arXiv:2602.22164v1 [math.MG] 25 Feb 2026

由三角形族的中心产生的（半）不变曲线

KLARA MUNDILOVA 和 OLIVER GROSS

Abstract. 我们研究在特殊三角形族中追踪三角形中心所得到的曲线，重点关注那些能够产生（半）不变三角形曲线的中心与三角形族；所谓（半）不变，是指改变初始三角形后，轨迹仅相差一个仿射变换。我们找出了四个具有半不变性的二参数三角形中心族，并确定了其中哪些具有不变性，即不同初始三角形对应的曲线之间存在相似变换关系。我们还发现，这些中心与等分三角形族结合时会产生剪切麦克劳林三等分角线，而与 nedian 三角形族结合时则会产生 Lima꞉con 三等分角线。

关键词： 三角形中心；三角形中心的轨迹；仿射不变性；相似不变性；麦克劳- 林三等分角线；Lima꞉con 三等分角线；平面代数曲线
2020年数学学科分类： 51M15, 51M04, 14H50, 51N10, 51N20

“对我来说，这很奇怪。”D. Hofstadter[1]

1. Introduction

给定一个三角形，可以与之关联许多量和对象，其中最简单的或许是它的边长和内角。此外，还有一些特殊点，例如重心、外心和费马点，它们是所谓三角形中心中广为人知的代表元。三角形中心的研究可以追溯到古希腊时期；在 Kimberling [7, 6], 的开创性推动下，这一领域至今仍受到当代研究的关注 [1, 11]。值得注意的是，对三角形中心特定构型的研究促成了与三角形相关的特殊代数曲线的发现 [2, 3]。例如，巴拉顿曲线包含三角形的垂心、外心、内心、托里拆利点和第一等力点；对于某些三角形，它是一条代数曲线 [4]。

其他研究方向则考察与三角形相关的曲线，这些曲线是通过追踪单参数族三角形中的点（或三角形中心）得到的。这类三角形族的例子包括 Poristic 三角形 [12] 以及通过线性移动三角形的一个顶点得到的三角形 [5, 9]。

Aliquot三角形和nedian三角形是著名的三角形族，其中各三角形的重心共点 [13]。Kodrnja和Koncul [8]描述了nedian三角形顶点的轨迹，而Mundilova [10] 证明，无论初始三角形如何，aliquot三角形的第一等角中心和第一等力中心都会描出一条代数曲线，即麦克劳林三等分线。

受三角形中心函数式定义的启发，我们引入 **Ψ**-三角形族的概念，aliquot族和nedian族是其中突出的例子。本文的核心主题是研究当底层三角形在此类族中变化时，三角形中心所描出的曲线。我们找出了一些三角形中心及其组合，它们会产生具有强几何刚性的曲线。改变参考三角形时，这些曲线仅发生仿射变换，甚至相似变换。

为形式化这一概念，我们区分两种刚性。若在改变参考三角形后，由给定三角形中心描出的轨迹

Date：2026年2月26日。[1]摘自 [7] 的前言。

仅通过仿射变换发生变化，即平移、旋转、缩放或错切，则称三角形曲线为半不变。如果曲线在不允许错切的情况下仍具有半不变性，则称其为不变。

1.1. **提纲**。 本文安排如下。在第2节中，我们回顾三角形中心的定义，并概述全文将用到的一些性质。在第3节中，我们引入 **Ψ**-三角形族，并说明它们构成一种具有独立研究价值的几何结构。特别地，我们证明，配备连接运算的三角形族集合具有阿贝尔群的结构。

我们的主要结果见第4节。我们首先在第4.1节研究三角形曲线的局部和整体性质，重点关注半不变性与不变性。我们证明，关于等分族生成半不变曲线这一三角形中心的性质，可推广到一大类 **Ψ**-三角形族。我们还证明，不变性在族的连接运算下得以保持。

在 Mundilova 的工作基础上 [10]，（她证明了两个三角形中心与等分族结合时会生成麦克劳林三分角线），我们在第4.2节大幅推广了这一结果。我们找出四个相对于可分解三角形族类的半不变三角形中心二参数族。在这些族中，我们刻画了能够产生不变曲线的三角形中心。我们证明，在等分族或三等分线三角形族这一特殊情形下，所得曲线分别是剪切后的麦克劳林三分角线或 Lima.con 三分角线。

最后，在第4.3节中，我们讨论一个逆问题。对于第4.2节中所确定的、生成半不变曲线的三角形中心，我们确定能产生预先指定的可容许目标曲线的 **Ψ**-三角形族。

在转入三角形中心的研究之前，我们先固定全文将使用的记号与约定。为便于阅读，我们将主要概念与结果呈现在正文中。除非另有说明，证明均推迟至附录。

1.2. 记号。任意三个互异的点 A、B、C $\in \mathbb{R}^2$ 唯一确定一个三角形 Δ，其对边分别为 a、b 和 c，边长分别记为 a、b、$c \geq 0$。此外，我们遵循如下约定：将顶点 A、B 和 C 处的角分别记为α、β 和 γ（见图1）。下文中，我们只考虑非退化的三角形 Δ，即假定三个顶点处于一般位置。我们将所有此类三角形的集合记为

$$\triangle := \{\Delta \mid \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^2 \text{ are distinct and non-collinear points}\}.$$

我们也可以用边长来描述非退化三角形的集合，即满足 $a < b + c$、$b < c + a$ 和 $c < a + b$ 的三元组 $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3_{>0}$。为简便起见，并稍微滥用一下记号，我们也用 $\triangle$ 表示这类三元组的集合。利用海伦公式，我们将三角形的面积表示为

$$\text{area}(\Delta) = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

注意，对于 $\Delta \in \triangle$，$\text{area}(\Delta) \neq 0$。

为了使文中冗长的方程尽可能简洁，全文采用两套坐标系，它们都根据顶点位置$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$ $\in \mathbb{R}^2$来表示平面上的点。首先，我们考虑齐次重心坐标 $[\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3]^T$，并将其记为列向量，用以确定点$\mathbf{P}$ $\in \mathbb{R}^2$ 的位置：

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}\left(\lambda_1 \mathbf{A} + \lambda_2 \mathbf{B} + \lambda_3 \mathbf{C}\right).$$

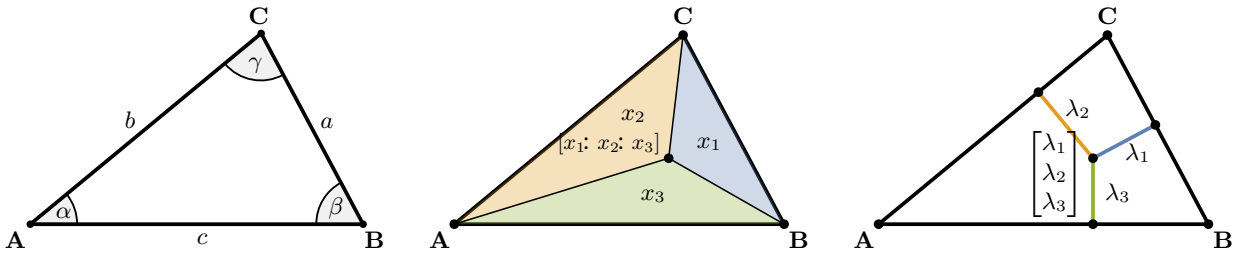


FIGURE 1. 本文所用符号的示意图，突出显示了重心坐标（中心）和三线坐标（右侧）的几何意义。

通过要求 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$，可以对它们进行归一化。相比之下，齐次重心三线坐标 $[x_1:x_2:x_3]$记为行向量，用以表示同一点$\mathbf{P}$：

$$\mathbf{P}=\frac{1}{a\lambda_1+b\lambda_2+c\lambda_3}\left(ax_1\mathbf{A}+bx_2\mathbf{B}+cx_3\mathbf{C}\right).$$

只要这两组坐标系统之间的转换有合理定义，就可以通过除以或乘以三角形边长来实现：

$$[x_1:x_2:x_3]=\begin{bmatrix}\lambda_1/a\\ \lambda_2/b\\ \lambda_3/c\end{bmatrix},\quad resp.\quad \begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}=[ax_1:bx_2:cx_3].$$

因此，将表达式 ax_1, bx_2, cx_3 除以 $ax_1+bx_2+cx_3$，即可将三线坐标转换为归一化重心坐标。

2. TRIANGLE CENTERS

2.1. **定义与预备知识**。以下三角形中心的定义改编自 Kimberling [7]。

定义1。函数 $\psi:\ \triangle\to\mathbb{R},\ \psi\not\equiv 0$, 称为三角形中心函数，如果它满足：*(i)* 齐次，即，存在某个常数 $r\in\mathbb{R}$，使得对所有 $t>0$，我们都有

$$\psi(ta,tb,tc)=t^r\psi(a,b,c). \tag{1}$$

本文中，我们用记号 $\deg(\psi)=r$ 表示 ψ 的齐次次数为 r。

(ii) 关于第二和第三个变量双对称，即，对所有 $a,b,c\in\triangle$，我们都有

$$\psi(a,b,c)=\psi(a,c,b). \tag{2}$$

所有三角形中心函数的集合记为 $\mathcal{T}$。每个 $\psi\in\mathcal{T}$ 定义了一个三角形中心：$(a,b,c)\in\triangle$，其三线坐标为

$$\mathbf{X}_\psi=[\psi(a,b,c):\psi(b,c,a):\psi(c,a,b)].$$

虽然 Kimberling 只考虑正的 r，但我们的定义也允许负的 r，因为任何三角形中心函数的齐次度都可以提高，例如乘以 abc 的幂。此外请注意，三角形中心的定义在相似变换下具有等变性，即在平移、旋转、反射和一致缩放下均如此。也就是说，变换后的三角形的中心与原三角形的中心经过相同变换后所得的点相同。为了描述对应于相同三角形中心的三角形中心函数，我们引入：

$\mathbf{X}_i$	Name	$\phi_i(a,b,c)$	可追踪的	$\mathbf{X}_i^{-1}$
$\mathbf{X}_1$	内心	1	yes	$\mathbf{X}_1$
$\mathbf{X}_2$	重心	a^{-1}	yes	$\mathbf{X}_6$
$\mathbf{X}_3$	外心	$a(-a^2+b^2+c^2)$	yes	$\mathbf{X}_4$
$\mathbf{X}_6$	类似中线点	a	yes	$\mathbf{X}_2$
$\mathbf{X}_{11}$	费尔巴哈点	$bc(-a+b+c)(b-c)^2$	no	$\mathbf{X}_{59}$
$\mathbf{X}_{13}$	第一等角中心	$\csc(\alpha-\pi/3)$	yes	$\mathbf{X}_{15}$
$\mathbf{X}_{14}$	第二等角中心	余割 $(\alpha+\pi/3)$	yes	$\mathbf{X}_{16}$
$\mathbf{X}_{15}$	第一等动力中心	正弦 $(\alpha-\pi/3)$	yes	$\mathbf{X}_{13}$
$\mathbf{X}_{16}$	第二等动力中心	正弦 $(\alpha+\pi/3)$	yes	$\mathbf{X}_{14}$

TABLE 1. 部分三角形中心及其生成函数。

定义 2. 我们用 $\mathrm{Cyc}(\mathcal{T})$ 表示 $\mathcal{T}$ 中处处不为零的函数子集，即，$f(a,b,c) \neq 0$ 对所有 $(a,b,c) \in \triangle$ 均成立，且在循环置换下不变，也就是说，$f(a,b,c) \in \mathrm{Cyc}(\mathcal{T})$ 满足

$$f(a,b,c) = f(b,c,a) = f(c,a,b).$$

下面的引理1是定义2的直接推论，它阐明了何时两个三角形中心函数表示同一个三角形中心，即二者相差一个循环因子时。

引理1。两个三角形中心函数 $\psi_0(a,b,c)$ 和 $\psi_1(a,b,c)$ 表示同一个三角形中心，当且仅当

$$\psi_1(a,b,c) = f(a,b,c)\,\psi_0(a,b,c),$$

对某个 $f(a,b,c) \in \mathrm{Cyc}(\mathcal{T})$成立。我们用 $\psi_0 \cong \psi_1$ 表示两个三角形中心函数 ψ_0 和 ψ_1 表示同一个三角形中心。

注1。由于 $abc \in \mathrm{Cyc}(\mathcal{T})$，因此$\psi \cong abc\,\psi$ 对所有 $\psi \in \mathcal{T}$均成立。因此，在定义*1*中，齐次性是本质要求，而具体次数可以通过乘以 abc 的幂来改变，因此在非退化三角形上不具有几何意义。

