arXiv:2602.22095v2 [quant-ph] 26 Mar 2026

量子力学如何从随机过程中涌现

Jason Doukas

2026年3月27日

摘要

随机—量子对应将量子动力学重新诠释为源于构型空间上的底层随机过程。我们将这一对应推广：在有限维中，将任意随机核 Γ提升为作用于 $B(\mathcal{H})$上的映射 ϕ，建立相应的提升相容关系，并给出Γ 与 CPTP（Kraus）映射之间的明确对照表。我们指出，提升后的族满足查普曼–柯尔莫哥洛夫可分性是关键的附加约束：当存在满足 CK 一致性的 CPTP 族时，该提升可写成 Lindblad主方程的形式。在这一图景中，非对角（相位）自由度充当一种压缩载体，承载着仅凭转移核无法确定的历史依赖性；反过来，量子相位信息看似从相位盲随机描述中涌现，实则可由记忆效应解释。最后，我们陈述并证明底层随机核的一个可分性判据，该判据以提升映射的可分性与密度算符满足对角性要求为条件。

1 引言

量子力学是一种概率理论，它与经典随机理论有着明确的区别：随机动力学直接演化概率，而量子时间演化则由作用于复振幅的幺正变换所支配，只有在舍弃相位信息后，才能得到可观测的概率。

正是这种对相位敏感的结构，产生了叠加、干涉和纠缠这些独特的量子特征；人们传统上认为，这些特征使量子力学有别于经典随机过程。长期以来，这种区别被视为标志着两种理论框架之间存在根本分野。

然而，近来有一种名为随机–量子对应的提案（参见 Barandes 的原始表述及后续发展

[1–7]）对此观点提出了挑战，并提出一种引人注目的替代看法：量子理论本身或许可以被理解为一类特殊的随机过程，而非一种根本不同的动力学框架。

随机—量子对应是在一个高度一般的框架中表述的，仅假定一个构型空间，以及给定时刻的概率分布和支配其演化的条件概率。

原始表述所强调的一个重要方面是，并未施加马尔可夫假设，这与随机建模中（以及更广泛而言，一般物理学中）通常所作的假定形成对照。因此，动力学反而可以是不可分的，其含义是演化不能分解为一系列独立的局部转移步骤。正因如此，该对应所刻画的新行为并非源于引入额外约束，而是源于放宽通常施加于随机过程的限制性假定。

尽管如此，原始构造在其所处理的随机过程类别中确实假定了额外结构。本工作的一个目标是使该结构明确化，并将其置于一般随机过程的更广阔图景之中。

重要的是，这一结构假定并不削弱随机—量子对应所取得的成果。在其教科书表述中，量子理论以公理化方式呈现，测量以及观察者的作用被置于形式体系的中心。在其最为人熟知的形式——哥本哈根诠释——中，观察者不仅在测量哪个可观测量方面起着根本作用，而且在用于作出未来预测的测量后状态更新（坍缩）中也起着根本作用。

许多研究路径都试图削弱观察者在量子理论动力学更新中的核心作用。这些努力通常尝试仅从幺正动力学推导出玻恩规则和坍缩公设，或通过为标准公理增添额外假设来实现这一点。

在随机描述中，这些概念可以清晰地区分。随机过程具有固定的底层构型空间，其“状态”可被视为某一时刻实际实现的构型（即轨迹的取值）。一旦结果出现，无论是否被观察到，它都是一个物理事实；更新状态以反映这一事实，无需依赖观察者的测量公设。

尽管原作内容全面，但仍留下了几个值得在此探讨的自然问题。第一，如果幺正量子力学旨在从本质上属于随机性的假设中涌现，那么普通的马尔可夫随机过程为何不能以同等地位作为对应关系中的“第一类”对象出现，而只通过极限过程或粗粒化约化间接呈现？第二，能够接受量子提升的随机过程究竟有哪些内在特征？它们在更广阔的随机动力学图景中又确切处于何种位置？第三，如何调和量子力学丰富的相位依赖结构与一种不依赖相位的概率描述——在这种描述中，转移核不含显式的相位信息？第四，既然与测量装置的操作性耦合本身

不能在任何概率理论中取代状态更新，那么轨迹的条件更新、嵌入式观察者的干预，以及测量过程中可分事件的涌现，这三者之间的确切关系是什么？最后，随机过程由路径空间上的高阶条件律来规定；那么，为什么以根为基准的（双时刻）转移核仍足以捕捉大多数经验量子现象?

本文旨在澄清这些问题。为此，我们将这一对应关系推广到其原有适用范围之外，将其扩展至一般的有限随机过程，并明确说明随机描述要能够得到一致且可复合的量子提升，必须满足哪些额外约束。

本文结构如下。第 2 节规定有限状态随机过程的基本约定，并回顾马尔可夫性、复合和可分性的概念。第 3 节分析原有对应关系的短时结构，指出它对转移概率偏离恒等映射的方式施加了非平凡限制，从而引出更广泛的提升框架。第 4 节通过推导算子提升的相容条件，并为任意双时随机核给出一个显式的完全正、保迹提升，来发展这一推广。第 5 节阐明相位敏感效应如何从相位盲随机数据中产生：缺失的信息存在于高阶（多时）随机记忆中，并解释这些信息如何在幺正复合下变得可操作。最后，第 6 节厘清选择性更新规则与环境诱导扰动之间的区别，并陈述和证明随机过程转移核的一个可分性判据。

2 随机过程

随机过程理论广泛应用于物理学、金融学和生物学等领域，尤其是基于马尔可夫过程的模型，例如布朗运动或连续时间马尔可夫链（CTMC）。

随着时间推移，随机过程理论也作为概率论的一个分支得到了严格发展。这一发展中的一个重要里程碑是 Kolmogorov 于 1933年对概率论进行公理化，从而为该理论奠定了坚实的测度论基础。由于随机过程常涉及条件化、极限或无限维结构，要对其进行完全严格的表述可能在技术上相当复杂。为清晰起见，我们仅给出相关定义，并采用若干简化约定，以满足当前讨论的需要。

一个以时间 $t \in T$ 为指标的经典随机过程，是一组取值于构型空间 X 的随机变量，

$$\{X_t : \Omega \to X\}_{t \in T}, \tag{1}$$

其中（Ω Σ, P）是一个概率空间。这里，Ω表示样本空间（可视为路径空间 X^T），Σ 是事件的 σ-代数，并且

P 是一个概率测度。下文中，我们将讨论范围限制在有限构型空间 $X = \{1, \ldots, N\}$。

根据柯尔莫哥洛夫扩张定理（在满足适当的一致性条件、从而确保路径空间上存在底层概率测度的情况下），随机过程可等价地由其有限时刻联合概率分布刻画。

对于任意有限个时刻 t_0、.....、 $t_n \in T$，联合分布

$$p(x_0, \ldots, x_n) := P\big(X_{t_0} = x_0, \ldots, X_{t_n} = x_n\big), \qquad x_i \in X, \tag{2}$$

为过程在这些时刻的构型赋予概率。

所有有限时刻联合概率分布 $p(x_0$、.....、 $x_n)$ 的知识就能完全确定该随机过程，也就是说，它确定了与该过程相关的所有概率预测。

根据概率链式法则，联合分布可展开为

$$p(x_0, \ldots, x_n) = p(x_n \mid x_{n-1}, \ldots, x_0)p(x_{n-1} \mid x_{n-2}, \ldots, x_0) \cdots p(x_1 \mid x_0)p(x_0). \tag{3}$$

采用这种形式，随机过程的动力学结构便清晰呈现出来，也易于解释。路径空间中截至时刻 t_n 的轨迹概率会通过条件概率 $p(x_n \mid x_{n-1}$、.....、 $x_0)$ 进行更新；一般而言，这些条件概率可能取决于路径的全部先前历史。

若对于任意有限个时刻 $t_0 < \cdots < t_{n-1} < t_n$，随机过程满足马尔可夫 性质：

$$p(x_n \mid x_{n-1}, \ldots, x_0) = p(x_n \mid x_{n-1}), \tag{4}$$

因此，该过程的动力学结构变为：

$$p(x_0, \ldots, x_n) = p(x_n \mid x_{n-1})p(x_{n-1} \mid x_{n-2}) \cdots p(x_1 \mid x_0)p(x_0). \tag{5}$$

因此，在马尔可夫过程中，所有有限时联合分布都由初始分布 $p(x_0)$ 与双时刻转移核族 $p(x_t \mid x_s)$ 共同确定。

虽然一般而言，一组两时刻条件概率未必能确定一个马尔可夫过程，但这些量仍然至关重要。特别是，对于任意固定的全局过程，只要 $p(x_s) > 0$，成对条件概率 $p(x_t \mid x_s)$ 就是良好定义的。它们通过 [1]，根据时刻 s 的全局边缘分布，确定时刻 t的正确单时刻边缘分布。

$$p(t) = \Gamma(t \leftarrow s)p(s), \qquad \Gamma(t \leftarrow s) := \big[p(x_t \mid x_s)\big]. \tag{6}$$

根据构造，转移矩阵是列随机的；也就是说，每一列的元素都是非负实数，且总和为 $\mathbf{1}$。令$\mathbf{1}$ 表示全$\mathbf{1}$列向量。那么，列随机性等价地表示为

$$\mathbf{1}^{\mathsf{T}}\Gamma(t \leftarrow s) = \mathbf{1}^{\mathsf{T}}. \tag{7}$$

[1]然而，对于非马尔可夫过程，这个两时核未必能在时刻 s 的任意条件态上定义一个与历史无关的线性传播子；这种更强的解释要求 s 是一个分割时刻，具体含义见第 6.2 节。

此外，它们还满足恒等性质

$$\Gamma(s \leftarrow s) = \mathbb{I}. \tag{8}$$

区分*Chapman–Kolmogorov*（*CK*）性质（一种适用于双参数映射族的代数组合法则）与马尔可夫性质（随机过程的一种条件独立性条件）将很有帮助。

Chapman–Kolmogorov（CK）性质 设 $\{T_{t,s}\}_{t\geq s}$ 是一个双参数变换族。若 $\{T_{t,s}\}$ 满足*CK*性质，则有

$$T_{t,s} = T_{t,u} \circ T_{u,s}, \qquad \forall s \leq u \leq t, \tag{9}$$

并且满足归一化条件 $T_{s,s} =$id.

