arXiv:2602.22002v1 [math.MG] 25 Feb 2026

分形投影七十年

Kenneth J. Falconer[0000−0001−8823−0406]

1 引言

在2014年于塔巴尔茨举行的会议分形几何与随机性 *V* 上，我作了题为“分形投影六十年”的综述报告，其与Jon Fraser和Xiong Jin [31], 合写的一个版本发表于会议论文集 [8]。这标志着John Marstrand 1954 年论文 [89] 《平面分数维集合的一些基本几何性质》在《伦敦数学学会会刊》上发表六十周年。长期以来，该论文很少受到关注，但自20世纪80年代以来，Marstrand投影定理已成为分形几何中许多结果的原型，并衍生出大量变体与应用。这一领域如今比以往任何时候都受到更深入的研究，借鉴了遍历理论、CP过程、傅里叶变换、问题离散化以及加性组合学等现代技术，同时也离不开大量的巧思。

我在2024年于开姆尼茨举行的分形几何与随机性 *VII* 会议上所作的报告《分形投影七十年》，重点介绍了该领域过去十年取得的诸多重大进展。本文也回顾了其中一些较新的研究成果，是对 [31] 的续篇；该文收录了许多早期结果和参考文献。另有许多优秀的论文和书籍，对投影性质作了其他全面综述，其中包括参考文献 [52, 92, 93, 94, 95, 96, 134]。此外，会议论文集也收录了许多富有启发性的综述，特别是德国的“分形几何与随机性”会议和法国的“分形与相关领域”会议的论文集，涵盖了分形几何的这一主题及许多其他方面。

Kenneth J. Falconer 数学与统计学院，圣安德鲁斯大学，North Haugh，圣安德鲁斯，法夫 KY168NS，英国，电子邮件：kjf@st.andrews.ac.uk

1.1 一般说明

本文大部分内容讨论平面内集合到直线上的正交投影，或从 $\mathbb{R}^n$ 到 m维子空间的正交投影。在平面中，令 L_θ 表示与 x轴成 $\theta \in [0,\pi)$ 角的直线，并记 $\mathrm{proj}_\theta\colon \mathbb{R}^2 \to L_\theta$ 为到 L_θ上的正交投影，见图1。稍微滥用一下记号，我们将L记作任意直线 L_θ上的勒贝格测度，并以显然的方式将其与 $\mathbb{R}$ 对应起来。

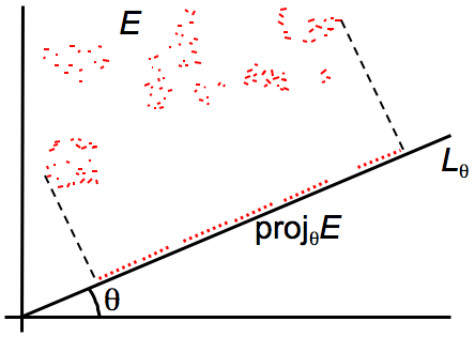

图 1：将集合 E 投影到方向为 θ 的直线上。

在高维情形下，我们用 $G(n,m)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 的 m维子空间构成的Grassmann流形，其中 $1 \le m < n$。于是，$G(n,m)$ 是一个 $m(n-m)$ 维紧流形，带有自然的不变测度 $\gamma_{n,m}$，该测度在局部上等价于 $m(n-m)$ 维勒贝格测度。当我们写“对几乎所有 $V \in G(n,m)$”时，指的是相对于 $\gamma_{n,m}$而言。对于 $V \in G(n,m)$，令 $\mathrm{proj}_V\colon \mathbb{R}^n \to V$ 表示到 m维子空间 V 上的正交投影，并记 L^m 为 m维勒贝格测度；我们将 V 与 $\mathbb{R}^m$视为同一对象。

我们约定，在平面情形下专门使用 proj_θ，而在更一般的 $G(n,m)$ 情形下使用 proj_V。

这里我们主要关注集合的投影，而非测度的投影，不过集合投影的许多结果都有相应的测度类比；事实上，许多关于集合投影的证明都依赖于考察由相应集合支撑的适当测度的投影。测度的下、上 Hausdorff 维数和填充维数可以用局部维数来定义，而对于动力系统定义的测度，这些维数可能全部相等。此时，投影测度的维数通常可以用熵和 Lyapunov指数来表示。

我们有时会不特别说明，而默认所研究的 $\mathbb{R}^m$ 子集都是博雷尔集或解析集；事实上，对于许多结果，假设它们是紧致集也不会造成什么损失。我们不讨论完全一般的集合，因为这类集合没有解析或可测结构；它们的表现可能会因所假设的逻辑公理而变得奇特。尽管如此，我们注意到，最近 Lutz 和 Stull [86] 利用有效维数和计算

复杂度，在不要求集合为博雷尔集或解析集的情况下，得出了一些关于投影的结果。

1.2 Marstrand 投影定理

平面中的 Marstrand 投影定理 [89]可表述如下。

定理 1.1。 设 $E \subset \mathbb{R}^2$ 是博雷尔集或解析集。那么 *(i)* 维数$_{\mathrm{H}}$投影$_{\theta}E \le$最小{维数$_{\mathrm{H}}$ E, 1}，对于几乎所有 $\theta \in [0,\pi)$取等号；*(ii)* 若 维数$_{\mathrm{H}}$ $E > 1$，则对于几乎所有 $\theta \in [0,\pi)$，$\mathcal{L}$(投影$_{\theta}E$) > 0。

Marstrand 定理在更高维度下的自然类比最早由 Mattila [90]于 1975 年提出。

定理 1.2。 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是博雷尔集或解析集。那么

(i) 维数$_{\mathrm{H}}$投影$_{V}E \le$最小值{维数$_{\mathrm{H}}$ E, m}，当 $\gamma_{n,m}$几乎所有 $V \in G(n,m)$时取等号，

(ii) if $\dim_{\mathrm{H}} E > m$ *then* $\mathcal{L}^m(\mathrm{proj}_V E) > 0$ *for* $\gamma_{n,m}$*-almost all* $V \in G(n,m)$.

由于正交投影是利普希茨映射，不会增大点与点之间的距离，因此定理 1.1 和定理 1.2 的 (i) 中的不等式可直接由豪斯多夫测度和维数的定义得到；但要证明对几乎所有 θ或V 都成立等号，则要复杂得多。在最初的论文中，Marstrand [89] 使用了涉及平面几何和测度论的精细估计；但在 1968 年，Kaufman [80] 运用位势论为定理 1.1(i) 给出了新的证明，并用傅里叶变换证明了定理 1.1(ii)。随后 Mattila [90] 将这一方法用于更高维情形，得到了定理 1.2。

简而言之，位势论方法依赖于用能量积分刻画豪斯多夫维数。我们用 M(E) 表示支撑在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的正有限博雷尔测度。对于 $s > 0$，我们写作:

$$I^s(\mu) := \int\int \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^s} \tag{1.1}$$

对于测度 $\mu \in$ M (E) 的 s-能量。然后

$$\dim_{\mathrm{H}} E = \sup\left\{s : \text{ there exists } \mu \in \mathcal{M}(E) \text{ such that } I^s(\mu) < \infty\right\}.$$

定理 1.1(i) 可由以下观察得证：对于所有 $0 < s < \dim_{\mathrm{H}} E$，都存在一个测度 $\mu \in$M(E)，使得 $I^s(\mu) < \infty$，并验证 $\int I^s(\mu_\theta)d\theta \le c_s I^s(\mu)$，其中 μ_θ 是测度 μ 在方向为 θ的直线 L_θ 上的投影，由 $\mu_\theta(F) = \mu(\mathrm{proj}_\theta^{-1}F)$ 对于 $F \subset L_\theta$ 给出。高维情形，即定理 1.2(i)，可用类似方法证明。

定理 1.1(ii) 可利用傅里叶变换得到。设 $\widehat{\mu}(z) = \int e^{-2\pi i x\cdot z}d\mu(x)$ $z \in \mathbb{R}^n$ 表示 μ 的傅里叶变换，将帕塞瓦尔定理和卷积公式应用于 (1.1) 中的能量表达式，得到

$$I^s(\mu) = c_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\widehat{\mu}(z)|^2}{|z|^{n-s}} dz \qquad (0 < s < n), \tag{1.2}$$

其中 $c_{n,\ s}$ 仅取决于 n 和 s，见 [95,定理 3.10]。那么，若 $E \subset \mathbb{R}^2$ 且 $\dim_{\mathrm{H}} E > 1$，我们可以找到 $\mu \in \mathrm{M}(E)$ 和 $1 < s < \dim_{\mathrm{H}} E$，使得 $I^s(\mu) < \infty$。将 (1.2) 写成径向坐标形式，可推出 $\iint |\widehat{\mu_\theta}(t)|^2 dt\, d\theta < \infty$，因此对几乎所有 θ，投影测度 μ_θ 在 L_θ 上相对于 L 绝对连续，且是平方可积函数；所以特别地，E 的支集具有正的 L-测度。

能量方法和傅里叶方法及其推广与扩展，已广泛应用于分形几何，尤其是投影研究中。本综述还将介绍更多实例；若要深入了解，可参阅例如 [26, 31, 90, 91, 93, 94, 95]

马斯特兰德定理是分形几何中大量研究的原型。如果在某种情形下，一个集合的参数化像具有某种维数性质，且该性质对几乎所有参数都成立——也许是对几乎所有 θ 或 V 成立——我们就说“Marstrand 型定理成立”。接下来的各节中，我们会看到许多这样的例子。

2 投影的例外集

尽管马斯特兰德定理表明，使投影方向 θ 满足 $\dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj}_\theta E < \min\{\dim_{\mathrm{H}} E, 1\}$ 的“例外集”具有零勒贝格测度，但例外方向集往往必须比这还要小一些。事实上，Kaufman势论方法 [80]还给出了定理 1.1(i) 和 1.2(i) 中例外集维数的上界；具体而言，若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 且 $0 \le s < \dim_{\mathrm{H}} E < m$，则

$$\dim_{\mathrm{H}}\{V \in G(n,m) : \dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj}_V E < s\} \le m(n-m) - (m-s). \tag{2.1}$$

（此处将该界写成这种形式，是为了与 $m(n-m)$（Grassmann流形 $G(n,m)$ 的维数）进行比较。利用傅里叶变换，Falconer [23] 于 1982 年得到了另一种形式的例外集界：若 $0 \le s \le m \le \dim_{\mathrm{H}} E$，则

$$\dim_{\mathrm{H}}\{V \in G(n,m) : \dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj}_V E < s\} \le \max\{m(n-m) - (\dim_{\mathrm{H}} E - s), 0\}, \tag{2.2}$$

若 $m \le \dim_{\mathrm{H}} E \le n$,

$$\dim_{\mathrm{H}}\{V \in G(n,m) : \mathcal{L}^n(\mathrm{proj}_V E) = 0\} \le m(n-m) - (\dim_{\mathrm{H}} E - m); \tag{2.3}$$

这里的思路是，‘超额维数’ $\dim_{\mathrm{H}} E - s$ 或 $\dim_{\mathrm{H}} E - m$越大，例外 V集就越小。按照（2.1）直接估计，以及（2.2）–（2.3）通过集合维数超过某个阈值的幅度来给出界限的思路，对例外集维数的估计分别称为“Kaufman 型”和“Falconer 型”估计。

Peres 和 Schlag [119] 于 2000年给出的另一项估计补全了这四种估计。若 $\dim_{\mathrm{H}} E > 2m$ 则

$$\dim_{\mathrm{H}}\{V \in G(n,\ m)\colon \operatorname{proj}_V E\text{的内部为空}\} \le m(n-m) - (\dim_{\mathrm{H}} E - 2m)。 \tag{2.4}$$

例子表明，对于所有参数而言，(2.1)-(2.2) 中例外投影的界通常并非最优；尤其在平面情形下，人们得到了各种改进。例如，Bourgain [16] 采用离散化方法证明，当 $\dim_{\mathrm{H}} E < 1$ 时，

$$\dim_{\mathrm{H}}\{\theta : \dim_{\mathrm{H}} \operatorname{proj}_\theta E < \tfrac{1}{2}\dim_{\mathrm{H}} E\} = 0. \tag{2.5}$$

这些结果和各种例子促成了 Oberlin 于 2012年 提出的「Oberlin猜想」，即最优上界：对于 $E \subset \mathbb{R}^2$ 且 $0 < t \le \dim_{\mathrm{H}} \le 1$,

$$\dim_{\mathrm{H}}\left\{\theta : \theta : \dim_{\mathrm{H}} \operatorname{proj}_\theta E < \tfrac{1}{2}(t + \dim_{\mathrm{H}} E)\right\} \le t,$$

或者等价地

$$\dim_{\mathrm{H}}\{\theta : \dim_{\mathrm{H}} \operatorname{proj}_\theta E < s\} \le \max\{2s - \dim_{\mathrm{H}} E, 0\},$$

对于 $0 \le s \le \min\{\dim_{\mathrm{H}} E,\ 1\}$，见图2。Oberlin [102] 注意到了……之间的类比

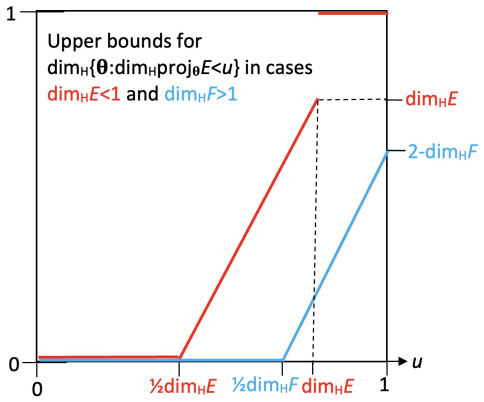

图2：投影的例外方向的维数上界 $\dim_{\mathrm{H}}\{\ \theta\colon \dim_{\mathrm{H}} \operatorname{proj}_\theta < s\}$，情形为 $\dim_{\mathrm{H}} E < 1$（虚线）和 $\dim_{\mathrm{H}} E > 1$（实线）。

这一猜想和 Furstenberg 集猜想。（后者探讨集合 E 的最小豪斯多夫维数：存在一族直线 $\mathbb{L}$，它们与 E 的交集的豪斯多夫维数均至少为 s，而直线集 $\mathbb{L}$ 在直线的自然参数化下的维数至少为 t。）包括 [104, 107, 113, 114] 在内的多位作者都推动了 Oberlin猜想的研究，但最终