三角形中心之间存在若干自然的对偶关系，其中最有用的关系之一是取等角共轭。在这种情况下，等角共轭变换通过对关联三角形中心函数取倒数，作用于定义中心的数据，从而产生一个与原中心配对的新中心。

定义3。 给定一个三角形中心$\mathbf{X}\psi$，其等角共轭 $\mathbf{X}\psi^{-1}$ 是一个三角形中心，对应于三角形中心函数 $\psi^{-1}(a,b,c) := (\psi(a,b,c))^{-1}$。

三角形中心函数的集合 $\mathcal{T}$已知是一个连续统。一个收录了六万多个不同编号三角形中心的目录见三角形中心百科全书 [6]。表1列出了本文讨论的一组选定中心及其等角共轭。

约定。在本文中，我们用 ψ_j 表示一般三角形中心函数，用 ϕ_i 表示对应于某个特定编号三角形中心（根据 [6]）的三角形中心函数。也就是说，ϕ_i 表示第 i个三角形中心$\mathbf{X}_i$对应的三角形中心函数。对于三角形中心$\mathbf{X}\psi_i$ 的等角共轭，我们也简写为$\mathbf{X}_{\psi_i}^{-1} := \mathbf{X}\psi_i^{-1}$ 。

2.2. **三角形中心的性质**。 尽管三角形中心的定义范围广泛，涵盖了许多理想特性，但它并未对三角形中心函数施加严格限制。例如，并非所有这类函数都能为所有三角形给出在欧几里得平面中定义良好的代表点；而且在多种三角形构型中，某些中心可能与其他中心重合。本节将引入一些术语，以排除这些异常情况。

2.2.1. 可追踪三角形中心。 虽然三角形中心函数通常描述的是齐次坐标，但有时采用规范化形式来处理三角形中心函数会更为方便。

定义4。 给定一个三角形中心函数 $\psi \in \mathcal{T}$，其轨迹 定义为

$$\Sigma_\psi(a,b,c) = a\,\psi(a,b,c) + b\,\psi(b,c,a) + c\,\psi(c,a,b).$$

若三角形中心函数 $\psi \in \mathcal{T}$ 的轨迹可追踪 且处处不为零，即,$\Sigma_\psi(a,b,c) \neq 0$ 对所有$(a,b,c) \in \triangle$均成立，则称该函数为可追踪的；若 $\Sigma_\psi(a,b,c) \equiv 1$，则称其为归一化的。此外，若一个三角形中心所对应的三角形中心函数可追踪，则称该中心可追踪。

根据三角形中心的定义，可知可追踪三角形中心是在 $\mathbb{R}^2$ 中对所有 $\Delta \in \triangle$均对应良定义点的那些中心。此类中心的示例列于[2] 表 1中。值得注意的是，费尔巴哈点 $\mathbf{X}_{11}$ 不可追踪，因为 $\Sigma_{\phi_{11}}(a,a,a) = 0$。

最后，我们注意到，定义 4 的良定义性源于以下命题中列出的性质，而这些性质是三角形中心函数性质的直接推论。

命题1. 设 $\psi \in \mathcal{T}$是次数为 $k \geq 0$ 且属于 $f \in \mathrm{Cyc}(\mathcal{T})$ 的三角形中心函数。那么，

(i) $\Sigma_\psi(a,b,c) = \Sigma_\psi(b,c,a) = \Sigma_\psi(c,a,b)$,
(ii) $\Sigma_\psi(a,b,c) = \Sigma_\psi(a,c,b)$, (iii) $\Sigma_\psi(ta,tb,tc)$ $= t^{k+1}\,\Sigma_\psi(a,b,c)$, (iv) $\Sigma_{f\psi}(a,b,c) = f(a,b,c)$ $\Sigma_\psi(a,b,c)$.

也就是说， $\Sigma_\psi \in \mathcal{T}$在描述相同三角形中心的三角形中心函数等价类上定义良好，并且是 $= k+1$ 次齐次的$\deg(\Sigma_\psi)$ 。

注意，如果 ψ 可追踪，则 $\Sigma_\psi \in \mathsf{Cyc}(\mathcal{T})$。也就是说，任何可追踪三角形中心函数 $\psi \in \mathcal{T}$都可以通过以下方式归一化：

$$\psi \mapsto \tfrac{1}{\Sigma_\psi}\psi.$$

根据上述性质，很容易验证以下命题。

命题2. 归一化三角形中心函数的齐次次数为 *-1*。

2.2.2. 本质不同的三角形中心。 对于边长为 $a > 0$ 的等边三角形，任意三角形中心函数 $\psi \in \mathcal{T}$ 的轨迹可简化为 $\Sigma_\psi(a,a,a) = 3a\psi(a,a,a)$。若 $\psi(a,a,a) \neq 0$，对于可追踪三角形中心而言，情况正是如此，则该三角形中心的重心坐标为

$$\mathbf{X}_\psi = \begin{bmatrix} a\,\psi(a,a,a) \\ a\,\psi(a,a,a) \\ a\,\psi(a,a,a) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{X}_2.$$

因此，在等边三角形中，所有可追踪三角形中心都与三角形的重心重合。由于这种重合属于退化情形，我们将主要关注在其他所有三角形中彼此不重合，也就是不同的三角形中心。

定义 5. 若两个三角形中心函数 $\psi_0, \psi_1 \in \mathcal{T}$ 所对应的三角形中心仅在等边三角形中重合，则称它们本质不同。

例如，在直角等腰三角形中，三角形中心$\mathbf{X}_3$ 与$\mathbf{X}_{63}$ 重合于斜边的中点。因此，这些三角形中心并非本质不同（见第A节，例4）。下述引理给出了本文后续各节所考虑的本质不同的三角形中心对。

[2]用于判定可追踪性与不可追踪性的计算过程见附录A，例2 和例3。

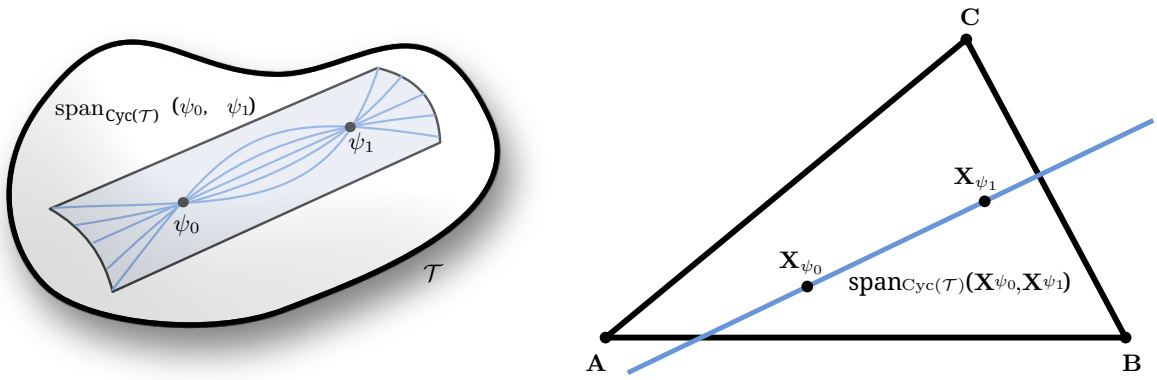


FIGURE 2. 三角形函数空间的示意图。

引理 2.

(i) 三角形中心$\mathbf{X}_3$ 与$\mathbf{X}_6$ 是本质不同的。*(ii)* 三角形中心$\mathbf{X}_{13}$, 、$\mathbf{X}_{14}$, 、$\mathbf{X}_{15}$, 与$\mathbf{X}_{16}$ 均与重心$\mathbf{X}_2$本质不同。

2.3. 共线三角形中心。 对三角形中心的研究也会考察它们之间的关系，例如共线性。回顾一下，若对于所有的 (a, b, c)，都有 $\in\triangle$，则三个三角形中心 $\mathbf{X}_{\psi_0}, \mathbf{X}_{\psi_1}, \mathbf{X}_{\psi_2}$ 共线。

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{X}_{\psi_0} & \mathbf{X}_{\psi_1} & \mathbf{X}_{\psi_2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{3}$$

因此，对于满足 $\Sigma_{\psi_0}, \Sigma_{\psi_1}, \Sigma_{\psi_2} \neq 0$ 的三角形 $\Delta \in \triangle$，我们定义

$$\mathbf{M}_\Delta = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{M}_\psi = \begin{pmatrix} a\,\psi_0(a,b,c)/\Sigma_{\psi_0} & a\,\psi_1(a,b,c)/\Sigma_{\psi_1} & a\,\psi_2(a,b,c)/\Sigma_{\psi_2} \\ b\,\psi_0(b,c,a)/\Sigma_{\psi_0} & b\,\psi_1(b,c,a)/\Sigma_{\psi_1} & b\,\psi_2(b,c,a)/\Sigma_{\psi_2} \\ c\,\psi_0(c,a,b)/\Sigma_{\psi_0} & c\,\psi_1(c,a,b)/\Sigma_{\psi_1} & c\,\psi_2(c,a,b)/\Sigma_{\psi_2} \end{pmatrix},$$

并改写为

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{X}_{\psi_0} & \mathbf{X}_{\psi_1} & \mathbf{X}_{\psi_2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\left(\mathbf{M}_\Delta \cdot \mathbf{M}_\psi\right) = \det\left(\mathbf{M}_\Delta\right) \det\left(\mathbf{M}_\psi\right).$$

由于三角形 $\Delta \in \triangle$ 的顶点处于一般位置，$\det(\mathbf{M}_\triangle) \neq 0$，方程（3）等价于 $\det(\mathbf{M}_\psi) = 0$。接着，利用行列式的多重线性性质，我们可以化简

$$\det(\mathbf{M}_\psi) = \frac{abc}{\Sigma_{\psi_0}\Sigma_{\psi_1}\Sigma_{\psi_2}} \det\begin{pmatrix} \psi_0(a,b,c) & \psi_1(a,b,c) & \psi_2(a,b,c) \\ \psi_0(b,c,a) & \psi_1(b,c,a) & \psi_2(b,c,a) \\ \psi_0(c,a,b) & \psi_1(c,a,b) & \psi_2(c,a,b) \end{pmatrix}.$$

由于我们关注的是非退化三角形，三个三角形中心共线的充要条件是：在经过循环置换的三角形边长处取值的三角形中心函数所对应的三元组线性相关。

2.3.1. 循环仿射三角形中心组合。 现在，我们将三角形中心函数之间一种简单而灵活的线性相关概念形式化，其中系数允许随 (a, b, c) 循环变化。

定义 6. 设 $\psi_0, \psi_1 \in \mathcal{T}$为两个三角形中心函数，且 $\omega_0, \omega_1 \in \text{Cyc}(\mathcal{T})$ 满足$\deg(\omega_0\psi_0) = \deg(\omega_1\psi_1)$。我们将该三角形中心函数称为

$$\psi_\omega(a,b,c) = \omega_0(a,b,c)\,\psi_0(a,b,c) + \omega_1(a,b,c)\,\psi_1(a,b,c), \tag{4}$$

作为 ψ_0 和 ψ_1的循环仿射组合。我们用$\text{span}_{\text{Cyc}(\mathcal{T})}(\psi_0, \psi_1)$表示 ψ_0和 ψ_1 的循环仿射组合的集合。

不难验证 ψ_ω 在公式（4）中是一个三角形中心函数，因此定义良好。

注 2. 请注意，即使引理 *6* 中的两个三角形中心函数都可追踪，其对应的循环仿射组合也未必可追踪。特别地，对于归一化三角形中心函数 ψ_0 和 ψ_1，$\omega_0 \in \mathrm{Cyc}(\mathcal{T})$，以及 $\omega_1 = -\omega_0$，对于所有 $\Sigma_{\psi_\omega}(a,\ b,\ c) = 0$，均有 $\Delta \in \triangle$。

下一个引理表明，在点的层面上，循环仿射组合的表现如同真正的仿射组合：只要该组合可追踪，所得中心就位于 $\mathbf{X}_{\psi_0}$ 与 $\mathbf{X}_{\psi_1}$的连线上，其权重由循环系数决定，见图 2。

引理 3. 令 $\psi_\omega \in \mathrm{span}_{\mathrm{Cyc}(\mathcal{T})}(\psi_0, \psi_1)$ 可追踪。则关联三角形中心共线，且由下式给出

$$\mathbf{X}_{\psi_\omega} = \frac{\omega_0 \Sigma_{\psi_0}}{\omega_0 \Sigma_{\psi_0} + \omega_1 \Sigma_{\psi_1}} \mathbf{X}_{\psi_0} + \frac{\omega_1 \Sigma_{\psi_1}}{\omega_0 \Sigma_{\psi_0} + \omega_1 \Sigma_{\psi_1}} \mathbf{X}_{\psi_1}. \tag{5}$$

