q-幽灵映射的像中的一个元素。我们使用 q-Dwork 引理（引理 2.16）证明 $\Pi_{m'/m}((c_e(q))^{e|m})\in\prod_{e|m'}\mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)$ 属于 q-幽灵映射的像。设 $(\tilde{c}_e(q))_{e|m}\in\prod_{e|m}\mathrm{R}[q]$ 是 $(c_e(q))_{e|m}\in\prod_{e|m}\mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)$ 的一个提升，使得对于每个素数 p 以及满足 $pe|m$ 的每个整数 $e\geqslant 1$ ，我们在 $(\mathrm{R}/p^{v_p(m/e)})[q]$ 中有 $\tilde{c}_e(q)\equiv\varphi_p(\tilde{c}_{pe}(q))$。于是，只需证明对于每个素数 p 以及满足 $pe|m'$ 的每个整数 $e\geqslant 1$，我们在 $(\mathrm{R}/p^{v_p(m'/e)})[q]$ 中有 $\varphi_p\big(\tilde{c}_{(pe,m)}(q^{\frac{pe}{pe}(,m)})^{\frac{m'}{[pe,m]}}\big)\equiv\tilde{c}_{(e,m)}(q^{\frac{e}{e}(,m)})$。我们分几种情况讨论。

首先假设 $v_p(e)>v_p(m)$。由于 m'/m 是一个素数，这意味着 $m'/m=p$，因此在这种情况下，条件 $pe|m'$ 无法满足，所需结论便空泛地成立。

现在假设 $v_p(e)=v_p(m)$。若 $v_p(e)=v_p(m')$，则 $v_p(m'/e)=0$，所需结论再次空泛地成立。因此我们假设 $v_p(e)=v_p(m)<v_p(m')$。由于 m'/m 是一个素数，这意味着 $m'=pm$ 且 $v_p(m'/e)=1$。所需结论于是由以下等式链得出

$$\varphi_p\big(\tilde{c}_{(pe,m)}(q^{\frac{pe}{(pe,m)}})^{\frac{m'}{[pe,m]}}\big)=\varphi_p\big(\tilde{c}_{(e,m)}(q^{\frac{pe}{(e,m)}})\big)^{\frac{m'}{p\cdot[e,m]}}\equiv\tilde{c}_{(e,m)}(q^{\frac{e}{(e,m)}})^{p\cdot\frac{m'}{p\cdot[e,m]}}=\tilde{c}_{(e,m)}(q^{\frac{e}{(e,m)}})^{\frac{m'}{[e,m]}}$$

where the congruence holds modulo $p^{v_p(m')}$, using that $\varphi_p\colon \mathrm{R}\to\mathrm{R}/p^{v_p(m')}\mathrm{R}$ is a lift of Frobenius.

最后假设 $v_p(e)<v_p(m)$。在这种情况下，所需的结论同样可由这一等式链

$$\varphi_p\big(\tilde{c}_{(pe,m)}(q^{\frac{pe}{(pe,m)}})^{\frac{m'}{[pe,m]}}\big)=\varphi_p\big(\tilde{c}_{p\cdot(e,m)}(q^{\frac{pe}{p\cdot(e,m)}})\big)^{\frac{m'}{[e,m]}}\equiv\tilde{c}_{(e,m)}(q^{\frac{e}{(e,m)}})^{\frac{m'}{[e,m]}}=\tilde{c}_{(e,m)}(q^{\frac{e}{(e,m)}})^{\frac{m'}{[e,m]}}$$

其中，同余模 $p^{v_p(m'/e)}$ 成立，这是由关于 $(\tilde{c}_e(q))^{e|m}$ 的假设得出的。更确切地说，要么 m'/m 与 p 不同，此时 $v_p(m'/e)=v_p(m/(e,m))$，这确实是由该假设得出的；要么 $m'/m=p$，此时我们利用如下事实：模 $p^{v_p(m/e)}$ 的 $a\equiv b$ 蕴含模 $p^{v_p(m'/e)}$ 的 $a^p\equiv b^p$ 。 □

命题 2.20 (分圆范数)。 设 R 是一个交换环。那么对于满足 $m|m'$ 的任意整数$m,m'\geqslant 1$ ，存在一个乘法幺半群的自然态射

$$\Pi_{m'/m}:q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R})\longrightarrow q\text{-}\mathbb{W}_{m'}(\mathrm{R})$$

由 $(c_e(q))^{e|m}\mapsto(c'_e(q))^{e|m'}:=\big(c_{(e,m)}(q^{\frac{e}{(\,,\,m)}})^{\frac{m'}{[e,m]}}\big)_{e|m'}$ 给出，在 q-幽灵坐标下。这个态射由以下事实唯一确定：它关于R是函子性的，且在q-幽灵坐标下由前述公式给出。

证明。 首先假设 $\mathrm{R}=\mathbb{Z}[\mathrm{T}_i,i\in\mathrm{I}]$ 是一个多项式 $\mathbb{Z}$-代数（可能有无限多个变量）。对每个素数 p，令 $\varphi_p:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ 为由 $\mathrm{T}_i\mapsto\mathrm{T}_i^p$ 给出的 Frobenius 提升。 $\mathbb{Z}$-代数R 是平坦的，因此定义 2.14 中的 q-幽灵映射是单射（Wag24，引理 2.23]）。

在 q-幽灵坐标中的公式按构造还是乘法性的，因此只需证明，属于 $(c_e(q))^{e|m}$ -幽灵映射的像中的元素会被映射到 -幽灵映射的像中的元素 $(c'_e(q))^{e|m'}$ 。利用 Frobenius 提升 φ_p，这可由引理 2.19 得出。

现在假设 R 是一个一般的交换环。设 $P \twoheadrightarrow R$ 是交换环的一个满射态射，其中 P 是一个多项式 $\mathbb{Z}$-代数。存在交换$\mathbb{Z}[q]$-代数的一个自然图表

$$\begin{array}{ccc} q\text{-}\mathbb{W}_m(P) & \xrightarrow{\Pi_{m'/m}} & q\text{-}\mathbb{W}_{m'}(P) \\ \downarrow & & \downarrow \\ q\text{-}\mathbb{W}_m(R) & \xrightarrow{\Pi_{m'/m}} & q\text{-}\mathbb{W}_{m'}(R) \end{array}$$

其中竖直映射是满射的（[Wag24，推论 2.29]）。特别地，给定一个元素$c \in q\text{-}\mathbb{W}_m(R)$，任意提升 $\tilde{c} \in q\text{-}\mathbb{W}_m(P)$ 都诱导出一个元素 $\Pi_{m'/m}(c) \in q\text{-}\mathbb{W}_{m'}(R)$；根据前一段以及 q-幽灵映射的函子性，该元素与 q-幽灵坐标上的目标公式相容。注意，这一构造先验地依赖于满射 $P \twoheadrightarrow R$ 以及提升 $\tilde{c} \in q\text{-}\mathbb{W}_m(R)$。为证明它与这些选择无关，设 $P_1 \twoheadrightarrow R$、 $\tilde{c}_1 \in q\text{-}\mathbb{W}_m(P_1)$ 和 $P_2 \twoheadrightarrow R$、 $\tilde{c}_2 \in q\text{-}\mathbb{W}_m(P_2)$ 是两组这样的选择。令 $P := P_1 \times P_2$。根据 [Wag24，推论 2.29]，，存在交换 $\mathbb{Z}[q]$-代数 $q\text{-}\mathbb{W}_m(P) \cong q\text{-}\mathbb{W}_m(P_1) \times q\text{-}\mathbb{W}_m(P_2)$ 的一个自然同构。特别地，存在一个元素 $\tilde{c} \in q\text{-}\mathbb{W}_m(R)$，它通过自然投影映射分别映射到 $\tilde{c}_1 \in q\text{-}\mathbb{W}_m(P_1)$ 和 $\tilde{c}_2 \in q\text{-}\mathbb{W}_m(P_2)$，因此元素 $\Pi_{m'/m}(c) \in q\text{-}\mathbb{W}_{m'}(R)$ 是良定义的。

□

注 2.21。 设 R 是一个交换环。对于任意满足 m、 m'、 $m'' \geqslant 1$ 的整数 $m|m'|m''$，命题 2.20 中的分圆范数满足恒等式 $\Pi_{m''/m'} \circ \Pi_{m'/m} \circ \Pi_{m''/m}$。这确实是引理 2.19证明的第一段的推论。特别地，对于任意满足 m、 $m' \geqslant 1$ 的整数 $m|m'$，我们有等式 $\Pi_{m'/m} \circ \Pi_m = \Pi_{m'}$，此处的记号与 Teichmüller 提升（记号 2.18）兼容。

2.5 圆分环

在本小节中，我们介绍交换环 $\mathscr{C}_R$ 的圆分环的概念 R（定义 2.22）。

Defi义 2.22 （圆分环）。 设 R 是一个交换环。R 的圆分环 is the 交换 $\mathbb{Z}[q]$-代数

$$\mathscr{C}_R := \lim_{m \geqslant 1} q\text{-}\mathbb{W}_m(R)$$

其中极限沿构造 2.9 的 Frobenius 映射取。

例 2.23. 按照例 2.8，R 的圆分环可在下列情形中显式给出。

(1) ($R = \mathbb{Z}$) $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \cong \lim_{m \geqslant 1} \mathbb{Z}[q]/(q^m - 1)$，其中极限沿自然投影映射取，对任意完美 Λ-环 R 亦然。(2) 对每个数域 K，($R = \mathscr{O}_K[\Delta^{-1}]$K) $\mathscr{C}_R \cong \lim_{m \geqslant 1} \mathscr{H}_{R,m}/(q^m - 1)$，其中 $R = \mathscr{O}_K[\Delta^{-1}]$K，且极限沿自然投影映射取（[Wag25，注记 2.9]）。(3) ($R = \mathbb{Z}[T]$) $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}[T]} \cong \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ （例 2.8 (3)）。

注记 2.24. 对于一般的交换环 R，导出逆极限$\mathrm{R}\lim_{m \geqslant 1} q\text{-}\mathbb{W}_m(R)$（其中极限沿构造 2.9 的 Frobenius 映射取）可能不集中在零次。然而，若 R 在 $\mathbb{Z}$ 上为 étale，或在某个完美 Λ-环上为 étale，则可用 q-Dwork 引理（引理 2.16）证明构造 2.9 的 Frobenius 映射是满射，因而导出极限与经典极限一致。

引理 2.25. 对于每个素数 p 和每个整数 $r \geqslant 0$， $\mathbb{Z}[q]$中的元素 $q^{p^r} - 1$ 属于理想 $(p, q-1)^r \subseteq \mathbb{Z}[q]$。特别地，对于每个 p-无挠交换环 R，交换 $\mathbb{Z}[q]$-代数 $\lim_{r \geqslant 0} R[q]/(q^{p^r} - 1)$ 的$(p, q-1)$-完备化自然同构于 $R_p^\wedge[\![q-1]\!]$。

证明。 第二个断言是第一个断言的直接推论。要证明第一个断言，只需证明 $[p^r]_q \in (p, q-1)^r$，因为 $q^{p^r}-1=(q-1)\cdot[p^r]_q$。对于 $[p^r]_q$，该结论由公式 $[p^r]_q=\prod_{i=0}^{r-1}[p]_{q^{p^i}}$ 以及对每个整数 $i\geqslant 0$ 均成立的模 $(q-1)$ 同余 $[p]_{q^{p^i}}\equiv p$ 得出。 □

注 2.26 (p-进实现)。 设 R 是平坦的 $\mathbb{Z}$-代数，且 p 是一个素数。若 $\mathrm{R}^\wedge_p$ 存在 Frobenius 提升 φ_p（即，存在一个环同态 $\varphi_p:\mathrm{R}^\wedge_p\to\mathrm{R}^\wedge_p$，其模 p 约化是 R/p的 Frobenius 自同态），则存在一个交换$\mathbb{Z}[q]$-代数的自然态射

$$\mathscr{C}_{\mathrm{R}}\longrightarrow \mathrm{R}^\wedge_p[\![q-1]\!].$$

利用引理 2.16和注 2.17，此态射由交换 $\mathbb{Z}[q]$-代数之间的复合态射诱导

$$\prod_{e\geqslant 1}\mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)\longrightarrow\prod_{r\geqslant 0}\mathrm{R}[q]/\Phi_{p^r}(q)\longrightarrow\prod_{r\geqslant 0}\mathrm{R}[q]/\Phi_{p^r}(q)$$

其中第一个映射是自然投影 $(c_e(q))_{e\geqslant 1}\mapsto(c_{p^r}(q))_{r\geqslant 0}$，第二个映射由 $(c_{p^r}(q))_{r\geqslant 0}\mapsto(\varphi_p^r(c_{p^r}(q)))$ 给出。[8] 更准确地说，圆分环 $\mathscr{C}_{\mathrm{R}}$ 在此复合态射下的像为 $\lim_{r\geqslant 0}\mathrm{R}[q]/(q^{p^r}-1)$，所需的态射则通过与 $(p,q-1)$-完备化 $\lim_{r\geqslant 0}\mathrm{R}[q]/(q^{p^r}-1)\to\mathrm{R}^\wedge_p[\![q-1]\!]$（引理 2.25）复合得到。注意，此映射 $\mathscr{C}_{\mathrm{R}}\to\mathrm{R}^\wedge_p[\![q-1]\!]$ 取决于 Frobenius 提升 φ_p 的选择（例如，当 R 在 $\mathbb{Z}$上光滑时）。另请注意，若 R 在 $\mathbb{Z}$ 上 étale，则 $\mathrm{R}^\wedge_p$ 上的此类 Frobenius 提升 φ_p 是唯一的。

现在我们引入这些圆分环上的分圆 Frobenius 的概念。为此，我们将使用以下版本的定义 2.7。

定义 2.27 （在 d 处的 Big q-Witt 向量）。 设 R 为一个交换环，且 $d\geqslant 1$ 为一个整数。对于每个整数 $m\geqslant 1$，R 在 d 处的 m-截断 *Big q-Witt* 向量是交换$\mathbb{Z}[q]$-代数

$$q\text{-}\mathbb{W}_m^{(d)}(\mathrm{R}):=\mathbb{W}_m(\mathrm{R})[q]/\mathbb{I}_m^{(d)}$$

其中，$\mathbb{I}_m^{(d)}\subseteq\mathbb{W}_m(\mathrm{R})[q]$ 是由以下元素生成的理想:

(i) 对满足 $e|m$、[9] 的每个整数 $e\geqslant 1$，$\big(\prod_{d|e'|e}\Phi_{e'}(q)\big)\mathrm{im}(\mathrm{V}^{m/e})$，以及

(ii) 对满足 $d|e|f|m$ 的所有整数 e、$f\geqslant 1$，$\mathrm{im}([f/e]_{q^e}\mathrm{V}^{m/f}-\mathrm{V}^{m/e}\circ\mathrm{F}^{f/e})$。

注 2.28. 对于每个交换环 R 和整数 $m\geqslant 1$，我们有 $q\text{-}\mathbb{W}_m^{(1)}(\mathrm{R})=q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R})$。此外，对于每个整数 $d\geqslant 1$，可以验证 $\mathbb{I}_m\subseteq\mathbb{I}_m^{(d)}$。