Ren 和 Wang [129] 于2023年将其彻底证明，作为他们证明 Furstenberg 集猜想的推论。

定理 2.1。 [129] 设 $E \subset \mathbb{R}^2$ 为博雷尔集，且 $0 \le s \le$ 最小值{维数$_{\mathrm{H}} E$,1}。则

$$\dim_{\mathrm{H}}\{\theta : \dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj}_\theta E < s\} \le \max\{2s - \dim_{\mathrm{H}} E, 0\}, \tag{2.6}$$

且此界是锐的。

对于将 $\mathbb{R}^n$ 的子集投影到 m维子空间的情形， $n > 2$ 方面的已知结果较少。我们已经在 (2.1)–(2.4) 中指出了例外投影维数的上界，但这些界并非对所有参数都最优；某些情况下已有更好的估计，详见 [95] 中的讨论。例如，He [66] 采用离散化方法，将 (2.5) 推广到从 $\mathbb{R}^n$投影到 m维子空间的情形：

$$\dim_{\mathrm{H}} \left\{V \in G(n,m) : \dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj}_V E \le \tfrac{m}{n} \dim_{\mathrm{H}} E\right\} \le m(n-m) - 1.$$

顺便一提，我们将证明不等式 (2.6) 可导出 Erd˝os-Volkmann 猜想的一个极简证明：不存在具有通常加法和乘法且豪斯多夫维数严格介于 0 与 1 之间的 $\mathbb{R}$博雷尔子环；这一结果于 2003年 由 Edgar 和 Millar [22]以及 Bourgain [15]分别独立证明。

对于 $a \in \mathbb{R}$ ，定义 ψ_a ： $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 采用坐标形式，也可表示为与向量 $\theta = (a,$ 1) 的“点”积，形式如下

$$\psi_a(x,y) = ax + y \equiv (x,y) \cdot \theta.$$

从几何上看， ψ_a是沿方向 $\theta = (a,$ 1) 的直线进行正交投影，并同时按比例 $(a^2+1)^{1/2}$ 缩放。设 R 是一个环，使得 $0 < \dim_{\mathrm{H}} R < 1$。取 $\epsilon > 0$ 满足 $\dim_{\mathrm{H}} R + \epsilon < \min\{\dim_{\mathrm{H}}(R \times R),\ 1\}$。（这样做是可行的，因为利用豪斯多夫维数的乘积法则，对博雷尔 E 和 F，有 $\dim_{\mathrm{H}} E + \dim_{\mathrm{H}} F \le \dim_{\mathrm{H}}(E \times F)$，因此 $\dim_{\mathrm{H}}(R \times R) \ge 2\dim_{\mathrm{H}} R$。）由于 R 是一个环，对所有 $a \in R$，都有 $\psi_a(R \times R) \subset R$ ，因此

$$R \subset \{a : \dim_{\mathrm{H}} \psi_a(R \times R) < \dim_{\mathrm{H}} R + \epsilon\}.$$

将投影表示为 ψ_a，取 $E = R \times R$ 和 $s =$$\dim_{\mathrm{H}} R + \epsilon$，并应用 (2.6),

$$\begin{aligned}\dim_{\mathrm{H}} R &\le \dim_{\mathrm{H}}\{a : \dim_{\mathrm{H}} \psi_a(R \times R) < \dim_{\mathrm{H}} R + \epsilon\} \\ &\le \max\{2(\dim_{\mathrm{H}} R + \epsilon) - \dim_{\mathrm{H}}(R \times R), 0\} \le 2\epsilon,\end{aligned}$$

再次使用乘积法则。对于任意小的 ϵ，这都成立，这与$0 <$ 维$_{\mathrm{H}} R < 1$相矛盾。

3 维数的其他定义

尽管许多关于投影的问题最初都是针对豪斯多夫维数提出的，但使用其他维数定义来探讨类似问题也很自然。本节将考察与其他分形维数相关的投影性质。

3.1 盒计数维数

非空紧集 $E \subset \mathbb{R}^n$的下盒计数维数和上盒计数维数定义如下：

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} E = \liminf_{r\to 0} \frac{\log N_r(E)}{-\log r} \text{ and } \overline{\dim}_{\mathrm{B}} E = \limsup_{r\to 0} \frac{\log N_r(E)}{-\log r}$$

其中， $N_r(E)$ 是直径为 r 、覆盖 E所需的最少集合数，见 [26, 91]。若 $\dim_{\mathrm{B}} E = \dim_{\mathrm{B}} E$ ，则记 $\dim_{\mathrm{B}} E$为二者的共同值，称为 E的盒计数维数、盒维数、闵可夫斯基或闵可夫斯基-布利冈维数。容易看出，对所有 $E \subset \mathbb{R}^n$，$\dim_{\mathrm{H}} E \le \dim_{\mathrm{B}} E \le \dim_{\mathrm{B}} E$。

自然会问，盒维数是否也有 Marstrand 型定理。J¨arvenp¨a¨a [78]构造了紧集 $E \subset \mathbb{R}^n$ ，使 $\dim_{\mathrm{B}} E$可取 $(0,\ n]$ 中任意预先指定的值，并且对所有 $V \in G(n,\ m)$，均有 $\dim_{\mathrm{B}} \mathrm{proj}_V E = \dim_{\mathrm{B}} E / (1 + (1/m - 1/n) \dim_{\mathrm{B}} E)$，严格小于 $\min\{\dim_{\mathrm{B}} E,\ m\}$。此外，1996年，Falconer 和 Howroyd [33] 证明这一下界是最佳可能值，并通过证明集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 几乎所有投影都具有相同的下盒维数和相同的上盒维数，得到了一个 Marstrand 型定理。这些值的表达式不够简洁，难以使用，因此 Falconer 在 2020 [27, 28]采用位势论方法重新探讨了这一问题。

我们定义 $s > 0$、 $0 < r < 1, x \in \mathbb{R}^n$ 的核 $\phi_r^s(x)$，如下：

$$\phi_r^s(x) = \min\left\{1, \left(\frac{r}{|x|}\right)^s\right\}. \tag{3.1}$$

紧致 $E \subset \mathbb{R}^n$ 相对于 ϕ_r^s 的容量 $C_r^s(E)$定义为

$$\frac{1}{C_r^s(E)} = \inf_{\mu\in\mathcal{M}_0(E)} \int\int \phi_r^s(x-y)\,d\mu(x)\,d\mu(y), \tag{3.2}$$

其中 $\mathrm{M}_0(E)$ 是支撑在 E 上的博雷尔概率测度集合。（对于非紧致的 E，容量取 $C_r^s(F)$ 在 E 的紧子集F 上的上确界。）可以证明，对于 $E \subset \mathbb{R}^n$,

$$c_1 C_r^s(E) \le N_r(E) \le \begin{cases} c_2 \log(1/r)\, C_r^s(E) & \text{if } s = n \\ c_2\, C_r^s(E) & \text{if } s > n \end{cases},$$

其中 c_1, c_2 取决于 s 和 E的直径。特别地，可推出对于$E \subset \mathbb{R}^n$,

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}}^{n} E := \underline{\dim}_{\mathrm{B}} E = \liminf_{r\to 0} \frac{\log N_r(E)}{-\log r} = \liminf_{r\to 0} \frac{\log C_r^n(E)}{-\log r},$$

and

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}}^{n} E := \overline{\dim}_{\mathrm{B}} E = \limsup_{r\to 0} \frac{\log N_r(E)}{-\log r} = \limsup_{r\to 0} \frac{\log C_r^n(E)}{-\log r}. \tag{3.3}$$

取 $s = m$ 属于核 (3.1)，可得几乎所有投影的盒维数。

定理 3.1。 [27, 28] 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 非空且紧致。那么对于所有 $V \in G(n, m)$,

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} \mathrm{proj}_V E \le \liminf_{r\to 0} \frac{\log C_r^m(E)}{-\log r} = \underline{\dim}_{\mathrm{B}}^{m} E,$$

and

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} \mathrm{proj}_V E \le \limsup_{r\to 0} \frac{\log C_r^m(E)}{-\log r} = \overline{\dim}_{\mathrm{B}}^{m} E,$$

等号对 $\gamma_{n,m}$几乎所有 $V \in G(n, m)$成立。

注意，投影的几乎必然维数 $\dim^m \mathrm{B}E$ 和 $\overline{\dim}^m \mathrm{B}E$ 可能分别严格小于 $\min\{\dim_{\mathrm{B}} E, m\}$ 和 $\min\{\overline{\dim}_{\mathrm{B}} E, m\}$。

对于 $E \subset \mathbb{R}^n$，当容量是相对于核 (3.1) 定义时，我们称

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}}^{s} E = \liminf_{r\to 0} \frac{\log C_r^s(E)}{-\log r} \text{ and } \overline{\dim}_{\mathrm{B}}^{s} E = \limsup_{r\to 0} \frac{\log C_r^s(E)}{-\log r} \tag{3.4}$$

s的下和上 s盒维数剖面，应将其理解为“从 s 维视角看 E 的盒维数”。这与豪斯多夫维数的情形类似：可以将“维数剖面”简单定义为 $\dim_{\mathrm{H}}^{s} E = \min\{s, \dim_{\mathrm{H}} E\}$。根据马斯特兰德定理，这给出了投影到几乎所有 s 维子空间上的豪斯多夫维数。

核 (3.1) 在研究投影时至关重要，其根本原因在于，存在一些数 $a_{n,m} > 0$，它们仅取决于 n 和 m，使得对于 $x, y \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$,

$$\phi_r^m(x-y) \le \gamma_{n,m}\{V \in G(n,m) : |\mathrm{proj}_V x - \mathrm{proj}_V y| \le r\} \le a_{n,m}\, \phi_r^m(x-y)$$

见 [91, 95]。这使得可以用 μ 的 m-能量来界定 V 上投影测度 μ_V 的 m-能量积分，其中 μ 是定义在 E 上的适当测度。

然而，投影不会使盒维数下降过多：对于几乎所有 $V \in G(n, m)$

$$\frac{\overline{\dim}_{\mathrm{B}} E}{1 + (1/m - 1/n)\overline{\dim}_{\mathrm{B}} E} \le \overline{\dim}_{\mathrm{B}} \mathrm{proj}_V E \le \min\{\overline{\dim}_{\mathrm{B}} E, m\} \tag{3.5}$$

关于 $\dim_{\mathrm{B}}$，也有类似的尖锐不等式，参见 [27, 28, 33, 78]。

除了给出投影的几乎处处盒维数外，这些剖面还为那些维数低于几乎处处取值的方向所构成的例外集的维数提供了上界。在下一个定理中，Kaufman 型界 (i) 类似于豪斯多夫维数情形下的 (2.1)，而 Falconer 型界 (ii) 应与 (2.2) 对照；一般而言，这些界不太可能是尖锐的。

定理 3.2. [27, 28] 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个非空有界博雷尔集。那么对于 $0 \le s \le m$,

$$\dim_{\mathrm{H}}\{V \in G(n,m) : \overline{\dim}_{\mathrm{B}}\mathrm{proj}_V E < \overline{\dim}_{\mathrm{B}}^{s} E\} \le m(n-m) - (m-s),$$

(ii) 对于 $0 \le \gamma \le n-m$,

$$\dim_{\mathrm{H}}\{V \in G(n,m) : \overline{\dim}_{\mathrm{B}}\mathrm{proj}_V E < \overline{\dim}_{\mathrm{B}}^{m+\gamma} E - \gamma\} \le m(n-m) - \gamma.$$

（除非 $0 \le$ 维数$^{m+\gamma}{}_{\mathrm{B}}\, E - \gamma \le m$，否则 *(ii)* 中的界是平凡的。）将维数$_{\mathrm{B}}E$ 和维数$^{s}{}_{\mathrm{B}}E$ 分别替换为维数$_{\mathrm{B}}E$ 和维数$^{s}{}_{\mathrm{B}}E$，可直接得到完全类似的不等式。

利用核的估计，可在 [27, 34] 中得到下面这个更易处理但较弱的界。

推论 3.3. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个非空有界博雷尔集。那么对于 $0 < s \le m$,

$$\dim_{\mathrm{H}}\left\{V \in G(n,m) : \overline{\dim}_{\mathrm{B}}\mathrm{proj}_V E < \frac{\overline{\dim}_{\mathrm{B}} E}{1 + (1/s - 1/n)\overline{\dim}_{\mathrm{B}} E}\right\} \le m(n-m) - (m-s),$$

并有一个类似的估计，其中$\overline{\dim}_{\mathrm{B}}E$ 被$\dim_{\mathrm{B}}E$取代。

3.2 填充维数

Tricot 于 1982 年引入了装箱测度和填充维数 [141]，将其作为豪斯多夫对应概念的一种对偶形式，见 [26, 91]。尽管填充测度的定义需要额外一步，事后看来，这两个概念之间相隔六十多年之久似乎非常令人惊讶。与豪斯多夫维数一样，集合 E 的填充维数在形式上定义为这样一个数 s：在该数处，E 的s维装箱测度从 ∞ 变为 0。我们回顾一下，对所有 $E \subset \mathbb{R}^n$，都有 $\dim_{\mathrm{H}} E \le \dim_{\mathrm{P}} E \le \dim_{\mathrm{B}} E$。

根据 Ren 和 Wang 对 Oberlin猜想的证明 [129]（定理 2.1），我们立即得到平面中投影的一个界，其中例外集的填充维数较小：对于 $E \subset \mathbb{R}^2$,

$$\dim_{\mathrm{H}}\{\theta : \dim_{\mathrm{P}} \mathrm{proj}_\theta E \le s\} \le \max\{2s - \dim_{\mathrm{H}} E, 0\}.$$

这取代了 [109, 113] 中较早的界。

许多关于盒计数维数的投影性质相对容易推广到填充维数，因为博雷尔集或解析集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的填充维数也可以用 E 的可数覆盖中各集合的上盒维数来表示：

$$\dim_{\mathrm{P}} E = \inf\Big\{ \sup_{1\le i<\infty} \overline{\dim}_{\mathrm{B}} E_i : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \text{ with } E_i \text{ compact}\Big\}.$$

特别地，我们可以如下定义 $E \subset \mathbb{R}^n$ 关于 $s \ge 0$ 的装填维数剖面：

$$\dim_{\mathrm{P}}^{s} E = \inf\Big\{ \sup_{1\le i<\infty} \overline{\dim}_{\mathrm{B}}^{s} E_i : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \text{ with } E_i \text{ compact}\Big\},$$