此外，我们有

$$\psi_\omega \in \mathrm{span}_{\mathrm{Cyc}(\mathcal{T})}(\psi_0, \psi_1) \quad \Longrightarrow \quad \psi_1 \in \mathrm{span}_{\mathrm{Cyc}(\mathcal{T})}(\psi_0, \psi_\omega).$$

然而，请注意，有些违反直觉的是，$\psi_0,\ \psi_1 \notin \mathrm{span}_{\mathrm{Cyc}(\mathcal{T})}(\psi_0,\ \psi_1)$，因为根据定义 2，$\omega_0,\ \omega_1 \neq 0$。因此，$\mathrm{span}_{\mathrm{Cyc}(\mathcal{T})}(\psi_0,\ \psi_1) \neq \mathrm{span}_{\mathrm{Cyc}(\mathcal{T})}(\psi_0,\ \psi_\omega)$。

一个关键点是，这种构造仅取决于底层的三角形中心，而与我们如何选择其代表元无关。特别是，对 ψ_0 和 ψ_1 乘以循环因子进行缩放，并不会改变它们所生成的循环仿射组合族。

引理 4. 两个三角形中心函数 ψ_0 和 ψ_1 的循环仿射组合集合与其代表元的选取无关。也就是说，

$$\mathrm{span}_{\mathrm{Cyc}(\mathcal{T})}(f_0\psi_0, f_1\psi_1) = \mathrm{span}_{\mathrm{Cyc}(\mathcal{T})}(\psi_0, \psi_1),$$

其中 $f_0, f_1 \in \mathrm{Cyc}(\mathcal{T})$。因此，我们也可以将与 ψ_0 和 ψ_1 的循环仿射三角形中心函数相对应的三角形中心集合$\mathbf{X}_{\psi_\omega}$ 称为$\mathrm{span}_{\mathrm{Cyc}(\mathcal{T})}(\mathbf{X}_{\psi_0}, \mathbf{X}_{\psi_1})$。

已知连接$\mathbf{X}_3$ 和$\mathbf{X}_6$, 的直线，即所谓的布罗卡尔轴，经过第一等动力中心$\mathbf{X}_{15}$。附录5 中的示例A 展示了$\mathbf{X}_{15}$ 是$\mathbf{X}_3$ 和$\mathbf{X}_6$的循环仿射组合。

最后，我们讨论在什么条件下，$\mathrm{span}_{\mathrm{Cyc}(\mathcal{T})}(\mathbf{X}_{\psi_0}, \mathbf{X}_{\psi_1})$ 包含所有与$\mathbf{X}_{\psi_0}$ 和$\mathbf{X}_{\psi_1}$本质不同的三角形中心。

引理 5. 如果两个不同的三角形中心 $\mathbf{X}_{\psi_0}$ 和 $\mathbf{X}_{\psi_1}$ 均可追踪，那么$\mathrm{span}_{\mathrm{Cyc}(\mathcal{T})}(\mathbf{X}_{\psi_0}, \mathbf{X}_{\psi_1})$包含所有与$\mathbf{X}_{\psi_0}$和$\mathbf{X}_{\psi_1}$ 共线且本质上不同于这两个中心的可追踪三角形中心。

2.3.2. 常系数仿射三角形中心组合。 接下来，我们重点介绍一组三角形中心，它们彼此共线，且其系数不依赖于三角形的形状，即，相对于三角形边长 a、b 和 c 为常数。

定义 7. 设 ψ_0 和 ψ_1 是两个三角形中心函数，满足 $\deg(\psi_0) = \deg(\psi_1)$，且 γ_0、$\gamma_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$。我们将三角形中心函数

$$\psi_{\lambda_0:\lambda_1}(a, b, c) = \lambda_0\, \psi_0(a, b, c) + \lambda_1\, \psi_1(a, b, c),$$

称为 ψ_0 和 ψ_1 的常仿射组合 。我们用$\mathrm{span}_{\mathrm{const}}(\psi_0, \psi_1)$表示 ψ_0 和 ψ_1 的常仿射组合构成的集合。

由于三角形中心的常仿射组合是循环仿射组合的一种特例，引理3 的一个特例在此情形下原样适用。

命题 3. 设 $\psi_{\lambda_0:\ \lambda_1} \in$ 张成$_{\text{const}}$（ψ_0，ψ_1）可追踪。则关联三角形中心共线，并由下式给出

$$\mathbf{X}_{\psi_{\lambda_0:\lambda_1}} = \frac{\lambda_0\Sigma_{\psi_0}}{\lambda_0\Sigma_{\psi_0}+\lambda_1\Sigma_{\psi_1}}\mathbf{X}_{\psi_0} + \frac{\lambda_1\Sigma_{\psi_1}}{\lambda_0\Sigma_{\psi_0}+\lambda_1\Sigma_{\psi_1}}\mathbf{X}_{\psi_1}. \tag{6}$$

此外，我们有

$$\psi_{\lambda_0:\lambda_1} \in \text{span}_{\text{const}}(\psi_0,\psi_1) \quad \Longrightarrow \quad \psi_1 \in \text{span}_{\text{const}}(\psi_0,\psi_{\lambda_0:\lambda_1}).$$

注意，若引理 ψ_0 与 ψ_1 3 中的两个三角形中心函数 已归一化，因此具有齐次次数 -1，则三角形中心函数的系数和三角形中心均为常数，所得三角形中心函数 $\psi_{\lambda_0:\ \lambda_1}$ 也是归一化的。此外，若$\lambda_0+\lambda_1=1$，则三角形中心函数的系数与三角形中心相同。

值得注意的是，常仿射组合会产生彼此本质不同的三角形中心族。

引理 6。 若引理 *3* 中的三角形中心函数 ψ_0 与 ψ_1 对应于本质不同的可追踪三角形中心，则对于 λ_0、$\lambda_1 \neq 0$，与 $\psi_{\lambda_0:\ \lambda_1}$ 对应的三角形中心与 ψ_0 和 ψ_1本质不同。此外，若 $\lambda_0/\lambda_1 \neq \lambda_0/\lambda_1$，则三角形中心函数$\psi_{\lambda_0:\ \lambda_1}$ 与 $\psi_{\lambda_0:\ \lambda_1}$ 本质不同。

最后请注意，与循环仿射组合不同，常仿射组合取决于三角形中心函数的选择。尽管如此，利用三个共线三角形中心，我们可以定义一组不依赖于特定三角形中心函数选择的常仿射组合。更多信息请参见附录 A，引理 13。布罗卡尔轴上的常仿射三角形中心族示例见例 6。

3. $\mathbf{\Psi}$-Triangle families

本节将探讨如何从给定三角形 $\Delta \in \triangle$ 导出三角形族。受 Kimberling 的方法启发，该方法将三角形中心函数作为研究三角形中心的抽象工具，我们用函数三元组来描述这些三角形族。

定义 8. *A* $\mathbf{\Psi}$-三角形族 $t \mapsto \Delta_t^{\mathbf{\Psi}} \in \triangle$ 由一个三角形 $\Delta \in \triangle$ 和三个标量值函数 $\Psi_i(t)$确定，

$$\mathbf{\Psi}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{pmatrix}\Psi_1(t)\\ \Psi_2(t)\\ \Psi_3(t)\end{pmatrix},$$

使得 $\Psi_1(t)+\Psi_2(t)+\Psi_3(t) \neq 0$ 且不满足 $\Psi_1(t) \equiv \Psi_2(t) \equiv \Psi_3(t)$。相对于三角形 的顶点 **A**、**B** 和 **C** 的重心坐标， $\Delta_t^{\mathbf{\Phi}}$的顶点表示为

$$\mathbf{A}_t^{\mathbf{\Psi}} = \begin{bmatrix}\Psi_1(t)\\ \Psi_2(t)\\ \Psi_3(t)\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}_t^{\mathbf{\Psi}} = \begin{bmatrix}\Psi_3(t)\\ \Psi_1(t)\\ \Psi_2(t)\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}_t^{\mathbf{\Psi}} = \begin{bmatrix}\Psi_2(t)\\ \Psi_3(t)\\ \Psi_1(t)\end{bmatrix}.$$

下文中，我们将这三个函数 $\Psi_1(t)$、$\Psi_2(t)$ 和 $\Psi_3(t)$ 称为该族 $\Delta_t^{\mathbf{\Psi}}$ 的生成函数。此外，如果 $\Delta_t^{\mathbf{\Psi}} = \Delta$ 对某个 t 成立，我们就称一个三角形族为插值的。

与三角形中心函数类似，我们遵循如下约定：一般三角形族用 $\mathbf{\Psi}$表示，具体的三角形族则用带下标的 $\mathbf{\Phi}$ 表示。例如，

$$\mathbf{\Phi}_{\text{Id}}\colon t \mapsto \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \tag{7}$$

是恒等映射，并且

$$\mathbf{\Phi}_{\mathrm{S}}\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 1+2t \\ 1-t \\ 1-t \end{pmatrix} \tag{8}$$

表示一种以重心为原点的位似变换。

下面的引理指出了 $\mathbf{\Psi}$-三角形族的两个不变量，它们可作为将某个三角形族归类为 $\mathbf{\Psi}$-三角形族的必要条件：

引理 7. 对于所有 $t \in \mathbb{R}$，以下结论均成立：

(i) 三角形 $\Delta_t^{\mathbf{\Psi}}$的重心与 Δ的重心重合。*(ii)* 如果 Δ 是等边三角形，那么 $\Delta_t^{\mathbf{\Psi}}$也为等边三角形。

这个引理提供了一个有用的判据，可用于判断给定的三角形族何时不是$\mathbf{\Psi}$-三角形族。例如，由某个顶点的线性位移得到的三角形族，不可能是 $\mathbf{\Psi}$-三角形族，因为它们不保持重心 [5, 9]。此外，Poristic 三角形的重心通常沿着一个圆 [12, 定理 4。6]的轨迹运动。

3.1. **连接 $\mathbf{\Psi}$-三角形族**。在建立了 $\mathbf{\Psi}$-三角形族的一些基本性质后，自然要考虑对应于两个三角形族的生成函数三元组的连接：

定义与引理 9。两个三角形族的连接，

$$\mathbf{\Psi} = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{\Psi}} = \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_1 \\ \tilde{\Psi}_2 \\ \tilde{\Psi}_3 \end{pmatrix},$$

是一个由下式给出的 $\mathbf{\Psi}$-三角形族

$$\mathbf{\Psi} \circ \tilde{\mathbf{\Psi}}\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \Psi_1\tilde{\Psi}_1 + \Psi_2\tilde{\Psi}_3 + \Psi_3\tilde{\Psi}_2 \\ \Psi_1\tilde{\Psi}_2 + \Psi_2\tilde{\Psi}_1 + \Psi_3\tilde{\Psi}_3 \\ \Psi_1\tilde{\Psi}_3 + \Psi_2\tilde{\Psi}_2 + \Psi_3\tilde{\Psi}_1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

鉴于所有 $\mathbf{\Psi}$-三角形族的集合在连接运算下封闭，下面的引理列出了这一结构的其他代数性质：

引理 8。以下性质对所有 $\mathbf{\Psi}$-三角形族均成立：

(i) 三角形族的连接满足交换律：

$$\mathbf{\Psi} \circ \tilde{\mathbf{\Psi}} = \tilde{\mathbf{\Psi}} \circ \mathbf{\Psi}.$$

(ii) 三角形族的连接具有结合性：

$$\mathbf{\Psi} \circ \left(\tilde{\mathbf{\Psi}} \circ \hat{\mathbf{\Psi}}\right) = \left(\mathbf{\Psi} \circ \tilde{\mathbf{\Psi}}\right) \circ \hat{\mathbf{\Psi}}.$$

(iii) $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Id}}$ 是连接运算的单位元，

$$\mathbf{\Psi} \circ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Id}} = \mathbf{\Psi}.$$

(iv) 每个 $\mathbf{\Psi}$-三角形族都有逆元，

$$\mathbf{\Psi}^{-1}\colon t \mapsto \begin{pmatrix} (\Psi_1)^2 - \Psi_2\Psi_3 \\ (\Psi_3)^2 - \Psi_1\Psi_2 \\ (\Psi_2)^2 - \Psi_3\Psi_1 \end{pmatrix}.$$