注 2.29. 设 R 是一个交换环，并且 $d\geqslant 1$ 是一个整数。仿照 [Wag24，引理 2.9]，该系统 $(q\text{-}\mathbb{W}_m^{(d)}(\mathrm{R}))_{m\geqslant 1}$ 是 *q-FV-系统在 d 上的初始对象*，其中 R，即，是交换 $\mathbb{Z}[q]$-代数的初始系统 $(\mathrm{W}_m^{(d)})_{m\geqslant 1}$，以整数 $m\geqslant 1$为指标，并配备以下结构:

(i) 对每个整数 $m\geqslant 1$，一个 $\mathbb{Z}[q]$-代数态射 $\mathbb{W}_m(\mathrm{R})[q]/\prod_{d|e|m}\Phi_e(q)\to\mathrm{W}_m^{(d)}$(特别是 $\mathrm{W}_m^{(d)}=0$，除非 $d|m$); (ii) 对满足 $d|m|m'$ 的任意整数 $m,m'\geqslant 1$，存在 $\mathbb{Z}[q]$-代数态射 $\mathrm{F}^{m'/m}:\mathrm{W}_{m'}^{(d)}\to\mathrm{W}_m^{(d)}$ 和 $\mathbb{Z}[q]$-模态射 $\mathrm{V}^{m'/m}:\mathrm{W}_m^{(d)}\to\mathrm{W}_{m'}^{(d)}$，它们与大 q-Witt 向量上的 Frobenius 和 Verschiebung 映射相容（构造 2.9），并且满足 $\mathrm{F}^{m'/m}\circ\mathrm{V}_{m'/m}=m'/m$ 和 $\mathrm{V}^{m'/m}\circ\mathrm{F}^{m'/m}=[m'/m]_{q^m}$。

定义 2.30 （典范映射）。设 R 为交换环，且 $d\geqslant 1$ 为整数。对每个整数 $m\geqslant 1$，典范映射

$$\mathrm{can}:q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R})\longrightarrow q\text{-}\mathbb{W}_m^{(d)}(\mathrm{R})$$

是交换 $\mathbb{Z}[q]$-代数的态射，它由理想 $\mathbb{I}_m\subseteq\mathbb{I}_m^{(d)}$ 在$\mathbb{W}_m(\mathrm{R})[q]$ 中的包含关系所诱导（定义2.7 与2.27）。

[8]根据引理2.16，我们将唯一的 $\varphi_p:\mathrm{R}[q]/\Phi_{p^r}(q)\to\mathrm{R}[q]/\Phi_{p^r}(q)$ 记作 $\mathbb{Z}[q]$-线性环同态，它将 $\varphi_p:\mathrm{R}^\wedge_p\to\mathrm{R}^\wedge_p$延拓至此。 [9] 注意，当 $\prod_{d|e'|e}\Phi_{e'}(q)=1$ 时，$d\nmid e$。

注 2.31。 设R 是一个交换环，并且 $d \geqslant 1$ 是一个整数。任何 q-FV-系统 d在R 上的 q-FV-系统都是定义在R上的，定义2.30 中的典范映射由$(q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R}))^{m\geqslant 1}$ (注2.10)的泛性质诱导得到。

Rem命题 2.32 (q 在 d 处的幽灵映射)。 设 R 是一个交换环，且 $d \geqslant 1$ 是一个整数
遵循
构造 2.13 和定义 2.14，存在一个自然的 q-幽灵映射

$$q\text{-gh} : q\text{-}\mathbb{W}_m^{(d)}(\mathrm{R}) \longrightarrow \prod_{d|e|m} \mathrm{R}[q]/\Phi_e(q), \quad c \longmapsto (c_e(q))_{d|e|m}$$

在大 q-Witt 向量上的映射，定义于 d，对每个整数 $m \geqslant 1$ 均成立，且与定义 2.30 中的典范映射相容。

命题 2.33 (圆分 Frobenius)。 设 R 是一个交换环，且 $d \geqslant 1$ 是一个整数。那么对于每个整数 $m \geqslant 1$，都存在一个交换环的自然态射

$$\mathrm{Frob}_d^{\mathrm{cyc}} : q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R}) \longrightarrow q\text{-}\mathbb{W}_{dm}^{(d)}(\mathrm{R})$$

由 $(c_e(q))_{e|m} \mapsto (c'_e(q))_{d|e|dm} := (c_{e/d}(q^d))_{d|e|dm}$ 给出，取 q-幽灵坐标。这个态射由以下事实唯一确定：它关于R 是函子性的，并且在 q-幽灵坐标上满足前述公式。

证明。 首先注意，交换环态射 $\prod_{e|m} \mathrm{R}[q]/\Phi_e(q) \to \prod_{d|e|dm} \mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)$ 由 $(c_e(q))_{e|m} \mapsto (c_{e/d}(q^d))_{d|e|dm}$ 给出，且是良定义的，因为在 $\mathbb{Z}[q]$ 中， $\Phi_e(q)$ 整除 $\Phi_{e/d}(q^d)$。

若 R 是一个多项式 $\mathbb{Z}$-代数，则对于所有素数 p，R 都存在 Frobenius 提升 $\varphi_p : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$。在这种情况下，我们使用 q-Dwork 引理（引理 2.16）[10] 来证明所需结论。为此，令 $(c_e(q))_{e|m} \in \prod_{e|m} \mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)$ 为 q-幽灵映射的像中的一个元素，并令 $(\tilde{c}_e(q))_{e|m} \in \prod_{e|m} \mathrm{R}[q]$ 为该元素的一个提升，使得对于每个素数 p 以及每个满足 $pe|m$ 的整数 $e \geqslant 1$，都有 $\tilde{c}_e(q) \equiv \varphi_p(\tilde{c}_{pe}(q))$，且此关系成立于 $(\mathrm{R}/p^{v_p(m/e)})[q]$ 中。

只需证明：对于每个素数 p 以及满足 $d|e$ 和$pe|dm$的每个整数 $e \geqslant 1$，都有 $\tilde{c}_{e/d}(q^d) \equiv \varphi_p(\tilde{c}_{pe/d}(q^d))$ 属于 $(\mathrm{R}/p^{v_p(dm/e)})[q]$。这一同余由关于 $(\tilde{c}_e(q))_{e|m}$的假设推出，其中我们用到 $p^{v_p(m/(e/d))} = p^{v_p(dm/e)}$。

如果 R 是一般的交换环，那么按照命题2.20证明的第二部分进行论证，即可得到所需结果。 □

定义 2.27 的以下变体将在第 4节中使用。

变体 2.34 （在 d 处的圆分环）。 设 R 是一个交换环，且 $d \geqslant 1$ 是一个整数。对于每个整数 $m \geqslant 1$，R 的 m-截断圆分环在 d 处是交换 $\mathbb{Z}[q]$-代数

$$\mathscr{C}_{\mathrm{R},m}^{(d)} := q\text{-}\mathbb{W}_m^{(d)}(\mathrm{R})\left[\Phi_e(q)^{-1} \;\middle|\; d \nmid e > 1\right]$$

其中，局部化以满足 $e > 1$ 条件 $d \nmid e$和 $e|m$的整数为指标。特别地，定义 2.30 和命题 2.33中关于大 q-Witt 向量的态射诱导出自然态射

$$\mathrm{can} : \mathscr{C}_{\mathrm{R},m} \longrightarrow \mathscr{C}_{\mathrm{R},m}^{(d)} \qquad \mathrm{Frob}_d^{\mathrm{cyc}} : \mathscr{C}_{\mathrm{R},m} \longrightarrow \mathscr{C}_{\mathrm{R},dm}^{(d)}$$

交换环之间的态射，我们称之为典范映射和 d^{th} 分圆 *Frobenius*。类似地，R 在 d 处的圆分环是交换的 $\mathbb{Z}[q]$-代数 $\mathscr{C}^{(d)}{}_{\mathrm{R}}$，定义为截断圆分环 $\mathscr{C}_{(d)\,\mathrm{R}\,m}$ 关于满足（m,N）的整数 $m \geqslant 1$，沿备注 2.29中的 Frobenius 映射 $\mathrm{F}^{m'/m}$ 取极限。特别注意，若（d,N）> 1，则 $\mathscr{C}_{(d)\,\mathrm{R}} = 0$。

映射 弗罗贝尼乌斯$_d^{\mathrm{cyc}}$ 在变体 2.34 中称为 分圆 *Frobenius* (尽管映射F_d 在构造 2.3 和2.9 中已被称为 Frobenius)，这是因为以下备注指出，弗罗贝尼乌斯$_d^{\mathrm{cyc}}$ 的行为如同“通用的 q-Frobenius 提升”，至少在 R 可以赋予一个Λ-环结构时如此。

[10]注意， d处大 q-Witt 向量的 q-Dwork 引理的陈述和证明同样成立。

备注 2.35。 设 R 是一个带有 Adams运算 $(\psi^n)_{n\geqslant 1}$ 的 Λ-环，且 $d\geqslant 1$ 是一个整数。对于每个整数 $m\geqslant 1$，存在如下交换环的自然交换图

$$\begin{array}{ccc} q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R}) & \xrightarrow{c_m} & \mathrm{R}[q]/(q^m-1) \\ {\scriptstyle \mathrm{can}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{can}} \\ q\text{-}\mathbb{W}_m^{(d)}(\mathrm{R}) & \xrightarrow{c_m^{(d)}} & \mathrm{R}[q]/\prod_{d|e|m}\Phi_e(q) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R}) & \xrightarrow{c_m} & \mathrm{R}[q]/(q^m-1) \\ {\scriptstyle \mathrm{Frob}_d^{\mathrm{cyc}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi^d\otimes(q\mapsto q^d)} \\ q\text{-}\mathbb{W}_{dm}^{(d)}(\mathrm{R}) & \xrightarrow{c_{dm}^{(d)}} & \mathrm{R}[q]/\prod_{d|e|dm}\Phi_e(q) \end{array}$$

其中，顶部的水平映射定义于 [Wag24，引理 2。34], 底部的水平映射定义同 [Wag24，引理 2。34], 左侧的垂直映射定义于定义 2.30和命题 2.33。特别地，对于定义2.22 和变体 2.34中的圆分环，也有类似的交换图；并且当 Λ-环 R 是完美的时，这些交换图与例 2.8(1) 中的同构相容。

3 分圆对数

设 K 为一个数域，其整数环为 $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}$，判别式为 Δ_{K}。本节中，我们定义（导出）分圆对数

$$\mathrm{dlog}_{\mathrm{cyc}}:\mathbb{G}_m(\mathrm{R})[-1]\longrightarrow \mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R}}\{1\}$$

$\mathrm{R}:=\mathscr{O}_{\mathrm{K}}[\Delta_{\mathrm{K}}^{-1}]$（定义 3.21）。我们的构造是 Bhatt–Lurie 的棱柱对数的整体类比 [BL22，第 2]节。为避免使用其构造中采用的准合成下降，我们沿用 Mao 提出的另一种棱柱对数方法 [Mao24，第 2]节。

3.1 数域 Habiro 环上的 Frobenius 映射

在本小节中，我们回顾 Garoufalidis– Scholze–Wheeler–Zagier [GSWZ24], 近期工作中对 Habiro 环的定义，并在此背景下构造上一节分圆 Frobenius 映射的一个类似物（构造3.7）。

定义 3.1 (Habiro 环， [GSWZ24，Wag25])。 设 R 是一个 étale $\mathbb{Z}$-代数，并且对每个素数 p，设 $\varphi_{\mathrm{R}^\wedge_p}$ 是形式 étale $\mathbb{Z}_p$-代数 $\mathrm{R}^\wedge_p$的唯一 Frobenius 提升。R的 *Habiro* 环是交换环

$$\mathscr{H}_{\mathrm{R}}:=\left\{(f_e(q))_{e\geqslant 1}\in\prod_{e\geqslant 1}\mathrm{R}[q]^\wedge_{\Phi_e(q)}\;\middle|\; f_e(q)=\varphi_p(f_{pe}(q))\text{ in }\mathrm{R}[q]^\wedge_{(\Phi_e(q),\Phi_{pe}(q))}\right\}$$

其中该条件遍历所有素数 p 和整数 $e\geqslant 1$，且端态射 $\varphi_p:\mathrm{R}[q]^\wedge_{(\Phi_e(q)\ \Phi_{pe}(q))}\to \mathrm{R}[q]^\wedge_{(\Phi_e(q)\ \Phi_{pe}(q))}$ 定义为 $\mathrm{id}:\mathrm{R}^\wedge_p\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[q]\to\mathrm{R}^\wedge_p\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[q]$ 的 $(p,\Phi_e(q))$-完备化[11] of$^{\varphi_{\mathrm{R}^\wedge_p}\otimes}$。

我们主要使用定义 3.1的以下截断变体，它已见于[Wag25，2。7]。

变体 3.2 （截断 Habiro 环）。 设 R 为 étale $\mathbb{Z}$-代数，且 $m\geqslant 1$ 为一个整数。R 的m-截断 *Habiro* 环是交换的-代数

$$\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}:=\left\{(f_e(q))_{e|m}\in\prod_{e|m}\mathrm{R}[q]^\wedge_{\Phi_e(q)}\;\middle|\; f_e(q)=\varphi_p(f_{pe}(q))\text{ in }\mathrm{R}[q]^\wedge_{(\Phi_e(q),\Phi_{pe}(q))}\right\}$$

其中，条件遍历所有满足 $pe|m$ 的素数 p 和整数 $e\geqslant 1$。

注释 3.3。 对于每个 étale $\mathbb{Z}$-代数 R，我们有 $\mathscr{H}_{\mathrm{R}}=\lim_{m\geqslant 1}\mathscr{H}_{\mathrm{R},\ m}$。

[11] He在交换环 $(\Phi_e(q)\ \Phi_{pe}(q))=(p,\Phi_e(q))$ 中，我们使用理想的等式 $\mathbb{Z}[q]$ ([Wag24，引理 2.1]).