其中 $\overline{\dim}^{s}\mathrm{B}$ 的定义同 (3.4)，因此立即可得 $\dim_{\mathrm{P}} E = \dim_{\mathrm{P}}^{n} E$。

采用这种方式定义填充维数后，定理 3.1 的直接对应结论以及关于投影维数的界 (3.5) 都很容易建立：只需分别将 $\dim_{\mathrm{B}} E$ 和 $\dim^{s}\mathrm{B}E$ 替换为 $\dim_{\mathrm{P}} E$ 和 $\dim_{\mathrm{P}}^{s} E$ 即可，参见 [27, 28, 34]。

定理 3.4。设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个博雷尔集或解析集。那么

$$\dim_{\mathrm{P}} \mathrm{proj}_V E \le \dim_{\mathrm{P}}^{m} E,$$

且当 $\gamma_{n,m}$ 几乎所有 $V \in G(n,m)$ 时取等号。

与盒维数一样，装填维数剖面为填充维数低于几乎必然值的那些方向的例外集的豪斯多夫维数提供了上界。同样，例外方向的维数的界由定理 3.2(i)和推论 3.3给出，其中$\dim_{\mathrm{B}} E$与$\dim^{s}\mathrm{B}E$ 分别被$\dim_{\mathrm{P}} E$ 与$\dim_{\mathrm{P}}^{s} E$替换。

自引入以来，装填维数剖面已出现在其他情形中，尤其用于给出集合在分数布朗运动 [81, 142]下的像的几乎必然填充维数。

对于测度而非集合的情形，存在一个更精细的下界，它给出测度在几乎所有方向上的投影的填充维数，并同时纳入该测度的豪斯多夫维数与装填维数，见 [38]。

Orponen [107] 指出，若 $\theta_1 \ne \theta_2$，则装填维数的乘积法则蕴含：对任意博雷尔 $E \subset \mathbb{R}^2$，有$\dim_{\mathrm{P}} E \le \dim_{\mathrm{P}} \mathrm{proj}_{\theta_1} E + \dim_{\mathrm{P}} \mathrm{proj}_{\theta_2} E$，由此立即可得，若$\dim_{\mathrm{P}} E > 0$,

$$\dim_{\mathrm{P}} \mathrm{proj}_{\theta} E < \tfrac{1}{2} \dim_{\mathrm{P}} E \tag{3.6}$$

至多对应一个方向 θ。然而，他将‘<’替换为‘≤’，给出了一个紧致的 $E \subset \mathbb{R}^2$ 使得

$$\dim_{\mathrm{P}}\{\theta : \dim_{\mathrm{P}} \mathrm{proj}_{\theta} E \le \tfrac{1}{2} \dim_{\mathrm{P}} E\} = 1$$

由于集合的填充维数总是不小于其豪斯多夫维数，因此，为例外方向集获得填充维数的界，比获得豪斯多夫维数的界更难。Orponen [107] 在平面上得到了一些不错的界：对于满足 $\dim_{\mathrm{H}} E \le 1$ 的解析 $E \subset \mathbb{R}^2$，

$$\dim_{\mathrm{P}}\{\theta : \dim_{\mathrm{P}} \operatorname{proj}_\theta E \le s\} \le \begin{cases} \frac{s \dim_{\mathrm{H}} E}{\dim_{\mathrm{H}} E + s(\dim_{\mathrm{H}} E - 1)} & \text{if } 0 \le s \le \dim_{\mathrm{H}} E, \\ \frac{(2s - \dim_{\mathrm{H}} E)(1 - \dim_{\mathrm{H}} E)}{\dim_{\mathrm{H}} E/2} + s & \text{if } \frac{1}{2}\dim_{\mathrm{H}} E \le s \le \dim_{\mathrm{H}} E \end{cases}.$$

3.3 中间维数

中间维数由 Falconer、Fraser 和 Kempton 于 [32]2020年引入，用于在豪斯多夫维数与盒维数之间进行插值。对于$0 \le \vartheta \le 1$，我们将非空有界集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的上 ϑ-中间维数定义为

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_\vartheta E = \inf\big\{ & s \ge 0 : \text{for all } \epsilon > 0 \text{ and all sufficiently small } \delta > 0 \\ & \text{there is a cover } \{U_i\} \text{ of } E \text{ s.t. } \delta^{1/\vartheta} \le |U_i| \le \delta \text{ and } \textstyle\sum |U_i|^s \le \epsilon \big\}. \end{aligned}$$

下 ϑ-中间维数$\dim_\vartheta E$ 的定义方式相同，只是条件只需对趋近于 0 的一列 δ 成立。下文仅考虑上维数的定义，但所有结论都可直接推广到下中间维数的情形。

中间维数 $\dim_\vartheta E$ 在豪斯多夫维数与盒维数之间插值，也就是说，$\vartheta \mapsto \dim_\vartheta E$ 关于 $\vartheta \in [0,1]$ 单调递增，并且

$$\dim_{\mathrm{H}} E = \overline{\dim}_0 E \le \overline{\dim}_\vartheta E \le \overline{\dim}_1 E = \overline{\dim}_{\mathrm{B}} E.$$

函数 $\vartheta \mapsto \dim_\vartheta E$ 在 $(0,1]$ 上连续，在 0 处则不一定连续。中间维数的基本性质见 [29, 32]；对于 $\vartheta \in$，$(0,1]$ 的表现更接近盒维数，而非豪斯多夫维数。

类似于盒计数维数（3.4），对于 $E \subset \mathbb{R}^n$、$s \ge 0$ 和 $\vartheta \in [0,1]$，我们根据相对于核的能量积分来定义维数剖面 $\overline{\dim}^s_\vartheta E$

$$\phi^{s,m}_{r,\vartheta}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le |x| < r \\ \left(\frac{r}{|x|}\right)^s & r \le |x| < r^\vartheta \\ \frac{r^{\vartheta(m-s)+s}}{|x|^m} & r^\vartheta \le |x|. \end{cases}$$

那么，对于 $E \subset \mathbb{R}^n$ 和 $\vartheta \in [0,1]$，$\overline{\dim}_\vartheta E = \overline{\dim}^n_\vartheta E$。此外，与盒维数一样，$s$ 的其他取值给出了 E的投影的中间维数。Burrell、Falconer 和 Fraser[19], 得到了以下 Marstrand 型定理 [29, 52]参见。

定理 3.5。 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是博雷尔集或解析集。那么，对于 $\gamma_{n,m}$几乎所有的 $V \in G(n,m)$,

$$\overline{\dim}_\vartheta \operatorname{proj}_V E = \overline{\dim}_\vartheta^m E.$$

对所有 $\vartheta \in [0,1]$。

3.4 Assouad维数

回顾一下，我们用 $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ 表示以 x 为中心、半径为 r 的球，并用 $N_r(F)$ 表示能够覆盖 $F \subset \mathbb{R}^n$且直径为 $r > 0$ 的集合的最少数量。 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的*Assouad*维数定义为

$$\dim_{\mathrm{A}} E = \inf\Big\{ s : \text{there exists } c > 0 \text{ s.t. for all } 0 < r < R \\ \text{and } x \in E,\ N_r(B(x,R) \cap E) \le c\left(\frac{R}{r}\right)^s \Big\}.$$

近年来，Assouad维数受到广泛关注；与大多数其他分形维数不同，它具有局部性质，凸显了集合中“较厚”的部分。Assouad维数及其变体与其他形式的维数有着有趣的联系，并且是嵌入理论和研究映射正则性的有用工具。Fraser 的著作 [48] 对此作了全面论述。

Assouad维数并不具备其他分形维数的所有“标准”性质。特别是，集合的 Lipschitz 像的 Assouad维数可能小于或大于该集合本身的 Assouad维数，尽管 Assouad维数在双 Lipschitz 映射下保持不变。它不具备 Lipschitz 性质这一点，在其投影行为中表现得十分明显。

对于 Assouad维数，不存在“几乎处处成立”的 Marstrand 型结果。设 E_s为 s 维的直角 Sierpi´nski 三角形，即由三个比例为 $3^{-1/s}$的位似变换（不含旋转的相似变换）构成的自相似集，其中 $0 < s < 1$，因此 $\dim_{\mathrm{H}} E_s = \dim_{\mathrm{A}} E_s = s$，见图 3。

定理 3.6。 设 $\log 3/\log 5 < s < 1$。那么存在 $\epsilon > 0$，使得对于几乎所有 $\theta \in (-\epsilon, \epsilon)$，都有 $\dim_{\mathrm{A}} \operatorname{proj}_\theta E_s = 1$；并且对于所有 $\theta \in (\pi/4 - \epsilon, \pi/4 + \epsilon)$，都有 $\dim_{\mathrm{A}} \operatorname{proj}_\theta E_s = s < 1$。

这个例子由 Fraser 和 Orponen [54],提出，它依赖于这样一个事实：由收缩位似变换定义的自相似集$E \subset \mathbb{R}^2$ 具有

$$\dim_{\mathrm{A}} \operatorname{proj}_\theta E = \begin{cases} \dim_{\mathrm{H}} \operatorname{proj}_\theta E & \text{if } \mathcal{H}^{\dim_{\mathrm{H}} \operatorname{proj}_\theta E}(\operatorname{proj}_\theta E) > 0 \\ 1 & \text{if } \mathcal{H}^{\dim_{\mathrm{H}} \operatorname{proj}_\theta E}(\operatorname{proj}_\theta E) = 0 \end{cases},$$

其中 H^s 是 s维豪斯多夫测度，因此，这一构造等价于寻找一组位似变换，使迭代函数系吸引子 E在适当方向上的投影具有正或为零的 $(\operatorname{proj}_\theta E)$维豪斯多夫测度。

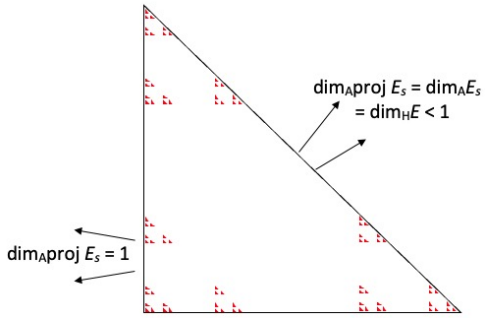

图3：集合 E_s 在不同方向范围内具有Assouad维数1或 $s < 1$ 的投影。

Fraser 和 K¨aenm¨aki[53] 证明，投影的 Assouad维数甚至可能更加奇异：对于任意上半连续的 $g\colon [0,\pi) \to [0,1]$，都存在一个紧致集 $E \subset \mathbb{R}^2$，使得对所有 θ，$\dim_{\mathrm{A}} \mathrm{proj}_\theta E = g(\theta)$。

至少，在几乎所有方向上，Assouad维数在投影下不会下降。Fraser 和 Orponen [54] 以及Fraser [47]证明了对于 $E \subset \mathbb{R}^n$

$$\dim_{\mathrm{A}} \mathrm{proj}_V E \geq \min\{m, \dim_{\mathrm{A}} E\} \tag{3.7}$$

对几乎所有 $V \in G(n, m)$ 成立，并且Orponen [110] 对平面中方向的例外集得到了强得多的界:

$$\dim_{\mathrm{H}} \left\{\theta : \dim_{\mathrm{A}} \mathrm{proj}_\theta E < \min\{1, \dim_{\mathrm{A}} E\}\right\} = 0.$$

正如填充维数（3.6）的情形，关于乘积的Assouad维数的不等式蕴含：对于 $E \subset \mathbb{R}^2$，$\dim_{\mathrm{A}} \mathrm{proj}_\theta E < \frac{1}{2}\dim_{\mathrm{A}} E$至多只能对一个方向 θ出现。

Assouad维数的变体包括 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的*Assouad*谱 $\dim_{\mathrm{A}}^{\vartheta} E\,(0 < \vartheta < 1)$，由

$$\dim_{\mathrm{A}}^{\vartheta} E = \inf\Big\{s : \text{there exists } c > 0 \text{ s.t. for all } 0 < r < 1 \\ \text{and } x \in E,\ N_r(B(x, r^{\vartheta}) \cap F) \leq c\left(\frac{r^{\vartheta}}{r}\right)^s\Big\},$$

以及相关的拟*Assouad*维数，可表示为

$$\dim_{\mathrm{qA}} E = \lim_{\vartheta \to 1} \dim_{\mathrm{A}}^{\vartheta} E.$$

目前似乎尚不清楚，对于每个 $0 < \vartheta < 1$ 和 $\dim_{\mathrm{qA}} E$，是否存在 $\dim_{\mathrm{A}}^{\vartheta} E$ 的Marstrand型投影结果。

3.5 傅里叶维数

我们将 $\mathbb{R}^n$ 上有限测度 μ 的 傅里叶变换定义为

$$\widehat{\mu}(z) = \int_{x\in\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot z} d\mu(x) \quad (z \in \mathbb{R}^n).$$

那么， $E \subset \mathbb{R}^n$ 的傅里叶维数 $\dim_{\mathrm{F}} E$ 定义为

$$\begin{aligned}\dim_{\mathrm{F}} E = \sup\big\{s \le n :\ &\text{there exists } c>0 \text{ and } \mu \in \mathcal{M}(E)\\ &\text{such that } |\widehat{\mu}(z)| \le c|z|^{-s/2} \text{ for all } z\in\mathbb{R}^n\big\},\end{aligned}$$

这反映了支撑在 E上的测度的傅里叶变换的衰减速率。由$_{\mathrm{H}}E$的傅里叶刻画（1.2），可得 $\dim_{\mathrm{F}} E \le \dim_{\mathrm{H}} E$，因为对于所有概率测度 μ 和 $0 < t < s < \dim_{\mathrm{F}} E$,

$$\int \frac{|\widehat{\mu}(z)|^2 dz}{|z|^{n-t}} \le \int_{|z|<1} \frac{dz}{|z|^{n-t}} + \int_{|z|\ge 1} \frac{c^2|z|^{-s}dz}{|z|^{n-t}} < \infty,$$

这意味着对于所有 $t < \dim_{\mathrm{F}} E$，$\dim_{\mathrm{H}} E \ge t$。

傅里叶变换对于投影具有良好的性质：对于定义在$\mathbb{R}^n$上的测度 μ

$$\widehat{\mu_V}(z) = \widehat{\mu}(z) \ \text{ for } z \in V \in G(n,m), \tag{3.8}$$