若过程按式（4）的意义是马尔可夫的，则诱导核族 $\{\Gamma(t \leftarrow s)\}$ 满足CK性质[2]:

$$\Gamma(t \leftarrow s) = \Gamma(t \leftarrow u)\Gamma(u \leftarrow s), \qquad \forall s < u < t. \tag{10}$$

一般而言，这种复合性质未必成立。更广泛地说，只要双时刻转移核可以分解为以下形式的两个列随机矩阵的乘积,

$$\Gamma(t \leftarrow s) = \Gamma(t \leftarrow u)\Gamma(u \leftarrow s), \tag{11}$$

若过程在中间时刻 u是可分的，则称 u 为分割时刻，并称系统经历了一次可分事件。若不存在这样的分解，则称 s 与 t 之间的演化是不可分的。

3 随机—量子对应的短时结构

建立与量子力学对应关系的出发点，是找出一个线性算子 θ，其各元素模的平方可重现转移核:

$$\Gamma_{ij} = |\theta_{ij}|^2, \qquad \forall i, j \in X. \tag{12}$$

如 [1], 所述，这种对应关系纯粹是数学上的构造，能够保持 Γ中元素的正性。对 θ 施加额外约束可确保

[2]马尔可夫条件独立性蕴含相应双时核的 CK 恒等式。然而，反过来未必成立：一族核可能满足 CK，却并非源自一组一致的有限时联合分布，而这组分布须满足马尔可夫条件独立性。

Γ 是列随机的。该关系可以用舒尔–哈达玛积简洁地表示：

$$\Gamma(t \leftarrow s) = \theta(t, s) \odot \theta(t, s)^*. \tag{13}$$

这里，$\odot$ 表示相对于特定构型基的逐元素乘法，

$$(A \odot B)_{ij} := A_{ij} B_{ij},$$

而 * 表示逐元素复共轭。

然而，这种看似无关紧要的表示选择会产生非平凡的后果。假设核关于其终止时间参数足够规则，则局部增量 $\Gamma(t + dt \leftarrow t)$可展开为

$$\Gamma(t + dt \leftarrow t) = \mathbb{I} + R(t)dt + \tfrac{1}{2} S(t)dt^2 + O(dt^3), \tag{14}$$

其中，矩阵 $R(t)$和 $S(t)$定义为

$$R(t) \equiv \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \Gamma(\tau \leftarrow t) \right|_{\tau = t}, \tag{15}$$

$$S(t) \equiv \left. \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Gamma(\tau \leftarrow t) \right|_{\tau = t}. \tag{16}$$

不难证明，不存在满足式（13）的可微选择 $\theta(t,\ s)$，能够再现具有非零速率矩阵 $R(t)$的核 Γ 。假设 $\theta(\tau,\ t)$在 $\tau = t$处可微，则可写为

$$\theta(t + dt, t) = \mathbb{I} + \dot{\theta}(t)dt + O(dt^2). \tag{17}$$

因此

$$\theta(t + dt, t) \odot \theta(t + dt, t)^* = \big(\mathbb{I} + \dot{\theta}(t)dt\big) \odot \big(\mathbb{I} + \dot{\theta}(t)^* dt\big) \tag{18}$$

$$= \mathbb{I} + \big(\dot{\theta}(t) \odot \mathbb{I} + \mathbb{I} \odot \dot{\theta}(t)^*\big)dt + O(dt^2). \tag{19}$$

一阶修正是纯对角的。列随机性迫使这一对角 $O(dt)$ 项消失（ $O(dt)$ 修正的列和为零）。因此，方程（13）排除了任何与单位矩阵存在线性联系的核 Γ。

这一限制排除了随机过程最常见的类别之一，即连续时间马尔可夫链（CTMC），其动力学由通常非零的速率矩阵 $R(t)$ 生成。此外，$R \neq 0$ 本身并不意味着马尔可夫性：一个过程可能表现出一阶（$O(dt)$）泄漏，同时在高阶条件结构中仍保留记忆。因此，约束 $R = 0$ 不仅排除了连续时间马尔可夫链，也排除了具有真实一阶泄漏的内禀非马尔可夫过程。

因此，作出式（13）中的选择会对随机过程的空间施加实质性的额外结构；这并非无实质内容的重新参数化。我们将满足式（13）的过程称为 θ-过程。正如

附录 A 所示，在这个子类中，马尔可夫扇区坍缩为平凡情形。

当然，随机—量子对应的首要目的是阐明量子力学本身，其中 θ表象捕捉酉分量。此外，正如Barandes所强调的，其核心洞见之一是，有效的马尔可夫行为可能从本质上非马尔可夫的底层结构中涌现。以下论证阐明了这一机制的一个关键局限：

设 $\Gamma(t \leftarrow s)_{SE}$ 为作用于有限积空间 $S \times E$上的列随机矩阵。 θ_{SE} 的可微性意味着，逐项地，

$$\Gamma(t + \Delta t \leftarrow t)_{SE} - \mathbb{I} = O(\Delta t^2), \qquad i \neq j.$$

设 M 表示到 S 上的固定线性边缘化映射（对E求和）。则

$$p_S(t + \Delta t) - p_S(t) = M\big(\Gamma_{SE}(t + \Delta t, t) - \mathbb{I}\big)p_{SE}(t) = O(\Delta t^2).$$

因此，若底层动力学是可微的 θ过程，则任何作用于概率的固定线性约化，例如对有限多个自由度进行边缘化，至多只能产生 $O(\Delta t^2)$泄漏；特别地，这种约化不可能产生一阶（马尔可夫）生成元。[3]

重要的是，要将离散时间马尔可夫链（离散时间马尔可夫链）的存在与真正的连续时间马尔可夫链的存在区分开来。正如Barandes所指出的，若一个过程在固定间隔 dT 处容许分割事件，且这些事件能够一致复合，并且所诱导的离散动力学是时间齐次的，则有限时间转移核满足

$$\Gamma(t + ndT \leftarrow t) = \Gamma(t + dT \leftarrow t)^n,$$

这正是以时间间隔 dT 采样的离散时间马尔可夫链的定义性质。

然而，这并不 意味着极限中存在连续时间马尔可夫链。连续时间马尔可夫链还要求无穷小生成元有限

$$R(t) = \lim_{dT \to 0} \frac{\Gamma(t + dT \leftarrow t) - \mathbb{I}}{dT}.$$

如果 Γ 是 $O(dT^2)$，那么均匀时间采样细化会使 DTMC 到 CTMC 的连续极限中有效的线性-dT 速率趋于零。附录 B 给出了一种明确的极限构造，它通过时间上的奇异非均匀采样，将由 θ-过程诱导的 DTMC 转化为 CTMC。

[3] E 有限这一点在此论证中至关重要。对于具有无限多个自由度的系统（如储库或热浴构造），边缘化可能会累积来自无限多个通道的贡献；在非一致极限下，每个通道中为 $O(\Delta t^2)$的泄漏可能累积成 $O(\Delta t)$的效应。

因此，固定间隔的分割事件很容易产生 DTMC，而要获得非平凡的 CTMC 则限制更多。

随机过程的一般框架并不禁止具有真正一阶短时行为的转移核；经典连续时间马尔可夫链恰恰就是这种形式。关键在于，随机量子对应确定了一类特殊的核，即 θ-过程，在这类过程中，此类一阶泄漏不会发生。

一阶泄漏可以通过斯廷斯普林扩张产生（即将系统嵌入更大的酉动力学中再进行约化），但这需要无限自由度，例如理想化的储库。虽然扩张在形式上总是可行的，但它会掩盖导致相应动力学的结构性假设。

因此，我们有理由寻求一种随机量子对应的推广，使其从一开始就能容纳一阶行为，而不是通过无限空间上的幺正扩张及后续约化间接推导出这种行为。如此一来，“经典”动力学以及 $R \neq 0$ 和 θ-过程动力学便可纳入同一框架。

更广泛地说，正如我们将看到的，在这一层面重新表述这种对应关系，可以厘清将随机核与其算子提升联系起来的假设，并明确哪些结构性输入是必不可少的。

4 推广这种对应关系

要理解这种对应关系的作用，首先需要厘清幺正算子在原始构造中发挥的关键作用。对于不可分割的随机演化，概率描述并非自然地按步骤进行：双时核不满足查普曼–科尔莫戈罗夫（CK）复合法则。这种对应关系通过将动力学提升为 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$上的扩展线性表示，绕过了这一障碍：额外的非对角自由度提供了足够的冗余，使得在酉演化层面可以进行一致的 CK 复合。从这一角度看，量子力学的灵活性在于它能够在中间时刻表征系统。下文的目标是明确这种提升机制，并将其扩展到 θ-过程情形之外。

4.1 算子提升与相容条件

尽管原始表述采用 θ-表示法，但从广义上看，可以将其视为作用于 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上的线性映射，其对角限制可复现给定的随机核。

固定一个 n维希尔伯特空间 $\mathcal{H}$的构型基 $\{|i\rangle\}_{i=1}^{n}$。我们将时刻 s 的概率分布表示为一个列向量 $p(s) \in \mathbb{R}^n$（其中 $p_i(s) \geq 0$ 且 $\sum_i p_i(s) = 1$），并将两时核 $\Gamma(t \leftarrow s)$表示为 $\mathbb{R}^n$ 上的线性映射（在此基下为列随机矩阵）。[4] 定义对角的

[4]随机侧存在这样一个与历史无关的线性传播子

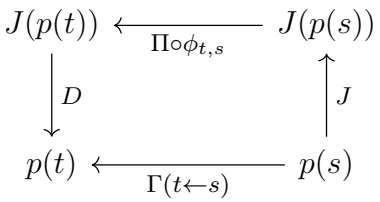

图 1：提升相容条件的交换图。映射D 表示从对角算子到相应概率向量的读出映射，其中 $D\circ J=\mathrm{Id}$。相容条件为 $D\Pi\phi_{t,\ s}J=\Gamma(t\leftarrow s)$。

嵌入

$$J:\mathbb{R}^n\to\mathcal{B}(\mathcal{H}),\qquad J(p)=\mathrm{diag}(p_1,p_2,\ldots,p_n)=\sum_{i=1}^{n}p_i\hat{P}^i,$$