因此，所有 $\mathbf{\Psi}$-三角形族在运算与连接下构成一个阿贝尔群，其中性元为 $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Id}}$。

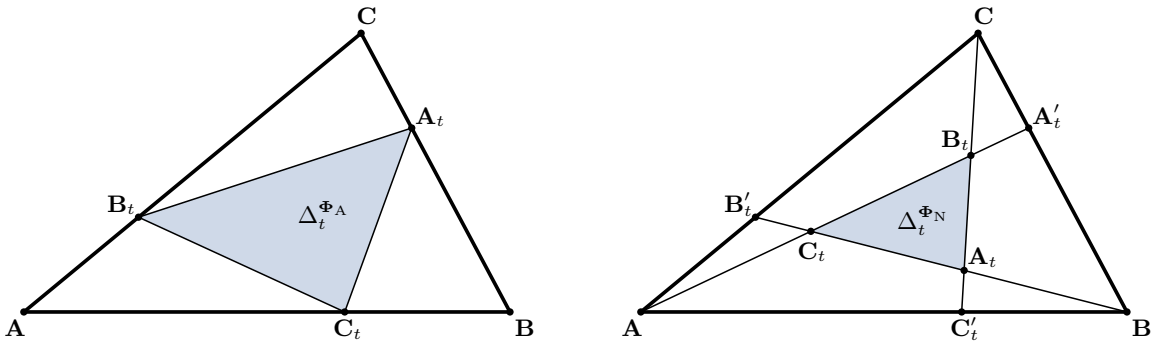


FIGURE 3. 等分（左）与 nedian（右）三角形族的示意图。

3.2. **等分线与三等分线三角形族**。 本文中，与三角形相关的两个三角形族——等分线和三等分线三角形族 [13], 发挥着重要作用。前一个三角形族的构造方法是：给三角形 $\Delta \in \triangle$ 的顶点$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$和$\mathbf{C}$ 赋予一个定向，并定义一组三个新的顶点$\mathbf{A}_t$、$\mathbf{B}_t$、$\mathbf{C}_t$ ，使新顶点在各边上的位置将相应的边按相同比例分割（图3）。这可以通过取线性组合来实现

$$\mathbf{A}_t = (1-t)\mathbf{B} + t\mathbf{C}, \quad \mathbf{B}_t = (1-t)\mathbf{C} + t\mathbf{A}, \quad \mathbf{C}_t = (1-t)\mathbf{A} + t\mathbf{B}.$$

这一构造可用 $\mathbf{\Psi}$-三角形族表述如下：

定义10。 等分族 $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}}$ 定义为

$$\mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}} \colon t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \\ t \end{pmatrix}. \tag{10}$$

我们不必选择点 $\mathbf{A}'_t$，$\mathbf{B}'_t$和 $\mathbf{C}'_t$ 来确定作为新三角形的等分族，而是可以选择 $\mathbf{A}_t$、$\mathbf{B}_t$和 $\mathbf{C}_t$ 分别作为直线 $\ell_{\mathbf{AA}'_t}$、$\ell_{\mathbf{BB}'_t}$和$\ell_{\mathbf{CC}'_t}$的两两交点，见图 3。由此可确定另一个 $\mathbf{\Psi}$-三角形族，即*nedian* 族 $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{N}}$，它可由初始三角形导出，如下一个引理所述。

定义与引理11。 nedian族 $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{N}}$ 定义为

$$\mathbf{\Phi}_{\mathrm{N}} \colon t \mapsto \begin{pmatrix} (1-t)t \\ t^2 \\ (1-t)^2 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

以下命题汇集了 aliquot 和 nedian 族的基本几何性质，这些性质均可直接由定义推出，并见图 4。

命题 4。 设 $\Delta = (\mathbf{A}、\mathbf{B}、\mathbf{C})$ 为 $\triangle$ 中的一个三角形，$\mathbf{X}_2$ 为其重心。

(i) 三角形的 *aliquot* 族和 *nedian* 族均为插值的。具体而言，

$$\Delta_0^{\mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}}} = (\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{A}), \quad \Delta_1^{\mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}}} = (\mathbf{C},\mathbf{A},\mathbf{B}), \quad \Delta_0^{\mathbf{\Phi}_{\mathrm{N}}} = (\mathbf{C},\mathbf{A},\mathbf{B}), \quad \textit{and} \quad \Delta_1^{\mathbf{\Phi}_{\mathrm{N}}} = (\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}).$$

(ii) $\Delta_{1/2}^{\mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}}}$ 与原三角形的关系是：先以$\mathbf{X}_2$ 为中心按 $1/2$ 缩放，再经过$\mathbf{X}_2$点反演。*(iii)* 三角形$\Delta_{1/3}^{\mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}}}$ 和$\Delta_{2/3}^{\mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}}}$ 之间通过$\mathbf{X}_2$点反演相互对应。*(iv)* 三角形 $\Delta_{1/2}^{\mathbf{\Phi}_{\mathrm{N}}}$ 退化为$\mathbf{X}_2$。

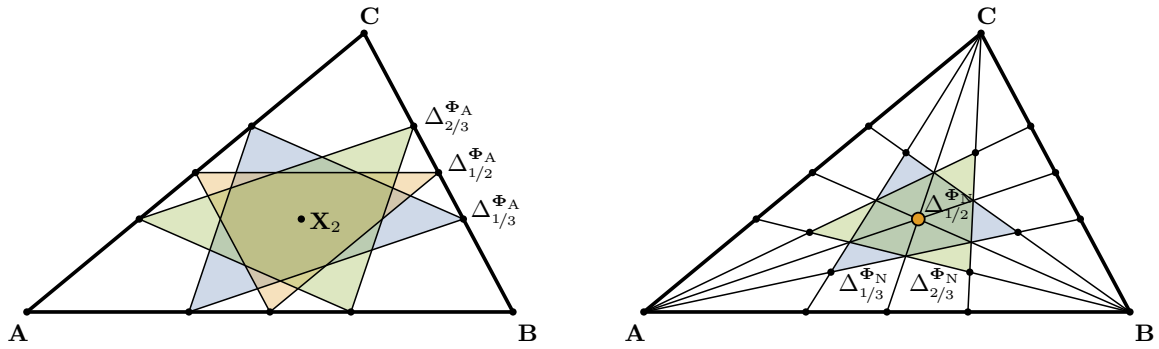


FIGURE 4. 引理中讨论的等分族和三等分线三角形族性质的图示4。

除了这些结果，我们还展示了迄今为止引入的 $\mathbf{\Psi}$-三角形族与其逆之间的联系。尽管这些观察对下一节所发展的理论没有直接影响，但我们仍认为它们值得关注。

引理 9. $\mathbf{\Psi}$-三角形族 $\mathbf{\Phi}_S$、$\mathbf{\Phi}_A$ 和 $\mathbf{\Phi}_N$ 与它们的逆的关系如下 *s:*

- 对于 $t \neq 0$，式 (8) 中的缩放三角形族的逆是按 $\frac{1}{t}$ 缩放的，

$$\mathbf{\Phi}_S^{-1}(t) = \mathbf{\Phi}_S\left(\frac{1}{t}\right).$$

- 对于 $t \neq 1/2$，式 (10) 中的等分族的逆属于 *nedian* 族，

$$\mathbf{\Phi}_A^{-1}(t) = \mathbf{\Phi}_N\left(-\frac{t}{1-2t}\right).$$

- 对于 $t \neq 1/2$，方程 (11) 中 *nedian*族的逆属于等分族，

$$\mathbf{\Phi}_N^{-1}(t) = \mathbf{\Phi}_A\left(-\frac{t}{1-2t}\right).$$

最后，我们注意到，通过连接等分族和 nedian族，可以得到大量非平凡的 $\mathbf{\Psi}$-族示例。

3.3. 将三角形族与等分族联系起来。 最后，我们展示哪些 $\mathbf{\Psi}$-三角形族可以通过适当的缩放和重新参数化与等分族建立联系。这一观察将在下一节的多个部分中发挥重要作用。在继续之前，我们先引入以下 $\mathbf{\Psi}$-三角形族子集：

定义12。 给定一个 $\mathbf{\Psi}$-三角形族，定义

$$\delta_{\mathbf{\Psi}}(t) = 2\Psi_1(t) - \Psi_2(t) - \Psi_3(t) \in \mathbb{R}.$$

如果对于所有 $t \in \mathbb{R}$，条件 $\delta_{\mathbf{\Psi}}(t) = 0$ 蕴含$\Psi_1(t) = \Psi_2(t) = \Psi_3(t)$，则称 $\mathbf{\Psi}$-三角形族为可分解的。

从几何上看，可分解的 $\mathbf{\Psi}$-三角形族不包含顶点 $\Delta_t^{\mathbf{\Psi}}$按以下方式排列的三角形（见图5）。对于一个三角形 $\Delta \in \triangle$，设 $\ell_{\mathbf{AB}}$、$\ell_{\mathbf{BC}}$ 和 $\ell_{\mathbf{CA}}$ 分别表示经过重心 X_2 且平行于 AB、BC 和 CA 的三条直线。若对所有 $t \in \mathbb{R}$，$A_t^{\mathbf{\Psi}}$、$B_t^{\mathbf{\Psi}}$、$C_t^{\mathbf{\Psi}}$分别位于直线 $\ell_{\mathbf{BC}}$、$\ell_{\mathbf{CA}}$ 和 $\ell_{\mathbf{AB}}$ 上时，都有 $A_t^{\mathbf{\Psi}} = B_t^{\mathbf{\Psi}} = C_t^{\mathbf{\Psi}} = X_2$，则称该三角形族为可分解的。

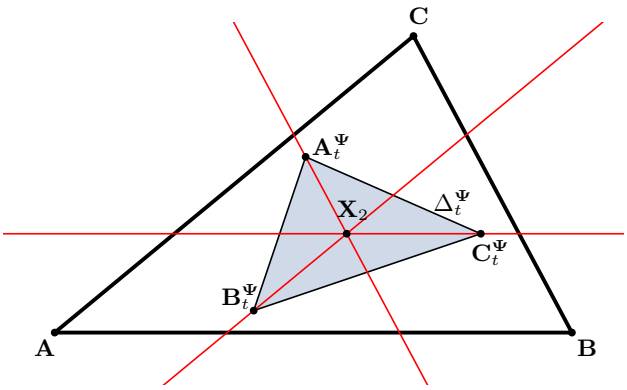


FIGURE 5. 不可分解三角形族中的一个三角形示意图 $\mathbf{\Psi}$.

通过直接计算可以验证，等分族 $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}}$ 和 nedian族 $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{N}}$是可分解族的非平凡例子。另一方面，一个不可分解族的例子是

$$\mathbf{\Psi}\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ 0 \end{pmatrix},$$

因为 $\delta_{\mathbf{\Psi}}(2) = 0$，但 $\mathbf{\Psi}(2) = (-1,\ 2,\ 0)$。

下一个引理通过证明该类中的每个三角形族都可以表示为若干更简单且广为人知的变换的复合，阐明了“可分解的”这一术语，并使其底层结构显而易见。

引理10。 一个可分解的 $\mathbf{\Psi}$-三角形族允许作如下分解

$$\mathbf{\Psi}(t) = \mathbf{\Phi}_{\mathrm{S}}(\sigma(t)) \circ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}}(\tau(t)).$$

其中

$$\sigma(t) = -\frac{2\Psi_1(t) - \Psi_2(t) - \Psi_3(t)}{\Psi_1(t) + \Psi_2(t) + \Psi_3(t)} \quad and \quad \tau(t) = \frac{\Psi_1(t) - \Psi_3(t)}{2\Psi_1(t) - \Psi_2(t) - \Psi_3(t)}. \tag{12}$$

若 $\Psi_1(t) = \Psi_2(t) = \Psi_3(t)$，则 $\sigma(t) = 0$ 有定义，而 $\tau(t)$ 无定义。

证明。 为得到 $\sigma(t)$ 和 $\tau(t)$ 的约束，我们比较 $\mathbf{\Psi}(t)$ 和$\mathbf{\Phi}_{\mathrm{S}}(\sigma(t)) \circ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}}(\tau(t))$ 的规范化形式。具体而言，使用方程（9）中的表达式的规范化版本（或直接使用方程（29）），可得

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_1(t)}{\Psi_1(t) + \Psi_2(t) + \Psi_3(t)} &= \frac{1}{3}\left(1 - \sigma(t)\right) \\ \frac{\Psi_2(t)}{\Psi_1(t) + \Psi_2(t) + \Psi_3(t)} &= \frac{1}{3}\left(1 + \sigma(t)\left(2 - 3\tau(t)\right)\right) \\ \frac{\Psi_3(t)}{\Psi_1(t) + \Psi_2(t) + \Psi_3(t)} &= \frac{1}{3}\left(1 - \sigma(t)\left(1 - 3\tau(t)\right)\right). \end{aligned} \tag{13}$$