其中， μ_V是测度 μ 在 V 上的投影，由 $\mu_V(F) = \mu(\mathrm{proj}_V^{-1}(F))$给出，其中 $F \subset V$ 成立。于是，对于每个 $V \in G(n, m)$,

$$\min\{m, \dim_{\mathrm{F}} E\} \le \dim_{\mathrm{F}} \mathrm{proj}_V E \le \dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj}_V E \le \min\{m, \dim_{\mathrm{H}} E\}, \tag{3.9}$$

其中，左侧不等式由考察（3.8）中的衰减率可得，右侧不等式则是马斯特兰德定理给出的上界。特别地，若 E 是一个*Salem*集，即 $\dim_{\mathrm{F}} E = \dim_{\mathrm{H}} E$，则（3.9）中的等号处处成立，因此

$$\dim_{\mathrm{F}} \mathrm{proj}_V E = \dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj}_V E = \min\{m, \dim_{\mathrm{H}} E\} \text{ for all } V \in G(n,m),$$

也就是说，不存在例外方向。

一般而言，仅凭集合的傅里叶维数，能够从投影中获得的信息十分有限；事实上，对于 $\dim_{\mathrm{F}} \mathrm{proj}_V E$ 是否存在 Marstrand 型结果，尚不得而知。傅里叶维数本身并不会为投影的豪斯多夫维数的例外方向提供额外信息。Fraser 和 de Orellana [55] 构造了紧集 $E \subset \mathbb{R}^2$，其满足 $\dim_{\mathrm{H}} E = s \in (0,1]$ and $\dim_{\mathrm{F}} E = t \in (s/2, s)$，使得

$$\begin{aligned}\{\theta : \dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj}_\theta E \le u\} &= \varnothing \qquad \text{if } u < t\\ \dim_{\mathrm{H}}\{\theta : \dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj}_\theta E \le u\} &= 2t - s \ \text{ if } u \ge t\end{aligned}$$

从而，例外集的维数在 t 处会发生跳跃不连续，即从 0 跳变为 (2.6) 所允许的最大值。

为提供更多信息，Fraser [51] 引入了集合的傅里叶谱$\dim_{\mathrm{F}}^{\vartheta} E \subset \mathbb{R}^n$，它在 $\vartheta = 0$ 时的 $\dim_{\mathrm{F}} E$ 与$\vartheta = 1$时的 $\dim_{\mathrm{H}} E$ 之间进行插值，由此导出许多进一步的不等式，见 [51, 52, 54]。对于$\vartheta \in$，可以得到投影的傅里叶谱的例外集大小的界（$0, 1$]：对所有 $0 \le s \le \min\{m, s - \dim_{\mathrm{F}}^{\vartheta} E\}$：

$$\dim_{\mathrm{H}}\{V \in G(n,m) : \dim_{\mathrm{F}}^{\vartheta} \operatorname{proj}_V E \le s\} \le \max\left\{0, m(n-m) + \inf_{\vartheta' \in (0,1]} \frac{s - \dim_{\mathrm{F}}^{\vartheta'} E}{\vartheta'}\right\}.$$

令 $\vartheta = 1$，可得 $\dim_{\mathrm{H}}\{V \in G(n,m) : \dim_{\mathrm{H}} \operatorname{proj}_V E \le s\}$ 的上界。通过在下确界中选取合适的 ϑ' 值，在某些情况下可以得到比（2.6）更好的界，见 [54]。

4 受限方向上的投影

多年来，人们一直在探讨这样一个一般性问题：在什么情况下，可以对由 $G(n,m)$的真子集构成的直线族或子空间族得到投影结果？例如，若$\{V(t) : t \in P\}$是 $G(n,m)$中的一条光滑曲线或一个子流形，并由集合 $P \subset \mathbb{R}^k$光滑参数化，那么对于 L^k-几乎所有的 $t \in P$，我们能对 $\dim_{\mathrm{H}} \operatorname{proj}_{V(t)} E$得出什么结论？其中 L^k 是 k维勒贝格测度。

举一个简单的例子，设 $\theta : [0, 1] \to S^2$ （嵌入于 $\mathbb{R}^3$ 中的二维球面）是一条光滑参数化的方向曲线，并记 $\operatorname{proj}^{\theta(t)}$ 为到方向 $\theta(t)$ 所确定直线上的正交投影。则对几乎所有的 $0 \le t \le 1$，我们有 $\dim_{\mathrm{H}} \operatorname{proj}_{\theta(t)} E \ge \min\{\dim_{\mathrm{H}} E - 1, 0\}$，并且当 $\dim_{\mathrm{H}} E > 2$ 时，$\mathrm{L}^1(\operatorname{proj}_{\theta(t)} E) > 0$，这是因为由 (2.2) 和 (2.3)，使这些下界失效的方向集的豪斯多夫维数小于 1，即该曲线的豪斯多夫维数。

以下下界由 J¨arvenp¨a¨a、J¨arvenp¨a¨a 与 Keleti [74] 针对从 $\mathbb{R}^n$ 到 m维子空间的参数化投影族得到，另见 [75]。对 $0 < k < m(n-m)$ 定义整数

$$p(l) = n - m - \left\lfloor \frac{k - l(n-m)}{m - l} \right\rfloor \qquad (l = 0, 1, \ldots, m-1),$$

其中，“底”符号“$\lfloor x \rfloor$”表示不大于 x 的最大整数。

定理 4.1。设 $P \subset \mathbb{R}^k$ 为一个开参数集，$E \subset \mathbb{R}^n$ 为博雷尔集或解析集。设 $\{V(t) \subset G(n,m) : t \in P\}$ 为一族子空间，且 V为C^1，其导数 $D_t V(t)$ 对所有 $t \in P$均为单射。于是，对所有 $l = 0$、1、.....、m以及几乎所有（相对于 $\mathcal{L}^k$） $t \in P$,

$$\dim_{\mathrm{H}} \operatorname{proj}_{V(t)} E \geq \begin{cases} \dim_{\mathrm{H}} E - p(l) & \text{if} \quad p(l)+l \leq \dim_{\mathrm{H}} E \leq p(l)+l+1 \\ l+1 & \text{if} \ \ p(l)+l+1 \leq \dim_{\mathrm{H}} E \leq p(l+1)+l+1 \end{cases}.$$

此外，若 $\dim_{\mathrm{H}} E > p(m-1)+m$，则对几乎所有（相对于 $\mathcal{L}^m$）$t \in P$，$(\operatorname{proj}_{V(t)} E) > 0$ 成立。

这些是一般参数化族投影的最佳可能界。同一篇论文 [74] 将这些结果推广到 C^2-映射的光滑参数化族。

如果映射 $t \mapsto V(t)$具有曲率，则可能得到更好的界。这是一个困难的领域，但近年来在从 $\mathbb{R}^3$ 到直线或平面的投影方面取得了令人瞩目的进展，许多贡献（包括 [41, 52, 60, 61, 64, 65, 66, 79, 102, 103, 104, 107, 108, 113, 114, 116, 121] ）引入了大量新方法，其中包括傅里叶分析与调和分析、离散化、加性组合学和解耦等技术。

设 $\theta\colon\ [0,1] \to S^2$ 是由 C^3-函数 θ给出的一族方向。我们称方向曲线是非退化的，如果

$$\operatorname{span}\{\theta(t), \theta'(t), \theta''(t)\} = \mathbb{R}^3 \ \text{ for all } t \in [0,1],$$

例如，曲线 $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, 1)$ 满足这一条件。如前所述，$\operatorname{proj}_{\theta(t)}$表示到方向 $\theta(t)$ 上的直线的正交投影。下述定理总结了近期进展，其中包含一个 Marstrand 型定理，以及对使 $\operatorname{proj}^{\theta(t)}$ 下的像异常小的 t 的维数的界。

定理 4.2. 设 $E \subset \mathbb{R}^3$ 为博雷尔集或解析集，并设 $\theta\colon\ [0,1] \to S^2$ 为非退化方向族。则

$$\dim_{\mathrm{H}} \operatorname{proj}_{\theta(t)} E = \min\{\dim_{\mathrm{H}} E, 1\} \quad \textit{for almost all } t \in [0,1], \tag{4.1}$$

且若 $\dim_{\mathrm{H}} E > 1$ 则

$$\mathcal{L}(\operatorname{proj}_{\theta(t)} E) > 0 \quad \textit{for almost all } t \in [0,1]. \tag{4.2}$$

关于例外方向，若 $0 \leq s \leq \min\{\dim_{\mathrm{H}} E, 1\}$ 则

$$\dim_{\mathrm{H}}\{t : \dim_{\mathrm{H}} \operatorname{proj}_{\theta(t)} E < s\} \leq s, \tag{4.3}$$

且若 $0 \leq s \leq 1$则

$$\dim_{\mathrm{H}}\{t : \operatorname{proj}_{\theta(t)} E < s\} \leq \max\left\{0, 1 + \tfrac{1}{2}(s - \dim_{\mathrm{H}} E)\right\}, \tag{4.4}$$

and

$$\dim_{\mathrm{H}}\{t : \mathcal{L}(\operatorname{proj}_{\theta(t)} E) = 0\} \leq \tfrac{1}{3}(4 - \dim_{\mathrm{H}} E). \tag{4.5}$$

Pramanik、Yang 和 Zahl [121] 利用圆形极大函数证明了 (4.3)，而 Gan、Guth 和 Maldague [60] 则使用解耦方法得到了 (4.4)。

Marstrand 型结果 (4.1) 可由上述任一结果推出。Harris [64, 65] 则独立得到了 (4.2) 和 (4.5)。

作为一种互补操作，我们可以从 $\mathbb{R}^3$ 投影到平面而非直线；近年来，关于投影到参数化平面族时的几乎必然维数，以及例外集的界，也取得了大量进展。在这种情况下，我们记 $\mathrm{proj}_{V_\theta}\colon \mathbb{R}^3 \to V$ 为投影到垂直于向量 $\theta \in S^2$ 的平面。包括 [41, 108, 116] 在内的研究促成了以下结果，该结果由 Gan等人 [58] 使用“高低”方法证明。应将数值 (4.6)–(4.8) 与定理 1.2 和 (2.1)–(2.3) 中的非限制投影结果进行比较。

定理 4.3. 设 $E \subset \mathbb{R}^3$ 是博雷尔集或解析集，且 $\theta\colon [0,1] \to S^2$ 是一个非退化方向族。那么

$$\dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj}_{V_{\theta(t)}} E = \min\{\dim_{\mathrm{H}} E, 2\} \quad \textit{for almost all } t \in [0,1]. \tag{4.6}$$

此外，若 $\dim_{\mathrm{H}} E > 2$ 则

$$\mathcal{L}^2(\mathrm{proj}_{\theta(t)} E) > 0 \quad \textit{for almost all } t \in [0,1]. \tag{4.7}$$

对于例外方向，如果 $0 \le s \le 1$ 则

$$\dim_{\mathrm{H}}\{t : \dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj}_{\theta(t)} E < s\} \le \max\{1 + s - \dim_{\mathrm{H}} E, 0\}. \tag{4.8}$$

该定理的一个高维版本最近由其中一些作者 [59]发展出来。他们证明，若 $\theta\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ 是一条光滑非退化曲线且 $m \le n$，则 E 到 θ 在$t \in [0,1]$ 处的 m阶切空间的投影对几乎所有 t具有豪斯多夫维数$\min\{\dim_{\mathrm{H}} E, m\}$。事实证明，这在丢番图逼近中有应用。由Alex Oppenheim于1929年提出、并由Margulis [88]于1987年最初证明的Oppenheim猜想指出，若三个或更多变量的不定非退化二次型不与有理二次型成比例，则其在整数处的取值集合在实数中稠密。一篇深入的论文 [83] 得到了带多项式误差项的Oppenheim猜想的定量版本，改进了先前的估计；证明中的一个关键步骤使用了这一限制投影结果，取 $n = 5$和 $m = 2$。

此外，在高维情形下，Mattila [97] 还针对从 $\mathbb{R}^{2n}$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的某一类受限投影，得出了一些很好的不等式，适用于 $n \in \mathbb{N}$。

5 IFS吸引子的投影：自相似集与自仿射集

投影定理与例外集结果的一个缺点在于，它们无法告诉我们集合 E 在任一指定方向上的投影的维数或测度。然而，如果 E 具有某种正则性，例如某种形式的自相似性或自仿射性，则往往可以得出更多结论。近年来已有

相当大的兴趣，致力于考察特定集合或集合类在特定方向上的投影维数，尤其是寻找使 Marstrand 定理的结论对所有方向或几乎所有方向都成立的集合。

回顾一下，迭代函数系统(IFS) 是由压缩映射 $\{f_1, \ldots, f_k\}$ 组成的族，其中 $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (有时也要求对某个闭区域$D \subset \mathbb{R}^n$满足 $f_i : D \to D$)。一个 IFS 确定唯一的非空紧致 $E \subset \mathbb{R}^d$ (或 $E \subset D$)，使得

$$E = \bigcup_{i=1}^{k} f_i(E), \tag{5.1}$$

称为该 IFS 的吸引子，例如参见 [26, 72]。此外， E 可以通过层级构造来实现。设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是非空紧致的，并且对所有 $1 \le i \le k$， $f_i(A) \subset A$。记 $A_{i_1,i_2,\ldots,i_j} = f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \cdots \circ f_{i_j}(A)$，并记$F_j = \bigcup_{1 \le i_1,\ldots,i_j \le k} A_{i_1,i_2,\ldots,i_j}$，则吸引子为

$$E = \bigcap_{j=0}^{\infty} F_j. \tag{5.2}$$

本节将考察几类重要的吸引子，见图 4，其中包括自相似吸引子和自仿射吸引子；B´ar´any、Simon 和 Solomyak [11] 近期出版的著作是极佳的参考资料。