变体 3.4 （在 d 处的截断 Habiro 环）。 设 R 是一个 étale $\mathbb{Z}$-代数，且 $d \geqslant 1$ 是一个整数。对于每个整数 $m \geqslant 1$，R 在 d 处的 m-截断 *Habiro* 环 是交换 $\mathbb{Z}[q]$-代数

$$\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}^{(d)} := \left\{ (c_e)_{d|e|m} \in \prod_{d|e|m} \mathrm{R}[q]^{\wedge}_{\Phi_e(q)} \;\middle|\; c_e = \varphi_p(c_{pe}) \text{ in } \mathrm{R}[q]^{\wedge}_{(\Phi_e(q),\Phi_{pe}(q))} \right\} \left[\Phi_e(q)^{-1} \;\middle|\; d \nmid e > 1\right]$$

其中，该条件遍历所有满足 $d|e$ 的素数 p 和整数 $e \geqslant 1$，而局部化则由满足 $d \nmid e$ 和 $e|m$ 的整数 $e > 1$ 作为指标。

注 3.5。 对分圆多项式 $\Phi_e(q)$ 在 $d \nmid e > 1$ 变体 3.4 中进行求逆，对于在第 4.2 节定义环合成上同调第一陈类似乎是必要的。

注 3.6。 设 R 是一个 étale $\mathbb{Z}$-代数。对于每个整数 $m \geqslant 1$，Wagner 证明了存在一个交换 $\mathbb{Z}[q]$-代数 $\mathscr{H}_{\mathrm{R}\text{ 的自然同构，}m}/(q^m - 1) \cong q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R})$ （[Wag25，定理 2.9]）。此外，对于每个满足 $m' \geqslant 1$ 的整数 $m|m'$，该对应关系诱导出一个自然的交换图，其对象为 $\mathbb{Z}[q]$-代数

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{H}_{\mathrm{R},m'} & \longrightarrow & q\text{-}\mathbb{W}_{m'}(\mathrm{R}) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{can}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{F}_{m'/m}} \\ \mathscr{H}_{\mathrm{R},m} & \longrightarrow & q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R}) \end{array}$$

其中，左侧垂直映射是自然投影映射，右侧垂直映射是作用于大 q-Witt 向量的 Frobenius 映射（[Wag25，注 2。10]）。

构造 3.7 （Habiro Frobenius 映射）。 设 R 是一个 étale $\mathbb{Z}$-代数，且 $d \geqslant 1$ 是一个整数。该d^{th} *Habiro* 环上的 *Frobenius* $\mathscr{H}_{\mathrm{R},\ m}$ 是环同态

$$\mathrm{Frob}_d^{\mathrm{Hab}} : \mathscr{H}_{\mathrm{R},m} \longrightarrow \mathscr{H}_{\mathrm{R},dm}^{(d)}$$

由 $(f_e(q))_{e|m} \mapsto (f'_e(q))_{d|e|dm} := (f_{e/d}(q^d))_{d|e|dm}$ 给出。更准确地说，此映射由复合映射诱导

$$\prod_{e|m} \mathrm{R}[q]^{\wedge}_{\Phi_e(q)} \longrightarrow \prod_{d|e|dm} \mathrm{R}[q]^{\wedge}_{\Phi_{e/d}(q^d)} \longrightarrow \prod_{d|e|dm} \mathrm{R}[q]^{\wedge}_{\Phi_e(q)}$$

其中，第一个映射由 $(f_e(q))_{e|m} \mapsto (f_{e/d}(q^d))_{d|e|dm}$ 给出，而第二个映射是在每个因子上取 $\Phi_e(q)$-完备化。[12] 由以下等式链可知

$$f'_e(q) = f_{e/d}(q^d) = \varphi_p(f_{pe/d}(q^d)) = \varphi_p(f'_{pe}(q))$$

在 $\mathrm{R}[q]^{\wedge}_{(\Phi_e(q)\ \Phi_{pe}(q))}$ 中，$\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}$ 在此复合映射下的像确实包含于 $\mathscr{H}^{(d)}_{\ \mathrm{R}\ dm}$ 中。

注记 3.8. 设 R 是一个 étale $\mathbb{Z}$-代数，$m \geqslant 1$ 和 $r \geqslant 0$ 是整数，p 是素数。根据引理 2.25 （及其证明）和注记 2.26，存在一个交换 $\mathbb{Z}[q]$-代数之间的自然态射 $\mathscr{C}_{(p)pm} \to \mathrm{R}[q]/(p, q-1)^r$。该态射自然地置于交换环的交换图中

$$\begin{array}{ccccc} \mathscr{H}_{\mathrm{R},m} & \longrightarrow & \mathscr{C}_{\mathrm{R},m} & \longrightarrow & \mathrm{R}[q]/(p, q-1)^r \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Frob}_p^{\mathrm{Hab}}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Frob}_p^{\mathrm{cyc}}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Frob}_p^{\mathbb{A}}} \\ \mathscr{H}^{(p)}_{\mathrm{R},pm} & \longrightarrow & \mathscr{C}^{(p)}_{\mathrm{R},pm} & \longrightarrow & \mathrm{R}[q]/(p, q-1)^r \end{array}$$

其中，右侧的竖直映射是由 φ_p 在 R/p^r 上诱导、并将 q 映至 q^p 的唯一交换环态射。这里我们用到，对于满足 $p \nmid e$ 的每个整数 $e \geqslant 1$，$\Phi_e(q)$ 在 $\mathrm{R}[q]/(p, q-1)^r$ 中可逆。

[12] 注意，第二个映射是良定义的，这是因为在 $\mathbb{Z}[q]$ 中，$\Phi_e(q)$ 整除 $\Phi_{e/d}(q^d)$。

引理 3.9。 设 R 是一个 *étale* $\mathbb{Z}$-代数，且 $m \geqslant 1$ 是一个整数。那么，对于任意非负整数序列 $(n_e)^{e|m}$，交换 $\mathbb{Z}[q]$-代数的态射

$$q\text{-gh} : \mathscr{H}_{\mathrm{R},m}/\prod_{e|m}\Phi_e(q)^{n_e} \longrightarrow \prod_{e|m}\mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)^{n_e}, \quad f \longmapsto (f_e(q))_{e|m}$$

是单射。

证明。 由于分圆多项式 $\Phi_e(q)$ 在唯一分解整环 $\mathbb{Z}[q]$ 中不可约，交换环的自然态射

$$\mathbb{Z}[q]/\prod_{e|m}\Phi_e(q)^{n_e} \longrightarrow \prod_{e|m}\mathbb{Z}[q]/\Phi_e(q)^{n_e}$$

是单射。此外，对于每个整数 $\mathscr{H}_{\mathrm{R},\ m}/(q^m-1)^n$，Habiro 环 $\mathbb{Z}[q]/(q^m-1)^n$ 都是交换环 $n \geqslant 0$（[Wag25，定理 2.9]）的 *étale* 扩张。特别地，交换环 $_m/\prod_{e|m}\Phi_e(q)^{n_e}$ 是 $\mathbb{Z}[q]/\prod_{e|m}\Phi_e(q)^{n_e}$ 上的平坦模。将前述单射态射与平坦的 $\mathbb{Z}[q]/\prod_{e|m}\Phi_e(q)^{n_e}$-模 $\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}/\prod_{e|m}\Phi_e(q)^{n_e}$ 张量后，便导出了所需的交换 $\mathbb{Z}[q]$-代数单射态射

$$\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}/\prod_{e|m}\Phi_e(q)^{n_e} \longrightarrow \prod_{e|m}\mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)^{n_e}$$

其中我们使用典范等同 $(\mathscr{H}_{\mathrm{R},m})^{\wedge}_{\Phi_e(q)} \cong \mathrm{R}[q]^{\wedge}_{\Phi_e(q)}$（[Wag25, 2.7]）。 □

推论 3.10. 设 R 为 *étale* $\mathbb{Z}$-代数。则对任意满足 $m|m'$ 的整数 m、$m' \geqslant 1$，交换 $\mathbb{Z}[q]$-代数的自然态射

$$\mathscr{H}_{\mathrm{R},m'}/(q^m-1)(q^{m'}-1) \longrightarrow \mathscr{H}_{\mathrm{R},m}/(q^m-1)^2 \times \prod_{\substack{e|m'\\ e\nmid m}}\mathrm{R}[q]/\Phi_e(q) \tag{3.10.1}$$

是单射。

证明。 态射（3.10.1）与 $\mathbb{Z}[q]$-代数态射的后复合 s

$$\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}/(q^m-1)^2 \times \prod_{\substack{e|m'\\ e\nmid m}}\mathrm{R}[q]/\Phi_e(q) \longrightarrow \prod_{e|m}\mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)^2 \times \prod_{\substack{e|m'\\ e\nmid m}}\mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)$$

由引理 3.9 可知是单射，因此态射（3.10.1）也是单射。 □

3.2 分圆对数

在本小节中，我们使用第 3.1 节的 Habiro 环以及第 q2.4节的大 -Witt 向量上的范数（及其一种改进），来构造一个 étale $\mathbb{Z}$-代数的分圆对数（构造3.15 和定义3.21）。

引理 3.11。 设 $m, m' \geqslant 1$ 为满足 $m|m'$的整数。

(1) $\mathbb{Z}[q]$-模的典范映射 $(q^{m'}-1)/(q^{m'}-1)^2 \to (q^m-1)/(q^m-1)^2$ 可被 $\frac{m'}{m}$ 整除。

—

(2) The induced map $(\frac{m'}{m})^{-1} : (q^{m'}-1)/(q^{m'}-1)^2 \to (q^m-1)/(q^m-1)^2$ *is surjective.*

(3) 特别地，前一个映射诱导出一个同构

$$(\tfrac{m'}{m})^{-1} : (q^{m'}-1)/(q^m-1)(q^{m'}-1) \xrightarrow{\cong} (q^m-1)/(q^m-1)^2$$

的 $\mathbb{Z}[q]/(q^m-1)$-模。

证明。 这是该同余的一个推论 ce

$$\frac{q^{m'}-1}{q^m-1}=\left[\frac{m'}{m}\right]_{q^m}\equiv\frac{m'}{m}\pmod{q^m-1}$$

在 交换环 $\mathbb{Z}[q]$ 中，以及模 $(q^m-1)/(q^m-1)^2$ 在 $\mathbb{Z}$ 上平坦这一事实。 □

定义 3.12 （Nygaard 扭曲）。 设 R 为交换环。对每个整数 $m\geqslant 1$，R 的m-截断 *Nygaard* 扭曲是可逆的 q-$\mathbb{W}_m$(R)-模

$$\mathcal{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R},m}\{1\}:=q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R})\otimes_{\mathbb{Z}[q]}(q^m-1)/(q^m-1)^2.$$

若 K 是数域，且 R 是 étale $\mathbb{Z}$-代数 $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}[\Delta^{-1}{}_{\mathrm{K}}]$，，则 R 的 *Nygaard* 扭曲是$\mathbb{Z}[q]$-模

$$\mathcal{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R}}\{1\}:=\lim_{\substack{m\geqslant 1\\(m,\mathrm{N})=1}}\mathcal{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R},m}\{1\}$$

其中极限取遍满足条件 $m\geqslant 1\,(m,$ ， [13] 并沿着由 Frobenius 映射诱导的映射$\mathrm{F}^{m'/m}$ 在 q-Witt 向量上的映射（构造2.9）以及第二个因子上的映射$(\frac{m'}{m})^{-1}$ （引理3.11(2)）。 —

注 3.13。 设 R 是一个 étale $\mathbb{Z}$-代数。对于每个整数 $m\geqslant 1$，存在一个自然的 $\mathbb{Z}[q]$-模同构

$$\mathcal{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R},m}\{1\}\cong(q^m-1)\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}/(q^m-1)^2\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}$$

其中， q-Witt 向量上的 Frobenius 映射对应于 Habiro 环上的典范限制映射（注3.6）。

构造 3.14 （导出对数）。 给定一个交换环 A 和一个理想 I ⊂A，存在一个自然的阿贝尔群短正合列

$$0\longrightarrow \mathrm{I}/\mathrm{I}^2\xrightarrow{\exp}\mathbb{G}_m(\mathrm{A}/\mathrm{I}^2)\longrightarrow\mathbb{G}_m(\mathrm{A}/\mathrm{I})\longrightarrow 0$$

其中 exp 由 $x\mapsto 1+x$ 给出。这诱导出一个边界映射

$$\mathrm{dlog}_{(\mathrm{A},\mathrm{I})}:\mathbb{G}_m(\mathrm{A}/\mathrm{I})\longrightarrow\mathrm{I}/\mathrm{I}^2[1]$$

在导出范畴 $\mathscr{D}(\mathbb{Z})$ 中（另见 [Mao24，构造 2。7] ，其中将其推广到动画环）。

构造 3.15 （截断分圆对数）。 设 R 是一个 étale $\mathbb{Z}$-代数，且 $m\geqslant 1$ 是一个整数。R 的*m*-截断分圆对数是映射

$$\mathrm{dlog}^{(m)}_{\mathrm{cyc}}:\mathbb{G}_m(\mathrm{R})[-1]\longrightarrow\mathcal{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R},m}\{1\}$$

在导出范畴 $\mathscr{D}(\mathbb{Z})$中定义为以下复合

$$\mathbb{G}_m(\mathrm{R})[-1]\xrightarrow{\Pi_m}\mathbb{G}_m(q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R}))[-1]\xrightarrow{\mathrm{dlog}}\mathcal{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R},m}\{1\}$$

其中，第一个映射是命题 2.20 中的分圆范数，第二个映射是构造 3.14 中针对对偶 (A, I) := ($\mathscr{H}_{\mathrm{R}}$, $_m$, (q^m-1)) 定义的导出对数，其中 $\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}$ 和$\mathcal{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R},m}\{1\}$ 分别在变体 3.2 和定义 3.12 中定义。这里我们使用同一认定 $\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}/(q^m-1)\cong q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R})$（注 3.6）。

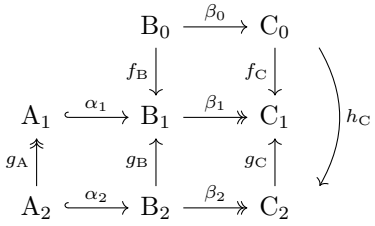
在本小节余下部分，我们构造分圆对数

$$\mathrm{dlog}_{\mathrm{cyc}}:\mathbb{G}_m(\mathrm{R})[-1]\longrightarrow\mathcal{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R}}\{1\}$$

通过证明构造3.15 的截断分圆对数在导出范畴 $\mathscr{D}(\mathbb{Z})$中，对于不同的整数 $m\geqslant 1$彼此相容。为此，我们构造相容的同伦 $h_{m,m'}$ 使适当的过渡图表交换（命题3.20）。˜这些同伦 $h_{m,m'}$ 则由第 $\Pi_{m'/m}$ 2.4节的分圆范数的部分 Habiro 提升构造而成，我们将其称为提升的分圆范数（命题 3.17 和注记 3.19）。

[13]限制$(m,\ \mathrm{N})=1$ 对于本节中定义分圆对数并非必要。我们采用这一约定，是因为在下一节（定义 4.21）中定义分圆单位的第一个 $m\geqslant 1$ -多对数类时，必须将范围限制在这些整数 q。

引理 3.16。设



设这是一个阿贝尔群的交换图，其中间行和底行是短正合列。若态射 g_{A} 是满射，则 f_{B} 的像包含于 g_{B}的像中。特别地，若态射 g_{B} 是单射，则存在唯一的阿贝尔群态射$h_{\mathrm{B}} : \mathrm{B}_0 \to \mathrm{B}_2$ 满足 $f_{\mathrm{B}} = g_{\mathrm{B}} \circ h_{\mathrm{B}}$。

证明。 只需证明包含关系 $f_{\mathrm{B}}(\mathrm{B}_0) \subseteq g_{\mathrm{B}}(\mathrm{B}_2)$成立，其中二者均视为 B_1的子集。我们先证明$f_{\mathrm{B}}(\mathrm{B}_0) \subseteq \beta_1^{-1}(g_{\mathrm{C}}(\mathrm{C}_2))$，再证明 $\beta_1^{-1}(g_{\mathrm{C}}(\mathrm{C}_2)) \subseteq g_{\mathrm{B}}(\mathrm{B}_2)$。第一个包含关系由态射 h_{C}的存在性推出：给定一个元素 $b_0 \in \mathrm{B}_0$, , 我们有

$$\beta_1(f_{\mathrm{B}}(b_0)) = f_{\mathrm{C}}(\beta_0(b_0)) = g_{\mathrm{C}}(h_{\mathrm{C}}(\beta_0(b_0))) \in g_{\mathrm{C}}(\mathrm{C}_2).$$