将第一个方程解出 $\sigma(t)$，即可得到所述的 $\sigma(t)$ 表达式。将 $\sigma(t)$ 代入第二个和第三个方程后，化简得到相同的表达式，即:

$$(2\Psi_1(t) - \Psi_2(t) - \Psi_3(t))\tau(t) = \Psi_1(t) - \Psi_3(t).$$

注意，如果 $\Psi_1(t) = \Psi_2(t) = \Psi_3(t)$，那么 $\sigma(t) = 0$，且 $\tau(t)$ 未定义。否则，由于 $\mathbf{\Psi}$ 是可分解的，我们有 $2\Psi_1(t) - \Psi_2(t) - \Psi_3(t) \neq 0$，并得到 $\tau(t)$ 的所述表达式。□

推论 1. 对于所有 $t \in \mathbb{R}$，我们有 $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{N}}(t) = \mathbf{\Phi}_{\mathrm{S}}(\sigma(t)) \circ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}}(\tau(t))$，其中

$$\tau(t) = \frac{1-t}{1-2t} \quad \textit{and} \quad \sigma(t) = \frac{(1-2t)^2}{1-t+t^2}. \tag{14}$$

4. Triangle curves

做好这些准备后，我们现在来关注作为 $\mathbf{\Psi}$-三角形族中某个三角形中心轨迹的曲线:

定义13. 我们考虑由 $t \mapsto \mathbf{X}_{\psi}^{\mathbf{\Psi}}(t)$ 三角形族中的三角形中心$\mathbf{X}\psi$ 所描绘的曲线。我们将这些曲线称为三角形曲线。

备注3. 与三角形中心函数的情形一样，我们默认三角形族是连续的，通常会生成连续曲线，但这并非必要条件。

备注4. 由于 $\mathbf{\Psi}$-等边三角形族由等边三角形构成（见引理7），且可追踪三角形中心与重心重合（见第2.2.2节），因此以下讨论中我们排除等边三角形。

4.1. 三角形曲线的性质。

给定一个三角形中心和一个三角形族，我们区分由此得到的三角形曲线的局部性质和整体性质。局部性质关注特定构形和选定的参数值，例如三角形曲线经过哪些三角形中心。另一方面，整体性质分析三角形曲线的整体几何形态。

对于某些三角形族，确定由此得到的三角形曲线相对直接。例如，对于式（ $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{S}}$ 8）中的缩放三角形族，曲线 $\mathbf{X}_{\psi}^{\mathbf{\Phi}_{\mathrm{S}}}(t)$ 参数化了连接 $\mathbf{X}\psi$ 与 $\mathbf{X}_2$的直线。虽然有些三角形曲线在视觉上相似，但它们通常取决于底层三角形的形状，见图 6a。

4.1.1. 局部性质。 在接下来的章节中，我们介绍三角形曲线的局部特征，即具体来说，对应于特定参数值的性质，首先讨论一个可直接由其定义得出的性质:

命题 5. 若 $\Delta_t^{\mathbf{\Psi}} = \Delta$，则 $\mathbf{X}_{\psi}^{\mathbf{\Psi}}(t) = \mathbf{X}\psi$。

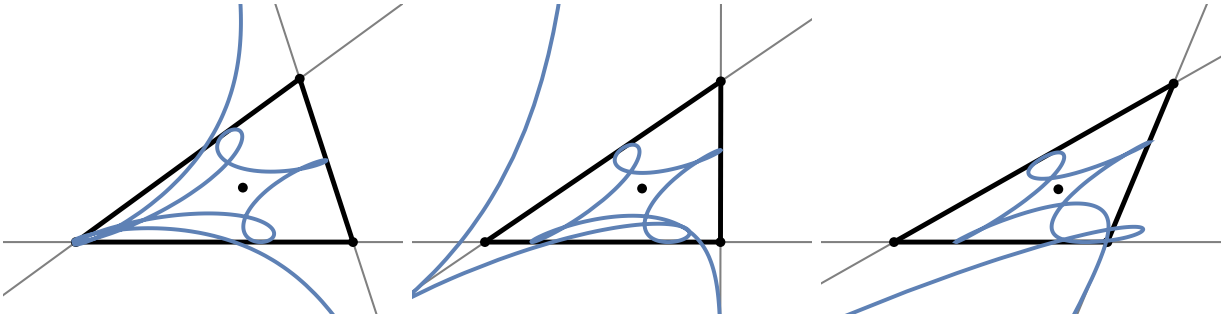
不过，一般而言，局部性质取决于三角形族或三角形中心。以下引理概述了由等分三角形族和 nedian 三角形族的相应性质所导出的三角形曲线特征，如命题4中所述。

命题 6. 设 $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}}$ 表示方程 (10)中描述的等分三角形族， $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{N}}$ 表示方程 (11)中的 *nedian* 三角形族，并设 $\psi \in \mathcal{T}$ 为一个三角形中心函数。

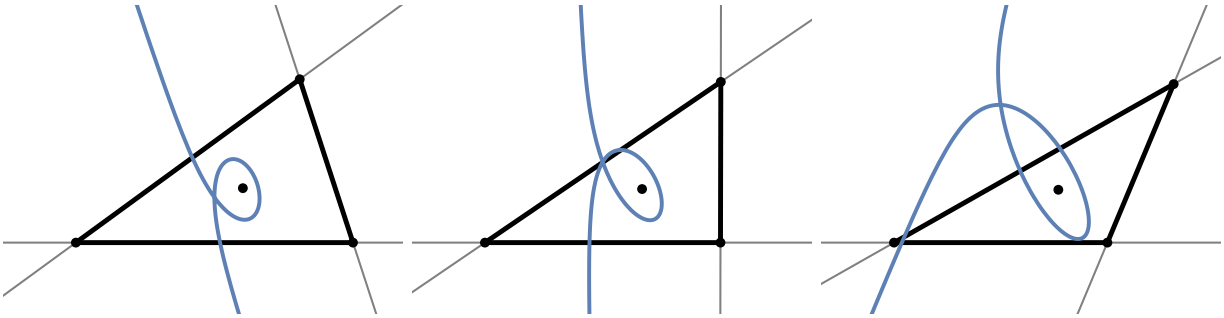
(i) $X\psi = X_{\psi}^{\mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}}}(0) = X_{\psi}^{\mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}}}(1) = X_{\psi}^{\mathbf{\Phi}_{\mathrm{N}}}(0) = X_{\psi}^{\mathbf{\Phi}_{\mathrm{N}}}(1)$。*(ii)* $X_{\psi}^{\mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}}}(1/2)$ 是 X_2 与 $X_{\psi}^{\mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}}}(0)$ 的中点，并经过 X_2 反演。*(iii)* $X_{\psi}^{\mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}}}(1/3)$ 和 $X_{\psi}^{\mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}}}(2/3)$ 关于 X_2 反演互为对应。*(iv)* $X_{\psi}^{\mathbf{\Phi}_{\mathrm{N}}}(1/2) = X_2$。

4.1.2. 半不变三角形曲线。 接下来，我们将探讨三角形曲线全局性质研究中的两个特征，首先介绍半不变性，见图 6b。

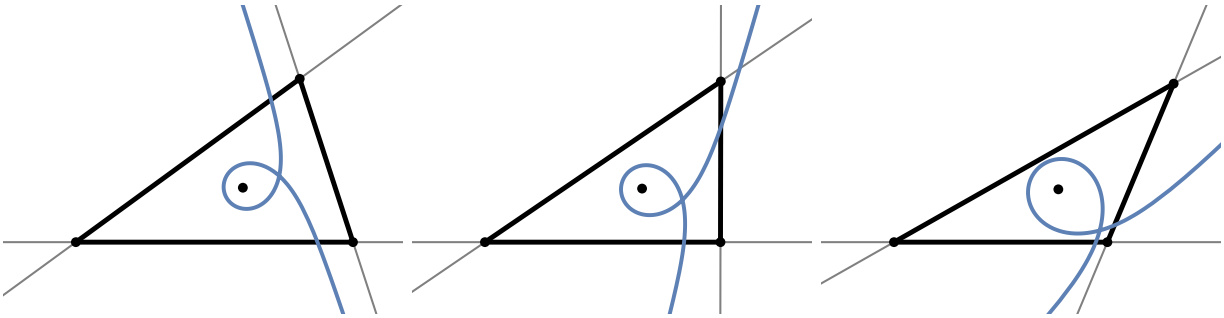
定义 14. 如果对于所有三角形 $\Delta \in \triangle$，曲线 $t \mapsto \mathbf{X}_{\psi}^{\mathbf{\Psi}}(t)$ 彼此仅相差一个仿射变换，我们就称所得三角形曲线为半不变，并称相应的三角形中心$\mathbf{X}\psi$ 为相对于 $\mathbf{\Psi}$ 的半不变曲线生成中心。



(A) 一般三角形中心的轨迹（$\mathbf{X}_{59}$）。



(B) 半不变曲线生成中心的轨迹（$\mathbf{X}_{3}$）。



(C) 不变三角形曲线生成中心的轨迹（$\mathbf{X}_{13}$）。

FIGURE 6. $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}}$ 三角形族中不同三角形的三角形曲线示意图。位于中心的点表示三角形的质心。

请注意，这是一个非平凡的要求。对于大多数三角形中心，中心与三角形之间的联系是高阶的（取决于三角形的边长），而且三角形中心的位置通常不会在仿射变换下保持不变。尽管起初看来非平凡曲线的存在可能有些违反直觉，第 4.2 节介绍了四个二参数族的三角形中心，它们通过仿射变换与两条经典代数曲线相关联。

下一个命题强调了引理7 的一个推论：若存在非平凡的半不变曲线生成中心$\mathbf{X}\psi$（相对于三角形族 $\mathbf{\Psi}$），则存在相对于同一族的半不变曲线生成中心的单参数族。等价地，这也意味着存在三角形族的单参数族$\mathbf{\Psi}_\sigma(t)$，使得$\mathbf{X}\psi$ 成为半不变曲线生成中心。

命题 7. 对于 $\psi \in \mathcal{T}$，设 $\mathbf{X}\psi$ 是关于族 $\mathbf{\Psi}(t)$ 的半不变曲线生成中心，并设 ψ_σ 对应于 $\mathbf{X}\psi$ 与

重心 $\mathbf{X}_2$, 的如下常仿射组合，
即，

$$\psi_\sigma(a,b,c) = (1-\sigma)\frac{\psi(a,b,c)}{\Sigma_\psi(a,b,c)} + \sigma\frac{\phi_2(a,b,c)}{\Sigma_{\phi_2}(a,b,c)}.$$

对于 $\sigma \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$。

- 若 $\Sigma_{\psi_\sigma} \neq 0$，则与 ψ_σ 对应的三角形中心是半不变曲线生成中心，其中

$$\mathbf{X}^{\mathbf{\Psi}}_{\psi_\sigma}(t) = (1-\sigma)\mathbf{X}^{\mathbf{\Psi}}_{\psi}(t) + \sigma\mathbf{X}_2. \tag{15}$$

- 等价地，$\mathbf{X}_\psi$ 是关于三角形族$\mathbf{\Psi}_\sigma = \mathbf{\Phi}_{\mathrm{S}}(\sigma) \circ \mathbf{\Psi}$的半不变曲线生成三角形中心函数，其中 $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{S}}(\sigma)$ 表示相对于$\mathbf{X}_2$ 按标量因子 $\sigma \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ 进行缩放，如方程(8)所述。

所得的半不变三角形曲线单参数族满足关系式

$$\mathbf{X}^{\mathbf{\Psi}}_{\psi_\sigma}(t) = \mathbf{X}^{\mathbf{\Psi}^\sigma}_{\psi}(t).$$

此外，由引理*6* 可知，若$\mathbf{X}_\psi$ 与$\mathbf{X}_2$，本质不同，则三角形中心$\mathbf{X}_{\psi_\sigma}$ 与$\mathbf{X}_\psi$ 本质不同；并且$\mathbf{X}_2$，且对于$\sigma \neq \sigma$，$\mathbf{X}_{\psi_\sigma}$ 与$\mathbf{X}_{\psi_\sigma}$本质不同。

请注意，将两个归一化三角形中心函数组合起来至关重要，以确保方程（15）中线性组合的系数不依赖于三角形的形状（这与方程（6）不同）。在下一小节中，我们利用命题7 通过增加一个参数来扩展半不变三角形中心族。为此，我们定义：