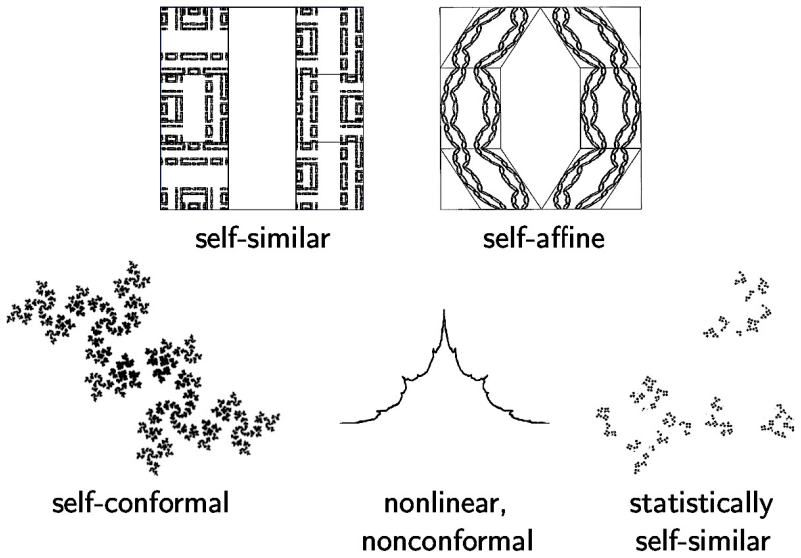

图 4：不同类型映射的迭代函数系统的吸引子。

5.1 自相似集

如果迭代函数系统中的 f_i 全部为相似变换，即具有以下形式

$$f_i(x) = r_i O_i(x) + a_i \quad (1 \le i \le k), \tag{5.3}$$

其中 $0 < r_i < 1$ 是压缩比， O_i 是正交映射，即旋转或反射，而 a_i 是平移；吸引子 E 称为自相似集。

若相似变换（有时也包括更一般的映射）组成的迭代函数系统满足并集 (5.1) 两两不相交，则称其满足强分离条件 （ SSC ）；若存在非空开集 U，使得 $\bigcup_{i=1}^{k} f_i(U) \subset U$ 且与该并集不相交，则称其满足开集条件（OSC）；若可以选取这样的 U 使得$U \cap E \neq \varnothing$，则称其满足强开集条件 （SOSC）。

若 SSC 或 OSC 成立，则 $\dim_{\mathrm{H}} E = s$，其中 s 是由 $\sum_{i=1}^{k} r_i^s = 1$给出的相似维数， r_i 是 f_i的相似比；此外， $0 < \mathrm{H}^s(E) < \infty$，其中 H^s 是 s 维豪斯多夫测度。由相似变换的正交分量生成的旋转群$G = O_1, \ldots, O_k$，在自相似集的投影行为中起着至关重要的作用，相关结论取决于 G 是否有限。

很容易构造出旋转群为有限群 G 的自相似集，使得马斯特兰德定理的结论在某些方向上不成立。例如，设f_1、……、 f_4为一组位似变换（即在（5.3）中 O_i为恒等变换的相似变换），其比例为$0 < r < \frac{1}{4}$，并将单位正方形 S 映入自身，每个变换 f_i 都固定四个角中的一个。那么，$\dim_{\mathrm{H}} E = -\log 4/\log r$，但 E 在正方形边上的投影维数为 $-\log 2/\log r$，在 S对角线上的投影维数为$-\log 3/\log r$。这是因为投影后各个组成小正方形 f_i（S）彼此对齐。

事实上，当旋转群为有限群时，总存在一些投影会导致维数下降，正如 Farkas [39] 在以下定理中所述。

定理5.1。 若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是旋转群 G 为有限群的自相似集，且相似维数为 s，则对于某个 $V \in G(n,m)$，有维数$_{\mathrm{H}}$投影$_V E < s$。特别地，若 E满足 OSC，且 $0 <$维数$_{\mathrm{H}} E < m$，则对于某个 V，有维数$_{\mathrm{H}}$投影$_V E <$维数$_{\mathrm{H}} E$。

如果迭代函数系统具有稠密旋转，也就是说，旋转群 G在全旋转群 $SO(n,\mathbb{R})$或等距变换群$O(n,\mathbb{R})$中稠密，那么情况就大不相同了。（注意，如果平面上的相似变换迭代函数系统中，(5.3) 里的 O_i 至少有一个是 π的无理倍数，那么它就具有稠密旋转。）在这种情况下，不存在例外投影。

定理 5.2。 [35, 70, 120] 如果 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是具有稠密旋转群的自相似集 G，那么

$$\dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj}_V E = \min\{\dim_{\mathrm{H}} E, m\} \ \textit{for all}\ V \in G(n,m). \tag{5.4}$$

更一般地，对于所有没有奇异点的 C^1 映射 g： $E \to \mathbb{R}^m$，均有 维数$_{\mathrm{H}}\, g(E) =$ 最小值{维数$_{\mathrm{H}} E, m$}，也就是说， g 处处的导数矩阵都满秩。

请注意，像定理 5.2 这样的结果相当典型：其中不存在例外方向，且满维投影可通过逼近，扩展为无奇异点的 C^1 映射的像。

Peres 和 Shmerkin [120] 在不要求迭代函数系统满足任何分离条件的情况下，证明了平面中的 (5.4)。为此，他们建立了 Marstrand 投影定理的一个离散版本，用以在子空间（直线）中构造一棵区间树 V，随后应用 Weyl 等分布定理。Hochman 和 Shmerkin [70]在高维情形下证明了该定理，其中包括对 C^1 映射的推广，适用于满足开集条件的 E。他们的证明使用了 Furstenberg 的 CP 链 [56, 57], , 另见 [67], , 并有三个主要组成部分：测度投影的预期豪斯多夫维数关于其“微观测度”的下半连续性、Marstrand 投影定理，以及投影的维数在旋转群作用下的不变性。Falconer 和 Jin[35]利用紧群扩张论证给出了一个证明。

在稠密旋转情形下，若 $\dim_{\mathrm{H}} E > m$，则由定理 5.2，对所有 $V \in G(n,m)$ 均有 $\dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj}_V E = m$，但我们或许还希望所有投影也都具有正的勒贝格测度。Shmerkin 与 Solomyak [137] 证明，在平面中，除一个豪斯多夫维数为 0 的方向集外均如此，见下文定理 5.3(ii)；但 Rapaport [127] 构造了一个在 $\mathbb{R}^2$中具有稠密旋转的例子，使得对一个稠密的 G_δ $\theta \in [0,\pi$集有 $\mathrm{L}^1(\mathrm{proj}_\theta E) = 0$）。

以下定理总结了平面中的已知结果，其中包括 (iv) 与 (v)，它们给出例外方向的填充维数界，参见[134] 以了解详细讨论。

定理 5.3. 设 E 为相似变换迭代函数系统(5.3) 在$\mathbb{R}^2$上的自相似吸引子。

(i) 若 E具有稠密旋转，则对所有 θ，$\dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj}_\theta E = \min\{1, \dim_{\mathrm{H}} E\}$。 [35, 70, 120]。*(ii)* 若 $\dim_{\mathrm{H}} E > 1$，则 $\dim_{\mathrm{H}}\{\theta : L^1(\mathrm{proj}_\theta E) = 0\} = 0$ [137]。*(iii)* 若 a_i 以及 *IFS (5.3)* 中矩阵 $r_i O_i$ 的各项都是代数数，则 $\{\theta: \dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj}_\theta E < \min\{1, \dim_{\mathrm{H}} E\}\}$ 是可数的 [68]。*(iv)* $\dim_{\mathrm{P}}\{\theta: \dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj}_\theta E < \min\{1, \dim_{\mathrm{H}} E\}\} = 0$ [68, 107]。*(v)* 若 $0 \le s < \dim_{\mathrm{H}} E$，则 $\dim_{\mathrm{P}}\{\theta : \dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj}_\theta E \le s\} \le s$ [107, 123]。

最近，Algom 和 Shmerkin [1]给出了一个很好的判据，可保证自相似 E 投影到给定子空间 $V \in G(n, m)$后满足马斯特兰德定理；该判据取决于曲线 $\{gV : g \in G\}$，其中 G 是由 IFS 中的正交分量 O_i 生成的群的闭包。

5.2 自仿射集

如果迭代函数系统由 $\mathbb{R}^n$ 上具有以下形式的仿射映射组成

$$f_i(x) = A_i(x) + t_i \quad (1 \le i \le k), \tag{5.5}$$

其中 A_i 是上确界范数为 $\|A_i\| < 1$ 的非奇异线性映射，t_i 是 $\mathbb{R}^n$ 上的平移，那么由 (5.1) 定义的吸引子 E 称为自仿射。（我们假设至少有一个 A_i 不是相似变换，否则 E 就是自相似的。）

有一个自然公式可以计算 E 的维数，它反映了球在 $\{A_i\}$ 的复合映射作用下所发生的形变。回顾一下，矩阵 A （或相应线性映射）的奇异值 $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n$，是椭球 $A(B(0,1))$ 的主半轴长度；等价地，它们是 AA^T 的特征值的正平方根。我们将 A 的奇异值函数定义为，对于 $t > 0$，

$$\phi^t(A) = \begin{cases} \alpha_1 \cdots \alpha_k^{t-(k-1)} & \text{if } 0 \leq k-1 < t \leq k \leq n \\ (\alpha_1 \cdots \alpha_d)^{t/n} & \text{if } t \geq n \end{cases}$$

其中 $k = \lceil t \rceil$ 是大于或等于 t 的最小整数。于是，迭代函数系吸引子 E 的亲和维数由以下压力型表达式定义：

$$\dim_{\text{aff}} E = \dim_{\text{aff}}(A_1, \ldots, A_k) := \inf\left\{ t > 0 : \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_r \leq k} \phi^t(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_r}) < \infty \right\}. \tag{5.6}$$

（严格来说，$\dim_{\text{aff}} E$ 取决于定义 E 的迭代函数系统映射 A_i 的线性部分，不过这很少会造成混淆。）注意，对于满足 $k = \lceil t \rceil$ 的 $0 < t \leq n$，奇异值函数 $\phi^t(A)$ 与直径为 α_k 的片段数量相差一个有界倍数；这些片段可将 $A(B(0,1))$ 切分而成，该数量再乘以 α_k^t。利用由这些片段构成的覆盖，容易看出：

$$\dim_{\text{H}} E \leq \underline{\dim}_{\text{B}} E \leq \overline{\dim}_{\text{B}} E \leq \min\{n, \dim_{\text{aff}} E\}. \tag{5.7}$$

除了提供这一普适上界之外，早已有人发现，对于“典型”的自仿射集，亲和维数等于豪斯多夫维数和盒维数；具体而言，若 $\|A_i\| < \frac{1}{2}$ 对所有 i 成立（或者更一般地，若 $\|A_i\| + \|A_i\| < 1$ 对所有 $i \neq j$ 成立，见 [11]），则对于几乎所有平移向量 $(t_1, \ldots, t_k)$，式 (5.7) 中均取等号，其中“几乎所有”是相对于 L^{kn} 而言的；符号沿用 (5.1) 和 (5.5) 中的记法，见 [11, 24, 25, 140]。Feng、Lo 和 Ma [43] 研究了这一背景下的投影，并得到了关于几乎所有平移下 $\text{proj}_V E$ 的豪斯多夫维数、装箱维数和盒维数的自然结果，同时给出了使投影维数异常小的向量 $(t_1, \ldots, t_k)$ 集合的豪斯多夫维数上界。

近年来，利用遍历理论中的技术，自仿射集的维数理论迅速发展；对于大类“特定”的自仿射集，等式 (5.7) 中的等号均已得到证明，始于 $\mathbb{R}^2$，例如参见 [10, 11, 101]。

若仿射映射的迭代函数系统 (5.5) 在 $\mathbb{R}^2$ 强不可约，即不存在有限个经过原点的直线 $\{L_j\}$，使其并集在所有矩阵 A_i 的作用下保持不变；换言之，对于所有 $\{L_j\}$，$A_i(\bigcup_j L_j) \neq \bigcup_j L_j$，存在某个 $i = 1, \ldots\ldots, k$，则称该系统为强不可约。

定理 5.4。若自仿射迭代函数系统 $\{f_i\}_{i=1}^m$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上满足强开集条件且强不可约，则其吸引子 E 满足：

(i) 维数$_{\text{H}} E$ = 维数$_{\text{B}} E$ = 维数$_{\text{aff}} E$,

(*ii*) $\dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj}_\theta E = \min\{\dim_{\mathrm{H}} E,\ 1\}$ 对于a*ll* $\theta \in [0, \pi)$。

定理 5.4 由 B´ar´any、Hochman 和 Rapaport 于 2021 [10], 证明，尽管投影部分 (ii) 早已由 Falconer 和 Kempton 于 2017年[37] 在矩阵 L_i 的所有元素均严格为正的情况下建立。Hochman 和 Rapaport [69] 此后证明，强开集条件可以由更弱的指数分离条件替代。

三维类比定理 5.4 现已得到证明。Rapaport 关于自仿射测度及其投影的工作 [128] ，以及 Morris 和 Sert [99] 关于正子系统的结果，使得定理 5.4 得以推广到满足强分离条件的 $\mathbb{R}^3$ 上的仿射映射迭代函数系统。

Morris [98] 此后证明，这类投影结果对于四维中的自仿射集并不一定成立。他构造了 $\mathbb{R}^4$ 中的仿射迭代函数系统，这些系统完全不可约，并满足强分离条件，其吸引子 E 具有一个二维平面 V_t 的一参数族，使得对于所有 t，$\dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj}_{V_t} E < \dim_{\mathrm{H}} E$。该例依赖于这样一个事实：这些迭代函数系统映射并未在 $\mathbb{R}^4$ 的每个外幂上强不可约地作用。

最近，关于 $\mathbb{R}^n$ 中 $n \geq 4$的自仿射集投影取得了显著进展。对于满足$i \neq j$对所有 $\|A_i\| + \|A_i\| < 1$成立的仿射迭代函数系统 (5.5)，Feng 和 Xie [44]以及 Morris 和 Sert [100]在同一天发布于 arXiv 的论文中，定义了亲和维数 (5.6) 的一个变体 $\dim_{\mathrm{aff}}(A_1, \dots, A_k; V)$；该变体除了取决于子空间 $V \in G(n,m)$ 外，还取决于 A_i。他们证明，对于 L^{kn}-几乎所有平移 $(t_1, \dots, t_k)$，都有 $\dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj}_V E = \dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj}_V E = \dim_{\mathrm{aff}}(A_1, \dots, A_k; V)$。此外，对于 $V \in G(n,m)$，$\dim_{\mathrm{aff}}(A_1, \dots, A_k; V)$ 只能取有限多个不同的值；事实上，Morris 和 Sert 证明，存在一个代数簇的有限滤过 $\varnothing = W_{p+1} \subset W_p \subset \cdots \subset W_1 = G(n,m)$，其中每个代数簇都在由 $\{A_i\}$ 生成的线性群作用下保持不变，并且对所有 $V \in W_j \setminus W_{j+1}$，$\dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj}_V E$ 均为常数。