其中 $\hat{P}^i:=|i\rangle\langle i|$ 是投影到第 i 个基向量上的秩一投影算子。这将概率向量与构型基中的对角算子对应起来。

我们要寻找一个线性映射 ϕ：$B(\mathcal{H})\to B(\mathcal{H})$，使得对于对角输入，$\phi$ 的对角部分能够重现随机演化。令 Π: $B(\mathcal{H})\to B(\mathcal{H})$表示构型基中投影到对角部分的投影算子，

$$\Pi(\rho):=\sum_{j=1}^{n}\hat{P}^j\rho\hat{P}^j, \tag{20}$$

等价地，可由对角元素刻画

$$[\Pi(\rho)]_{jj}=\mathrm{Tr}\big(\hat{P}^j\rho\big).$$

那么所需的相容条件为

$$\boxed{\Pi\big(\phi_{t,s}(J(p(s)))\big)=J\big(\Gamma(t\leftarrow s)p(s)\big),\qquad(\textsc{Compatibility})} \tag{21}$$

对于所有概率（列）向量 $p(s)$ 均成立。相容条件是刻画该提升的交换图要求，见图 1。

一般而言，ϕ 会将对角算子映射为含有非对角分量的算子；投影 Π提取对角扇区，从而建立起与通常概率之间的联系。

对式 (21) 取迹，并利用列和性质，可得 (7),

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\big(\phi_{t,s}(J(p(s)))\big) &= \mathbf{1}^{\mathsf{T}}\Gamma(t\leftarrow s)p(s), &(22)\\ &= \mathrm{Tr}\big(J(p(s))\big), &(23)\end{aligned}$$

对于一般的非马尔可夫过程，这并非自动成立。它要求所选的根时刻 s 是第 6.2 节所讨论意义上的分划（屏蔽）时刻。目前我们只是假设这样一个线性传播子存在。

其中我们反复使用了恒等式 $\mathrm{Tr}(J(v)) = \mathbf{1}^T v$。因此，若 Γ 是列随机的，则 ϕ 在对角密度算子上是保迹的。

反过来，如果 ϕ 在所有密度算符上都保迹，

$$\mathrm{Tr}\big(\phi(\rho)\big) = \mathrm{Tr}(\rho), \tag{24}$$

那么特别地，它在表示概率向量的对角算子 $J(p)$ 上也保迹。利用相容条件 (21)，这意味着 Γ 满足列和规则 (7)。因此，ϕ 的全局迹保持是 Γ 为列随机的充分条件。

用分量形式表示，式 (21) 为

$$p_j(t) = \sum_{i=1}^{n} \Gamma(t \leftarrow s)_{ji} p_i(s). \tag{25}$$

其中，转移核可通过探测 ϕ 在基投影算子上的对角元得到：

$$\Gamma(t \leftarrow s)_{ji} = \mathrm{Tr}\big(\hat{P}^j \phi_{t,s}(\hat{P}^i)\big). \tag{26}$$

在特殊情况下，若 ϕ 由共轭变换给出，$\phi_{t,\,s}(\rho) = \theta(t,\ \ s)\rho\theta(t,\ \ s)^\dagger$，(26) 就化为 Barandes 对应关系

$$\Gamma(t \leftarrow s)_{ji} = \mathrm{Tr}\big(\hat{P}^j \theta(t,s) \hat{P}^i \theta(t,s)^\dagger\big) = |\theta_{ji}(t,s)|^2. \tag{27}$$

4.2 相容提升的显式构造

在有限维情形下，任意线性映射 $\phi: B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ 都存在一种（不一定完全正的）左右算子和表示：存在算子 $A_\beta,\ B_\beta \in B(\mathcal{H})$ 使得

$$\phi(\rho) = \sum_{\beta=1}^{r} A_\beta \rho B_\beta, \tag{28}$$

其中 $r \le n^2$。将式 (28) 代入式 (26)，得到

$$\Gamma(t \leftarrow s)_{ji} = \sum_{\beta=1}^{r} \mathrm{Tr}\big(\hat{P}^j A_\beta(t,s) \hat{P}^i B_\beta(t,s)\big). \tag{29}$$

等价地，用矩阵形式表示为，

$$\Gamma(t \leftarrow s) = \sum_{\beta=1}^{r} A_\beta \odot B_\beta^T, \tag{30}$$

方程（30）可视为原始随机过程–量子力学对应关系（27）的一种广义形式，但其用途较为有限。特殊形式（13）的优点在于，它能自动保证转移核 Γ 的正性。

相比之下，对于一般的左–右表示（30），必须单独确保诱导出的随机核具有正性。用分量表示，这相当于

$$\sum_{\beta=1}^{r} A_{\beta,ji} B_{\beta,ij} \geq 0 \qquad \forall i,j. \tag{31}$$

类似地，ϕ 保迹等价于满足以下条件

$$\sum_{\beta=1}^{r} B_\beta A_\beta = \mathbb{I}, \tag{32}$$

因为对所有 ρ，$\mathrm{Tr}(\phi(\rho)) = \mathrm{Tr}\big((\sum_\beta B_\beta A_\beta)\rho\big)$。

我们希望从一开始就能保证正性的构造。将注意力限制在对角子代数 $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上，它是交换的，并且可与 $\mathbb{C}^n$ 等同。对于阿贝尔 C^*-代数，正性已经蕴含完全正性，因此任意正映射 $\Phi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ 都自动是完全正的。根据 Arveson 延拓定理 [8], ，此类映射至少存在一个完全正延拓 $\phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$。因此，每个随机核 $\Gamma(t \leftarrow s)$ 都至少存在一个完全正算子提升，其在对角代数上的限制可重现 $\Gamma(t \leftarrow s)$。[5]

由于迹保持会使诱导核具有列随机性，而完全正性会保证正性，因此自然的提升类别是完全正且保迹（CPTP）映射。每个完全正映射都存在 Kraus（算子和）表示，

$$\phi(\rho) = \sum_{\beta=1}^{r} K_\beta \rho K_\beta^\dagger, \tag{33}$$

并且，如果 ϕ 是保迹的，Kraus 算子满足完备性条件

$$\sum_{\beta=1}^{r} K_\beta^\dagger K_\beta = \mathbb{I}. \tag{34}$$

在这种情况下，对应关系具有特别直观的形式

$$\Gamma(t \leftarrow s) = \sum_{\beta=1}^{r} K_\beta \odot K_\beta^*, \tag{35}$$

这现在会自动保证 Γ.[6] 的列随机性

[5]给定一个列随机矩阵 $\Gamma(t \leftarrow s)$，定义 Kraus 算子 $K_{ji}(t,s) := \sqrt{\Gamma(t \leftarrow s)_{ji}}\,|j\rangle\langle i|$，$1 \leq i, j \leq n$. 那么 $\phi_{t,s}(\rho) := \sum_{i,j} K_{ji}(t,s)\rho K_{ji}(t,s)^\dagger$ 是 CPTP，并且对所有概率向量 p都满足 $\Pi(\phi_{t,s}(J(p))) = J(\Gamma(t \leftarrow s)p)$。此外，$\sum_{i,j} K_{ji}(t,s)^\dagger K_{ji}(t,s) = \mathbb{I}$ 成立，因为 $\Gamma(t \leftarrow s)$ 的列之和为 1。

[6]这种细化可能要以灵活性降低为代价：可以想见，某些非马尔可夫过程无法在完全正迹保持（Kraus）提升的层面满足 Chapman–Kolmogorov 型复合律，但在更一般的线性左–右表示层面仍可满足此类复合，前提是通过其他方式保证由此诱导的随机核具有正性和列和性质。

因此，我们已经证明，任意随机过程的转移核都可以按照式 (21) 的含义，通过式 (35) 的字典提升为一个完全正迹保持映射。用分量表示，该字典为

$$\Gamma_{ji}(t \leftarrow s) = \sum_{\beta=1}^{r} \left| K_{\beta,ji}(t \leftarrow s) \right|^2, \tag{36}$$

Barandes 在非酉 θ 过程中提出的一种表示。然而，正如我们所证明的，同一形式实际上适用于任意随机转移核 Γ。

为澄清二者的区别，请回想 Barandes 的 θ-提升对应于一个秩一（单 Kraus）共轭映射，

$$\phi_\theta(\rho) = \theta \rho \theta^\dagger. \tag{37}$$

对于任意 θ，此映射都是完全正的；但当且仅当 θ 是酉的，它才是保迹的（因此也是 CPTP 的）。[7]

然而，Barandes 指出，也可以将 θ 分解为列选择算子

$$K_\beta := \theta \hat{P}^\beta, \qquad \beta = 1, \ldots, n, \tag{38}$$

使得 $\theta = \sum_{\beta=1}^{n} K_\beta$，并定义相应的算子和映射

$$\Phi_\theta(\rho) := \sum_{\beta=1}^{n} K_\beta \rho K_\beta^\dagger.$$

算子 K_β 构成一个 Kraus 表示，且 Φ_θ 是 CPTP 的。[8]

Barandes 能将 θ-提升改写为 CPTP 形式，即使共轭映射 $\phi_\theta(\rho)$ 不保迹，也是因为在对角子代数上，ϕ_θ 与 Φ_θ 之间不存在操作上的区别。[9] 具体而言，这两种提升都会导出相同的随机核：$\Gamma_{ji} = \mathrm{Tr}(\hat{P}^j \phi_\theta(\hat{P}^i)) = \mathrm{Tr}(\hat{P}^j \Phi_\theta(\hat{P}^i))$.

Kraus 映射 (38) 可理解为先在构型基中进行一次非选择性投影测量（Lüders 退相位），再与 θ进行共轭变换。此外，由于诱导的随机核保持不变，这种形式的 Kraus 算符继承了底层 θ-过程的短时结构，因此无法在对角态上产生真正的 $O(dt)$ 泄漏。

本文发展的广义对应关系并不局限于这种特殊形式的提升。相反，它允许采用满足式（35）的任意完全正迹保持映射。特别是，一旦取消这一结构性限制，实现具有内禀时间一阶行为的随机核便不再存在障碍。

---

[7] 若 θ 是酉的，则 $\theta^\dagger\theta = \mathbb{I}$，因此 ϕ_θ 保迹，并且存在仅含一个 Kraus 算符 θ的 Kraus 表示，故其为 CPTP。反过来，若 $\phi_\theta(\rho) = \theta\rho\theta^\dagger$ 保迹，则对所有 ρ，$\mathrm{Tr}(\phi_\theta(\rho)) = \mathrm{Tr}(\rho\theta^\dagger\theta) = \mathrm{Tr}(\rho)$，这意味着 $\theta^\dagger\theta = \mathbb{I}$。由于 θ 是方阵，这等价于幺正性。[8] $\sum_\beta K_\beta^\dagger K_\beta = \sum_\beta \hat{P}^\beta \theta^\dagger \theta \hat{P}^\beta = \mathbb{I}$在 θ的 θ-过程意义下是列随机的。[9] 若 $\rho = \sum_i \rho_i \hat{P}^i$ 是对角的，则 $\Phi(\rho) = \sum_{\beta=1}^{n} \theta \hat{P}^\beta \rho \hat{P}^\beta \theta^\dagger = \sum_{\beta=1}^{n} \rho_\beta \theta \hat{P}^\beta \theta^\dagger = \theta\rho\theta^\dagger$.