定义 15. 给定一个三角形中心函数族Ω，我们将其缩放族 定义为

$$\Omega_\sigma = \{\psi_\sigma \mid \psi \in \Omega, \sigma \in \mathbb{R}\}. \tag{16}$$

上述命题7表明，一个中心相对于非平凡三角形族的半不变性会自动扩展到三角形族的单参数族。在可分解的情形下，这一观察可以进一步加强：

引理 11. 若$\mathbf{X}_\psi$ 相对于三角形族 $\mathbf{\Psi}$是半不变的，则对于任意标量值函数 $\sigma(t)$ 与 $\tau(t)$，它相对于 $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{S}}(\sigma(t)) \circ \mathbf{\Psi}(\tau(t))$ 仍保持半不变。

证明。 若$\mathbf{X}_\psi$ 是相对于 $\mathbf{\Psi}(t)$的半不变曲线生成中心，则相应曲线允许如下形式的参数化

$$\mathbf{X}^{\mathbf{\Psi}}_{\psi}(t) = \mathbf{X}_2 + l_x(t)\mathbf{V}_x + l_y(t)\mathbf{V}_y,$$

其中，两个向量 $\mathbf{V}_x$ 和 $\mathbf{V}_y$ 对应于未剪切曲线的剪切坐标轴（$l_x(t)$ $l_y(t)$），并取决于三角形的构形。

改变 $\mathbf{\Psi}$ 的参数化会对三角形中心曲线产生如下影响

$$\mathbf{X}^{\mathbf{\Psi}(\tau)}_{\psi}(t) = \mathbf{X}_2 + l_x(\tau(t))\mathbf{V}_x + l_y(\tau(t))\mathbf{V}_y.$$

由于这条曲线仍对应于一条不依赖于三角形构形的未剪切曲线（$l_x(\tau(t))$ $l_y(\tau(t))$），三角形中心 $\mathbf{X}_\psi$ 相对于 $\mathbf{\Psi}(\tau(t))$ 仍是半不变的。

将三角形族与缩放因子为 $\sigma(t)$ 的缩放族串接，会使三角形曲线变为

$$\mathbf{X}^{\mathbf{\Phi}_{\mathrm{S}}(\sigma)\circ\mathbf{\Psi}(\tau)}_{\psi}(t) = \mathbf{X}_2 + \sigma(t)\left(l_x(\tau(t))\mathbf{V}_x + l_y(\tau(t))\mathbf{V}_y\right).$$

这条曲线对应于未剪切曲线 $\sigma(t)$（$l_x(\tau(t))$ $l_y(\tau(t))$），因此三角形中心 $\mathbf{X}_\psi$ 相对于 $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{S}}(\sigma(t)) \circ \mathbf{\Psi}(\tau(t))$ 是半不变的。□

请注意，对于一般半不变量曲线生成中心而言，这条引理大大扩展了该中心保持半不变性质所适用的三角形族范围。以下推论指出了一个可由引理直接得出的特殊情形10。

推论 2. 若$\mathbf{X}_\psi$ 是相对于等分三角形族 $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}}$的半不变曲线生成中心，则它也相对于所有可分解的三角形族（包括 *nedian*族 $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{N}}$）保持半不变。

4.1.3. 不变三角形曲线。 半不变三角形曲线中一个特别引人入胜的特例，是那些不会发生剪切的曲线，见图 6c。

定义 16。 对于所有三角形 $\Delta \in \triangle$，若曲线 $\mathbf{X}_\psi^{\mathbf{\Psi}}(t)$ 之间仅相差平移、旋转、缩放或反射，则称这些三角形曲线为不变曲线，并称相应的三角形中心 $\mathbf{X}_\psi$ 相对于 $\mathbf{\Psi}$ 是一个不变曲线生成中心 。

注 5。 由于 $\mathbf{\Psi}$三角形族保持重心不变（引理 7），所有曲线 $t \mapsto \mathbf{X}_\psi^{\mathbf{\Psi}}(t)$ 自然应在平移后进行比较，使得 $\mathbf{X}_2$ 重合。

不变曲线生成中心的存在或许更加令人惊讶；我们特别指出 Mundilova 的积极成果 [10]，，她证明了 $\mathbf{X}_{13}$ 和 $\mathbf{X}_{15}$ 是相对于等分三角形族的不变曲线生成中心。在第4.2节中，我们将扩展这些结果，并给出四个单参数三角形中心族，它们是相对于可分解三角形族的不变曲线生成中心。

命题7 和引理11中强调的半不变曲线生成中心的性质，可以推广到不变中心：

命题 8. 若Ω_{inv} 是一组三角形中心，它们相对于三角形族 $\mathbf{\Psi}$保持不变，则$\Omega_{\mathrm{inv},\ \sigma}$ 也是相对于 $\mathbf{\Psi}$ 的不变曲线生成中心集。

引理11证明中特殊情形的一个直接推论如下：由于不变曲线的性质，轴$\mathbf{V}_x$和$\mathbf{V}_y$ 在缩放和旋转后保持不变。

推论 3. 若$\mathbf{X}_\psi$ 是三角形族 $\mathbf{\Psi}$的不变曲线生成三角形中心，则对于任意标量值函数 $\sigma(t)$和 $\tau(t)$，它在 $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{S}}(\sigma(t)) \circ \mathbf{\Psi}(\tau(t))$下仍保持不变。

下面的引理12证明，不变性在三角形族连接后仍得以保持。

引理 12. 设$\mathbf{X}_\psi$ 是一个三角形中心，与$\mathbf{X}_2$，本质不同，且它相对于两个三角形族 $\mathbf{\Psi}_0$ 和 $\mathbf{\Psi}_1$是一个不变曲线生成中心。那么$\mathbf{X}_\psi$ 相对于 $\mathbf{\Psi}_1 \circ \mathbf{\Psi}_0$也是一个不变曲线生成中心。

证明。 首先注意，由于假设 Δ 不是等边的，且 $\mathbf{X}_2$ 与$\mathbf{X}_\psi$本质不同，我们可以建立一个局部坐标系，由$\mathbf{X}_2$ 和$\mathbf{X}_\psi$张成的轴及其旋转 $\pi/2$后的轴组成。

由于这些曲线是不变的，因此存在函数 $r_0(t)$、 $r_1(t)$、 $\theta_0(t)$ 和 $\theta_1(t)$，使得这些曲线可以在以$\mathbf{X}_2$ 为中心的局部坐标系中表示为

$$\mathbf{X}_\psi^{\mathbf{\Psi}_i}(t) = r_i(t)\,\mathbf{R}_{\theta_i(t)} \cdot (\mathbf{X}_\psi - \mathbf{X}_2) + \mathbf{X}_2$$

其中$\mathbf{R}_{\theta_i}$ 表示将向量旋转 θ_i角的矩阵。

连接 $\mathbf{\Psi}_1 \circ \mathbf{\Psi}_0$ 是通过对三角形 $\triangle_t^{\mathbf{\Psi}_0}$应用 $\mathbf{\Psi}_1$-三角形族不变曲线构造得到的。注意，在 $\triangle_t^{\mathbf{\Psi}_0}$ 中，与 ψ 对应的三角形中心是$\mathbf{X}_\psi^{\mathbf{\Psi}_0}(t)$。因此：

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_\phi^{\mathbf{\Psi}_1 \circ \mathbf{\Psi}_0}(t) &= r_1(t)\,\mathbf{R}_{\theta_1(t)} \cdot \left(\mathbf{X}_\psi^{\mathbf{\Psi}_0}(t) - \mathbf{X}_2\right) + \mathbf{X}_2 \\
&= r_1(t)\,\mathbf{R}_{\theta_1(t)} \cdot \left(r_0(t)\,\mathbf{R}_{\theta_0(t)} \cdot (\mathbf{X}_\psi - \mathbf{X}_2)\right) + \mathbf{X}_2 \\
&= \left(r_1(t)\,r_0(t)\right)\,\left(\mathbf{R}_{\theta_1(t)} \cdot \mathbf{R}_{\theta_0(t)}\right) \cdot (\mathbf{X}_\psi - \mathbf{X}_2) + \mathbf{X}_2 \\
&= \left(r_0(t)\,r_1(t)\right)\,\mathbf{R}_{\theta_0(t)+\theta_1(t)} \cdot (\mathbf{X}_\psi - \mathbf{X}_2) + \mathbf{X}_2.
\end{aligned}$$

因此，与连接 $\mathbf{\Psi}_0$ 和 $\mathbf{\Psi}_1$ 相关的$\mathbf{X}_\psi$ 对应曲线，其构造也独立于底层三角形的形状，这就完成了我们的论证。

注意，在特殊情形 $\mathbf{\Psi}_1 = \mathbf{\Phi}_{\mathrm{S}}(\sigma)$ 中，如引理 11 所讨论的，角函数$\theta_1(t) = 0$ 且 $r_1(t) = \sigma(t)$。□

一旦找到一个不变曲线生成中心 $\mathbf{X}_\psi$（相对于非平凡三角形族$\mathbf{\Psi}$，既非缩放也非恒等映射），除推论 3 外，我们还可以通过 n 重连接 $(\mathbf{\Psi})^n$ 作用于 $\mathbf{\Psi}$，对任意 $n \in \mathbb{N}$ 用归纳法找到不变三角形族。

注意，对于本质上不同于 $\mathbf{X}_2$，的三角形中心，引理 12 适用于可表示为三角形族之连接、但其本身并不可分解的三角形族；因此，推论3并不适用。此类族的一个例子由等分族 $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}}$ 连同三角形族

$$\mathbf{\Psi}_0 \colon t \mapsto \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \\ 1-t+3t^2 \end{pmatrix}.$$

该连接

$$\mathbf{\Psi}_1 = \mathbf{\Psi}_0 \circ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}} \colon t \mapsto \begin{pmatrix} 1+t^2 \\ 1-t+4t^2-3t^3 \\ 1+t-2t^2+3t^3 \end{pmatrix}$$

是一个不可分解的三角形族，因为 $\delta_{\mathbf{\Psi}_2}(t) = 0$ 对 $t \in \mathbb{R}$。

4.2. 与三等分曲线相关的半不变曲线生成中心。 做好这些准备后，我们现在重点介绍四族三角形中心；对于可分解的 $\mathbf{\Psi}$族而言，它们是半不变曲线生成中心。为此，我们定义

$$\begin{aligned} \psi_{\Gamma;\lambda_0:\lambda_1}(a,b,c) &\coloneqq \sqrt{3}a(-a^2+b^2+c^2)\lambda_0 + 4a\,\mathrm{area}(\Delta)\lambda_1 \\ \psi_{\Xi;\lambda_0:\lambda_1}(a,b,c) &\coloneqq -a(-a^2+b^2+c^2)\lambda_0 + a(a^2+b^2+c^2)\lambda_1, \end{aligned}$$

并命名

$$\begin{aligned} \Gamma &\coloneqq \{\psi_{\Gamma;\lambda_0:\lambda_1}(a,b,c) \mid \lambda_0,\lambda_1 \in \mathbb{R}\}, & \Gamma^{-1} &\coloneqq \left\{\psi^{-1}_{\Gamma;\lambda_0:\lambda_1}(a,b,c) \mid \lambda_0,\lambda_1 \in \mathbb{R}\right\}, \\ \Xi &\coloneqq \{\psi_{\Xi;\lambda_0:\lambda_1}(a,b,c) \mid \lambda_0,\lambda_1 \in \mathbb{R}\}, & \Xi^{-1} &\coloneqq \left\{\psi^{-1}_{\Xi;\lambda_0:\lambda_1}(a,b,c) \mid \lambda_0,\lambda_1 \in \mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

这两族三角形中心 Γ 和 Ξ 是[3]布罗卡尔轴的特殊常仿射参数化；布罗卡尔轴是与三角形中心共线的三角形集合$\mathbf{X}_3$ 和$\mathbf{X}_6$，（见图7a）。它们的等角共轭集合 Γ^{-1} 和 Ξ^{-1} 是位于基珀特双曲线上的单参数三角形中心族。