从另一个角度来看，Lai 和 Patil 最近发表的一篇论文 [82] 刻画了自仿射集的每个投影何时都与其凸包的相应投影重合。设 $\{f_i\}_{i=1}^k$ 是作用于 $\mathbb{R}^n$ 上的仿射映射迭代函数系统，其吸引子为 E，并考虑 E 在直线上的投影。假设

$$\bigcup_{i=1}^{k} f_i(\mathrm{conv} E) = K_1 \cup \cdots \cup K_r$$

其中 $\{K_j\}_1^r$ 是该集合的不相交连通分支，conv 表示凸包。那么，对所有方向 $\theta \in S^{n-1}$，$\mathrm{proj}_\theta(\mathrm{conv} E) = \mathrm{proj}_\theta E$，当且仅当对所有 $\{1, 2, \dots, r\}$ 的真划分 $I \cup I^c$，

$$\mathrm{conv}\Big(\bigcup_{i \in I} K_i\Big) \cap \mathrm{conv}\Big(\bigcup_{i \in I^c} K_i\Big) \neq \varnothing.$$

这篇优雅的论文包含了许多例子和想法，探讨了集合在每个方向上都具有“极厚阴影”这一概念，即使这些集合本身可能非常稀疏。

具有如下形式的压缩映射的迭代函数系统

$$f_i(x,y) = (a_i x + c_i, b_i y + d_i) \tag{5.8}$$

称为对角迭代函数系统，因为其线性部分由对角矩阵表示，而其吸引子则称为自仿射地毯。这类仿射变换保持水平方向和垂直方向不变，因此这些迭代函数系统不属于上文提到的“不可约”情形。著名的例子包括 Bedford-McMullen、Gatzouras-Lalley 和 Bara´nski 地毯，定义和详情见 [25, 31, 49] 。当然，根据马斯特兰德定理，对于几乎所有 θ，$\dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj}_\theta E = \min\{\dim_{\mathrm{H}} E, 1\}$；但对于许多自仿射地毯，除平行于坐标轴的方向外，这一结论对所有方向都成立，不过通常还要求某些缩放参数的对数之比为无理数。Ferguson、Fraser 和 Sahlsten [46]给出了包括上述地毯在内的此类结果。最近，继 Py¨or¨al¨a 的测度研究之后，Feng [45] 证明，在非常一般的情形下，马斯特兰德的结论对除坐标轴方向外的所有方向都成立：具体而言，对于对角迭代函数系，若其在每个坐标轴上诱导的一维迭代函数系统满足指数分离条件，并且压缩比满足一个较弱的无理性条件，则结论成立。

关于自仿射地毯投影的盒维数与填充维数，我们所知甚少。关于中间维数的投影性质，已有一项奇特的结果浮出水面。对于中间维数在 0 处连续的地毯（见第 3.3 节），其中包括 Bedford-McMullen地毯，若$E \subset \mathbb{R}^2$ 满足 $\dim_{\mathrm{H}} E < 1 \le \dim_{\mathrm{B}} E$，则对所有 θ，都有$\dim_{\mathrm{B}} \mathrm{proj}_\theta E < 1$。因此， E 的投影的盒维数受到一个涉及 E的豪斯多夫维数的条件限制，见 [19]。

5.3 自共形集

设 $\{f_i\}_{i=1}^k$ 是一个由共形 $C^{1+\epsilon}$-映射 $f_i\colon U \to U$ 构成的迭代函数系统，其定义在某个满足开集条件的凸开集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上。因此， $f_i(x) = r_i(x)O_i(x)$, 其中$O_i(x)$为旋转，并假设对 $x \in U$ 有 $0 < r_- \le r_i(x) \le r_+ < 1$；因此，导数 $f_i'(x)$ 是旋转矩阵的标量倍数。由 (5.1) 确定的集合称为自共形 吸引子。

我们需要一个条件，来对应这种非线性语境下的“稠密旋转”。我们按照通常的方式将吸引子上的点编码为 $x(\mathbf{i}) = \lim_{p\to\infty} f_{i_1} \circ \cdots \circ f_{i_p}(0)$，其中 $\mathbf{i} = i_1, i_2, \ldots (1 \le i_j \le k)$。我们用 $G := SO(n, \mathbb{R})$ 表示旋转群，并定义 $\phi\colon \{1, 2, \ldots, k\}^{\mathbb{N}} \to G$，使其满足 $\phi(\mathbf{i}) = O_{i_1}(x(\sigma\mathbf{i}))$，其中 σ 是移位映射；因此， $\phi(\mathbf{i})$ 是由 $f_{i_1}^{-1}$ 在 $x(\sigma\mathbf{i})$ 处产生的局部旋转。接着，我们定义斜积 $\sigma_\phi\colon \{1, 2, \ldots, k\} \times G \supset$，其定义为

$$\sigma_\phi(\mathbf{i}, O) = (\sigma\mathbf{i}, O\phi(\mathbf{i})). \tag{5.9}$$

动力系统 $\sigma_\phi\colon \{1,\ 2,\ \ldots,\ k\}^{\mathbb{N}} \times G$ 若 σ_ϕ 有稠密轨道，则是遍历的。利用这一遍历性，Bruce 和 Jin [18] 在 [35] 中发展了 CP 链与紧群扩张定理方法，并由此得到了以下优美的定理。

定理 5.5。设 E 为上述共形迭代函数系统的吸引子。若 σ_ϕ 在 (5.9) 中具有稠密轨道，则

$$\dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj}_V E = \min\{m, \dim_{\mathrm{H}} E\} \textit{ for all } V \in G(n,m).$$

此外，对于所有没有奇异点的 C^1 映射 $g\colon E \to \mathbb{R}^m$，都有 维数$_{\mathrm{H}}\, g(E)$ = 最小值{维数$_{\mathrm{H}}\, E, m$}。

复映射的 Julia 集是一类重要的自共形集。对于$h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，由$h(z) = z^2 + c$ 且 $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6}) = 2.475\ldots$ 给定，令 f_1, f_2 为由h^{-1} 在适当定义域上的两个（压缩）分支所确定的迭代函数系统。该迭代函数系统的自共形吸引子 E 正是 h 的（排斥） Julia 集，见图 5。若~~c 满~~足 $\arg(1+\sqrt{1-4c})/\pi$ 为无理数，则 σ_ϕ 在 (5.9) 中具有稠密轨道，因此由定理 5.5 可知，所有投影的维数均等于 $\dim_{\mathrm{H}} E$。



图 5：自共形 Julia 集。

6 径向投影

不将集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 投影到直线或子空间上，也可以考虑点处的投影。集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 在点 $x \in \mathbb{R}^d$ 处的投影，是从 x 出发并与 E 相交的半直线的方向集合（夜晚仰望天空时，我们看到的是星星的径向投影）。因此，记 S^{n-1} 为嵌入于 $\mathbb{R}^n$中的 $(n-1)$ 维单位球面，我们将以 x 为中心的径向投影定义为映射 $\mathrm{proj}_x\colon \mathbb{R}^n \setminus \{x\} \to S^{n-1}$，其定义如下：

$$\mathrm{proj}_x(y) = \frac{y-x}{|y-x|}, \qquad y \in \mathbb{R}^n \setminus \{x\}.$$

[我们指出，Marstrand 1954 年论文 [89]中可能包含一些与径向投影等价的性质。]

通过将平面扩展为包含无穷远直线 L_∞（它对应于平面内平行线的方向），由定理 1.1 可推出一个关于平面内径向投影的 Marstrand 型结果。存在一个射影变换 ψ_L，它将直线映射为直线，并将任意给定的直线 L 映射到 L_∞，同时将经过 L 上每一点的直线映射为某个方向 θ 上的平行线。若集合 E 满足 $\dim_{\mathrm{H}}(E\setminus L) = \dim_{\mathrm{H}} E$，则可得 $\dim_{\mathrm{H}} \psi_L(E) = \dim_{\mathrm{H}} E$；因此，由马斯特兰德定理可知，对 L-几乎所有 $x \in L$，都有 $\dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj}_x E = \min\{\dim_{\mathrm{H}} E, 1\}$。通过为 L 选取合适的一组平行线，再利用 Fubini 定理可得，对 L^2-几乎所有 $x \in \mathbb{R}^2$，都有 $\dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj}_x E = \min\{\dim_{\mathrm{H}} E, 1\}$。

近期，Orponen、Shmerkin 和 Wang 针对平面情形 [115]，以及 Bright 和 Gan 针对高维情形 [17]，得到了径向投影小于“预期值” $\min\{\dim_{\mathrm{H}} E, n-1\}$ 的例外点 x 的维数上界。对于满足 $\dim_{\mathrm{H}} E \in (k-1, k]$ 的博雷尔集 $E \subset \mathbb{R}^n$，其中 $k \in \{1, \ldots\ldots, n-1\}$，他们得到了一个尖锐的 Kaufman 型界

$$\dim_{\mathrm{H}}\{x \in \mathbb{R}^n \setminus E : \dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj}_x E < \dim_{\mathrm{H}} E\} \le k. \tag{6.1}$$

对于 $\dim_{\mathrm{H}} E \in (k, k+1]$，其中 $k \in \{1, \ldots\ldots, n-1\}$ 且 $0 \le s \le k$，存在一个 Falconer 型界

$$\dim_{\mathrm{H}}\{x \in \mathbb{R}^n \setminus E : \dim_{\mathrm{H}} \mathrm{proj}_x E < s\} \le \max\{k + s - \dim_{\mathrm{H}} E, 0\}. \tag{6.2}$$

不等式 (6.1) 曾由 [84]提出猜想，而 (6.2) 则由 Lund、Pham 和 Thu[85]提出猜想。论文 [115] 为早期工作提供了很好的综述与参考文献。

固定点距离映射是径向投影的一种对偶。对于 $x \in \mathbb{R}^n$，我们通过 $\mathrm{dist}_x(y) = |y-x|$ 定义 $\mathrm{dist}_x\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$。因此，对每个 $x \in \mathbb{R}^n$，$\mathrm{dist}_x E$ 是 E 中各点到 x 的距离的汇集。E 的维数与 $\mathrm{dist}_x E$ 的维数之间的关系，是与距离集问题相关的一个受到深入研究的课题。其中一个版本问的是，$\dim_{\mathrm{H}} E > n/2$ 是否蕴含 $\mathrm{L}(\bigcup_{x\in E} \mathrm{dist}_x E) \equiv \mathrm{L}(\{|x-y|\colon x, y \in E\}) > 0$。固定点距离问题甚至更强：若 $\dim_{\mathrm{H}} E > n/2$，能否找到一个点 $x \in E$（或者实际上许多这样的点），使得 $\mathrm{L}(\mathrm{dist}_x E) > 0$？我们在此不深入探讨这些问题；关于这些问题有大量文献，例如参见 [135]。

7 分形投影的其他一些方面

关于集合投影，还有许多其他方面正在积极研究中。最后，我们简要提及其中一些近期取得进展的方向，并提供相关文献，读者可从中找到更多细节及进一步的参考资料。

随机集的投影。

几乎任何分形构造都可以随机化；如果决定分形形态的随机过程存在于任意小的尺度上，那么概率论中的“零一律”可能会保证随机集及其投影的维数等量几乎必然取某个特定值。

最著名的随机分形是迭代函数系统构造的随机变体，见第 5 节。分形渗流是对 (5.2) 中所示迭代过程的一种自然随机化。这里，给定概率 $0 < p < 1$，集合 $A_{i_1,i_2,\ldots,i_j}$ 独立地以概率 p纳入构造，并以概率 $1-p$舍弃，从而得到一个（可能为空的）随机集 E，它是第 j 层随机近似的交集。

对于最常考虑的情形，令 A 为单位正方形，并按自然方式将其划分为 $M \times M$ 个边长为 $1/M$ 的子正方形，其中 $M \geq 2$ 是整数。令 $f_i\ (1 \leq i \leq M^2)$ 为将 A 映射到这些子正方形各自上的位似变换（不含旋转或反射的相似变换）。这就是曼德尔布罗特渗流，它产生集合 E；在非灭绝的条件下，该集合几乎必然具有盒维数和豪斯多夫维数 $2+\log p/\log M$。接着，对于曼德布罗渗流集的投影，马斯特兰德定理 1.1 的结论几乎必然对所有投影成立；在附加条件下，这些投影还都包含一个区间，见[12, 31, 118, 124, 126, 125]。这种构造有许多变体，例如，保留子集的概率不必处处相同，参见 [126], ；关于三维变体，参见 [139, 106], ，其中包括门格海绵上的渗流。

对于基于一般相似变换迭代函数系统的渗流，若底层迭代函数系统具有稠密旋转（见第 5.1 节），遍历论方法可得到定理 5.2 [35, 36] 的一个自然随机类比。[20] 讨论了随机覆盖“极限上确界”集的投影的 Marstrand 型结果。Shmerkin 和 Suomala [138] 提出了一套非常一般的理论，表明对于一类称为空间独立鞅的随机测度，关于这些测度的投影维数以及底层支撑集维数的强结果均成立；其中许多结论几乎必然对所有方向上的投影或投影到所有子空间都成立。

广义投影。

以 $\theta \in [0, \pi)$ 或 $V \in G(n, m)$ 为参数的投影族，是更一般的参数化函数族的特例；这些函数可能是非线性的，而 Marstrand 和 Mattila 的投影定理则是其中的特例。Kaufman 和 Falconer 发展的势论证明和傅里叶证明（见第 2 节和第 3 节）依赖于一种如今称为横截条件的条件，而这一条件往往可应用于非线性映射。Peres 和 Schlag[120] 发展了这一思想，证明对于参数化的（可能是非线性的）映射族，几乎所有参数下，集合像的维数都满足 Marstrand 型定理，并给出了例外参数维数的界。关于横截性的最新论述见 [11, 14, 95]。Shmerkin [136] 采用离散化方法，将 Bourgain 投影定理从例外集维数推广到参数化映射族下所有博雷尔集的像，且这些映射没有奇异点。

对于某些类别集合的像，或许可以得到确定的结果。例如，在定理5.2中我们指出，对于具有稠密旋转的自相似集 E，

不仅所有方向上的投影都具有豪斯多夫维数$\min\{\dim_{\mathrm{H}} E, m\}$，而且对于在没有奇异点的 C^1 映射下的 E 的像，这一结论同样成立。对于在相似变换的迭代函数系统下自相似的集合，也有类似结论，见[9, 13]。