4.3 CK可分性、复合与林德布拉德生成元

我们已经证明，任意随机演化的转移核都可以提升为一族线性、完全正且保迹的映射 $\{\phi_{t,s}\}$ on$B(H)$。

请回想一下，提升的动机恰恰在于此：一个不可分的随机过程，即一个在转移概率层面不满足查普曼–科尔莫哥洛夫合成律的过程，在改写为作用于 $B(\mathcal{H})$ 上的线性映射族后，仍可能满足合成律，

$$\phi_{t,s} = \phi_{t,u} \circ \phi_{u,s}, \qquad s \le u \le t.$$

此处还额外假设了连续性（这一点隐含在式（14）的短时展开中）；因此，剩余的结构性条件恰恰就是上述提升后的合成性质。

如果能在提升后的完全正迹保持映射层面施加这样的合成性质，那么所得结构便属于一个众所周知的类别，其生成元由戈里尼–科萨科夫斯基–苏达尔尚–林德布拉德定理 [9,10] 刻画。

假设 $\{\phi_{t,s}\}_{t\ge s}$ 是一个强连续且关于 t 可微的 CK可分族完全正迹保持映射。定义局域时间生成元如下:

$$\mathcal{L}_t := \frac{\partial}{\partial \tau}\phi_{\tau,t}\Big|_{\tau=t}.$$

则 $\rho(t)= \phi_{t,s}(\rho(s))$ 满足主方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t) = \mathcal{L}_t(\rho(t)),$$

且 $\mathcal{L}_t$ 具有GKSL形式

$$\mathcal{L}_t(\rho) = -i[H(t),\rho] + \sum_{\mu}\Big(L_\mu(t)\rho L_\mu(t)^\dagger - \tfrac{1}{2}\{L_\mu(t)^\dagger L_\mu(t),\rho\}\Big), \tag{39}$$

对某个哈密顿量 $H(t) = H(t)^\dagger$ 以及算子 $L_\mu(t) \in B(\mathcal{H})$。

离散 Kraus 算子与 Lindblad算符之间的关系由短时展开得到。对于充分小的 dt，我们考虑短时映射 $\phi_{t+dt,t}$ 并选取一个 Kraus 表示

$$\phi_{t+dt,t}(\rho) = \sum_{\alpha} K_\alpha(t+dt,t)\rho K_\alpha(t+dt,t)^\dagger.$$

与 GKSL 生成元相容的标准短时间选择为

$$K_0(t+dt,t) = \mathbb{I} - dt\left(iH(t) + \frac{1}{2}\sum_{\mu} L_\mu(t)^\dagger L_\mu(t)\right) + o(dt), \tag{40}$$

$$K_\mu(t+dt,t) = \sqrt{dt}L_\mu(t) + o(\sqrt{dt}), \qquad \mu \ge 1. \tag{41}$$

代入 Kraus形式并保留 dt 的一阶项，得到

$$\phi_{t+dt,t}(\rho) = \rho + dt\mathcal{L}_t(\rho) + o(dt), \tag{42}$$

其中 $\mathcal{L}$ 由公式（39）给出。

因此，Lindblad算符 L_μ 作为短时 Kraus展开中的 $\sqrt{dt}$系数出现，而哈密顿量和耗散漂移项则编码在近似恒等的 Kraus算符 K_0的一阶修正中。

由此建立了随机过程与量子开放系统动力学框架之间的对应关系：前者可能是非马尔可夫的，甚至在转移核层面不可分；后者则由 Lindblad主方程支配。通过这种方式，可以将以随机过程语言表述的问题转换为开放量子系统的语言，从而逐步描述这些随机不可分动力学。

上述对应关系并不 保证能够选择提升，使其构成满足 Chapman–Kolmogorov 条件的单一可组合族。相反，提升提供了额外的希尔伯特空间自由度，借助这些自由度，这种可分结构或许 能够实现。因此，是否存在满足 Chapman–Kolmogorov 条件的 CPTP族，是一个需要逐案考察的额外兼容性问题，不能仅凭成对 CPTP扩张的存在性来确定。附录C给出了判断某个提升是否具有 Chapman–Kolmogorov 形式的判据。

4.4 示例：连续时间马尔可夫链

作为一个简单示例，我们给出平凡（可分）连续时间马尔可夫链情形下的提升。连续时间马尔可夫链的短时展开直接由Chapman–Kolmogorov复合定律，即式(10)得出，由此可得

$$S(t) = \dot{R}(t) + R(t)^2, \tag{43}$$

这表明，时间上的一阶与二阶贡献通常均不为零，尽管受到合成性质的约束。

这种马尔可夫随机演化可以自然地嵌入Lindblad主方程(39)。具体而言，给定速率矩阵 $R(t)$，其非对角元素为 $R_{ij}(t) \geq 0$ （对于 $i \neq j$ ），对角元素由列守恒确定，则可选取由有序对(i, j)索引的跳跃算符，

$$L_{ij}(t) = \sqrt{R_{ij}(t)}|i\rangle\langle j|, \qquad i \neq j, \tag{44}$$

以及在同一基下为对角的哈密顿量。

若初始状态在基 $\{|i\rangle\}$下是对角的，且测量同样在该基下进行，则 Lindblad演化保持对角性，并精确约化为经典连续时间马尔可夫链方程

$$\dot{p}(t) = R(t)p(t). \tag{45}$$

从这个意义上说，经典连续时间马尔可夫链可视为林德布拉德动力学在对角子代数上的限制。

5 相位盲动力学中的相位

值得稍作停顿，明确前述构造能够确立什么，以及不能确立什么。可以注意到，获得随机描述的机制在形式上十分直接：给定一个在林德布拉德动力学作用下演化的开放量子系统，固定一个基，将初始状态限制为在该基下为对角的状态，对它们进行演化，然后施加到对角子代数上的投影。由此诱导出的对角元素演化，便由两时刻条件概率，即随机转移核来描述。在对应关系的这个方向上，所得随机过程就是量子动力学在固定测量基上的限制。

从反向方向来看，将其置于背景中考察也很有意义。由于转移核下边缘分布的演化是线性的，因此它可以在扩大的空间上表示出来，这一点并不奇怪——例如，可以将概率向量嵌入对角子代数。更值得注意的是，即使原始随机演化在两时刻转移核层面上不可分，这种提升仍可能在提升映射层面上具有可分描述。

然而，至少在笔者看来，这种对应关系真正令人瞩目之处在于，提升过程能够从以固定 基指定的相位盲随机数据中，生成量子力学所特有的、相位丰富的无优选基 结构。换言之，纯粹以对相位不敏感的概率来表述的动力学，一旦嵌入算子层面的图景之中，便能产生具有干涉能力的结构；这种结构存在于真正的非交换算子代数中，而在原始随机描述里却不可见。

由于这种对应关系乍看之下只是为了重现固定构型基中的统计结果而设计的（即通过投影到对角部分，再借助相容条件将其转换回概率），人们或许会担心，量子描述中的“相位结构”不过是装饰，在随机侧并无可测量的后果。

然而，正如 Barandes 所示，这一顾虑可以通过操作方式加以化解：只要恰当地设计系统与测量装置之间的耦合，就能使装置中观测到的统计结果重现量子力学中熟悉的、依赖于基的预测，而且测量基可以任意选择。从这个意义上说，量子理论的基协变性源自固定构型空间上的一个底层随机过程。事实上，在这一框架内，通常归因于量子实验的全部测量统计，都可以从底层的非量子随机描述中得到。

如果认真看待这样一种设想：所有量子现象都源自底层的随机实在，那么一个自然的问题便会立刻浮现：在随机侧，量子理论丰富的相位敏感信息究竟蕴含于何处?

我们可以通过考察一个具体例子来进一步明确这个问题。

考虑两个幺正算子 U_X 和 U_Y，其矩阵元取自构型基，并且它们定义了同一个随机矩阵 Γ:

$$\Gamma_{ij} = p(i \mid j) = |(U_X)_{ij}|^2 = |(U_Y)_{ij}|^2. \tag{46}$$

我们将任何共享这一性质的幺正算子称为一步随机不可区分。这里的“不可区分”仅表示：单系统构型空间上相应的一步概率 $p(i \mid j)$是相同的。

然而，尽管它们在随机意义上不可区分，一旦允许与测量装置耦合，U_X 与 U_Y 仍可产生可测得的不同统计。虽然这些装置本身属于同一底层随机过程（因而最终以构型变量读出），但仍可安排它们与系统的相互作用，使所得构型空间结果被自然地解释为系统在构型基以外的基上的测量统计。因此，单一的随机物理过程 Γ 可以与许多不同的量子演化相容——并具有不同的测量结果。

因此，人们或许会不禁得出结论：量子力学比随机描述更为基本，而 Γ 不过是底层量子实在的一种有损“影子”，它是通过将注意力限制在固定基上的制备与测量而得到的。这在本质上就是看待量子现象的标准观点。如果拒绝这一结论，那么在当前这个双幺正算子的例子中，问题就变得具体了：何种额外的随机结构会在这些不同的量子演化之间作出选择?