第二个包含关系由蛇引理和态射 g_{A}的满射性推出。 □

命题 3.17 （提升的分圆范数）。 设 R 是一个 *étale* $\mathbb{Z}$-代数。那么对于满足 $m|m'$ 的任意整数m、$m' \geqslant 1$，乘法幺半群的态射

$$\tilde{\Pi}_{m'/m} : \prod_{e|m} \mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)^2 \longrightarrow \prod_{e|m} \mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)^2 \times \prod_{\substack{e|m' \\ e\nmid m}} \mathrm{R}[q]/\Phi_e(q) \tag{3.17.1}$$

由 $(f_e(q)_{e|m} \mapsto (f'_e(q)_{e|m'} := \left(f_{(e,m)}\left(q^{\frac{e}{e}(\cdot,\frac{m}{m})}\right)^{\frac{m'}{[e,m]}}\right)_{e|m'}$ 良定义，并且限制为乘法幺半群的态射

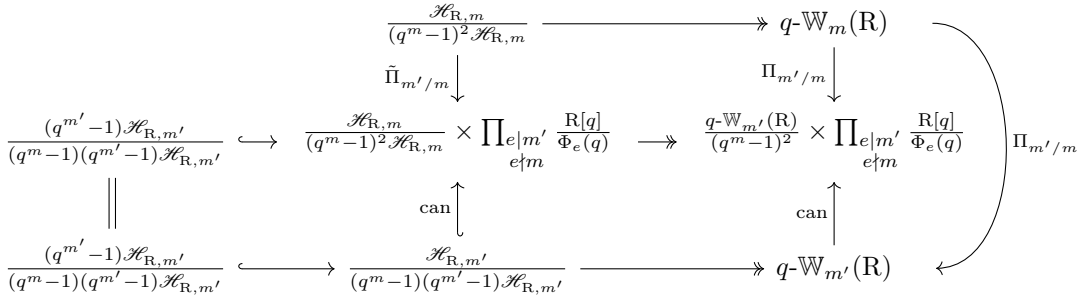
$$\tilde{\Pi}_{m'/m} : \mathscr{H}_{\mathrm{R},m}/(q^m-1)^2 \longrightarrow \mathscr{H}_{\mathrm{R},m'}/(q^m-1)(q^{m'}-1).$$

证明。 态射（3.17.1）良定义，这是因为对于满足 $e|m'$ 的每个整数 $e \geqslant 1$，我们有 $\Phi_e(q)^2 | \Phi_{(e,m)}(q^{\frac{e}{e}(\cdot,\frac{m}{m})})^2$ 属于 $\mathbb{Z}[q]$。此外，根据构造，它是乘法性的。

在证明的其余部分，我们利用引理 3.9 的单射性，将交换$\mathbb{Z}[q]$-代数 $\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}/(q^m-1)^2$ 和 $\mathscr{H}_{\mathrm{R},m'}/(q^m-1)(q^{m'}-1)$分别解释为态射（3.17.1）的源和目标的子环。为了证明 $\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}/(q^m-1)^2$ 在态射（3.17.1）下的像包含于 $\mathscr{H}_{\mathrm{R},m'}/(q^m-1)(q^{m'}-1)$ 中，首先注意到，如果 $e|m$，则 $f'_e(q) = f_e(q)^{\frac{m'}{m}}$，因此 $(f'_e(q))_{e|m}$ 定义了 $\mathscr{H}_{\mathrm{R}}$、$_m/(q^m-1)^2$ 中的一个元素。此外，根据 Wag25，2.7], , 我们有 $\mathscr{H}_{\mathrm{R}}$、$_{m'}/(q^m-1)^2 \cong \mathscr{H}_{\mathrm{R}}$、$_m/(q^m-1)^2$，从而得到交换 $\mathbb{Z}[q]$-代数的同构

$$\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}/((q^m-1)^2, (q^{m'}-1)) \cong q\text{-}\mathbb{W}_{m'}(\mathrm{R})/(q^m-1)^2$$

根据 [Wag25，定理 2.9]。特别地，存在一个阿贝尔群的交换图 s



其中间行和底行是短正合列，并且图右侧部分的交换性是命题 2.20的推论。阿贝尔群的自然态射

$$\mathscr{H}_{\mathrm{R},m'}/(q^m-1)(q^{m'}-1) \longrightarrow \mathscr{H}_{\mathrm{R},m}/(q^m-1)^2 \times \prod_{\substack{e|m'\\ e\nmid m}} \mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)$$

is m且由推论 3.10可知是单射。因此，所需结果是引理 3. 16
appl接到前一个图表。 □

推论 3.18. 设 R 是一个 *étale* $\mathbb{Z}$-代数。那么，对于满足 $m|m'$ 的任意整数 m、$m' \geqslant 1$，阿贝尔群的自然图表

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R},m}\{1\} & \xrightarrow{\exp} & \mathbb{G}_m\left(\frac{\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}}{(q^m-1)^2\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}}\right) \\ \cong\downarrow{\scriptstyle \frac{m'}{m}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\Pi}_{m'/m}} \\ \frac{(q^{m'}-1)\mathscr{H}_{\mathrm{R},m'}}{(q^m-1)(q^{m'}-1)\mathscr{H}_{\mathrm{R},m'}} & \xrightarrow{\exp} & \mathbb{G}_m\left(\frac{\mathscr{H}_{\mathrm{R},m'}}{(q^m-1)(q^{m'}-1)\mathscr{H}_{\mathrm{R},m'}}\right) \end{array}$$

是可交换的，其中 $\mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R},\,m}\{1\}$ 被视为 $(q^m-1)\mathscr{H}_{\mathrm{R},\,m}/(q^m-1)^2\mathscr{H}_{\mathrm{R},\,m}$ (备注 3.13).

证明。 由引理 3.9，只需证明 $\tilde{\Pi}_{m'/m}\circ\exp$ 和 $\exp\circ\frac{m'}{m}$ 作为映射，从 $\prod_{e|m}(\Phi_e(q))/(\Phi_e(q))^2$ 到 $\prod_{e|m}\mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)^2 \times \prod_{e|m',\ e\nmid m}\mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)\Phi_e(q)c_e(q)^{e|m}$ 是$\prod_{e|m}(\Phi_e(q))/(\Phi_e(q)^2)$的一个元素，而 $(c'_e(q))^{e|m'}$ 是它在函数 $\tilde{\Pi}_{m,\ m'}\circ\exp$ 下的像。如果$e|m$，那么

$$c'_e(q) = \left(1+\Phi_e(q)c_e(q)\right)^{\frac{m'}{m}} \equiv 1+\tfrac{m'}{m}\Phi_e(q)c_e(q) = \exp\left(\tfrac{m'}{m}\Phi_e(q)c_e(q)\right)$$

在 $\mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)^2$中。而如果 $e\nmid m$，那么由 $\mathbb{Z}[q]/(q^m-1)$-线性，交换的 $\mathbb{Z}[q]$-模 $(q^{m'}-1)/(q^m-1)(q^{m'}-1)$ 的 e^{th} q-ghost 分量为零，并且

$$c'_e(q) = \left(1+\Phi_{(e,m)}(q^{\frac{e}{(e,m)}})c_{(e,m)}(q^{\frac{e}{(e,m)}})\right)^{\frac{m'}{[e,m]}} \equiv 1$$

在 $\mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)$ 中，因为 $\Phi_e(q)|\Phi_{(e,m)}(q^{\frac{e}{e\ m(.\ )}})$。 □

˜**注 3.19.** 与命题 3.17 可能给人的印象相反，提升的分圆范数 $\Pi_{m'/m}$无法自然地提升为阿贝尔群态射

$$\tilde{\Pi}_{m'/m} : \mathbb{G}_m\left(\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}/(q^m-1)^2\right) \longrightarrow \mathbb{G}_m\left(\mathscr{H}_{\mathrm{R},m'}/(q^{m'}-1)^2\right).$$

事实上，在 $(m,\ m'):=(1,\ m)$的情形下，这样的提升将诱导出构造$[\mathrm{dlog}_{\mathrm{cyc}}^{(m)}] \in \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R},\ m}\{1\},\ \mathbb{G}_m(q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R})))$ 3.15 的分裂，特别是相应的截断分圆对数恒为零。然而，我们将在第4节证明，这些分圆对数并非恒为零。

命题 3.20. 设 R 是一个 *étale* $\mathbb{Z}$-代数。则对于满足 $m|m'$ 的每一对正整数(m,m')，都存在一个同伦 $h_{m,\ m'}$，使图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}_m(\mathrm{R})[-1] & \xrightarrow{\mathrm{dlog}_{\mathrm{cyc}}^{(m')}} & \mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R},m'}\{1\} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{F}_{m'/m}\{1\}} \\ \mathbb{G}_m(\mathrm{R})[-1] & \xrightarrow{\mathrm{dlog}_{\mathrm{cyc}}^{(m)}} & \mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R},m}\{1\} \end{array}$$

在导出范畴中交换 $\mathscr{D}(\mathbb{Z})$，并且对于满足 $m|m'|m''$ 的所有整数 m、m'、$m''\geqslant 1$，有 $h_{m',\ m''}\circ h_{m,\ m'} = h_{m,\ m''}$。

证明。 设 m和 m' 为满足 $m|m'$的正整数。我们希望找到一个同伦，使下图

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{G}_m(\mathrm{R}) & \xrightarrow{\Pi_{m'}} & \mathbb{G}_m(q\text{-}\mathbb{W}_{m'}(\mathrm{R})) & \xrightarrow{\mathrm{dlog}} & \mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R},m'}\{1\}[1] \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{F}_{m'/m}\{1\}} \\ \mathbb{G}_m(\mathrm{R}) & \xrightarrow{\Pi_m} & \mathbb{G}_m(q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R})) & \xrightarrow{\mathrm{dlog}} & \mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R},m}\{1\}[1] \end{array}$$

在导出范畴中交换 $\mathscr{D}(\mathbb{Z})$。由注 2.21，阿贝尔群图表

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{G}_m(\mathrm{R}) & \xrightarrow{\Pi_{m'}} & \mathbb{G}_m(q\text{-}\mathbb{W}_{m'}(\mathrm{R})) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \uparrow{\scriptstyle \Pi_{m'/m}} \\ \mathbb{G}_m(\mathrm{R}) & \xrightarrow{\Pi_m} & \mathbb{G}_m(q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R}))\end{array}$$

是交换的，因此只需找到一个同伦，使该图

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{G}_m(q\text{-}\mathbb{W}_{m'}(\mathrm{R})) & \xrightarrow{\mathrm{dlog}} & \mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R},m'}\{1\}[1] \\ \uparrow{\scriptstyle \Pi_{m'/m}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{F}_{m'/m}\{1\}} \\ \mathbb{G}_m(q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R})) & \xrightarrow{\mathrm{dlog}} & \mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R},m}\{1\}[1]\end{array}$$

在导出范畴中交换 $\mathscr{D}(\mathbb{Z})$。根据定义 3.12 与注记 3.13，该图的右侧竖直映射自然等同于（平移后的）复合

$$\mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R},m'}\{1\} \twoheadrightarrow \frac{(q^{m'}-1)\mathscr{H}_{\mathrm{R},m'}}{(q^m-1)(q^{m'}-1)\mathscr{H}_{\mathrm{R},m'}} \xrightarrow{\cong} \mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R},m}\{1\}$$

其中第一个映射由典范映射诱导

$$(q^{m'}-1)/(q^{m'}-1)^2 \twoheadrightarrow (q^{m'}-1)/(q^m-1)(q^{m'}-1)$$

的 $\mathbb{Z}[q]$-模诱导，而第二个映射由引理 3.11(3) 的同构所诱导。此外，自然图表

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{G}_m(q\text{-}\mathbb{W}_{m'}(\mathrm{R})) & \xrightarrow{\mathrm{dlog}} & \mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R},m'}\{1\}[1] \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow \\ \mathbb{G}_m(q\text{-}\mathbb{W}_{m'}(\mathrm{R})) & \xrightarrow{\mathrm{dlog}} & \frac{(q^{m'}-1)\mathscr{H}_{\mathrm{R},m'}}{(q^m-1)(q^{m'}-1)\mathscr{H}_{\mathrm{R},m'}}[1]\end{array}$$

in t导出范畴 $\mathscr{D}(\mathbb{Z})$，其中底部水平映射是 Co 的导出对数 n-stru构造3.14 对于数对 (A,I) := $(\mathscr{H}_{\mathrm{R},m'}/(q^m-1)(q^{m'}-1),(q^{m'}-1))$，是交换的。

接下来只需构造一个同伦，使图表

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{G}_m(q\text{-}\mathbb{W}_{m'}(\mathrm{R})) & \xrightarrow{\mathrm{dlog}} & \frac{(q^{m'}-1)\mathscr{H}_{\mathrm{R},m'}}{(q^m-1)(q^{m'}-1)\mathscr{H}_{\mathrm{R},m'}}[1] \\ \uparrow{\scriptstyle \Pi_{m'/m}} & & \uparrow{\scriptstyle \frac{m'}{m}}\cong \\ \mathbb{G}_m(q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R})) & \xrightarrow{\mathrm{dlog}} & \mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R},m}\{1\}[1]\end{array}$$

在导出范畴中交换 $\mathscr{D}(\mathbb{Z})$。展开导出对数的定义（构造˜struction3.14），这相当于寻找一个阿贝尔群态射 $\Pi_{m'/m}$ 使阿贝尔群图表

$$\begin{array}{ccccccccc}0 & \longrightarrow & \frac{(q^{m'}-1)\mathscr{H}_{\mathrm{R},m'}}{(q^m-1)(q^{m'}-1)\mathscr{H}_{\mathrm{R},m'}} & \xrightarrow{\exp} & \mathbb{G}_m\left(\frac{\mathscr{H}_{\mathrm{R},m'}}{(q^m-1)(q^{m'}-1)\mathscr{H}_{\mathrm{R},m'}}\right) & \longrightarrow & \mathbb{G}_m(q\text{-}\mathbb{W}_{m'}(\mathrm{R})) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle \frac{m'}{m}} & & \uparrow{\scriptstyle \tilde{\Pi}_{m'/m}} & & \uparrow{\scriptstyle \Pi_{m'/m}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R},m}\{1\} & \xrightarrow{\exp} & \mathbb{G}_m\left(\frac{\mathscr{H}_{\mathrm{R},m'}}{(q^{m'}-1)^2\mathscr{H}_{\mathrm{R},m'}}\right) & \longrightarrow & \mathbb{G}_m(q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R})) & \longrightarrow & 0\end{array}$$

˜交换。此类态射 $\Pi_{m'/m}$ 在命题 3.17 中构造。更准确地说，根据命题 3.17，这些态射是良定义的；右方交换图由构造可交换，而左方交换图根据推论 3.18可交换。最后，诱导同伦