Fraser [50] 将不等式 (3.7) 推广，证明了

$$\dim_{\mathrm{A}} g(E) \geq \min\{m, \dim_{\mathrm{A}} E\}$$

对于所有集合 E 以及所有 C^1 没有奇异点的映射 $g\colon E \to \mathbb{R}^m$，这一结果还带来了一些很好的推论，包括证明了关于 Assouad 维数的“距离猜想”。

海森堡群中的投影。

海森堡群 $\mathbb{H}$ 可识别为 $\mathbb{C}\times\mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^3$，其群乘法定义为 $(z,t) * (w,u) = (z+w, t+u+2\mathrm{Im}(z\overline{w}))$。海森堡度量定义为 $d_{\mathbb{H}}((z,t),(w,u)) = \|(w,u)^{-1} * (z,t)\|_{\mathbb{H}}$，其中范数 $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$ 定义为 $\|(z,t)\|_{\mathbb{H}} = (|z|^4 + t^2)^{1/2}$。于是，$d_{\mathbb{H}}$ 在群作用下保持左不变，其表现与欧几里得度量截然不同；子集 $\mathbb{H}$的豪斯多夫维数取决于所使用的度量。尽管缺乏各向同性，但其几何结构足以使投影到某些子空间族上的投影具有有趣的性质。具体而言，对于每个 $\theta \in [0,\pi)$，都存在一个半直积群分解 $\mathbb{H} = W_\theta * P_\theta$，其中 V_θ是一条“水平”直线，W_θ是一个二维“垂直平面”，因此，对于与这一分解相对应的每个 θ，我们都可以考虑从 $\mathbb{H}$ 到 W_θ 以及从 $\mathbb{H}$ 到 P_θ的投影。对于水平投影和垂直投影，人们都已得到博雷尔集 $E \subset \mathbb{H}$ 的投影维数与 E 的维数之间的各种估计，这些估计对几乎所有θ 都成立，参见[3, 4, 40, 42, 62, 63, 94]，；高阶海森堡群 $\mathbb{H}^n$也有相应的结果。

其他空间中的投影。

Balogh 和 Iseli 针对常曲率黎曼曲面上由测地线定义的正交投影，得到了 Marstrand 型结果 [5]。他们还在 $\mathbb{R}^2$ 一般范数下获得了投影定理；由于此处不存在正交的概念，他们用到直线 [6]上的最近点映射来替代投影。类似地，在双曲空间中，他们考虑通过指数映射 [7]将m平面映射后得到的像上的最近点映射。文献 [73]还介绍了适用于黎曼球面上的 M¨obius 变换和射影平面上的射影变换的相应版本。这些不同情形下的证明采用了 Peres-Schlag [120]的一般横截性框架，从而得到了投影定理以及投影例外集的界。

无限维动力系统中吸引子到有限维空间的线性嵌入可以视为投影。一个经典的维数结果由 Hunt 和 Kaloshin 得出 [71]。设 E 是巴拿赫空间 X中的一个紧子集，其盒计数维数为 d。那么，对于几乎所有满足 $m > 2d$的投影或有界线性函数 $\pi\colon X \to \mathbb{R}^m$，

$$\frac{m-2d}{m(1+d)}\dim_{\mathrm{H}} E \le \dim_{\mathrm{H}} \pi(E) \le \dim_{\mathrm{H}} E.$$

这里的“几乎所有”是从普遍性的意义上来理解的，这是一种测度论方法，用于定义无穷维空间中的稀疏集和满集。从这种嵌入视角讨论投影的更多参考文献包括 [87, 117, 131, 130,133]。这是一个 Assouad维数和“厚度”概念发挥重要作用的领域。

集合的可见部分。

紧集的可见部分 $\mathrm{Vis}_\theta E$ 是指紧集 $E \subset \mathbb{R}^2$ 沿方向 θ 的如下点集：$x \in E$ 从 x 出发、沿方向 θ 的半直线与 E 相交于唯一一点x；因此，$\mathrm{Vis}_\theta E$ 可以看作是 E 中沿方向 θ“从无穷远处可见”的部分。由 Marstrand 定理 1.1 可立即得出，对于几乎所有 θ,

$$\dim_{\mathrm{H}} \mathrm{Vis}_\theta E = \dim_{\mathrm{H}} E \text{ if } \dim_{\mathrm{H}} E \le 1 \quad \text{and} \quad \dim_{\mathrm{H}} \mathrm{Vis}_\theta E \ge 1 \text{ if } \dim_{\mathrm{H}} E \ge 1.$$

长期以来，人们猜想，若 $\dim_{\mathrm{H}} E \ge 1$，则对于几乎所有$\theta$，$\dim_{\mathrm{H}} \mathrm{Vis}_\theta E = 1$ 成立，但目前仅对某些特定类别的 E证明了这一点。若 E 是某个函数的函数图像，该猜想很容易验证（唯一可能的例外方向是垂直于 x轴的方向），参见 [76]。对于拟圆 [76]，该结论也成立；对于曼德博渗流集 [2]，则几乎必然成立。对于自相似集，若旋转群有限，且投影是区间的可数并 [77],，或者若 E 满足相对于某个凸开集的开集条件，且对所有 θ [30]，$\mathrm{proj}_\theta E$ 都是区间（此时 E 不必连通），则该猜想成立；此外，对某些自仿射集 [132]也成立。

O’Neil [105] 得到了可见集典型豪斯多夫维数关于 $\dim_{\mathrm{H}} E$的一个上界。高维中的类似猜想——紧致 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的可见部分的维数等于 $\min\{\dim_{\mathrm{H}} E, n-1\}$——也尚未解决，但 Orponen [111] 证明，对于几乎所有 θ，当所有 $n \ge 2$时，$\dim_{\mathrm{H}} \mathrm{Vis}_\theta E \le n - 1/50n$；而最近 Da˛browski [21] 将其改进为 $\dim_{\mathrm{H}} \mathrm{Vis}_\theta E \le n - 1/6$，从而得到了 Ahlfors 正则集的改进界。

8 总结

本文综述了许多可视为 Marstrand 投影定理衍生结果的研究成果。近年来，分形几何已发展成为数学中一个独立且成熟的领域，吸引了众多才华横溢的数学家。自十年前的前篇综述 [31] 发表以来，一些当时甚至被认为棘手难解的问题如今已得到解决。

如今，关于分形投影各个方面的论文已经如此之多，不可能一一提及，也不可能完整介绍这一主题的历史，不过，相关论文往往会在引言中回顾相关历史

并列出许多进一步的参考文献。对于所有那些值得肯定、却未能在此特别提及其成果的人，我深表歉意。

致谢 多年来，我曾与许多朋友和同事讨论分形，尤其是分形的投影，对此我深表感谢。感谢 Jonathan Fraser、Tuomas Orponen 以及一位审稿人对本综述草稿提出的意见。

参考文献

1. A. Algom 与 P. Shmerkin. 自相似测度的正交投影的维数, 伦敦数学学会杂志(2) 112 (2025年), 论文编号 e70245. 2. I. Arhosalo、E. J¨arvenp¨a¨a、M. J¨arvenp¨a¨a、M. Rams 与 P. Shmerkin. 分形渗流的可见部分, 爱丁堡数学学会会刊 55 (2012年), 311–331. 3. Z.M. Balogh、E. Durand-Cartagena、K. F¨assler、P. Mattila 与 J.T. Tyson. 投影对海森堡群中维数的影响, 伊比利亚美洲数学评论 29 (2013年), 381–432. 4. Z.M. Balogh、K. F¨assler、P. Mattila 与 J.T. Tyson. 海森堡群中的投影与切片定理, 数学进展 231 (2012年), 569–604. 5. Z.M. Balogh 与 A. Iseli. 常曲率黎曼曲面上集合投影的维数, 美国数学会会刊 144 (2016年), 2939–2951. 6. Z.M. Balogh 与 A. Iseli. 赋范空间的 Marstrand 型投影定理, 分形几何杂志 4 (2019年), 367–392. 7. Z.M. Balogh 与 A. Iseli. 双曲空间中的投影定理, 数学文献（巴塞尔）112 (2019年), 329–336. 8. C. Bandt、K. Falconer 与 M. Z¨ahle（编）. 分形几何与随机性 V, 概率进展 70, Birkhäuser, 查姆, 2015年. 9. B. B´ar´any. 关于 $\mathbb{R}^3$ 中自相似集的若干非线性投影, 基础数学 237 (2017年), 83–100. 10. B. B´ar´any、M. Hochman 与 A. Rapaport. 平面自仿射集与测度的豪斯多夫维数, 数学发明 216 (2019年), 601–659. 11. B. B´ar´any、K. Simon 与 B. Solomyak. 自相似集与自仿射集及测度, 普林斯顿大学出版社, 2024年. 12. J. Barral 与 D.-J. Feng. 平面曼德博测度的投影, 数学进展 325 (2018年), 640–718. 13. M. Bond、I. Laba 与 J. Zahl. 平面中不可整流集的定量可见性估计, 美国数学会汇刊 368 (2016年), 5475–5513. 14. R. Bongers 与 K. Taylor. 非线性投影的横截族与 Favard 长度的推广, 偏微分方程分析 16 (2023年), 279–308. 15. J. Bourgain. 关于 Erd˝os-Volkmann 猜想与 Katz-Tao 环猜想, 几何与泛函分析 13 (2003年), 334–365. 16. J. Bourgain. 离散化和积定理与投影定理, 分析数学杂志 112 (2010 年), 193–236. 17. C. Bright 与 S. Gan. $\mathbb{R}^n$ 中径向投影的例外集估计, 芬兰科学院数学年刊 49 (2024年), 631–661. 18. C. Bruce 与 X. Jin. 自共形集上吉布斯测度的投影, Nonlinearity 32 (2019年), 603–621. 19. S. Burrell、K.J. Falconer 与 J. Fraser. 中间维数的投影定理, 分形几何杂志 8 (2021年), 95–116. 20. C. Chen、H. Koivusalo、B. Li、Bing 与 V. Suomala. 随机覆盖集的投影, 分形几何杂志 1 (2014年), 449–467. 21. D. Da̧browski. Ahlfors 正则集的可见部分与切片, 离散分析 2024年, 论文编号 17.

22. G. Edgar 与 C. Miller. 实数的博雷尔子环, 美国数学会会刊 131 (2003年), 1121–1129. 23. K.J. Falconer. 豪斯多夫维数与投影的例外集, Mathematika 29 (1982年), 109–115. 24. K.J. Falconer. 自仿射分形的豪斯多夫维数, 剑桥哲学学会数学会刊 103 (1988年), 339–350. 25. K.J. Falconer. 自仿射集的维数：综述, 载于《分形与相关领域的进一步发展》, J. Barral 与 S. Seuret （编）, 第 115–134 页 , 数学趋势 , 施普林格 , 纽约 , 2013 年 . 26. K.J. Falconer. 分形几何：数学基础与应用, 约翰·威利父子出版公司, 霍博肯, 新泽西州, 第3版, 2014年. 27. K.J. Falconer. 投影及其他像的盒维数与填充维数的容量方法, 载于《分形上的分析、概率与数学物理》, 第1–19页, 分形、动力学、数学、科学与艺术：理论与应用 5, 世界科技出版社, 哈肯萨克, 2020年. 28. K.J. Falconer. 集合投影的盒维数与填充维数及例外方向的容量方法, 分形几何杂志 8 (2021年), 1–26. 29. K.J. Falconer. 中间维数：综述, 载于《热力学形式主义》, 第469–493页, M. Pollicott 与 S. Vaienti（编）, 数学讲义 2290, 施普林格, 查姆, 2021年. 30. K.J. Falconer 与 J.M. Fraser. 平面自相似集的可见部分, 美国数学会会刊 141 (2013 年), 269–278. 31. K.J. Falconer 、 J.M. Fraser 与 X. Jin. 分形投影六十年, 载于《分形几何与随机性 V》, C. Bandt、K. Falconer 与 M. Z¨ahle（编）, 第3–25页, 概率进展 70, Birkhäuser, 查姆, 2015年. 32. K.J. Falconer、J.M. Fraser 与 T. Kempton. 中间维数. 数学杂志 296 (2020年), 813–830. 33. K.J. Falconer 与 J.D. Howroyd. 盒维数与填充维数的投影定理, 剑桥哲学学会数学会刊 119 (1996年), 287–295. 34. K.J. Falconer 与 J.D. Howroyd. 投影的装填维数与维数剖面, 剑桥哲学学会数学会刊 121 (1997年), 269–286. 35. K. J. Falconer 与 X. Jin. 随机自相似测度与集合的精确维数性及投影, 伦敦数学学会杂志(2) 90 (2014年), 388–412. 36. K. J. Falconer 与 X. Jin. 自相似集：投影、截面与渗流, 载于《分形与相关领域的最新进展》, J. Barral 与 S. Seuret（编）, 第113–127页, 施普林格, 查姆, 2015年. 37. K. J. Falconer 与 T. Kempton. 自仿射集与测度的投影维数, 芬兰科学院数学年刊 42 (2017年), 473–486. 38. K.J. Falconer 与 P. Mattila. 测度的投影与截面的填充维数, 剑桥哲学学会数学会刊 119 (1996年), 695–713. 39. A. Farkas. 无分离条件的自相似集的投影, 以色列数学杂志 214 (2016年), 67–107. 40. K. F¨assler 与 R. Hovila. 海森堡群中垂直投影的改进豪斯多夫维数估计, 比萨高等师范学校科学年刊 (5) 15 (2016年), 459–483. 41. K. F¨assler 与 T. Orponen. 关于 $\mathbb{R}^3$ 中的受限投影族, 伦敦数学学会会刊(3) 109 (2014年), 353–381. 42. K. F¨assler 与 T. Orponen. 借助电影函数与点-板关联研究海森堡群中的垂直投影, 数学进展 431 (2023年), 论文编号 109248. 43. D.-J. Feng、C.-H Lo 与 C.-Y. Ma. 典型自仿射集上投影集与测度的维数, 数学进展 431 (2023年), 论文编号 109237. 44. D.-J. Feng 与 Y.-H. Xie. 典型自仿射集与测度的正交投影的维数, arXiv:2502.04000 (2025年). 45. Z. Feng. 具有指数分离投影的对角自仿射测度的维数, arXiv:2501.17378 第2版 (2025年). 46. A. Ferguson、T. Jordan、P. Shmerkin. 自仿射地毯投影的豪斯多夫维数, 基础数学 209 (2010年), 193–213.