这种张力的化解方式，是认识到 Γ 仅捕捉了一步信息。完整的随机过程并非仅由一步转移统计确定，而是由关于整个构型序列的丰富得多的联合概率所确定。

现在考虑下一步会发生什么：此时又施加一个酉 V。如果第一步的实现是 U_X，我们就得到两步核

$$\Gamma_1 = [VU_X]_\odot,$$

而如果第一步的实现是 U_Y，我们就得到

$$\Gamma_2 = [VU_Y]_\odot.$$

这里引入了简写 $[U]_\odot := U \odot U^*$。

尽管 $[U_X]_\odot = [U_Y]_\odot = \Gamma$，通常却有 $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$，因此两种可能性在两步统计层面上变得可区分。原因在于，模平方映射并不保持复合：一般而言，

$$[VU]_\odot \neq [V]_\odot [U]_\odot.$$

等价地，所得的两步转移不必分解为

$$\Gamma_1 \neq [V]_\odot [U_X]_\odot = \Gamma_V \Gamma,$$

对于 Γ_2，情况也类似，这反映出随机描述层面上的可分性失效。

这种不可分性的随机性起源由链式法则（式 (3)）刻画。对中间构型 x_1 进行边缘化，得到

$$p(x_2 \mid x_0) = \sum_{x_1} p(x_2 \mid x_1, x_0) p(x_1 \mid x_0). \tag{47}$$

从随机视角来看，从 $t = 1$ 到 $t = 2$ 这一步由三时刻条件概率决定

$$p(x_2 \mid x_1, x_0),$$

它同时取决于当前构型 x_1 和较早构型x_0 （更一般地说，还取决于整条轨迹的历史）。

这就是非马尔可夫过程中熟悉的记忆概念：对过去进行条件化，是原初随机描述的一部分。

相比之下，提升演化由作用于 $B(\mathcal{H})$ 的单步线性传播子支配；在此情形下，该传播子以幺正方式复合（更一般地，则通过 CK 可分性结构复合）。这类传播子只以当前算符 ρ_{t_1} 作为输入，因此无法表示对较早构型的显式依赖（相当于 $p(x_2 \mid x_1,\ x_0)$ 中对 x_0 的依赖）。任何历史依赖性只能在复合过程中向前传递，同时在单步随机核 Γ 的层面上仍不可见。因此，任何“记忆”只能存在于提升内部的自由度中——也就是说，存在于提升映射的相位（规范）自由度中。[10]

要了解其运作方式，可以比较这两种提升实现所产生的记录在两步统计上的差异。结果是

$$[\Gamma_1]_{x_2,x_0} - [\Gamma_2]_{x_2,x_0} = \mathrm{Tr}\left(\hat{P}^{x_2} V \left(U_X \rho_0 U_X^\dagger - U_Y \rho_0 U_Y^\dagger\right) V^\dagger\right) \tag{48}$$

$$= \sum_{x_1} \left(p_1(x_2 \mid x_1, x_0) - p_2(x_2 \mid x_1, x_0)\right) p(x_1 \mid x_0). \tag{49}$$

ˆ其中 $\rho_0 = P^{x_0}$。因此，随机侧的条件分布 $p_1(x_2 \mid x_1,\ x_0)$ 与 $p_2(x_2 \mid x_1, x_0)$ 之间的任何差异，若能解释 Γ_1 与 Γ_2 之间的区别，那么在提升侧，这些差异就必须编码在选择 U_X 还是 U_Y 上。

这样一来，通过复合提升后的单步映射得到的两步映射，就能区分在单步层面上随机不可区分的实现：即使 $[U_X]_\odot = [U_Y]_\odot$，它们仍能将 $[VU_X]_\odot$ 与 $[VU_Y]_\odot$ 区分开来。

事实上，从这种关于两步过程不可分性的视角出发，即使制备和读出仅限于构型基，也可以借助量子测量理论的标准工具恢复关于量子态的全部信息，而无需明确地诉诸测量装置

[10]在密度算符层面，这表现为 $\rho_t = \phi_t(\rho_0)$ 中的非对角相位结构。

。具体而言，在构型基下的固定读出之前立即施加一个主动量子信道：

$$\Lambda(\rho) = \sum_{\beta} \Lambda_\beta \rho \Lambda_\beta^\dagger, \qquad \sum_{\beta} \Lambda_\beta^\dagger \Lambda_\beta = I. \tag{50}$$

结果 j 的概率为

$$p(j) = \mathrm{Tr}\big(P^j \Lambda(\rho)\big) = \sum_{\beta} \mathrm{Tr}\big(\Lambda_\beta^\dagger P^j \Lambda_\beta \rho\big) \tag{51}$$

$$= \mathrm{Tr}\left(E_j \rho\right), \tag{52}$$

其中效应

$$E_j := \sum_{\beta} \Lambda_\beta^\dagger P^j \Lambda_\beta, \tag{53}$$

构成一个正算子值测度（每个 $E_j \geq 0$ 和 $\sum_j E_j = I$）。[11]

我们注意到，要获得非构型正交归一基下投影测量的统计结果，所需的主动操作可简化为幺正旋转，即单个 Kraus算符 $\Lambda = U$，其列向量是所需测量基的特征向量。

为明确说明随机侧的情况，假设截至时间 t的提升演化由一个完全正迹保持映射给出

$$\phi(\rho) = \sum_{\alpha} K_\alpha \rho K_\alpha^\dagger,$$

其诱导的（相位盲）核为

$$\Gamma = \sum_{\alpha} [K_\alpha]_\odot. \tag{54}$$

为了获得与一般正算子值测度 $\{E_j\}$一致的测量统计，只需修改最后一步，即在读出时刻不可分割地执行适当的操作。由此诱导的读出随机核则为

$$\Gamma \longmapsto \Gamma' = \sum_{\beta,\alpha} [\Lambda_\beta K_\alpha]_\odot. \tag{55}$$

由此，无需显式引入辅助装置，便可从不依赖相位（对角的）概率描述中恢复量子力学通常的依赖基的测量统计。此外，这些丰富的依赖基的统计也可以解释为随机描述中与潜在记忆相关的一种自由度——此处，潜在记忆由两步（更一般地说，多步）结构编码。

[11]等价地，将联合事件“信道使用了克劳斯分支 β且投影算子测量结果为 j”的测量算子定义为 $M_{j\beta} := P^j \Lambda_\beta$。于是 $M_{j\beta}^\dagger M_{j\beta} = \Lambda_\beta^\dagger P^j \Lambda_\beta$，因此正算子值测度效应可通过在未观测的克劳斯分支上粗粒化得到，$E_j = \sum_\beta M_{j\beta}^\dagger M_{j\beta}$。

然而，我们强调，对系统进行实际读出必然会在测量时刻造成分割，并将约化态重新初始化为构型基中的对角形式。如果希望在获得测量统计的同时，使量子态在测量后保持为非构型（非对角的）状态，就必须将系统与测量装置的一个自由度耦合，并读出设备记录（以构型变量表示）。

在离散时间中，若构型有 m 步骤，一个任意的幺正描述至多涉及 m $\dim U(N) = mN^2$ 个实自由度[12]；而一个完全一般的随机过程由其在 X^{m+1} 上的联合分布所确定，因此需要 $N^{m+1}-1$ 个独立实参数。从这个意义上说，路径空间记忆的空间比幺正提升的空间大得多，呈指数级增长。

从这一角度看，原来的问题："相位信息在随机侧的什么地方？"强调的重点恰恰颠倒了。随机过程本身已经包含海量信息，这些信息储存在其路径空间记忆中，并编码于多时刻条件分布里。如果将量子提升视为一种数学工具，那么真正令人费解的是：希尔伯特空间上的前向、无记忆 Chapman–Kolmogorov 演化，如何仍能再现过程历史依赖性中潜藏的非平凡多时刻行为。正如随机对应所揭示的答案是，提升所捕获的任何历史依赖性是 都被压缩进相位结构的自由度中。

同时，也不应夸大这一点：这种提升并非对路径空间上随机过程的完整表征。它的设计目的仅是重现双时刻转移数据 $\Gamma(t \leftarrow s)$。然而，要求提升后的族满足柯尔莫哥洛夫一致可分性，通常会迫使这种提升纳入额外的自由度，而这些自由度在转移核层面上不可见（即包含了关于过去的额外信息，而这些信息并未编码在 $\Gamma(t \leftarrow s)$ 中）。不应将这种额外结构等同于某个唯一确定的高阶分布律：具有不同多时刻联合分布的许多互不等价的随机过程，都可能共享相同的 $\Gamma(t \leftarrow s)$，而这些差异并非仅凭 $\Gamma(t \leftarrow s)$ 就能确定。因此，这种提升与多种此类多时刻补全相容。

通过固定转移核无法唯一确定随机过程这一点，已可从式（47）中看出。

对于每个固定的 x_0 （共有 N 种选择），条件 $p(x_2 \mid x_1, x_0)$ 可视为指标 (x_2, x_1) 上的一个 $N \times N$ 随机矩阵：对于每个 x_1，它都指定了一个关于 x_2 的概率分布。因此，对于每个固定的 x_0 ，它有 $N(N-1)$ 个自由度，而在所有 x_0 上，这相当于

$$N \cdot N(N-1) = N^3 - N^2$$

自由参数。

[12]类似地，每个时间步采用一个完全正迹保持映射时，实自由度的数量仍关于 N 和 m 呈多项式增长，即 $m(N^4 - N^2)$。

固定两时核 $p(x_1 \mid x_0)$ 和 $p(x_2 \mid x_0)$ 后，对于每一对 (x_2, x_0) 都会施加约束 (47)。对于每个 x_0，这些约束给出 x_2 个方程，其中有 $N-1$ 个因归一化而彼此独立。因此，总共有 $N(N-1)$ 个 $= N^2 - N$ 独立约束。由此，与固定双时数据相一致的可容许三时条件概率空间至少有

$$(N^3 - N^2) - (N^2 - N) = N(N-1)^2$$

剩余的自由度，这表明转移核严重欠确定了过程的多时结构。

6 更新、干预与可分事件

本节讨论引言中提出的第四个问题：轨迹的条件更新、嵌入式观察者实施的物理干预，以及测量过程中可分事件的出现之间的关系。本节还讨论最后一个问题，即为何转移核尽管如此仍足以解释大多数经验结果。

6.1 实现轨迹

随机律本身并不能规定一条轨迹。要描述一次特定的运行，必须明确获得了哪个事实（读出），然后通过以该事实为条件进行条件化来更新模型。因此，在更新时刻 t,

$$p_{\text{prior}}(x_t) \;\longmapsto\; p_{\text{post}}(x_t). \tag{56}$$

当实现结果取值为 $x_t = i$ 时，后验分布就是 δ分布

$$p_{\text{post}}(x_t) = \delta_{x_t i}. \tag{57}$$

按照本文所倡导的随机—量子对应观点，无论嵌入其中的观察者是否存在，系统都会沿着一条确定的轨迹演化。对此，可以从整体上描述为从路径空间上的某个概率律中抽取一条路径；也可以从动力学角度描述为与同一概率律一致、逐步进行的生成过程。无论采用哪种方式，都要区分：（i）路径空间上的无条件概率律，以及（ii）给定特定事实后对该概率律所作的条件化限制。