˜ ˜ $h_{m,\,m'}$ 满足 $h_{m',\,m''}\circ h_{m,\,m'} = h_{m,\,m''}$ 这一事实是公式 $\Pi_{m''/m'}\circ\Pi_{m'/m} = \Pi_{m''/m}$ 的推论；可参照引理 2.19的证明验证这一点。 □

定义 3.21 （分圆对数）。 设 K 为一个数域，R 为 étale $\mathbb{Z}$-代数$\mathscr{O}_{\mathrm{K}}[\Delta^{-1}]_{\mathrm{K}}$ 。R 的分圆对数是映射

$$\mathrm{dlog}_{\mathrm{cyc}} : \mathbb{G}_m(\mathrm{R})[-1] \longrightarrow \mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R}}\{1\}$$

定义为对满足 $m \geqslant 1$ 的整数 $(m,\ \mathrm{N}) = 1$取逆极限；在导出范畴 $\mathscr{D}(\mathbb{Z})$中，对构造 m3.15 的 -截断分圆对数。这里要注意，我们使用命题 3.20 中的相容同伦来定义这个逆极限。[14]

注 3.22 (与 [Mao24]的比较)。 构造分圆对数 $\mathrm{dlog}_{\mathrm{cyc}}$ 的一般策略受到 Mao 构造精细棱柱对数 $\mathrm{dlog}_{\mathbb{\Delta}}$ [Mao24第 2]节的启发。不过要注意，Mao 的 p-进构造仅限于奇素数 p的情形。提升的分圆范数的显式公式（命题 3.17）使我们能够绕过这一技术假设，尤其是无需将构造限制在奇整数 $m \geqslant 1$上。

4 环合成调节子

设 K 为一个数域。在本节中，我们为每个整数 $d \geqslant 2$ 定义<风格 id='2'>环合成复形</风格>

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{CycSyn}}\left(\mathrm{R}, \mathbb{Z}(1)^{(d)}\right) \in \mathscr{D}(\mathbb{Z})$$

<风格 id='1'>的 </风格><风格 id='3'>R :</风格>= $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}[\Delta^{-1}$ <风格 id='6'>K </风格>] <风格 id='9'>(定义 </风格><风格 id='11'>4.7</风格><风格 id='13'>)，以及与之相关的第一陈类</风格>

$$c_1^{\mathrm{CycSyn}} : \mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}(\mathrm{R}, \mathbb{G}_m)[-1] \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{CycSyn}}\left(\mathrm{R}, \mathbb{Z}(1)^{(d)}\right)$$

<风格 id='1'>作为导出范畴中的一个映射 </风格> $\mathscr{D}$<风格 id='4'>(</风格>$\mathbb{Z}$<风格 id='7'>) </风格><风格 id='9'>(定义 </风格><风格 id='11'>4.17</风格><风格 id='13'>)，并证明该环合成上同调第一陈类在分圆单位处由第一多对数的 q</风格><风格 id='16'>-变形计算得到（定理 </风格><风格 id='18'>4.25</风格><风格 id='20'>）。</风格>

4.1 数域的环合成上同调

在本小节中，我们引入 R :$= \mathscr{O}_{\mathrm{K}}[\Delta^{-1}$ <风格 id='2'>K </风格>] (定义 <风格 id='5'>4.7</风格>) 的环合成上同调。它被定义为一个两项复形：零次项为 Nygaard 扭曲 $\mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R}}\{1\}$ (定义 <风格 id='8'>3.12</风格>)，一次项为圆分扭曲 $\mathscr{C}^{(d)}$ <风格 id='11'>R </风格> $\{1\}$，我们现在对其进行定义。

定义 4.1 （在 d 处的圆分扭曲）。 设 R 为交换环，且 $d \geqslant 1$ 为整数。对于每个整数 $m \geqslant 1$，R 在 d 处的 m-截断圆分扭曲是一个 $\mathscr{C}^{(d)}{}_{\mathrm{R}\ m}$-模

$$\mathscr{C}^{(d)}_{\mathrm{R},m}\{1\} := \mathscr{C}^{(d)}_{\mathrm{R},m} \otimes_{\mathbb{Z}[q]} (q^m - 1)/(q^m - 1)^2$$

其中，圆分环 $\mathscr{C}^{(d)}{}_{\mathrm{R}\ m}$ 在变体 2.34 中定义。若 K 是数域，且 R 是 étale$\mathbb{Z}$-代数 $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}[\Delta^{-1}{}_{\mathrm{K}}\ ]$，则 R 在 d 处的圆分扭曲是一个 $\mathbb{Z}[q]$-模

$$\mathscr{C}^{(d)}_{\mathrm{R}}\{1\} := \lim_{\substack{m \geqslant 1 \\ (m, \Delta_{\mathrm{K}})=1}} \mathscr{C}^{(d)}_{\mathrm{R},m}\{1\}$$

其中，极限取遍满足 $m \geqslant 1$ 的整数$(m,\mathrm{N}) = 1$，并沿着由作用于 $\mathrm{F}^{m'/m}$ 上的弗罗贝尼乌斯映射 q-Witt 向量（构造 2.9）以及第二个因子上的映射 $\binom{m'}{m}^{-1}$ （引理 3.11(2)）诱导的映射取极限。

注 4.2. 设 R 为 étale $\mathbb{Z}$-代数，且 $d \geqslant 2$ 为整数。对于每个整数 $m \geqslant 1$，存在 $\mathbb{Z}[q]$-模的自然同构

$$\mathscr{C}^{(d)}_{\mathrm{R},m}\{1\} \cong (q^m - 1)\mathscr{H}^{(d)}_{\mathrm{R},m}/(q^m - 1)^2\mathscr{H}^{(d)}_{\mathrm{R},m} \cong [m]_q\mathscr{H}^{(d)}_{\mathrm{R},m}/[m]_q^2\mathscr{H}^{(d)}_{\mathrm{R},m}$$

其中 $\mathscr{H}^{(d)}{}_{\mathrm{R}\ m}$ 是 m-截断 Habiro 环，即R 在 d 处（变式 3.4），且 Frobenius 映射在 q-Witt 向量上对应于 Habiro 环上的典范限制映射（注记 3.6）。注意，第一个同构对 $d = 1$ 也成立，且一般而言，可将 $(q^m - 1)$ 与$[m]_q$ 替换为 $\prod_{d|e|m} \Phi_e(q)$。

[14]更确切地说，为了在导出-范畴$\binom{m}{\mathrm{cyc}}$ 中写出映射 ∞dlog $\mathscr{D}(\mathbb{Z})$的极限，我们使用命题3.20中的$h_{m1m'}$ -同伦，以编码映射 $\mathrm{dlog}^{(m)}_{\mathrm{cyc}}$在不同整数 $m \geqslant 1$之间相容这一事实；并使用等式$h_{m',\ m''} \circ h_{m,\ m'} = h_{m,\ m''}$（同样在命题3.20中得证），以确保无需检验任何高阶相干性。

注 4.3。当 $d = p$ 是素数且 $m = p^r$ 是 p的幂时，4.2中的识别（用 $[m]_q$ 来表述）让人联想到棱柱上同调中的 Breuil–Kisin 扭 twist 概念 [BL22，第 2 节。2], 也就是说，我们有理想等式

$$\mathrm{I}\,\varphi_{\mathrm{A}}^{*}(\mathrm{I})\cdots(\varphi_{\mathrm{A}}^{r-1})^{*}(\mathrm{I}) = \left([p]_q[p]_{q^p}\cdots[p]_{q^{p^{r-1}}}\right) = \left([p^r]_q\right)$$

在 q-棱柱 $(\mathrm{A},\ \mathrm{I}) := (\mathbb{Z}_p[\![q-1]\!],\ [p]_q)$ 中。

记号 4.4。给定一个数域 K，$\mathrm{R} := \mathscr{O}_{\mathrm{K}}[\Delta^{-1}{}_{\mathrm{K}}\ ]$, 和整数 d，$m \geqslant 1$，我们用以下符号表示

$$\mathrm{can} : \mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R},m}\{1\} \longrightarrow \mathscr{C}_{\mathrm{R},m}^{(d)}\{1\}$$

由 $(\Phi_e(q)c_e(q))^{e|m} \mapsto (\Phi_e(q)c_e(q))^{d|e|m}$ 给出的 $\mathbb{Z}[q]$-模态射。这些映射在不同整数 $m \geqslant 1$ 之间按构造相容，因此它们诱导出一个 $\mathbb{Z}[q]$-模态射

$$\mathrm{can} : \mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R}}\{1\} \longrightarrow \mathscr{C}_{\mathrm{R}}^{(d)}\{1\}.$$

以下定义是构造 3.7 的一个变体。

构造 4.5（截断的扭曲圆分 Frobenius）。设 R 是一个交换环，且d，$m \geqslant 1$ 是整数。m-截断的 d^{th} 扭曲圆分 *Frobenius* 是阿贝尔群态射

$$\mathrm{Frob}_d^{\mathrm{cyc}}\{1\} : \mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R},m}\{1\} \longrightarrow \mathscr{C}_{\mathrm{R},m}^{(d)}\{1\}$$

由 $(q^m-1)(c_e(q))^{e|m} \mapsto (q^m-1)(^{c_{e/d}}(q^d))^{d|e|m}$ 给出。用 Habiro 环的语言来说，若 R étale 于 $\mathbb{Z}$，则此态射由以下复合给出

$$\frac{(q^m-1)\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}}{(q^m-1)^2\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}} \xrightarrow{\mathrm{Frob}_d^{\mathrm{Hab}}} \frac{(q^{dm}-1)\mathscr{H}_{\mathrm{R},dm}^{(d)}}{(q^{dm}-1)^2\mathscr{H}_{\mathrm{R},dm}^{(d)}} \xrightarrow{\frac{1}{d}} \frac{(q^m-1)\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}^{(d)}}{(q^m-1)^2\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}^{(d)}}$$

其中，第一个态射由构造 3.7 的 Habiro Frobenius 诱导。根据构造，截断的 d^{th} 扭曲圆分 Frobenius 在不同整数 $m \geqslant 1$之间相容。

定义 4.6（扭曲圆分 Frobenius）。设 K 是一个数域，R 是 étale $\mathbb{Z}$-代数$\mathscr{O}_{\mathrm{K}}[\Delta^{-1}{}_{\mathrm{K}}\ ]$, ，且 $d \geqslant 1$是一个整数。d^{th} 扭曲圆分 *Frobenius* 是如下阿贝尔群态射

$$\mathrm{Frob}_d^{\mathrm{cyc}}\{1\} : \mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R}}\{1\} \longrightarrow \mathscr{C}_{\mathrm{R}}^{(d)}\{1\}$$

定义为对满足 $m \geqslant 1$ 的整数取逆极限 $(m,\mathrm{N}) = 1$ 所得的 m-截断扭曲圆分 Frobenius（构造 4.5）。

定义 4.7（环合成上同调）。设 K 是一个数域，R 是 étale $\mathbb{Z}$代数$\mathscr{O}_{\mathrm{K}}[\Delta^{-1}{}_{\mathrm{K}}\ ]$, N 是 Δ_{K}的倍数，且 $d \geqslant 1$ 是一个整数。R 在 d处的环合成复形 为 对象

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{CycSyn}}(\mathrm{R},\mathbb{Z}(1)^{(d)}) := \left[\mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R}}\{1\} \xrightarrow{\mathrm{can}-\mathrm{Frob}_d^{\mathrm{cyc}}\{1\}} \mathscr{C}_{\mathrm{R}}^{(d)}\{1\}\right]$$

在导出范畴 $\mathscr{D}(\mathbb{Z})$中，其中首项 $\mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R}}\{1\}$ (定义 3.12) 位于上同调次数零，第二项 $\mathscr{C}^{(d)}{}_{\mathrm{R}}\ \{1\}$ (定义 4.1) 位于上同调次数一，而该态射由记号 4.4 和定义 4.6定义。

备注 4.8。尽管[15] 对于任意交换环 R，前一定义的变体也有意义，但我们不认为它在 étale$\mathbb{Z}$-代数 R 之外仍是合理的定义。这一判断直接源于基于绝对棱柱上同调定义合成上同调的方式 [BS22, BL22]。

注记4.9 (与合成上同调的比较)。设 K 是一个数域，R是 étale$\mathbb{Z}$-代数 $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}[\Delta^{-1}{}_{\mathrm{K}}\ ]$, 且 p 是一个素数。这里我们将 R的定义4.7 中的环合成复形与棱柱方法进行比较，后者是用于合成上同调的方法，详见 [BMS19,

[15]例如，若不将极限限制在满足 $m \geqslant 1$ 的整数$(m,\ \mathrm{N}) = 1$ 的定义3.a和4.1.

BS22、 BL22、AKN23]。遵循 [AKN23，第 7], 节，R相对于 q-棱柱的（权一）合成复形 $(\mathbb{Z}_p[\![q-1]\!], [p]_q)$ 是对象

$$\mathrm{R}\Gamma_{q\mathrm{syn}}(\mathrm{R},\mathbb{Z}_p(1)) := \mathrm{fib}\left(\mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathbb{\Delta}_{\mathrm{R}^{(1)}/\mathbb{Z}_p[\![q-1]\!]}\{1\} \xrightarrow{\mathrm{can}-\mathrm{Frob}_p^{\mathbb{\Delta}}\{1\}} \mathbb{\Delta}_{\mathrm{R}^{(1)}/\mathbb{Z}_p[\![q-1]\!]}\{1\}\right)$$

导出范畴 $\mathscr{D}(\mathbb{Z}_p)$ 的，其中 $\mathrm{R}^{(1)} := \mathrm{R}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p[\zeta_p]$ 而 $\mathrm{Frob}_p^{\mathbb{\Delta}}\{1\}$ 是棱柱上同调的第一个 Breuil–Kisin 扭 twist 上的除幂 Frobenius。鉴于 $\mathrm{R} = \mathscr{O}_{\mathrm{K}}[\Delta^{-1}\mathrm{K}\ ]$ 在 $\mathbb{Z}$上是 étale，$\mathrm{R}^{(1)}$ 相对于 $\mathbb{Z}_p[\![q-1]\!]$ 的棱柱上同调集中在零次，其值为棱镜位点 $(\mathrm{R}^{(1)}/\mathbb{Z}_p[\![q-1]\!])_{\mathbb{\Delta}}$ 的初始棱镜 $\mathrm{R}_p^{\wedge}[\![q-1]\!]$。类似地，Nygaard 扭曲 $\mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathbb{\Delta}_{\mathrm{R}^{(1)}/\mathbb{Z}_p[\![q-1]\!]}\{1\}$ 由 $(q-1)\mathrm{R}_p^{\wedge}[\![q-1]\!]$ 给出，并集中在零次（[BS22, 第 15], 节；另见 [Wag25，3.20]）。展开定义后，注释 2.26 和 3.8 中的 p-进实现映射随即导出一个自然的交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R}}\{1\} & \xrightarrow{\mathrm{can}-\mathrm{Frob}_d^{\mathrm{cyc}}\{1\}} & \mathscr{C}_{\mathrm{R}}^{(p)}\{1\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (q-1)\mathrm{R}_p^{\wedge}[\![q-1]\!] & \xrightarrow{\mathrm{can}-\mathrm{Frob}_p^{\mathbb{\Delta}}\{1\}} & \mathrm{R}_p^{\wedge}[\![q-1]\!] \end{array}$$