基于 Mundilova [10]，的研究，我们通过这些三角形中心与特殊代数曲线之间的联系，将其识别为半不变曲线生成中心。特别地，麦克劳林三等分线是由下式定义的平面代数曲线

$$2x(x^2+y^2) = k(3x^2-y^2).$$

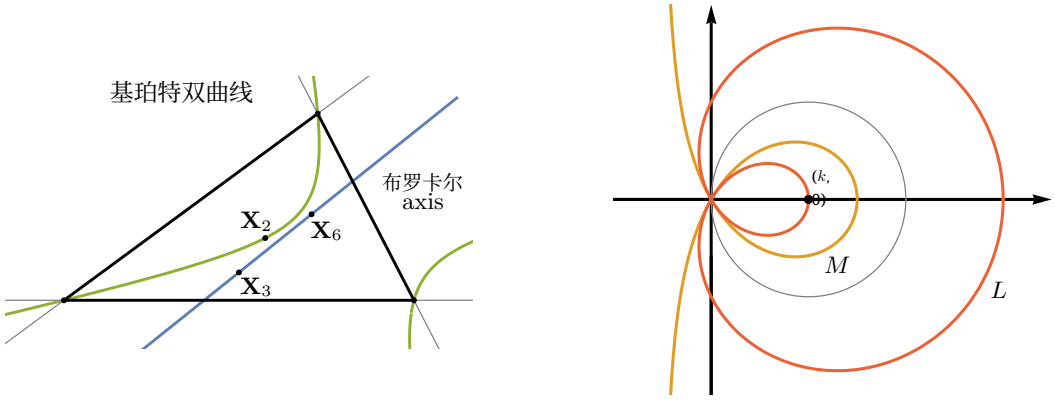
以 (k,0) 为中心点、半径为 k 的圆进行反演后，该曲线变换为利马松三等分曲线，其定义如下：

$$k^2(x^2+y^2) = (x^2+y^2-2kx)^2, \tag{17}$$

见图 7b。

做好这些准备工作后，我们可以将主要结果表述如下：

[3]It follows from Example 6 that $\Gamma = \{\mathbf{X}_3,\mathbf{X}_6\} \cup \mathrm{span}_{\mathrm{const}}(\mathbf{X}_3,\mathbf{X}_6,\mathbf{X}_{15})$ and $\Xi = \{\mathbf{X}_3,\mathbf{X}_6\} \cup \mathrm{span}_{\mathrm{const}}(\mathbf{X}_3,\mathbf{X}_6,\mathbf{X}_{32})$. In particular, we have that $\{\mathbf{X}_{15},\mathbf{X}_{16},\mathbf{X}_{61},\mathbf{X}_{62}\} \subset \Gamma$ and $\{\mathbf{X}_{32},\mathbf{X}_{39}\} \subset \Xi$.



(A) 布罗卡尔轴和基珀特双曲线。 (B) 麦克劳林三等分线 M 和利马,康三等分线 L。

FIGURE 7. 定理1中所讨论概念的图示。

定理1。 设 $\mathbf{\Psi}$ 是一个可分解三角形族。那么，这些三角形族

$$\Omega := \Gamma \cup \Gamma^{-1} \cup \Xi \cup \Xi^{-1}$$

are 半不变量三角形曲线生成中心。特别地，我们有：

- 若 $\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}}$，则三角形曲线为剪切麦克劳林三等分线。
- 若 $\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Phi}_{\mathrm{N}}$，则三角形曲线为剪切*Lima,con*三等分曲线。

此外，在这些三角形中心函数中，只有三角形中心 s

$$\Omega_{\mathrm{inv}} := \{\mathbf{X}_{13}, \mathbf{X}_{14}, \mathbf{X}_{15}, \mathbf{X}_{16}\},$$

是不变的。

证明。 本定理的证明建立在 Mundilova [10], 的工作之上。她通过在麦克劳林三等分线与相对于等分三角形族所描绘的三角形曲线之间建立参数关系，并利用 Mathematica 进行代数化简，证明了三角形中心 $\mathbf{X}_{13}$ 和 $\mathbf{X}_{15}$ 生成不变曲线。

由于该证明适用于 Ω 中的所有三角形中心，以下我们用 ψ 表示两个三角形中心函数中的任意一个：$\psi_{\Gamma;\lambda_0:\,\lambda_1}$，$\psi_{\Xi;\lambda_0:\,\lambda_1}$，$\psi_{\Gamma}^{-1}$ ；$\lambda_0:\,\lambda_1$，或 ψ_{Ξ}^{-1} ；$\lambda_0:\,\lambda_1$。

我们的证明分为五个步骤：

- 步骤 *1*（准备工作）：不失一般性，假设给定的三角形（a， b， c）的位置满足其边 c 与 x轴重合，即

$$\mathbf{A} = (0,0), \quad \mathbf{B} = (c,0), \quad \text{and} \quad \mathbf{C} = \left(\frac{1}{2c}\left(-a^2+b^2+c^2\right), \frac{2}{c}\operatorname{area}(\Delta)\right). \tag{18}$$

我们确定与三角形中心函数 ψ 及等分三角形族对应的三角形曲线的参数化 $\mathbf{X}_{\psi}^{\mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}}}(t)$。

- 步骤 *2*（检验曲线）：由于三角形曲线 $\mathbf{X}^{\mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}}\psi}(t)$ 的代数表达式不易化简，我们采用 Mundilova [10], 的方法，并使用麦克劳林三等分线的参数化

$$\mathbf{M}(t) = (M_x(t), M_y(t)) = \frac{3k}{2(1-3(1-t)t)}\left((1-t)t, \sqrt{3}(1-t)t(1-2t)\right) \tag{19}$$

以便在代数上与之比较。

具体而言，我们根据命题 $\mathbf{T}\psi(t$6 中讨论的三角形曲线的局部性质，定义剪切三等分线 6，它是通过映射点 $\mathbf{M}(0) = (0,$ 0)、中心

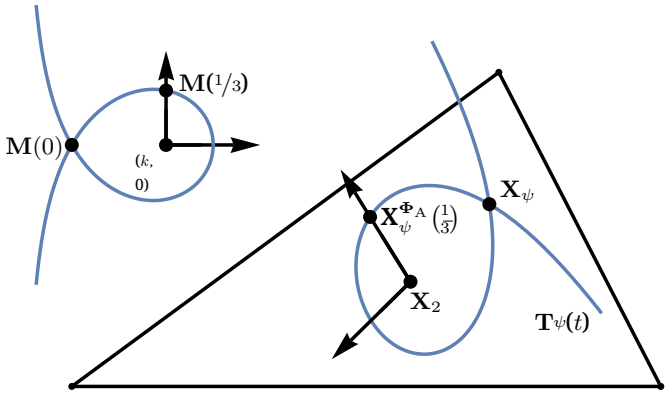


FIGURE 8. 定理证明之主要思想图示1。

$(k,\ 0)$，以及 $\mathbf{M}(1/3) = (k,\ k/\sqrt{3})$ 分别映射到 $\mathbf{X}_\psi = \mathbf{X}_\psi(0)$、重心 $\mathbf{X}_2$, 和 $\mathbf{X}_\psi(1/3)$（见图 8）。为此，我们表示

$$\mathbf{T}_\psi(t) = \mathbf{X}_\psi + l_x(t)\mathbf{V}_{\psi,x} + l_y(t)\mathbf{V}_{\psi,y}, \tag{20}$$

其中$\mathbf{V}_{\psi,\ x}$ 和$\mathbf{V}_{\psi,\ y}$ 是对应于未剪切三等分曲线的 x 轴和 y轴的两个向量，即

$$\mathbf{V}_{\psi,x} = \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_\psi \quad \text{and} \quad \mathbf{V}_{\psi,y} = \mathbf{X}_\psi^{\mathbf{\Phi}_\mathrm{A}}\left(\frac{1}{3}\right) - \mathbf{X}_2,$$

而 $l_x(t)$和 $l_y(t)$是两个标量值函数，用于描述剪切三等分曲线的形状和尺度，

$$l_x(t) = M_x(t), \quad \text{and} \quad l_y(t) = \frac{M_y(t)}{M_y(1/3)} = \sqrt{3}\, M_y(t). \tag{21}$$

- 步骤 *3*（代数验证）：我们使用先进的计算机代数系统*Mathematica*来证明这四个方程

$$\mathbf{X}_{\psi_\Gamma}^{\mathbf{\Phi}_\mathrm{A}}(t) == \mathbf{T}_{\psi_\Gamma}^{\mathbf{\Phi}_\mathrm{A}}(t), \quad \mathbf{X}_{\psi_\Xi}^{\mathbf{\Phi}_\mathrm{A}}(t) == \mathbf{T}_{\psi_\Xi}^{\mathbf{\Phi}_\mathrm{A}}(t), \quad \mathbf{X}_{1/\psi_\Gamma}^{\mathbf{\Phi}_\mathrm{A}}(t) == \mathbf{T}_{\psi_\Gamma^{-1}}^{\mathbf{\Phi}_\mathrm{A}}(t), \quad \text{and} \quad \mathbf{X}_{1/\psi_\Xi}^{\mathbf{\Phi}_\mathrm{A}}(t) == \mathbf{T}_{\psi_\Xi^{-1}}^{\mathbf{\Phi}_\mathrm{A}}(t)$$

化简 为真。具体而言，我们在假设*FullSimplify* 的条件下使用该命令 s

$$\{a > 0, b > 0, c > 0, a + b > c, b + c > a, c + a > 0, \text{Element}[t, \text{Reals}]\}.$$

随附的笔记本证实， Γ、 Ξ、 Γ^{-1}和 Ξ^{-1} 中的三角形中心是半不变量。

- 步骤 *4*（不变曲线生成中心）：在 Ω 的所有三角形中心函数中，我们识别出那些对应于未剪切且适当缩放的麦克劳林三分角线的函数。该性质可通过寻找与三角形边长无关的标量组合 λ_0、 λ_1 得到，使得$\mathbf{V}_{\psi,\ x} \cdot \mathbf{V}_{\psi,\ y} = 0$ 以及 $|\mathbf{V}_{\psi,\ x}|^2 = 3|\mathbf{V}_{\psi,\ y}|^2$。所附 Mathematica 笔记本给出了这些计算，可总结如下：

  – 位于 Γ 的三角形中心：对于 λ_0： $\lambda_1 \in \{1:\ 1,\ -1:\ 1\}$，两个条件均成立。这两个解分别对应三角形中心 $\mathbf{X}_{15}$ 和 $\mathbf{X}_{16}$,。 – 位于 Γ^{-1} 的三角形中心：对于组合 $\lambda_0 : \lambda_1 \in \{0:\ 1,\ 1:1,\ -1:\ 1\}$，两个条件均成立。这些组合分别对应三角形中心 $\mathbf{X}_6 = \mathbf{X}_2^{-1}$、 $\mathbf{X}_{13} = \mathbf{X}_{15}^{-1}$和 $\mathbf{X}_{14} = \mathbf{X}_{16}^{-1}$。

– 位于 Ξ 的三角形中心：在这种情况下，我们无法找到两个与三角形形状无关的方程解。因此，这种布罗卡尔轴的常仿射参数化不包含任何不变三角形中心。– 位于 Ξ^{-1} 的三角形中心：唯一的不变三角形中心对应于 $\lambda_0 : \lambda_1 = 0 : 1$，因此它是重心 $\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_6^{-1}$。另外两个解取决于三角形的形状。

- 步骤 *5*（结果的推广）：利用推论2，我们得出，Ω 和 Ω_{inv} 中的三角形中心相对于所有可分解三角形族分别是半不变的或不变的。

为说明 nedian 族与 Liman.con 三等分线之间所述的联系，我们使用推论 $\tau(t)$ 和 $\sigma(t)$ 中的函数来1 求得

$$\begin{aligned}\mathbf{L}(t) &= \sigma(t)\left(\mathbf{M}(\tau(t)) - (k,0)\right) + (k,0)\\ &= \frac{3k}{2(1-(1-t)t)^2}\left(t(1+t-2(2-t)t^2), \sqrt{3}(1-t)t(1-2t)\right). \end{aligned} \tag{22}$$

利用方程（17，可以轻易验证，$\mathbf{L}(t)$ 参数化了 Lima.con 三等分线。

□

注 6。所得到的麦克劳林曲线参数化（方程(19)）与 *Lima.con* 三等分线的参数化（方程(22)）并非通过圆反演相互关联。

最后，借助命题7和命题8，我们将结果推广到四个半不变三角形中心的二参数族和四个不变三角形中心的单参数族，如下所示：

推论 4. 缩放三角形中心族Ω_σ （见定义 *15*）是半不变曲线生成中心。此外，缩放三角形族$\Omega_{\text{inv},\sigma}$是不变曲线生成中心。

4.3. **生成目标曲线的三角形族**。 在定理 1中成功找出相对于可分解三角形族生成半不变曲线的三角形中心后，一个自然的问题随之而来：这个过程能否反过来？具体来说，给定一个三角形中心，如何确定一个能生成特定曲线的三角形族?