在动力学图景中，随着时间推移，已实现的过去不断延展，而对未来的恰当描述则是以这段过去为条件的概率律。

相比之下，嵌入式观察者只能通过互动获取信息。至关重要的是，这类互动并非对预先存在的有效律进行被动揭示。制备和测量是物理干预，通常会改变支配子系统的有效律。正如我们将在接下来的小节中展示的那样，一项实验通常会用一种新的有效律取代制备之前可能存在的任何未分裂动力学；这种有效律会屏蔽制备时刻之前的历史依赖性。

这促使我们区分“更新”的两种含义。轨迹实现并不会改变底层的路径空间概率律；它只是沿着实际发生的特定历史，对该固定概率律进行条件化。相比之下，嵌入式观察者的干预确实会改变子系统的有效律。

6.2 分割时刻与线性传播子的存在性

给定构型空间 X 上的一个随机过程，可以选择任意有限的时间采样，其中包括一个指定的初始时刻 s。从纯粹的概率论角度看，这种选择本身并无任何特殊之处：固定时间采样，只是确定对路径测度的哪些部分进行边缘化，而由此得到的链式法则分解对于任何此类选择都有良好定义。特别是，对于任意一对时刻 $s < t$，双时刻条件概率 $p(x_t \mid x_s)$ 都有良好定义，因此由此导出的关系也有良好定义

$$p(x_t) = \sum_{x_s} p(x_t \mid x_s) p(x_s). \tag{58}$$

然而，这一关系描述的是给定随机过程的独立（全局、无条件）边缘分布 $p(x_s)$ 和 $p(x_t)$。根据构造，该关系对这些特定的边缘分布成立，但通常并不在时刻 s 上为任意概率分布定义一个自主传播定律。[13] 例如，取确定值 $x_s = i$ 的一条轨迹可能源自许多不同的先前历史 H，其中 H 表示实际实现的前-s轨迹。[14] 对于每一段这样的实际历史，未来概率则由下式给出

$$p(x_t \mid x_s = i, H). \tag{59}$$

这是一个众所周知的事实：在非马尔可夫过程中，未来预测取决于历史，而不仅仅是 s时刻的状态。事实上，我们可以将式（58）改进为

$$p(x_t \mid H) = \sum_{x_s} p(x_t \mid x_s, H) p(x_s \mid H). \tag{60}$$

因此，传播取决于状态是如何到达 x_s的。由此，尽管两两条件概率 $p(x_t \mid x_s)$ 总是定义良好的，但一般而言，它们不能被解释为与历史无关的线性传播子的核。

这与第 4 节概述的量子提升尤其相关，其中人们从以 s 为根的随机核构造出一族量子映射 $\{\phi_{t,s}\}$

[13]这种任意概率分布可能包括例如认知分布，表示嵌入式观察者在时间 s能够获取的信息；也包括由底层随机过程诱导的特定独立边缘分布，以及对应于已实现轨迹的尖锐狄拉克分布。[14]任何此类历史都尤其确定了任意有限组时刻 $h_1 < \cdots < h_k < s$ 上的值 $x_{h_1}, \ldots, x_{h_k}$。

$\Gamma(t \leftarrow s)$，其含义见式 (21)。在该构造中，人们默认核 $\Gamma(t \leftarrow s)$ 作为传播子线性作用于随机状态。

现在，我们来确定这一假设成立的条件。

我们先考察时间 s 的尖锐态。若在某次运行中，轨迹取确定值 $x_s = i$，那么时间 s 对应的独立概率分布就是 δ分布

$$e_i(x_s) := \delta_{x_s i}. \tag{61}$$

这些尖锐态构成了由 X 上的概率分布生成的向量空间的自然基，因为任意分布 μ 都可以写成

$$\mu = \sum_i \mu_i e_i. \tag{62}$$

此外，对于每个先前历史 H，随机过程都会指定一个良定义的条件未来分布，即已知轨迹在时间 s 取值为 $x_s = i$ 时的分布，具体为

$$p(x_t \mid x_s = i, H). \tag{63}$$

对于每个这样的 H，都可以在尖锐基态上定义一个历史索引映射:

$$(T^H_{t\leftarrow s} e_i)(x_t) := p(x_t \mid x_s = i, H). \tag{64}$$

由于 e_i 构成了由 X 上的概率分布生成的向量空间的自然基，这一作用可通过线性唯一地扩展到任意向量:

$$T^H_{t\leftarrow s}\mu := \sum_i \mu_i T^H_{t\leftarrow s} e_i. \tag{65}$$

等价地，用分量表示，

$$\big(T^H_{t\leftarrow s}\mu\big)(x_t) = \sum_i p(x_t \mid x_s = i, H)\mu_i. \tag{66}$$

因此，对于每个固定的历史 H，总是可以定义一个线性映射。不过，该映射取决于轨迹到达 x_s 的路径；换句话说，它依赖于制备。

当且仅当核与 H 无关时，历史无关传播子才存在；也就是说，对于所有 i 和所有 $t > s$,

$$p(x_t \mid x_s = i, H) = p(x_t \mid x_s = i). \tag{67}$$

当式（67）成立时，族 $T^H_{t\leftarrow s}$ 坍缩为单一映射 $T_{t\leftarrow s}$。因此，由式（66）可得

$$(T_{t\leftarrow s}\mu)(x_t) = \sum_{x_s} p(x_t \mid x_s)\mu(x_s). \tag{68}$$

由于 e_i 构成一个基，这个线性延拓是唯一的。特别地，在基 $\{e_i\}$ 中，传播子由矩阵表示为

$$\Gamma(t \leftarrow s) = [p(x_t \mid x_s)]\,. \tag{69}$$

因此，出现在全局边缘分布之间关系中的两时核 $p(x_t \mid x_s)$，并不被独立地假定为一个自治传播子。仅在 s 处的状态屏蔽先前历史这一特殊情形下，它才成为这样的传播子。此时，该随机过程从 s 处的精确条件态到所有概率分布诱导出唯一的线性延拓。

这表明，分割时刻的作用强于仅仅作为一个方便的条件化时刻。如果 s 处的状态不屏蔽过去，那么两条不同的 s 之前的历史可能在 s 处诱导出同一状态，却导致不同的未来边缘分布。在这种情况下，该状态空间上不存在单一的与历史无关的传播定律，因而也就不存在经由随机—量子对应对随机动力学的量子描述。

因此，分割时刻（当由一次干预所中介时）是这样一个点：有效律依照式(67)通过屏蔽历史而被改变，从而开启一个新的动力学阶段。[15] 制备是对这种分割的有意且可重复的实施。它使子系统在各次运行中重置为相同的分割后的条件，并同时固定观察者最近记录的信息。因此，分割时刻为这些核（从而也为相应的提升）提供了自然的根时刻，并且在操作上为预测建模提供了自然的逻辑起始时刻。

我们也可能会好奇，为什么转移核足以描述大多数物理上可获取的统计量。原因在于，典型实验只报告单个读出时刻的独立分布。一旦通过制备固定了 $p(x_s)$，这类边缘分布在两时传播下便是封闭的：

$$p(x_t) = \Gamma(t \leftarrow s)p(x_s),$$

因此，预测 $p(x_t)$无需额外的先验s 信息。

相比之下，真正的多时统计在操作上更难获取，因为在中间时刻提取信息通常需要进行干预，而这会扰动子系统并引发分割事件。这样一来，探测过程本身往往会重新启动有效动力学，因此无法像获取独立边缘分布那样，直接通过一系列侵入式测量来获得多时结构。

然而，区分这些概念很重要。定义传播子 $\Gamma(t \leftarrow s)$ 所需的屏蔽条件，是关于从根时刻 s 出发的两时刻条件概率的陈述，即

$$p(x_t \mid x_s, H) = p(x_t \mid x_s), \qquad t > s.$$

[15]在未受扰动的动力学下，分割事件也可能自发发生；本文重点讨论的是操作上受控的情形。

这足以定义一个从 s开始的自主传播定律，进而得到相应的量子描述。然而，这比路径空间上的完整马尔可夫屏蔽条件要弱；后者要求，在指定相关的当前数据后，未来的整个高阶条件结构都独立于s 之前的历史。

因此，即使根式二时核 $\Gamma(t \leftarrow s)$ 定义了与历史无关的线性传播子，也不能据此推断所有高阶条件概率都与历史无关。尤其是，仍可能存在如下形式的残余依赖

$$p(x_t \mid x_u, x_s, H) \neq p(x_t \mid x_u, x_s), \qquad s < u < t, \tag{70}$$

尽管如此

$$p(x_t \mid x_s, H) = p(x_t \mid x_s).$$

因此，从分割时刻出发存在量子提升，确保独立未来边缘分布在二时传播子作用下封闭，但这本身并不能保证完整多时统计中的记忆被消除。

现在我们陈述一个定理，为提升后的描述中的分割事件给出精确判据。在此处单独提出该定理，有助于厘清假设并明确相关限制。

6.3 可分性判据

我们称随机过程 Γ 在时刻 $t_1 \in [t_0, t_2]$ 是*C*-可分的，如果~存在一个随机转移矩阵 $\Gamma(t_2 \leftarrow t_1)$，使得

$$\Gamma(t_2 \leftarrow t_0) = \widetilde{\Gamma}(t_2 \leftarrow t_1)\Gamma(t_1 \leftarrow t_0). \tag{71}$$

我们称量子通道族 $\mathcal{E}$ 在 $t_1 \in [t_0, t_2]$ 处是 *Q*-可分 的，如果 ~ 存在一个量子通道 $\mathcal{E}_{t_2,\,t_1}$ 使得

$$\mathcal{E}_{t_2,t_0} = \widetilde{\mathcal{E}}_{t_2,t_1} \circ \mathcal{E}_{t_1,t_0}. \tag{72}$$

最后，如果一个随机过程的二时转移核可以提升为一个量子通道族（如第 4 节所述），且该量子通道族在 t_1 处是 Q-可分的，我们就称该随机过程在 t_1 处是 *Q*-可分 的。

定理 1（可分性判据）。如果一个随机过程在时刻 t_1 是 *Q*-可分的（其中 $t_0 < t_1 < t_2$），且对于每个初始对角态 $\rho(t_0)$，提升态 $\rho(t_1)$ 在时刻 t_1 都是对角态，那么该过程在时刻 t_1 是 *C*-可分的。