在导出范畴 $\mathscr{D}(\mathbb{Z})$ 中，其中所有项都位于上同调次数零。特别地，这个交换图诱导出一个自然的比较映射

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{CycSyn}}(\mathrm{R},\mathbb{Z}(1)^{(p)}) \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_{q\mathrm{syn}}(\mathrm{R},\mathbb{Z}_p(1))$$

在导出范畴 $\mathscr{D}(\mathbb{Z})$ 中。

注4.10 (截断的环合成上同调)。给定一个数域 K，$\mathrm{R} := \mathscr{O}_{\mathrm{K}}[\Delta^{-1}\ _{\mathrm{K}}\ ]$, 的一个倍数 N，以及 Δ_{K}，和一个整数 $d \geqslant 1$，定义4.7中的环合成复形 $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{CycSyn}}(\mathrm{R}\ \mathbb{Z}(1)^{(d)})$ 是对满足条件的整数 $m \geqslant 1$ 的极限 $(m,\ \mathrm{N}) = 1$，其中取相应的复形

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{CycSyn}}(\mathrm{R},\mathbb{Z}(1)_m^{(d)}) := \left[\mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R},m}\{1\} \xrightarrow{\mathrm{can}-\mathrm{Frob}_d^{\mathrm{cyc}}\{1\}} \mathscr{C}_{\mathrm{R},m}^{(d)}\{1\}\right]$$

在导出范畴 $\mathscr{D}(\mathbb{Z})$ 中，态射由下式给出：

$$\mathrm{can}-\mathrm{Frob}_d^{\mathrm{cyc}}\{1\} : (\Phi_e(q)c_e(q))_{e|m} \mapsto (\Phi_e(q)c_e(q) - \Phi_e(q)c_{d/e}(q^d))_{d|e|m}.$$

这确实是注 4.2、记号 4.4和构造 4.5的推论。

4.2 第一陈类

在本小节中，我们将环合成上同调第一陈类定义为（定义 4.17），它是第 $\mathrm{dlog}^{\mathrm{cyc}}: \mathbb{G}_m(\mathrm{R})[-1] \to \mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R}}\{1\}$ 节 3.2 中分圆对数的精细化。更确切地说，我们通过在截断层级展示适当的零伦（构造 4.12 和命题 4.13），证明分圆对数经由第 4.1 节中定义的环合成复形分解。

记号 4.11. 给定一个 étale $\mathbb{Z}$-代数 R 和一个整数 $m \geqslant 1$，我们记

$$\mathrm{E}_m := \{(y,z) \in \mathbb{G}_m(\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}/(q^m-1)^2) \times \mathbb{G}_m(\mathrm{R}) \mid y = \Pi_m(z) \text{ 在 } \mathscr{H}_{\mathrm{R},m}/(q^m-1) \cong q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R})\}$$

对应于扩张类的阿贝尔群

$$0 \longrightarrow \mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R},m}\{1\} \xrightarrow{\exp\times 1} \mathrm{E}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m(\mathrm{R}) \longrightarrow 0$$

由 m-截断分圆对数 $\mathrm{dlog}_{\mathrm{cyc}}^{(m)}$ 给出，即构造3.15。这里我们使用同构

$$\mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R},m}\{1\} \cong (q^m-1)\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}/(q^m-1)^2\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}$$

备注 3.13 ，以使这个短正合列有意义。

下述构造将用于定义上述零伦（命题 4.13），并给出引言中提出的诱导循环合成第一陈类的公式（推论4.18）。

构造 4.12. 设 R 是 étale $\mathbb{Z}$-代数，$d \geqslant 2$ 和 $m \geqslant 1$ 是整数。我们构造一个阿贝尔群态射

$$s_d : \mathrm{E}_m \longrightarrow \mathscr{C}^{(d)}_{\mathrm{R},m}\{1\}$$

其中 E_m 定义见记号 4.11。此态射由下列表达式给出

$$s_d : (y, z) \longmapsto \frac{1}{d} \log\left(\frac{\tilde{\Pi}_d(y)}{\mathrm{Frob}_d^{\mathrm{Hab}}(y)}\right)$$

其中，公式按以下约定理解：

- $\tilde{\Pi}_d := \mathrm{can} \circ \tilde{\Pi}_d$ 是复合映射

$$\mathbb{G}_m\left(\frac{\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}}{(q^m-1)^2}\right) \xrightarrow{\tilde{\Pi}_d} \mathbb{G}_m\left(\frac{\mathscr{H}_{\mathrm{R},dm}}{(q^m-1)(q^{dm}-1)}\right) \xrightarrow{\mathrm{can}} \mathbb{G}_m\left(\frac{\mathscr{H}^{(d)}_{\mathrm{R},dm}}{(q^m-1)(q^{dm}-1)}\right)$$

  其中第一个映射 $\tilde{\Pi}_d$ 是命题 3.17中的提升的分圆范数；

- $\mathrm{Frob}_{\mathrm{Hab}d}$ 是复合映射

$$\mathbb{G}_m\left(\frac{\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}}{(q^m-1)^2}\right) \xrightarrow{\mathrm{Frob}_d^{\mathrm{Hab}}} \mathbb{G}_m\left(\frac{\mathscr{H}^{(d)}_{\mathrm{R},dm}}{(q^{dm}-1)^2}\right) \twoheadrightarrow \mathbb{G}_m\left(\frac{\mathscr{H}^{(d)}_{\mathrm{R},dm}}{(q^m-1)(q^{dm}-1)}\right)$$

  其中第一个映射$\mathrm{Frob}_d^{\mathrm{Hab}}$是构造 3.7 中的 Habiro Frobenius；

- 对数是阿贝尔群态射

$$\log : \mathbb{G}_m\left(\frac{\mathscr{H}^{(d)}_{\mathrm{R},dm}}{(q^m-1)(q^{dm}-1)}\right) \longrightarrow \frac{\mathscr{H}^{(d)}_{\mathrm{R},dm}}{(q^m-1)(q^{dm}-1)}, \quad t \longmapsto t-1;$$

- “除以 d”理解为阿贝尔群态射

$$d^{-1} = [d]_{q^m}^{-1} : \frac{[dm]_q \mathscr{H}^{(d)}_{\mathrm{R},dm}}{[m]_q[dm]_q \mathscr{H}^{(d)}_{\mathrm{R},dm}} \xrightarrow{\cong} \frac{[m]_q \mathscr{H}^{(d)}_{\mathrm{R},dm}}{[m]_q^2 \mathscr{H}^{(d)}_{\mathrm{R},dm}} \cong \mathscr{C}^{(d)}_{\mathrm{R},m}\{1\}$$

  由除以 $[d]_{q^m} = [dm]_q/[m]_q$ 给出（引理 3.11（3））。

要验证映射 s_d 良定义，只需证明，对每个 $(y, z) \in \mathrm{E}_m$，元素

$$\frac{\tilde{\Pi}_d(y)}{\mathrm{Frob}_d^{\mathrm{Hab}}(y)} - 1 \in \mathscr{H}^{(d)}_{\mathrm{R},dm}/[m]_q[dm]_q\mathscr{H}^{(d)}_{\mathrm{R},dm}$$

属于理想 $([dm]_q)$，或者等价地说，$\tilde{\Pi}_d(y) \equiv$ 弗罗贝尼乌斯$_d^{\mathrm{Hab}}(y)$ 属于 $\mathscr{H}(d)\,\mathrm{R}_{\,dm}/[dm]_q$。现在我们使用引理 3.9，将其证明从 Habiro 环 $\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}$（变体 3.2）自然地推广到变体$\mathscr{H}^{(d)}\ \mathrm{R}_{\,m}$（变体 3.4），以便将该陈述归结为关于 q-幽灵坐标的陈述。更准确地说，只需对满足 $d|e|dm$ 的整数 $e \geqslant 1$ 证明该恒等式在 e^{th} q-幽灵坐标上的成立。[16] 对每个这样的整数 e，所需恒等式都可由 $\mathrm{R}[q]/\Phi_e(q)$ 中的等式链推出：

$$\tilde{\Pi}_d(y)_e = \Pi_d(y)_e = \Pi_d(\Pi_m(z))_e = \Pi_{dm}(z)_e = z^{\frac{dm}{e}} = z^{\frac{m}{e/d}} = \mathrm{Frob}_d^{\mathrm{Hab}}(\Pi_m(z))_e = \mathrm{Frob}_d^{\mathrm{Hab}}(y)_e$$

其中我们利用了 $y \equiv \Pi_m(z)$（模 $\Phi_e(q)$）根据 $(y,\ z) \in \mathrm{E}_m$ 的定义（记号 4.11）。

[16]请注意，这是关键步骤：此处我们需要 $\Phi_e(q)$ 在 $\mathscr{H}^{(d)}$ 中可逆 $_{\mathrm{R},dm}$ 对于 $d \nmid e$，这也是.....的原因
采用变体 2.34、变体 3.4和定义 4.1。

命题 4.13。 设R 是一个 *étale* $\mathbb{Z}$-代数，且 $d \geqslant 2$ 是一个整数。那么对于每个整数$m \geqslant 1$，映射

$$s_d : \mathrm{E}_m \longrightarrow \mathscr{C}^{(d)}_{\mathrm{R},m}\{1\}$$

构造 *4.12* 诱导出一个自然同伦 h'_m 使复合映射

$$\mathbb{G}_m(\mathrm{R})[-1] \xrightarrow{\mathrm{dlog}^{(m)}_{\mathrm{cyc}}} \mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R},m}\{1\} \xrightarrow{\mathrm{can}-\mathrm{Frob}^{\mathrm{cyc}}_d\{1\}} \mathscr{C}^{(d)}_{\mathrm{R},m}\{1\}$$

在导出范畴 $\mathscr{D}(\mathbb{Z})$ 中与零同伦。

证明。 这个复合映射对应于一个 Ext 中的扩张$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{G}_m(\mathrm{R})\ \mathscr{C}_{(d)\ \mathrm{R}\ m}\{1\})$，它由扩张 $[\mathrm{dlog}^{(m)}_{\mathrm{cyc}}] \in \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{G}_m(\mathrm{R})\mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R},\ m}\{1\})$ 构造 3.15 沿映射 can –弗罗贝尼乌斯$^{\mathrm{cyc}}_d\{1\}$推出而得。展开映射$\mathrm{dlog}^{(m)}_{\mathrm{cyc}}$的定义可知，这个扩张的分裂又等价于一个阿贝尔群态射

$$s_d : \mathrm{E}_m \longrightarrow \mathscr{C}^{(d)}_{\mathrm{R},m}\{1\}$$

使阿贝尔群图表

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R},m}\{1\} & \xrightarrow{\exp\times 1} & \mathrm{E}_m \\ {\scriptstyle \mathrm{can}-\mathrm{Frob}^{\mathrm{cyc}}_d\{1\}}\downarrow & \swarrow_{s_d} & \\ \mathscr{C}^{(d)}_{\mathrm{R},m}\{1\} & & \end{array}$$

是交换的。我们断言， s_d 构造 4.12 中的态射满足这一性质。为证明这一点，令 x 为 $\mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R},m}\{1\}$中的一个元素。于是我们得到以下一系列等式

$$\begin{aligned} \frac{1}{d}\log\Big(\frac{\tilde{\Pi}_d(\exp(x))}{\mathrm{Frob}^{\mathrm{Hab}}_d(\exp(x))}\Big) &= \frac{1}{d}\Big(\frac{1+d\,\mathrm{can}(x)}{1+\mathrm{Frob}^{\mathrm{Hab}}_d(x)} - 1\Big) \\ &= \frac{1}{d}\big((1+d\,\mathrm{can}(x))(1-\mathrm{Frob}^{\mathrm{Hab}}_d(x)) - 1\big) \\ &= \frac{1}{d}\big(d\,\mathrm{can}(x) - \mathrm{Frob}^{\mathrm{Hab}}_d(x)\big) \\ &= \mathrm{can}(x) - \mathrm{Frob}^{\mathrm{cyc}}_d\{1\}(x) \end{aligned}$$

其中，第一个等式是推论3.18的结果；第二个和第三个等式源于以下事实： d可以(x) 以及 弗罗贝尼乌斯$^{\mathrm{Hab}}_d(x)$ 都可被 $(q^{dm}-1)$整除；最后一个等式是构造4.5的结果。

□

构造4.14 (截断分圆合痕第一陈类**)**。 设 R是一个 étale $\mathbb{Z}$-代数，且 $d \geqslant 2$ 和 $m \geqslant 1$ 是整数。由命题 4.13，分圆对数

$$\mathrm{dlog}^{(m)}_{\mathrm{cyc}} : \mathbb{G}_m(\mathrm{R})[-1] \longrightarrow \mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R},m}\{1\}$$

在导出范畴 $\mathscr{D}$**(**$\mathbb{Z}$**)** 中，唯一地分解为通过该映射的同伦纤维的映射

$$\mathrm{can} - \mathrm{Frob}^{\mathrm{cyc}}_d\{1\} : \mathscr{N}^{\geqslant 1}\mathscr{C}_{\mathrm{R},m}\{1\} \longrightarrow \mathscr{C}^{(d)}_{\mathrm{R},m}\{1\}.$$

我们记作

$$c_1^{\mathrm{CycSyn}} : \mathbb{G}_m(\mathrm{R})[-1] \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{CycSyn}}(\mathrm{R}, \mathbb{Z}(1)^{(d)}_m)$$

在导出范畴 $\mathscr{D}(\mathbb{Z})$中的诱导映射，其中目标对象定义见注4. 10.