47. J.M. Fraser. 距离集、正交投影及向弱切向的转化，Israel J. Math. 226 (2018), 851–875. 48. J.M. Fraser. 《Assouad维数与分形几何》，剑桥大学出版社，剑桥，2021年. 49. J.M. Fraser. Bedford-McMullen地毯的分形几何，载于《热力学形式主义》，495–516，数学讲义2290，施普林格，查姆，2021年. 50. J.M. Fraser. 关于Assouad维数及其应用的非线性投影定理，伦敦数学学会杂志(3) 107 (2023), 777–797. 51. J.M. Fraser. 傅里叶谱与和集型问题，数学年刊390 (2024), 3891–3930. 52. J.M. Fraser. 维数插值在正交投影中的应用，数学科学研究12 (2025), no. 1, Paper No. 10. 53. J.M. Fraser and A. K¨aenm¨aki. Assouad维数投影的可取值，美国数学会会刊148 (2020), 3393–3405. 54. J.M. Fraser and A.E. deOrellana. 用傅里叶分析方法估计正交投影的例外集，印第安纳大学数学杂志，即将刊出，arXiv:2404.11179 (2024). 55. J.M. Fraser and T. Orponen. 平面集投影的Assouad维数，伦敦数学学会会刊(2) 114 (2017), 374–398. 56. H. Furstenberg. 遍历分形测度与维数守恒，遍历理论与动力系统28 (2008), 405–422. 57. H. Furstenberg. 遍历理论与分形几何，CBMS数学区域会议系列120 (2014)，美国数学会。罗德岛州普罗维登斯. 58. S. Gan, S. Guo, L. Guth, T.L.J. Harris, D. Maldague and H. Wang. 关于到 $\mathbb{R}^3$中平面的受限投影，arXiv:2207.13844 (2022). 59. S. Gan, S. Guo and H. Wang. 关于 $\mathbb{R}^n$中分形集的受限投影问题，剑桥数学杂志12 (2024), 535–561. 60. S. Gan, L. Guth and D. Maldague. 关于到 $\mathbb{R}^3$中直线的受限投影的例外集估计，几何分析杂志34 (2024), no. 1, Paper No. 15. 61. T.L.J. Harris. 通过加权傅里叶限制改进受限投影族的界，芬兰科学院数学年刊45 (2020), 723–737. 62. T.L.J. Harris. 海森堡群中垂直投影下豪斯多夫维数的几乎处处下界，偏微分方程分析15 (2022), 1655–1701. 63. T.L.J. Harris. 海森堡群中垂直投影的欧几里得傅里叶分析方法，伦敦数学会通报55 (2023), 961–977. 64. T.L.J. Harris. 受限投影族下集合的长度，载于《调和分析及其应用的最新进展》，当代数学，1-17，当代数学792，美国数学会，普罗维登斯，2024. 65. T.L.J. Harris. $\mathbb{R}^3$中到直线的受限投影族下长度的例外集，arXiv:2408.04885 (2025). 66. W. He. 离散化集的正交投影，分形几何杂志7 (2020), 271–317. 67. M. Hochman. 分形上的动力学与分形分布，arXiv:1008.3731v2 (2013). 68. M. Hochman. 关于具有重叠的自相似集及熵的逆定理，数学年刊(2) 180 (2014), 773–822. 69. M. Hochman and A. Rapaport. 具有重叠的平面自仿射集与测度的豪斯多夫维数，欧洲数学会杂志24 (2022), 2361–2441. 70. M. Hochman and P. Shmerkin. 局部熵平均与分形测度的投影，数学年刊(2) 175 (2012), 1001–1059. 71. B.R. Hunt and Y. Kaloshin. 无限维分形集嵌入有限维空间的正则性，Nonlinearity 12 (1999), 1263–1275. 72. J.E. Hutchinson. 分形与自相似性，印第安纳大学数学杂志30 (1981), 713–747. 73. A. Iseli and A. Lukyanenko. 线性分式投影族的投影定理，剑桥哲学学会数学会刊175 (2023), 625–647. 74. E. J¨arvanp¨a¨a, M. J¨arvanp¨a¨a and T. Keleti. 豪斯多夫维数与非退化投影族，几何分析杂志24 (2014), 2024–2034.

75. E. J¨arvanp¨a¨a, M. J¨arvanp¨a¨a, F. Ledrappier and M. Leikas. 一维投影族，Nonlinearity 21 (2008), 453–463. 76. E. J¨arvanp¨a¨a, M. J¨arvanp¨a¨a, P. MacManus and T.C. O'Neil. 可见部分与维数，Nonlinearity 16 (2003), 803–818. 77. E. J¨arvanp¨a¨a, M. J¨arvanp¨a¨a, V. Suomala and M. Wu. 关于有限旋转群自相似集可见部分的维数，美国数学会会刊150 (2022), 2983–2995. 78. M. J¨arvanp¨a¨a. 关于上闵可夫斯基维数、填充维数及正交投影，芬兰科学院数学年刊A辑论文集99 (1994). 79. A. K¨aenm¨aki, T. Orponen and L. Venieri. $\mathbb{R}^3$中的Marstrand型受限投影定理，美国数学杂志147 (2025), 81–123. 80. R. Kaufman. 关于投影的豪斯多夫维数，Mathematika 15 (1968), 153-155. 81. D. Khoshnevisan and Xiao. 填充维数剖面与分数布朗运动，剑桥哲学学会数学会刊145 (2008), 145–213. 82. C.K. Lai and L.P. Patil. 在 $\mathbb{R}^d$上具有极厚阴影的全不连通薄分形的投影，分形几何杂志11 (2024), 289-317. 83. E. Lindenstrauss, A. Mohammadi, Z. Wang and L. Yang. 具有多项式误差率的Oppenheim猜想有效版本，arXiv:2305.18271 (2023). 84. B. Liu. 关于径向投影的豪斯多夫维数，伊比利亚美洲数学评论37 (2020), 1307–1319. 85. B. Lund, T. Pham and V.T.H. Thu. 有限空间中的径向投影定理，美国数学会会刊153 (2025), 2169–2183. 86. N. Lutz and D. M. Stull. 运用有效维数的投影定理，Inform. and Comput. 297 (2024), Paper No. 105137. 87. A. Margaris and J.C. Robinson. 具有有限盒维数的集合的嵌入性质，Nonlinearity 32 (2019), 3523–3547. 88. G.A. Margulis. 离散子群与遍历理论，载于《数论、迹公式与离散群》（奥斯陆，1987），377–398，Academic Press，波士顿，1989. 89. J.M. Marstrand. 分数维平面集的一些基本几何性质，伦敦数学会会刊(3) 4 (1954年), 257–302. 90. P. Mattila. 豪斯多夫维数、正交投影及与平面的交集，芬兰科学院数学年刊A辑数学1 (1975), 227–244. 91. P. Mattila. 《欧几里得空间中集合与测度的几何》，剑桥大学出版社，剑桥，1995. 92. P. Mattila. 豪斯多夫维数、投影与傅里叶变换，Publ. Mat. 48 (2004), 3–48. 93. P. Mattila. Marstrand 定理，载于《数学万象》《数学家少年读者肖像》，A. C´ordoba, J.L. F´ernandez and P. F´ernandez（编），第283–301页，伊比利亚美洲数学评论，2011. 94. P. Mattila. 投影维数研究的最新进展，载于《分形的几何与分析》，D.-J. Feng and K.-S. Lau（编），第283–301页，Springer 数学与统计学会议录88，施普林格，海德堡，2014. 95. P. Mattila. 《傅里叶分析与豪斯多夫维数》，剑桥大学出版社，剑桥，2015. 96. P. Mattila. 豪斯多夫维数、投影、交集与Besicovitch 集，载于《应用调和分析新趋势》第2卷——调和分析、几何测度论与应用，第129–157页，应用数值调和分析88，Birkh¨auser/施普林格，查姆，2019. 97. P. Mattila. 与交集相关的豪斯多夫维数与投影，Publ. Mat. 66 (2022), 305–323. 98. I.D. Morris. 具有强不可约性的自仿射集的例外投影，arXiv:2308.04894 (2023). 99. I.D. Morris and C. Sert. 联系自仿射测度与自仿射集的变分原理，arXiv:2303.03437 (2023). 100. I.D. Morris and C. Sert. 自仿射分形的投影，arXiv:2502.04001 (2025). 101. I.D. Morris and P. Shmerkin. 通过正子系统上的自仿射测度研究豪斯多夫维数与仿射维数相等的问题，美国数学会汇刊371 (2019), 1547–1582.

102. D.M. Oberlin. 受限拉东变换与平面集的投影，《加拿大数学通报》55 (2012年), 815–820. 103. D.M. Oberlin. 投影的例外集、 k平面的并及相关变换，《以色列数学杂志》202 (2014年), 331–342. 104. D.M. Oberlin and R. Oberlin. 傅里叶限制定理在 $\mathbb{R}^3$中某些投影族上的应用，《几何分析杂志》25 (2015), 1476–1491. 105. T.C. O'Neil. 平面连续统可见集的豪斯多夫维数，《美国数学会汇刊》359 (2007), 5141–5170. 106. V. Orgov´anyi and K. Simon. 随机门格海绵的投影，《亚洲数学杂志》27 (2023年), 893–935. 107. T. Orponen. 关于正交投影例外集的填充维数与范畴，《纯粹与应用数学年刊》(4) 194 (2015), 843–880. 108. T. Orponen. $\mathbb{R}^3$中受限投影族的豪斯多夫维数估计，《数学进展》275 (2015),147–183. 109. T. Orponen. 平面Furstenberg集填充维数的改进上界，《欧洲数学会杂志》22 (2020年), 797–831. 110. T. Orponen. 关于投影的Assouad维数，《伦敦数学会会刊》(3) 122 (2021年), 317–351. 111. T. Orponen. 关于可见部分的维数，《欧洲数学会杂志》252 (2023年), 1969–1983. 112. T. Orponen. 关于离散化ABC和积问题，《美国数学会汇刊》377 (2024年), 4647–4702. 113. T. Orponen and P. Shmerkin. 关于平面中Furstenberg集与正交投影的豪斯多夫维数，《杜克数学杂志》172 (2023年), 3559–3632. 114. T. Orponen and P. Shmerkin. 投影、Furstenberg集与abc和积问题，arXiv:2301.10199 (2023). 115. T. Orponen, P. Shmerkin and Hong Wang. 径向投影的Kaufman与Falconer估计及Beck定理的连续统版本，《几何与泛函分析》34 (2024年), 164–201. 116. T. Orponen and L. Venieri. $\mathbb{R}^3$中投影到平面的受限投影族的改进界，《国际数学研究通报》IMRN 19 (2020年), 5797–5813. 117. W. Ott, B. Hunt and V. Kaloshin. 投影对巴拿赫空间中分形集与测度的影响，《遍历理论与动力系统》26 (2006), 869–891. 118. Y. Peres and M. Rams. 渗流分形自然测度的投影，《以色列数学杂志》214 (2016), 539–552. 119. Y. Peres and B. Schlag. 投影的光滑性、伯努利卷积与例外集的维数，《杜克数学杂志》102 (2000), 193–251. 120. Y. Peres and P. Shmerkin. 康托尔集之间的共振，《遍历理论与动力系统》29 (2009), 201–221. 121. M. Pramanik, T. Yang and J. Zahl. 圆的一个Furstenberg型问题，以及 $\mathbb{R}^3$中的一个Kaufman型受限投影定理，arXiv:2207.02259 v.3 (2024年). 122. A. Py¨or¨al¨a. 平面对角自仿射测度的投影维数，《芬兰科学院数学年刊》50 (2025), 59–78. 123. M. Rams. 例外参数的填充维数估计，《以色列数学杂志》130 (2014), 125–144. 124. M. Rams and K. Simon. 分形渗流投影的维数，《统计物理学杂志》154 (2014), 633–655. 125. M. Rams and K. Simon. 分形渗流的几何，载于《分形的几何与分析》，D.-J. Feng and K.-S. Lau（编），第303–324页，Springer 数学与统计学会议录，88, Springer-Verlag，柏林、海德堡，2014. 126. M. Rams and K. Simon. 分形渗流的投影，《遍历理论与动力系统》35 (2015), 530–545. 127. A. Rapaport. 具有稠密旋转、奇异投影与离散切片的自相似测度，《数学进展》321 (2017), 529–546. 128. A. Rapaport. 关于与强不可约且近端系统相关的自仿射测度，《数学进展》449 (2024), 论文编号109734.

129. K. Ren and H. Wang. 平面中Furstenberg集的估计，arXiv:2308.08819 (2023). 130. J.C. Robinson. 巴拿赫空间有限维子集到欧几里得空间的线性嵌入，*Nonlinearity* **22** (2009), 711–728. 131. J.C. Robinson. 《维数、嵌入与吸引子》，剑桥大学出版社，剑桥，2010. 132. E. Rossi. 平面受控自仿射集的可见部分，芬兰科学院数学年刊 **46** (2021), 1089–1103. 133. E. Rossi and P. Shmerkin. 小维数集的H¨older覆盖，分形几何杂志 **6** (2019), 285–299. 134. P. Shmerkin. 自相似及相关分形的投影：近期进展综述，载于《分形几何与随机性 *V*》，C. Bandt、K. Falconer and M. Z¨ahle（编），第3–25页，概率论进展 **70**，Birkhauser，查姆，2015. 135. P. Shmerkin. 关于钉住距离集的豪斯多夫维数，以色列数学杂志 **230** (2019), 949–972. 136. P. Shmerkin. Bourgain 投影定理的一个非线性版本，欧洲数学会杂志 **25** (2023年), 4155–4204. 137. P. Shmerkin and B. Solomyak. 自相似测度、其投影及卷积的绝对连续性，美国数学会汇刊 **368** (2016), 5125–5151. 138. P. Shmerkin and V. Suomala. 空间独立鞅、交集与应用，美国数学会回忆录 **251** (2018), 第1195号. 139. K. Simon and L. V´ag´o. 高维曼德尔布罗特渗流的投影，即将发表于《分形、小波及其应用》，第175–190页，*Springer* 数学与统计学会议录 **92**，施普林格，查姆，2014. 140. B. Solomyak. 若干分形族的测度与维数，剑桥哲学学会数学会刊 **124** (1998), 531–546. 141. C. Tricot. 分数维的两种定义，剑桥哲学学会数学会刊 **91** (1982), 57–74. 142. Y. Xiao. 分数布朗运动像集的填充维数，统计与概率通讯 **333** (1997), 379–387.