证明。令 $\Gamma(t \leftarrow t_0)$ 表示从 t_0 到 t 的随机转移矩阵，令 $p(t)$ 表示时刻 t 的独立概率向量。那么

$$p(t) = \Gamma(t \leftarrow t_0)p(t_0). \tag{73}$$

令 $\mathcal{E}_{t,\,t_0}:\ B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ 为 $\Gamma(t \leftarrow t_0)$ 的 CPTP 提升，并满足相容性条件 (21)，即

$$J\big(p(t)\big) = \Pi\big(\mathcal{E}_{t,t_0}(J(p(t_0)))\big). \tag{74}$$

~由于该过程在 t_1处是 Q-可分的，因此存在一个 CPTP 映射 $\mathcal{E}_{t_2,\ t_1}$ 使得

$$\mathcal{E}_{t_2,t_0} = \widetilde{\mathcal{E}}_{t_2,t_1} \circ \mathcal{E}_{t_1,t_0}. \tag{75}$$

For an initially diagonal state $\rho(t_0) = J(p(t_0))$, the lifted state at time t is

$$\rho(t) = \mathcal{E}_{t,t_0}(\rho(t_0)). \tag{76}$$

根据假设， $\rho(t_1)$ 是对角的，因此

$$\rho(t_1) = J\big(p(t_1)\big) = \mathcal{E}_{t_1,t_0}\big(J(p(t_0))\big). \tag{77}$$

结合（74）–（77）可得

$$\begin{aligned} J\big(p(t_2)\big) &= \Pi\Big(\mathcal{E}_{t_2,t_0}(J(p(t_0)))\Big) \\ &= \Pi\Big(\widetilde{\mathcal{E}}_{t_2,t_1}\big(\mathcal{E}_{t_1,t_0}(J(p(t_0)))\big)\Big) \\ &= \Pi\Big(\widetilde{\mathcal{E}}_{t_2,t_1}\big(J(p(t_1))\big)\Big). \end{aligned} \tag{78}$$

方程（78）恰好是从 t_1 开始的提升的相容关系。~令 $\Gamma(t_2 \leftarrow t_1)$ 表示由下式定义的诱导（随机）转移矩阵

$$\Pi\Big(\widetilde{\mathcal{E}}_{t_2,t_1}\big(J(p(t_1))\big)\Big) = J\big(\widetilde{\Gamma}(t_2 \leftarrow t_1)p(t_1)\big). \tag{79}$$

那么（78）和（79）意味着

$$J\big(p(t_2)\big) = J\big(\widetilde{\Gamma}(t_2 \leftarrow t_1)p(t_1)\big), \tag{80}$$

因此，利用方程（73）：

$$\Gamma(t_2 \leftarrow t_0)p(t_0) = \widetilde{\Gamma}(t_2 \leftarrow t_1)\Gamma(t_1 \leftarrow t_0)p(t_0). \tag{81}$$

由于这对所有初始概率向量 $p(t_0)$ 都成立，我们得出

$$\Gamma(t_2 \leftarrow t_0) = \widetilde{\Gamma}(t_2 \leftarrow t_1)\Gamma(t_1 \leftarrow t_0), \tag{82}$$

也就是说，该过程在 t_1 处是 C-可分的。 □

这里有几点需要说明。

1. 该判据不 要求提升后的族满足完整的查普曼–柯尔莫哥洛夫（CK）复合性质。只需提升在分解中出现的单个 中间时刻 t_1 处是 Q-可分的。2. 尽管如此，若该随机过程确实存在具有 CK 合成性质的 CPTP 提升（所有幺正提升都是其中的特例），那么定理意味着：只要对于每个初始对角的 $\rho(t_0)$， $\rho(t_1)$ 都是对角的，底层过程就在 t_1 处是 C- 可分的。3. 值得强调的是，反向结论通常不成立： Γ 在 t_1 处的 C-可分性与某个选定提升在 t_1 处的 Q-可分性并 不能推出 $\rho(t_1)$ 是对角的。

最后，该判据还为与环境的相互作用诱导出可分事件提供了一个方便的充分条件：

初始无关联环境中的操作可分事件。令 x_k （y_k）表示时刻 t_k 的系统（环境）构型。假设系统初始时与其环境无关联，即对于系统边缘分布 p（x_0）的每一种选择，联合经典分布都可分解为

$$p(x_0, y_0) = p(x_0)p(y_0),$$

其中 $p(y_0)$是固定的（独立于 $p(x_0)$）。等价地，

$$\rho_{SE}(t_0) = J(p(x_0)) \otimes J(p(y_0)).$$

假设在一个相互作用区间之后，时刻 t_1 的联合状态对每个 $p(x_0)$都具有经典—量子（记录）形式，

$$\rho_{SE}(t_1) = \sum_{x_1} p(x_1)|x_1\rangle\langle x_1| \otimes \tau_{x_1},$$

因此，对于所有对角的初始状态， $\rho_S(t_1) = \mathrm{Tr}_E \rho_{SE}(t_1) = J(p(x_1))$ 都是对角的。

此外，如果后续演化解耦（即，在 t_1之后系统不再相互作用），则

$$\mathcal{E}^{SE}_{t_2,t_1} = \mathcal{E}^{S}_{t_2,t_1} \otimes \mathcal{E}^{E}_{t_2,t_1}, \quad \text{for all } t_2 > t_1,$$

那么， S 上的约化提升在 t_1 处是Q-可分的，而定理1意味着在 t_1处， S 上诱导的随机过程是C-可分的。特别地，存在~一个随机矩阵 $\Gamma(t_2 \leftarrow t_1)$，使得

$$p(x_2) = \widetilde{\Gamma}(t_2 \leftarrow t_1)p(x_1).$$

7 结论

随机—量子对应最初的表述很容易让人觉得，这种对应似乎不可避免：酉量子力学会从几乎任意的随机性假设中，以一种“第一类”描述的形式涌现出来。在这种表述框架下，真正量子动力学的标志似乎恰恰是那些不可分的随机演化阶段——在这些阶段中，Chapman–Kolmogorov（CK）性质失效；而马尔可夫动力学则被视为“第二类”，只有在与噪声环境耦合并取约化动力学后才会出现。

然而，这种观点至少有两点令人困惑。首先，在标准的随机过程理论中，我们可以从相同的原始要素出发，直接得到结构完备且完全合理的马尔可夫模型，而无需借助开放系统嵌入或粗粒化约化。其次，先前的叙述并未阐明“与量子相关”的过程究竟有何特殊之处：它们本质上有何不同，又在更广阔的随机动力学图景中处于什么位置?

我们的目标是通过推广这种对应关系来澄清这些问题。有了这种推广，二者的区别便更加鲜明。真正“纯粹”的量子扇区对应于酉随机情形（这一点早已广为人知）：这类随机演化在转移概率层面上可以表示为某个酉矩阵各元素模平方组成的矩阵。超出这一特殊范围后，一般的随机系统还具有额外结构，而这种结构在提升后的表述中自然体现为量子信道动力学。从这个意义上说，幺正量子力学并非单凭随机性就会产生的一般结果，而只是其中一个特定领域；一旦离开酉随机领域，开放系统形式主义便是随机动力学经提升后自然呈现的形式。

从这一视角看，幺正随机性对应于时间一阶泄漏受到抑制：此时有效速率矩阵为 $R \approx 0$。因此，这一对应关系将基础性问题重新表述为：为何我们的基本理论似乎始终如此顽固地处于这一机制之中。

我们还回应了一个自然的疑虑：相位盲随机描述无法支持真正的相位敏感量子行为。解决之道在于，单步核 $\Gamma(t \leftarrow s)$ 并不能完整规定这一过程：缺失的区别存在于高阶条件结构（路径空间记忆）之中。理解这一点后，我们可以反过来提出问题：当可提升至$B(\mathcal{H})$ 时，这种记忆可以储存在前向可分的提升映射的何处？答案是，尽管 $\Gamma(t \leftarrow s)$ 仅确定基于构型基的两时统计量，但提升至 $B(\mathcal{H})$ 会引入非对角自由度，可充当压缩记忆寄存器。这一相位扇区在单步转移概率层面不可见，但在复合以及经过适当设计的系统–仪器耦合作用下，可能具有操作上的相关性。

Barandes 的操作性论证中，一个微妙之处涉及测量装置所扮演的角色。Barandes 表明，通过适当设计系统与装置之间的耦合，即使底层的随机描述是以优选的（构型）基来表述的，也可以复现其他基下的测量统计结果。若按字面理解，这似乎会使所需相位敏感信息的来源显得神秘：所谓“缺失”的信息是否仅存在于包含装置在内的更大多系统随机过程中？如果是，这种构造是否具有情境依赖性，即相关区别仅通过测量相互作用本身编码？

这一观点阐明了这一点。单步核 $\Gamma(t \leftarrow s)$ 不受相位影响，但它并未完整规定随机过程：不同的路径空间律可以具有相同的单步核。区分随机上不可区分的单步实现所需的额外信息，在随机性一侧体现为高阶条件结构（等价地说，多时联合统计），也就是过程的记忆。系统与仪器的耦合是一种读出这类差异的方式，但这并非使它们具有可操作性的唯一途径。即使对于单个系统，连续复合也能揭示这种差异：两个在 $|U_{ij}|^2$ 层面一致的幺正算子，在后续接入一个门之后，可能产生不同的两步核，

正是因为该过程不可分。

我们利用这一观察证明，对有效随机动力学进行主动 修改（即在构型变量的读出之前，立即施加于过程的不可分延续），可以获取通常编码在量子态中的全部信息。随后，通过在不同干预设置下进行受控重复实验，即通过量子态层析，可以实现完整重建。

最后，我们区分了客观的轨迹实现与嵌入式观察者的干预，并从提升视角陈述并证明了一个在数学上精确的可分事件判据。

值得注意的是，常被视为概念上神秘的量子力学，在数学上严谨且概念上清晰的一般随机过程框架中找到了自然的归宿。在此意义上，随机—量子对应将概率置于量子理论的核心，并赋予其精确的数学设定。尽管量子理论已为预测观测统计提供了自洽的演算，该对应通过以随机动力学的语言重新表述这些统计，增添了一个互补的维度，从而为解释和理解它们提供了统一的框架。

A 唯一的马尔可夫 θ-过程是平凡过程。

固定 $t > s$ ，并将区间 $[s,t]$ 划分为 n 个长度为$h =$ 的相等子区间$(t-s)/n$。根据查普曼–科尔莫戈罗夫性质，

$$\Gamma(t \leftarrow s) = \prod_{k=1}^{n} \Gamma(s + kh \leftarrow s + (k-1)h). \tag{83}$$