注4.15。 命题 h'_m 中的同伦 h'_m 在不同整数$m \geqslant 1$之间是相容的。为证明这一点，只需证明阿贝尔群图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{E}_{m'} & \xrightarrow{h_{m,m'}} & \mathrm{E}_m \\ {\scriptstyle s_d}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s_d} \\ \mathscr{C}^{(d)}_{\mathrm{R},m'}\{1\} & \xrightarrow{\mathrm{F}_{m'/m}\{1\}} & \mathscr{C}^{(d)}_{\mathrm{R},m}\{1\} \end{array}$$

对所有整数 m， $m' \geqslant 1$ 满足 $m|m'$时均为交换的；这是构造4.12与命题$h_{m,\ m'}$ 的同伦3.20之间的相容性所导致的结果。

注 4.16 (étale下降)。 根据 [Wag24，命题 2。15], 交换环上的恒等函子所满足的任意下降性质，函子$\mathrm{R} \mapsto \mathbb{W}_m(\mathrm{R})$ 对每个整数$m \geqslant 1$也都满足。展开定义可知，这尤其意味着 étale-代数R （定义4.7和注4.10）上的环合成复形满足关于R的 étale下降，而构造4.14 的环合成上同调第一陈类自然地分解为一个映射

$$c_1^{\mathrm{CycSyn}} : \mathrm{R}\Gamma_{\text{ét}}(\mathrm{R}, \mathbb{G}_m)[-1] \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{CycSyn}}(\mathrm{R}, \mathbb{Z}(1)_m^{(d)})$$

在导出范畴 $\mathscr{D}(\mathbb{Z})$ 中，对任意整数 $d \geqslant 2$ 与 $m \geqslant 1$。注意，这里我们用到仿射概形的高阶相干上同调消失这一事实。

定义 4.17 （环合成上同调第一陈类）。 设 K 为一个数域，R 为 étale$\mathbb{Z}$-代数 $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}[\Delta_{\mathrm{K}}^{-1}]$，N 为 Δ_{K} 的倍数，且 $d \geqslant 2$ 为一个整数。环合成上同调第一陈类之 R 在 d 处是如下映射

$$c_1^{\mathrm{CycSyn}} : \mathbb{G}_m(\mathrm{R})[-1] \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{CycSyn}}(\mathrm{R}, \mathbb{Z}(1)^{(d)})$$

在导出范畴 $\mathscr{D}(\mathbb{Z})$中，定义为对整数 $m \geqslant 1$ 满足 $(m,\mathrm{N}) = 1$的那些 m-截断映射（构造 4.14）所取的逆极限。注意，这里我们用注记 4.15来理解这一逆极限。

下述结果是对基本 p-进计算的整体类比，即 Kato（[Kat91，推论 2.9],; 亦见 [Gro90，命题4.1与附录]或 [Som99，第 289]页）。

推论 4.18. 设 K 为一个数域，R 为 *étale* $\mathbb{Z}$-代数 $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}[\Delta_{\mathrm{K}}^{-1}]$，，且 $d \geqslant 2$ 为一个整数。对每个单位 $u \in \mathbb{G}_m(\mathrm{R})$， u 处的环合成上同调第一陈类由下式给出

$$c_1^{\mathrm{CycSyn}} : u \longmapsto \Big(\frac{1}{d}\log\Big(\frac{\tilde{\Pi}_d(\Pi_m^{\mathrm{Hab}}(u))}{\mathrm{Frob}_d^{\mathrm{Hab}}(\Pi_m^{\mathrm{Hab}}(u))}\Big)\Big)_{m\geqslant 1} \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{CycSyn}}(\mathrm{R}, \mathbb{Z}(1)^{(d)})$$

其中 $\Pi_m^{\mathrm{Hab}}(u) \in \mathscr{H}_{\mathrm{R},m}/(q^m-1)^2$ 是元素 $\Pi_m(u) \in q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R})$ 通过交换 $\mathbb{Z}[q]$-代数的满射 $\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}/(q^m-1)^2 \twoheadrightarrow q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R})$ 的任一提升（注 *3.6*）， $\tilde{\Pi}_d$ 是提升的分圆范数（命题 *3.17*），且弗罗贝尼乌斯$\mathrm{frob}_d^{\mathrm{Hab}}$是 *Habiro Frobenius*（构造 *3.7*）。

证明. 由定义 4.17，只需在截断层次上证明该结果，此时这是构造4.12与 4.14的推论。 □

4.3 第一 q多对数

在本小节中，我们用第一多对数的 q-变形（定理 4.25）来计算上一小节中分圆单位处的环合成上同调第一陈类。为此，我们先引入第一多对数的相关 q-变形，其定义的灵感来自 Deligne 对 p-进多对数的概念（[Del89，3.2.3]）。

构造 4.19. 设 $d \geqslant 2$ 为整数，并考虑幂级数

$$\mathrm{Li}_1^{(d)}(\mathrm{T})_q := \sum_{\substack{k\geqslant 1\\ d\nmid k}} \frac{\mathrm{T}^k}{[k]_q} \in \mathbb{Z}[q]\left[\frac{1}{[k]_q}\,\middle|\,{}^{k\geqslant 1}_{d\nmid k}\right][\![\mathrm{T}]\!].$$

给定任意整数 $m \geqslant 1$，由恒等式 $[k+m]_q = [k]_q + q^k[m]_q$可知，约化模这个幂级数的 lo $[m]_q$ 是

$$\mathrm{Li}_1^{(d)}(\mathrm{T})_q \equiv \sum_{a\geqslant 0}\sum_{\substack{0<k<m\\ d\nmid k}} \frac{\mathrm{T}^{k+am}}{[k]_q} = \Big(\sum_{a\geqslant 0}\mathrm{T}^{am}\Big)\Big(\sum_{\substack{0<k<m\\ d\nmid k}}\frac{\mathrm{T}^k}{[k]_q}\Big) = \frac{1}{1-\mathrm{T}^m}\sum_{\substack{0<k<m\\ d\nmid k}}\frac{\mathrm{T}^k}{[k]_q}.$$

特别地， m-截断的第一 q-多重对数

$$\mathrm{Li}_1^{(d)}(\mathrm{T})_q := \frac{1}{1-\mathrm{T}^m}\sum_{\substack{0<k<m\\ d\nmid k}}\frac{\mathrm{T}^k}{[k]_q} \in \mathbb{Z}[q,\mathrm{T}]\left[\frac{1}{1-\mathrm{T}^m}, \frac{1}{[k]_q}\,\middle|\,{}^{0<k<m}_{d\nmid k}\right]/[m]_q$$

在不同整数 $m \geqslant 1$ 之间兼容。

记号 4.20. 设 K 为一个数域，R 为 étale $\mathbb{Z}$-代数 $\mathscr{O}_K[\Delta_K^{-1}]$，且 $\zeta \in R$ 为一个单位根。对于每个与 Δ_K 互素的整数 $m \geqslant 1$，我们记

$$[\zeta] := (\zeta^{\frac{1}{e}})_{e|m} \in \mathscr{H}_{R,m}$$

与 ζ 在 Habiro 环 $\mathscr{H}_{R\hat{\otimes}m}$（变体 3.2）相关联的类，以及在任意 $\mathscr{H}_{R\text{-}m}$代数中的相应元素（例如，$[\zeta] \in \mathscr{H}^{(d)}_{R,m}$，其中任意整数 $d \geqslant 1$）。注意，该类 $[\zeta]$在 $\mathscr{H}_{R\hat{\otimes}m}$ 是良定义的，因为对于任意与 Δ_K互素的整数 $m \geqslant 1$，ζ 在 R 中存在一个 m^{th}次根 $\zeta^{\frac{1}{m}}$；而对于任意整数 $e \geqslant 1$ 和满足 $pe|m$的素数 p，Frobenius 映射$\varphi_{R^\wedge_p}: R^\wedge_p \to R^\wedge_p$将 $\zeta^{\frac{1}{pe}}$ 映为 $\zeta^{\frac{1}{e}}$。

定义 4.21（第一 q-多对数类）。设 K 为一个数域，R 为 étale $\mathbb{Z}$代数$\mathscr{O}_K[\Delta_K^{-1}]$，$d \geqslant 2$ 且 $m \geqslant 1$ 和 $\zeta \in$ 为整数，$R \setminus \{\pm 1\}$ 为一个单位根，且在 R 中存在一个 m^{th}次根 $\zeta^{\frac{1}{m}}$。ζ 的 m截断的第一 q-多对数类为元素

$$\mathrm{Li}_1^{(d)}([\zeta])_q := \Big(\frac{1}{1-[\zeta]^m} \sum_{\substack{0<k<m \\ d\nmid k}} \frac{[\zeta]^k}{[k]_q}\Big) \cdot [m]_q \in \mathscr{C}^{(d)}_{R,m}\{1\}$$

其中 $\mathscr{C}^{(d)}_{R,m}\{1\}$ 在定义 4.1 中定义，$[\zeta] \in \mathscr{H}^{(d)}_{R,m}$ 在记号 4.20 中定义，并且我们使用注记 4.2 中 $\mathbb{Z}[q]$-模的同构 $\mathscr{C}^{(d)}_{R,m}\{1\} \cong [m]_q \mathscr{H}^{(d)}_{R,m}/[m]_q^2 \mathscr{H}^{(d)}_{R,m}$。[17] 这些元素经由构造 4.19 在不同整数 $m \geqslant 1$ 之间相容，我们称 ζ 的第一q-多对数类，并记为

$$\mathrm{Li}_1^{(d)}([\zeta])_q \in \mathscr{C}^{(d)}_R\{1\}$$

所诱导的相容元素系。类似地，我们记

$$\mathrm{Li}_1^{(d)}([\zeta])_q \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{CycSyn}}(R, \mathbb{Z}(1)^{(d)})$$

经由阿贝尔群的典范映射 $\mathscr{C}^{(d)}_R\{1\} \twoheadrightarrow \mathrm{H}^1_{\mathrm{CycSyn}}(R, \mathbb{Z}(1)^{(d)})$ 所诱导的元素。

注记 4.22（与 [GLSQ23] 的比较）。设 k 为特征 p 的完美域，且 R 为 étale $\mathbb{Z}_p$-代数 $W(k)$。按照 Gros–Le Stum–Quirós [GLSQ23], 的工作，$R^{(1)} := R \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\zeta_p]$ 的绝对棱柱上同调可由复形计算

$$\mathbb{\Delta}_{R^{(1)}} \simeq \Big[R[\![q-1]\!] \xrightarrow{\partial_{\mathbb{\Delta}}} R[\![q-1]\!]\Big]$$

其中棱柱导子 $\partial_{\mathbb{\Delta}}$ 由 $\partial_{\mathbb{\Delta}}(q^k) := [pk]_q q^{k-1}$给出。该识别与 Breuil–Kisin 扭曲和 Nygaard 滤过相容，从而对 $R^{(1)}$的绝对 syntomic 上同调给出类似的计算。此外，定义 4.21 中的第一批 q-多对数上同调类，对于 $d = p$，通过注记4.9中的 p-adic 比较映射，诱导出相对 syntomic 上同调群 $\mathrm{H}^1_{q\mathrm{syn}}(R, \mathbb{Z}_p(1))$ 中的自然 q- 多对数上同调类。我们预计，这些类应当来自绝对 syntomic 上同调群 $\mathrm{H}^1_{\mathrm{syn}}(R^{(1)}, \mathbb{Z}_p(1))$ 中的自然上同调类，并通过典范映射 $\mathrm{H}^1_{\mathrm{syn}}(R^{(1)}, \mathbb{Z}_p(1)) \to \mathrm{H}^1_{q\mathrm{syn}}(R, \mathbb{Z}_p(1))$ 映射得到。然而，借助先前的棱柱导子 $\partial_{\mathbb{\Delta}}$，我们尚未能够展示出这样的上同调类。

引理 4.23。设K 是一个数域，R 是 *étale* $\mathbb{Z}$-代数 $\mathscr{O}_K[\Delta_K^{-1}]$，$\zeta \in R$ 是阶数整除N的单位根。对于每个满足$(m,N) = 1$的整数 $m \geqslant 1$ *s*，该元素

$$\Pi_m^{\mathrm{Hab}}(1-[\zeta]) := \prod_{0 \leqslant j < m} (1 - q^j[\zeta]) \in \mathscr{H}_{R,m}$$

通过交换-代数 $\mathscr{H}_{R,m} \twoheadrightarrow \mathscr{H}_{R,m}/(q^m-1) \cong q\text{-}\mathbb{W}_m(R)$ 的典范满射映射到元素 $\Pi_m(1-\zeta) \in q\text{-}\mathbb{W}_m(R)$ *(*注 *3.6)*。

[17]注意，在 $\mathbb{Z}[q]$-模 $\mathscr{C}^{(d)}_{R,m}\{1\}$ 中计算构造 4.19 的第一个 q-多对数时，我们用到$[k]_q = \prod_{e|k, e>1} \Phi_e(q)$ 可逆（因为每个 $\Phi_e(q)$ 都可逆，若 $d \nmid k$），且 $1-[\zeta]^m$ 可逆（因为 ζ 的阶在 R 中可逆，并且只考虑 $(e,N) = 1$ 的 e^{th} q-幽灵坐标，所以 $1-\zeta^{\frac{1}{e}}$ 在 R 中可逆）。

证明。 设 $e \geqslant 1$ 为满足 $e|m$的整数，特别是 $(e,\mathrm{N}) = 1$。根据 [Wag24，引理 2.23],只需证明 $\Pi_m^{\mathrm{Hab}}(1-[\zeta]) \equiv \Pi_m(1-\zeta)$ 模 $\Phi_e(q)$，这可由以下等式链推出

$$\prod_{0\leqslant j<m}(1-q^j\zeta^{\frac{1}{e}}) = \prod_{0\leqslant a<\frac{m}{e}}\prod_{0\leqslant j<e}(1-q^{ae+j}\zeta^{\frac{1}{e}}) \equiv \prod_{0\leqslant j<e}(1-q^j\zeta^{\frac{1}{e}})^{\frac{m}{e}} \equiv (1-\zeta)^{\frac{m}{e}}$$

其中我们用到 q 是模 $\Phi_e(q)$的本原 e^{th} 单位根。 □

命题 4.24. 对任意整数 $d \geqslant 2$ 与 $m \geqslant 1$，等式

$$\frac{1}{d}\log\left(\frac{\prod_{0\leqslant j<m}(1-q^j\mathrm{T})^d}{\prod_{0\leqslant j<m}(1-q^{jd}\mathrm{T}^d)}\right) \equiv -[m]_q\cdot\frac{1}{1-\mathrm{T}^m}\sum_{\substack{0<k<m\\ d\nmid k}}\frac{\mathrm{T}^k}{[k]_q}$$

在交换环 $\mathbb{Z}[q,\mathrm{T}]\left[\frac{1}{1-\mathrm{T}^m}, \frac{1}{[k]_q}, \frac{1}{1-q^j\mathrm{T}} \;\middle|\; \underline{\quad}^{0<k<m}_{d\nmid k}, \underline{\quad}, 0\leqslant j<m\right]/[m]_q^2$中成立。

证明。 我们首先证明

$$[m]_q^2\,\mathbb{Z}[q,\mathrm{T}][\mathrm{S}_1^{-1}] = [m]_q^2\,\mathbb{Q}[q][\mathrm{S}_2^{-1}][\![\mathrm{T}]\!]\cap\mathbb{Z}[q,\mathrm{T}]$$

其中$\mathrm{S}_1 \subseteq \mathbb{Z}[q,\mathrm{T}]$ 是由满足 $d \nmid k$的整数 $0<k<m$所对应的 $1-\mathrm{T}^m$, $[k]_q$ 以及 $0\leqslant j<m$所对应的 $1-q^j\mathrm{T}$生成的乘法集，而$\mathrm{S}_2 \subseteq \mathbb{Q}[q]$ 是由满足 $d\nmid k$的整数 $0<k<m$ 所对应的 $[k]_q$ 生成的乘法集。由构造可知，左端是右端的子集。另一包含关系则由交$[m]_q^2\,\mathbb{Q}[q][\mathrm{S}_2^{-1}]\cap\mathbb{Z}[q]$ 等于 $\prod_{d|e|m}\Phi_e(q)^2\,\mathbb{Z}[q]$这一事实推出。