定义

$$\alpha(h) := \max_j \big(1 - \Gamma(s + h \leftarrow s)_{jj}\big) = O(h^2).$$

在 n 步内至少发生一次离开初始状态的转移的概率，上界为

$$n\alpha(h) = O\left(\frac{(t-s)^2}{n}\right),$$

当 $n \to \infty$ 时，该值趋于零。由于乘积表示式 (83) 对所有 n 都成立，因此这迫使

$$\Gamma(t \leftarrow s) = \mathbb{I}.$$

因此，任何非平凡的 θ-过程都必定是非马尔可夫的。

B 通过人为加速的尺度变换，将离散时间马尔可夫链 $\to$ 连续时间马尔可夫链。

以下构造并非用于定义连续时间马尔可夫链的标准离散到连续极限。这里引入它，仅为说明：只要允许采用本质上奇异的极限过程，即便逐步动力学相对于底层时间增量仅为二阶，也可能产生有效的一阶生成元。

令 $k \in \mathbb{N}$ 表示离散步数，并令 $p_k \in \mathbb{R}^N$ 表示第 k 步的（列）概率向量。具有单步转移矩阵 $\Gamma^{(\varepsilon)}$ 的离散时间马尔可夫链按如下方式演化：

$$p_{k+1} = \Gamma^{(\varepsilon)} p_k, \qquad \Gamma^{(\varepsilon)}_{ij} \geq 0, \quad \mathbf{1}^\top \Gamma^{(\varepsilon)} = \mathbf{1}^\top.$$

令 $t_* > 0$ 为固定的微观时间尺度，令 $\varepsilon > 0$ 为无量纲参数。假设对于每个固定的 ε ，微观时间间隔 δt（ε）：$= \varepsilon^2 t_*$ 上的单步转移核满足

$$\Gamma^{(\varepsilon)} = \mathbb{I} + (\varepsilon^2 t_*) R + o(\varepsilon^2), \qquad \varepsilon \to 0, \tag{84}$$

其中 R 是一个（列）速率矩阵，即对于 $i \neq j$ ，有 $R_{ij} \geq 0$ ，且 $\mathbf{1}^\top R = 0^\top$。因此，每个微观步骤只会产生 O（ε^2）概率流失，在微观尺度上不存在一阶生成元。

现在引入一个有效的 宏观时间变量 t，通过加速步数计数器来定义：

$$t := k\delta t(\varepsilon) = k\varepsilon^2 t_*, \qquad \text{equivalently} \qquad k = \left\lfloor \frac{t}{\varepsilon^2 t_*} \right\rfloor.$$

定义 $p^{(\varepsilon)}(t) := p_{\lfloor t/(\varepsilon^2 t_*)\rfloor}$。于是，对于固定的 t,

$$p^{(\varepsilon)}(t) = \left(\Gamma^{(\varepsilon)}\right)^{\lfloor t/(\varepsilon^2 t_*)\rfloor} p_0.$$

结合式 (84) 与标准极限 $\lim_{m\to\infty}(I + \frac{t}{m}R)^m = e^{tR}$，可得 —

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\Gamma^{(\varepsilon)}\right)^{\lfloor t/(\varepsilon^2 t_*)\rfloor} = e^{tR}, \qquad p(t) = e^{tR}p_0, \tag{85}$$

因此，在重标度时间变量 t 上得到有效的连续时间马尔可夫演化，

$$\frac{d}{dt}p(t) = Rp(t).$$

应将这一构造理解为一个显式的非一致极限。对于每个固定的 ε，单步偏差满足

$$\Gamma^{(\varepsilon)} - \mathbb{I} = O(\varepsilon^2),$$

因此，在微观时间尺度 $\delta t(\varepsilon)$ 上不存在一阶生成元。线性生成元之所以出现，仅仅是因为对一个固定的有效时间变量区间作复合时，参与复合的次数趋于无穷，

$$n(\varepsilon) \sim \frac{t}{\varepsilon^2 t_*} \to \infty,$$

因此

$$n(\varepsilon)\left(\Gamma^{(\varepsilon)} - \mathbb{I}\right) \sim \frac{t}{\varepsilon^2 t_*} \cdot (\varepsilon^2 t_* R) = tR.$$

因此，这一例子中马尔可夫动力学的出现并非离散时间链的一般特征，而是这里为演示如何将表面上每步为二阶的泄漏转化为一阶有效生成元，特意引入加速且奇异的缩放所导致的结果。

C CKmap 判据

现在，我们给出一个实用判据，用于确定所选提升在完整算子映射层面上是否满足查普曼–柯尔莫哥洛夫（CK）条件。

C.1 超算符形式的词典

我们将式（21）表示为刘维尔（超算子）形式。用 vec(·) 表示按列堆叠。使用标准恒等式

$$\mathrm{vec}(AXB) = (B^{\mathsf{T}} \otimes A)\mathrm{vec}(X). \tag{86}$$

因此，若$\phi_{t,\ s}$ 容许线性分解

$$\phi_{t,s}(X) = \sum_{\beta=1}^{r} A_\beta(t,s) X B_\beta(t,s),$$

其刘维尔（超算符）矩阵为

$$S_{t,s} = \sum_{\beta=1}^{r} \big(B_\beta(t,s)^{\mathsf{T}} \otimes A_\beta(t,s)\big), \qquad \mathrm{vec}\big(\phi_{t,s}(X)\big) = S_{t,s}\mathrm{vec}(X).$$

引入由下式定义的单射 $D \in \mathbb{R}^{n^2 \times n}$

$$\mathrm{vec}(J(p)) = Dp,$$

于是 D 将 p_i 放入 vec(·) 的 $(i,\ i)$ 槽位，而 D^{T} 提取对角的：D^{T}vec(ρ) = (ρ_{11}，……，ρ_{nn})^{T}。若我们写下指标：

$$k(i) := i + (i-1)n, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

则 D 可写为

$$D = \sum_{i=1}^{n} e_{k(i)} e_i^{\mathsf{T}}.$$

等价地，$D_{k(i),\ i} = 1$ 且所有其他元素均为零。

同样，退相位可用投影算子 $P \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ 表示，其中

$$\mathrm{vec}(\Pi(\rho)) = P\mathrm{vec}(\rho), \qquad P^2 = P, \qquad PD = D.$$

将式 (21) 向量化可得

$$PS_{t,s}Dp = D\Gamma(t,s)p \qquad \forall p,$$

因此，相容性约束也可等价地写为

$$\Gamma(t,s) = D^{\mathsf{T}} P S_{t,s} D. \tag{87}$$

C.2 Chapman–Kolmogorov 蕴含时间局域微分方程

提升映射的Chapman–Kolmogorov（复合）性质为

$$S_{t,s} = S_{t,u} S_{u,s} \qquad \forall s \le u \le t, \tag{88}$$

并带有归一化$S_{s,s} = I$。在温和的正则性假设下（例如在(t, s)中的强连续性以及在 t中的可微性），CK族容许一个局域时间生成元

$$L(t) := \frac{\partial}{\partial \tau} S_{\tau,t}\Big|_{\tau=t}, \tag{89}$$

并满足正向演化方程

$$\frac{\partial}{\partial t} S_{t,s} = L(t) S_{t,s}, \qquad S_{s,s} = I. \tag{90}$$

反之，若 (90) 对某个足够规则的 $L(t)$成立，则由线性初值问题 (90) 解的唯一性可知，CK性质 (88) 随之成立：对于固定的 $s \le u$，$S_{t,s}$ 和 $S_{t,u}S_{u,s}$ 在 t 中满足相同的常微分方程，且在 $t = u$ 处具有相同的初始条件。

C.3 实用 CK 检查清单

给定一个显式的候选超算符族 $\{S_{t,s}\}$（构造时使其满足 (87)），以下测试提供了一种便于计算的 CK 判据：

(A) **对角归一化**。验证

$$S_{s,s} = I \qquad \text{for all } s. \tag{91}$$

(B) **计算对角上的候选生成元**。求值

$$L(t) = \frac{\partial}{\partial \tau} S_{\tau,t}\Big|_{\tau=t}. \tag{92}$$

(C) **验证正向方程**。检查

$$E(t, s) := \frac{\partial}{\partial t} S_{t,s} - L(t) S_{t,s} = 0 \qquad \text{for all } t \ge s. \tag{93}$$

当(91)–(93)成立时（且 L足够光滑），族 $\{S_{t,s}\}$ 满足 Chapman–Kolmogorov性质 (88)。

参考文献

[1]J. A. Barandes，随机—量子对应，《物理学哲学》（已接受版本，2025年），doi:10.31389/pop.186，arXiv:2302.10778[quant-ph]（v3，2025年7月30日）。

[2]J. A. Barandes，随机—量子定理，arXiv:2309.03085[quant-ph]（v2，2026年2月6日）。

[3] J. A.Barandes, 量子理论因果局域表述的新前景，arXiv:2402.16935 [quant-ph] (v1，2024年2月26日)。

[4]J. A. Barandes, 量子系统作为不可分随机过程，arXiv:2507.21192 [quant-ph] (v1，2025年7月27日)。[5] J. A. Barandes, M. Hasan, 和 D. Kagan, *CHSH* 博弈、齐雷尔森界与因果局域性，arXiv:2512.18105 [quant-ph] (v1，2025年12月19日)。[6]L. S. Pimenta, 可分与不可分随机量子动力学，arXiv:2505.08785 [quant-ph] (v1，2025年5月13日)。[7]S. Calvo, 论随机—量子对应，arXiv:2601.18720[quant-ph](v1，2026年1月26日)。[8] W. B. Arveson, *C* 的子代数*-代数，《数学学报》**123**(1969), 141–224. doi:10.1007/BF02392388.[9] V. Gorini, A. Kossakowski, 和 E. C. G. Sudarshan, N级系统的完全正动力半群，《数学物理学杂志》**17**(1976), 821–825. doi:10.1063/1.522979.[10]G. Lindblad, 量子动力半群的生成元，《数学物理通讯》**48**(1976), 119–130. doi:10.1007/BF01608499.[11] W. F. Stinespring, C^*-代数上的正函数，《美国数学会会刊》**6**(1955), 211–216. doi:10.2307/2032342.[12] K. Kraus, 量子理论中的一般态变换，《物理学年鉴》**64**(1971), 311–335. doi:10.1016/0003-4916(71)90108-4.