利用上一段，只需在更大的交换$\mathbb{Q}[q][\mathrm{S}_2^{-1}][\![\mathrm{T}]\!]/[m]_q^2$中证明所需的等式，其中计算

$$\log\left(\prod_{0\leqslant j<m}(1-q^j\mathrm{T})\right) = \sum_{0\leqslant j<m}\log(1-q^j\mathrm{T}) = -\sum_{0\leqslant j<m}\sum_{k\geqslant 1}\frac{(q^j\mathrm{T})^k}{k} = -\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{q^{mk}-1}{q^k-1}\right)\frac{\mathrm{T}^k}{k}$$

有意义。特别地，这意味着

$$\begin{aligned}\frac{1}{d}\log\left(\frac{\prod_{0\leqslant j<m}(1-q^j\mathrm{T})^d}{\prod_{0\leqslant j<m}(1-q^{jd}\mathrm{T}^d)}\right) &= -\sum_{\substack{k\geqslant 1\\ d\nmid k}}\left(\frac{q^{mk}-1}{q^k-1}\right)\frac{\mathrm{T}^k}{k}\\ &= -[m]_q\sum_{\substack{k\geqslant 1\\ d\nmid k}}\left(\frac{[k]_{q^m}}{[k]_q}\right)\frac{\mathrm{T}^k}{i}\\ &\equiv -[m]_q\cdot\sum_{\substack{i>0\\ d\nmid k}}\frac{\mathrm{T}^k}{[k]_q}\end{aligned}$$

其中我们使用了 $[m]_q\cdot[k]_{q^m} = [m]_q\cdot k$ 模 $[m]_q^2$。所需结果于是可由构造 4.19 得出。

□

定理 *4.25.* 设 K 为数域，R 为 *étale* $\mathbb{Z}$-代数 $\mathscr{O}_K[\Delta^{-1}\ K\ ]$, N 是Δ_K的倍数，且 $d\geqslant 2$ 为整数。对每个单位根 $\zeta \in R\setminus\{\pm 1\}$, [18] 环合成上同调第一陈类（定义 *4.17*）将单位 $1-\zeta\in\mathbb{G}_m(R)$ 映到第一 q-多对数类 $Li_1^{(d)}([\zeta])_q \in H^1_{\mathrm{CycSyn}}(R\ \mathbb{Z}(1)^{(d)})$（定义 *4.21*）：

$$c_1^{\mathrm{CycSyn}}: 1-\zeta \longmapsto -\mathrm{Li}_1^{(d)}([\zeta])_q.$$

[18]对于 $\zeta=-1$，将 R 替换为 $\mathrm{R}[\frac{1}{2}]$,，以确保 $1-\zeta\in\mathbb{G}_m(\mathrm{R})$，即可得到相同的结果。

证明。 首先注意到 $1-\zeta$ 是 R 中的一个单位。事实上，若 g 是 ζ的阶，则 $1-\zeta$ 在 R 中整除 Φ_g(1)，而 Φ_g(1)在 $\mathbb{Z}$ 中整除 g （Φ_g(1)要么等于 p，此时 $g=p^r$ 是一个素数幂；要么等于 1），因此 $1-\zeta$在 R 中整除 g。此外，由于 $g>2$，我们知道 g 和 $\Delta_{\mathbb{Q}(\zeta)}$ 的素数支撑相同。利用 $\Delta_{\mathbb{Q}(\zeta)}$ 在 $\mathbb{Z}$中整除 Δ_K 这一事实，可知 g 在 R 中可逆，因此 $1-\zeta$也可逆。

根据推论 4.18 和定义 4.21，只需证明对于每个与 $m\geqslant 1$ 互素的整数N（特别是与 ζ的阶互素），等式

$$\frac{1}{d}\log\Big(\frac{\tilde{\Pi}_d(\Pi_m^{\mathrm{Hab}}(1-\zeta))}{\mathrm{Frob}_d^{\mathrm{Hab}}(\Pi_m^{\mathrm{Hab}}(1-\zeta))}\Big)=-\Big(\frac{1}{1-[\zeta]^m}\sum_{\substack{0<k<m\\ d\nmid k}}\frac{[\zeta]^k}{[k]_q}\Big)\cdot[m]_q$$

在 $\mathscr{C}^{(d)}_{\mathrm{R}_m}\{1\}$ 中，其中 $\Pi_m^{\mathrm{Hab}}(1-\zeta)\in\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}/(q^m-1)^2$ 是 $\Pi_m(1-\zeta)\in q\text{-}\mathbb{W}_m(\mathrm{R})$ 的任意一个提升。根据引理 4.23，可以选取提升 $\Pi_m^{\mathrm{Hab}}(1-\zeta)$ 为 $\prod_{0\leqslant j<m}(1-q^j[\zeta])$，其中元素 $[\zeta]\in\mathscr{H}_{\mathrm{R},m}/(q^m-1)^2$ 在记号 4.20 中定义。

仿照引理 3.9的证明，交换环 $\mathscr{H}^{(d)}_{\mathrm{R}_{dm}}/[m]_q[dm]_q$ 在 $\mathbb{Z}$上是平坦的，因此也是 d-挠无关的。这意味着只需在将 d求逆后进行所需的计算，因此依照构造 4.12，只需考虑整数 e^{th} q的 $e\geqslant 1$ -坐标，且这些整数满足 $d|e|m$。根据 Habiro Frobenius 弗罗贝尼乌斯$^{\mathrm{Hab}}_d$（构造 3.7）的定义，我们有

$$\mathrm{Frob}_d^{\mathrm{Hab}}(\Pi_m^{\mathrm{Hab}}(1-\zeta))=\mathrm{Frob}_d^{\mathrm{Hab}}\Big(\prod_{0\leqslant j<m}(1-q^j[\zeta])\Big)=\prod_{0\leqslant j<m}(1-q^{jd}[\zeta]^d).$$

˜根据提升的分圆范数的定义 Π_d （命题 3.17），类似地可得

$$\tilde{\Pi}_d(\Pi_m^{\mathrm{Hab}}(1-\zeta))=\tilde{\Pi}_d\Big(\prod_{0\leqslant j<m}(1-q^j[\zeta])\Big)=\prod_{0\leqslant j<m}(1-q^j[\zeta])^d$$

这里我们利用了这样一个事实：我们只考虑满足 $d|e|m$ 的整数 $e\geqslant 1$ 对应的 e^{th} q 坐标。特别地，这意味着

$$\frac{1}{d}\log\Big(\frac{\tilde{\Pi}_d(\Pi_m^{\mathrm{Hab}}(1-\zeta))}{\mathrm{Frob}_d^{\mathrm{Hab}}(\Pi_m^{\mathrm{Hab}}(1-\zeta))}\Big)=\frac{1}{d}\log\Big(\frac{\prod_{0\leqslant j<m}(1-q^j[\zeta])^d}{\prod_{0\leqslant j<m}(1-q^{jd}[\zeta]^d)}\Big),$$

所需结果便由命题 4.24 推出，因为提升 $\Pi_d^{\mathrm{Hab}}(1-\zeta):=\prod_{0\leqslant j<m}(1-q^j[\zeta])$ of $\Pi_m(1-\zeta)$ 是 $\mathscr{H}^{(d)}_{\mathrm{R}_m}/[m]_q^2$ 中的一个单位。 □

注 4.26。 设 K 是一个数域，$d\geqslant 2$ 是一个整数，且 $\zeta\in\mathscr{O}_K[\Delta^{-1}{}_K]\setminus\{\pm 1\}$ 是一个单位根。利用等式 $(1-\zeta)=-\zeta\cdot(1-\zeta^{-1})$，定理 4.25 特别推出

$$\mathrm{Li}_1^{(d)}([\zeta])_q=\mathrm{Li}_1^{(d)}([\zeta]^{-1})_q$$

在 $\mathrm{H}^1_{\mathrm{CycSyn}}(\mathscr{O}_K[\Delta^{-1}]_K,\mathbb{Z}(1)^{(d)})$ 中。这里我们利用环合成上同调第一陈类在单位根 $-\zeta\in\mathrm{R}$ 处消失这一事实，而这可由推论 4.18 得出。有趣的是，虽然一般关系 $\mathrm{Li}_1^{(d)}(\mathrm{T})_q=\mathrm{Li}_1^{(d)}(\mathrm{T}^{-1})_q$ 作为抽象幂级数并不成立，但它在命题 4.24 中引入的交换环里确实成立。特别地，前述在 $[\zeta]$ 处的关系已在圆分扭曲 $\mathscr{C}^{(d)}_{\mathrm{R}}\{1\}$ 中成立。

注记 4.27。借助注记4.9中的 p-进实现映射，定理 4.25 还表明，第一 q-多对数类 $-\mathrm{Li}_1^{(p)}([\zeta])_q$ 也自然出现在相对 syntomic 上同调群 $\mathrm{H}^1_{q\mathrm{syn}}(\mathrm{R},\mathbb{Z}_p(1))$ 中，作为 $1-\zeta$ 的合成上同调第一陈类。据我们所知，即使是这一经典 p-进结果的 q 修正也属新结果，并补充了 Anschütz 和 Le Bras [ALB20], 的工作；他们证明了 q 变形的 p-进对数自然出现在拟正则半完全交 $\mathbb{Z}_p^{\mathrm{cyc}}$-代数 R 的合成上同调群 $\mathrm{H}^0_{\mathrm{syn}}(\mathrm{R},\mathbb{Z}_p(1))$ 中。

参考文献

[AKN23] Ben Antieau、Achim Krause 和 Thomas Nikolaus。相对于 δ-环的棱柱上同调。https://arxiv.org/abs/2301.08711，2023年。

[ALB20] Johannes Anschütz 和 Arthur-César Le Bras。《 p 完成的 cyclotomic trace 在次数 2 中》。《K理论年刊》，5(3):539–580，2020。[Ang15] Vigleik Angeltveit。《Witt 向量的范数映射》。《数学报告》，353 386，2015 5 381( ): – 。[AT69] M. F. Atiyah 和 D. O. Tall。《群表示、 λ- 环与 J- 同态》。《拓扑学》，8:253–297，1969。[BD94] A. Beĭlinson 和 P. Deligne。《扎吉尔关于多重对数与调节子关系的猜想的动机诠释》。载于《动机》（西雅图，WA，1991），《纯粹数学研讨会论文集》第 55 卷，第 97–121 页。美国数学会，普罗维登斯，RI，1994。[Beĭ84] A. A. Beĭlinson。《高阶调节子与 L 函数的值》。载于《数学当前问题》第 24 卷，《科学与技术成果》，第 181–238 页。苏联科学院，全联盟科学技术信息研究所，莫斯科，1984。[BL22] Bhargav Bhatt 和 Jacob Lurie。《绝对棱柱上同调》。https://arxiv.org/abs/2201 06120，2022。[BMS18] Bhargav Bhatt、Matthew Morrow 和 Peter Scholze。《整数 p-adic Hodge 理论》。《高等科学研究所数学出版物》，128:219–397，2018。[BMS19] Bhargav Bhatt、Matthew Morrow 和 Peter Scholze。《拓扑 Hochschild 同调与整数 p-adic Hodge 理论》。《高等科学研究所数学出版物》，129:199–310，2019。[BS22] Bhargav Bhatt 和 Peter Scholze。《棱柱与棱柱上同调》。《数学年刊》（第 2 辑），196(3):1135–1275，2022。[Col82] Robert F. Coleman。《二重对数、调节子与 p 69 2 171 208, -adic L 函数》。1982《数学创刊》，( ): – 。[Col88] Pierre Colmez。《 $s = 1$ 上的 p-adic ζ 函数的留数》。《数学创刊》，91(2):371–389，1988。[Del89] Pierre Deligne。《去掉三个点的射影直线的基本群》。载于《Q 上的伽罗瓦群》（伯克利，CA，1987），《数学科学研究所出版物》第 16 卷，第 79–297 页。施普林格，纽约，1989。[FM87] Jean-Marc Fontaine 和 William Messing。《 p-adic 周期与 p-adic étale 上同调》。载于《算术代数几何当前趋势》（阿卡塔，加利福尼亚州，1985），《当代数学》第 67 卷，第 179–207 页。美国数学会，普罗维登斯，RI，1987。[Gaz26] Quentin Gazda。《后记：数域的环合成调节子》。准备中，2026。[GLSQ23] Michel Gros、Bernard Le Stum 和 Adolfo Quirós。《绝对微积分与圆分环上的棱柱晶体》。https://arxiv.org/abs/2310.13790，2023。[Gro90] Michel Gros。《合成调节子与 p-adic L 函数值》。I。《数学创刊》，99(2):293–320，1990。附录由 Masato Kurihara 撰写。[Gro94] Michel Gros。《合成调节子与 L p-adic 函数值》。II。《数学创刊》，115(1):61–79，1994。[GSWZ24] Stavros Garoufalidis、Peter Scholze、Campbell Wheeler 和 Don Zagier。《数域的 Habiro 环》。https://arxiv.org/abs/2412.04241，2024。[GW25] Stavros Garoufalidis 和 Campbell Wheeler。《Habiro 上同调中的显式类》。https://arxiv. org/abs/2505.19885，2025。[Hes15] Lars Hesselholt。《大 de Rham–Witt 复形》。《数学学报》，214(1):135–207，2015。[HW98] Annette Huber 和 Jörg Wildeshaus。《Beilinson 与 Deligne 的经典动机多重对数》。《数学文献》，3:27–133，1998。[Kat87] Kazuya Kato。《关于 p-adic 消失圈（Fontaine-Messing 思想的应用）》。载于《代数几何，仙台，1985》，《纯粹数学高级研究》第 10 卷，第 207–251 页。北荷兰，阿姆斯特丹，1987。[Kat91] Kazuya Kato。《显式互反律与 Fontaine-Messing 的上同调》。《法国数学会通报》，119(4):397–441，1991。[Leo62] Heinrich-Wolfgang Leopoldt。《关于阿贝尔数域的算术》。《纯粹与应用数学杂志》，209:54–71，1962。[Leo75] Heinrich Wolfgang Leopoldt。《ζ 值的 p-adic 理论。II p-adic Γ-变换》。《纯粹与应用数学杂志》，274(275):224–239，1975。[Mao24] Zhouhang Mao。《通过范数构造棱柱对数与棱柱 Hochschild 同调》。https://arxiv.org/ abs/2409.04400，2024。[NSW08] Jürgen Neukirch、Alexander Schmidt 和 Kay Wingberg。《数域上同调》，《数学科学基础》第 323 卷 /数学科学基础/。施普林格出版社，柏林，第二版，2008。[Sch25] Peter Scholze。《Habiro 上同调》。https://people.mpim-bonn.mpg.de/scholze/ss2025_habiro.pdf，2025。[Som99] Mutsuro Somekawa。《对数-合成调节子与 p-adic 多重对数》。《K理论》，17(3):265–294，1999。[Sul23] Yuri J. F. Sulyma。《棱柱与 Tambara 函子 I：扭曲幂、横截性与完美夹心》。https://arxiv.org/abs/2309.03181，2023。[Wag24] Ferdinand Wagner。《 q-Witt 向量与 q-Hodge 复形》。https://arxiv.org/abs/2410.23078，2024。[Wag25] Ferdinand Wagner。《Habiro 环上的 q-Hodge 复形》。https://arxiv.org/abs/2510.04782，2025。[Was97] Lawrence C. Washington。《圆分域导论》，《数学研究生教材》第 83 卷。施普林格出版社，第 2 版，1997。