下一个定理给出了三角形族的一种显式构造，该三角形族与三角形中心 $\psi \in \Omega_\sigma$ 一起生成给定的目标曲线：

定理 2. 设$\mathbf{T}(t)$ 为一条目标曲线，其定义域为 $t \in T = \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$，并以极坐标表示为

$$\mathbf{T}(t) = r(t)\left(\cos\theta(t), \sin\theta(t)\right),$$

其中有两个标量值函数 $r(t)$ 和 $\theta(t)$，且对于所有 $t \in T$，均有 $r(t) \neq 0$ 。

考虑三角形族 $t \mapsto \mathbf{\Psi}(t) = (\mathbf{\Psi}_1(t)\ \mathbf{\Psi}_2(t)\ \mathbf{\Psi}_3(t))$，其中

$$\begin{aligned}\mathbf{\Psi}_1(t) &= 1 + r(t)\left(\cos\frac{\theta(t)}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\theta(t)}{3}\right),\\ \mathbf{\Psi}_2(t) &= 1 + r(t)\left(\cos\frac{\theta(t)}{3} - \sqrt{3}\sin\frac{\theta(t)}{3}\right),\\ \mathbf{\Psi}_3(t) &= 1 - 2r(t)\cos\frac{\theta(t)}{3}.\end{aligned}$$

对于三角形中心 $\psi \in \Omega_\sigma$，相关的三角形曲线 $\mathbf{X}_\psi^{\mathbf{\Psi}}(t)$ 是目标曲线 $\mathbf{T}(t)$的剪切版本。如果 $\psi \in \Omega_{\text{inv},\sigma}$，所得曲线则未经剪切。

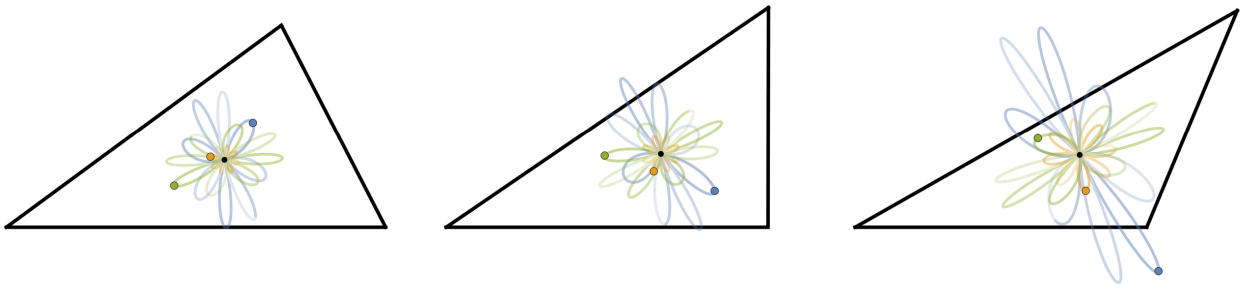


FIGURE 9. “逆向设计问题”结果的示意图：找出其轨迹为玫瑰曲线的三角形族，这些三角形族的半不变曲线生成中心$\mathbf{X}_3$（蓝色）和$\mathbf{X}_6$（绿色），以及不变曲线生成中心$\mathbf{X}_{13}$（黄色）。

证明。为了计算相应的三角形族，我们必须先确定方程（19）中给出的麦克劳林三等分线参数化与目标曲线之间的关系，其中涉及相对于中心（k,0）的重新参数化和缩放变换。具体而言，我们计算两个标量值函数 $\sigma(t)$ 和 $\tau(t)$，使得

$$\mathbf{T}(t) = \sigma(t)(\mathbf{M}(\tau(t)) - (k,0)) + (k,0).$$

由于每条经过 (k,0) 的直线通常与麦克劳林三等分线相交于三点，因此该方程有三个解。其中只需考虑一个解，例如

$$\sigma(t) = -r(t)\left(\cos\frac{\theta(t)}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\theta(t)}{3}\right) \quad \text{and} \quad \tau(t) = -\frac{1}{6}\left(3 + \frac{3 - 2\sqrt{3}\sin\frac{2\theta(t)}{3}}{-1 + 2\cos\frac{2\theta(t)}{3}}\right),$$

其中 $t \in T$。将这些表达式代入方程（13），即可得到上述公式。

最后，我们注意到 $\Psi_1(t) + \Psi_2(t) + \Psi_3(t) = 3 \neq 0$ 且 $\Psi_1(t) = \Psi_2(t) = \Psi_3(t)$ 当且仅当 $r(t) = 0$。因此，$\mathbf{\Psi}(t)$ 是一个三角形族。□

例 1. 定理 *2* 使我们能够找到三角形族，与 $\psi \in \Omega$结合后，可生成剪切玫瑰曲线，其极坐标参数化为

$$r(t) = a\cos(nt) \quad \textit{and} \quad \theta(t) = t.$$

由此得到的三角形族可简化为

$$\mathbf{\Phi}_{\mathrm{R}} \colon t \mapsto \begin{pmatrix} 1 + a\cos(nt)\left(\cos\frac{t}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{t}{3}\right) \\ 1 + a\cos(nt)\left(\cos\frac{t}{3} - \sqrt{3}\sin\frac{t}{3}\right) \\ 1 - 2a\cos(nt)\cos\frac{t}{3} \end{pmatrix}.$$

图 *9* 展示了一个例子，其中三个三角形中心描绘出目标玫瑰曲线，且 $a = 1$ 和$n = 4$。

5. CONCLUSION

受 Kimberling 的三角形中心定义启发，我们提出了一种定义三角形族的框架，即所谓的 $\mathbf{\Psi}$-三角形族，并使用函数三元组来定义。我们证明了这些三角形族具有丰富而引人入胜的结构。随后，我们研究了三角形中心沿 $\mathbf{\Psi}$-三角形族所描绘的曲线。在此过程中，我们确定了这些曲线的一般性质，并系统地寻找能够生成半不变或完全不变

曲线的三角形中心。我们希望本研究提出的思想和结果能够激发人们进一步探索三角形几何，并为未来的研究方向提供一些思路。

除了半不变性和不变性的性质之外，三角形曲线的其他方面也可能值得研究，例如由成对的三角形中心（如等角共轭）描绘出的曲线之间可能存在的关系，而不论它们是否具有（半）不变性。我们关于半不变曲线的研究建立在麦克劳林三等分线与等分三角形族之间的关系之上。至于探索相对于等分族能够生成其他（代数）三角形曲线的三角形中心，则留待未来研究。

最终，全面分类三角形中心函数及其所描绘的曲线，或许可以成为一项长期目标。因此，我们有必要发展更精深的理论方法，以获得更深入的几何学见解，并支持根据三角形中心与半不变及不变三角形曲线之间的关系对其进行分类。

Acknowledgements

我们感谢洛桑联邦理工学院几何计算实验室的现任及历任成员，尤其感谢 Mark Pauly 教授所进行的富有启发性的讨论。Klara Mundilova 获得了瑞士联邦瑞士政府卓越奖学金的资助。

References

[1] S. Abu-Saymeh与M. Hajja。具有线性截距和线性子角的三角形中心。载于Forum Geom.，第5卷，第33–36页，2005年。[2]S. Abu-Saymeh、M. Hajja与H. Stachel。与三角形相关联的另一条三次曲线。J. Geometry Graphics，11(1):15–26，2007年。[3] H. M. Cundy与C. F. Parry。与三角形相关联的若干三次曲线。J. Geom.，53: 41–66，1995年。[4] H. Dirnb¨ock与J. Schoißengeier。与三角形相关的曲线：巴拉顿曲线。J. Geom- etry Graphics，7:23–39，2003年。[5] E. Jurkin。迷向平面中三角形束的中心轨迹。Rad HAZU，Matemati˘cke znanosti，(551=26):155–169，2022年。[6] C. Kimberling。三角形中心百科全书。URL https://faculty.evansville.edu/ ck6/encyclopedia/ETC.html。[7] C. Kimberling。三角形中心与中心三角形。Utilitas Mathematica Publishing, Inc.，1998年。[8] I. Kodrnja与H. Koncul。Nedian三角形顶点的轨迹。KoG，21(21):1–6，2017年。[9] I. Kodrnja与H. Koncul。三角形族中的轨迹曲线。KoG，27(27):35–42，2023年。[10] K. Mundilova。麦克劳林三分角线作为第一等角中心与等力中心的t-仿射轨迹。载于第21届ICGG会议论文集，第136–151页。Springer，2024年。[11] Julien Narboux与David Braun。迈向三角形中心百科全书的认证版本。Math. Comput. Sci.，10:57–73，2016年。[12] B. Odehnal。三角形中心的闭合轨迹。J. Geometry Graphics，15(1):45–67，2011年。[13] J. Satterly。平面三角形的nedian线、nedian三角形与aliquot三角形。Math. Gaz.，40(332):109–113，1956年。

Appendix A. Supplemental Material for Section 2

引理 *1* 的证明。该断言直接由

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{\psi_1} &= [f(a,b,c)\,\psi_0(a,b,c) : f(b,c,a)\,\psi_0(b,c,a) : f(c,b,a)\,\psi_0(c,a,b)]\\ &= [f(a,b,c)\,\psi_1(a,b,c) : f(a,b,c)\,\psi_0(b,c,a) : f(a,b,c)\,\psi_0(c,a,b)]\\ &= [\psi_0(a,b,c) : \psi_0(b,c,a) : \psi_0(c,a,b)]\\ &= \mathbf{X}_{\psi_0}\end{aligned}$$

由于 $f(a,b,c) \neq 0$。 □

例2 （可追踪三角形中心）。 可追踪三角形中心的例子包括内心 $\mathbf{X}_1$，、重心 $\mathbf{X}_2$，、外心 $\mathbf{X}_3$，、垂心 $\mathbf{X}_4$，以及类似重心 $\mathbf{X}_6$,；对于表 *1* 中给出的三角形中心函数，相应的迹可简化为

$$\begin{aligned}&\Sigma_{\phi_1}(a,b,c) = a+b+c \neq 0 && \Sigma_{\phi_2}(a,b,c) = 3 \neq 0,\\ &\Sigma_{\phi_3}(a,b,c) = (4\,\mathrm{area}(\Delta))^2 \neq 0, && \Sigma_{\phi_6}(a,b,c) = a^2+b^2+c^2 \neq 0.\end{aligned} \tag{23}$$

三角形中心 $\mathbf{X}_{13}$，、$\mathbf{X}_{14}$，、$\mathbf{X}_{15}$，以及 $\mathbf{X}_{16}$ 也可追踪。然而，相关计算更为繁复，并在随附的 *Mathematica* 笔记本中给出。不过，我们在此指出，为计算轨迹，表 *1* 中相应的三角形中心函数可用三角形边长 a、 b和 c 借助余弦定理表示，从而得到

$$\phi_{15}(a,b,c) = \frac{1}{4bc}\left(\sqrt{3}(-a^2+b^2+c^2) + 4\,\mathrm{area}(\Delta)\right), \tag{24}$$

$$\phi_{16}(a,b,c) = \frac{1}{4bc}\left(\sqrt{3}(-a^2+b^2+c^2) - 4\,\mathrm{area}(\Delta)\right). \tag{25}$$

由于两个等力中心是等角中心的等角共轭，因此可得$\phi_{13} = \phi_{15}^{-1}$与 $\phi_{14} = \phi_{16}^{-1}$。

例 3 （不可追踪三角形中心）。 另一方面，费尔巴哈点 $\mathbf{X}_{11}$ 是不可追踪三角形中心的一个例子。其三角形中心函数列于表 *1* 中，并且在等边三角形时为零，即， $a = b = c$，这是因为其中有因子 $b-c$。因此，$\Sigma_{\phi_{11}}(a,\ a,\ a) = 0$。

一类一般的不可追踪三角形中心例子，可以通过两个不同的、次数相同的双对称齐次多项式之差得到，例如，

$$\psi(a,b,c) = a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca). \tag{26}$$

当三角形为等边三角形时，这些函数均为零，因此 $\Sigma_\psi(a,a,a) = 0$，故 ψ不可追踪[4]。

例 4 （两个本质上无区别的三角形中心）。 取$\mathbf{X}_3$ 和$\mathbf{X}_{63}$，，我们得到一对本质上无区别的三角形中心。它们对应的三角形中心函数为

$$\phi_3(a,b,c) = a(-a^2+b^2+c^2) \quad and \quad \phi_{63}(a,b,c) = -a^2+b^2+c^2.$$

为了确定三角形中心重合的三角形构型，我们要求它们相应的重心坐标相同。因此，我们考虑以下方程组。

$$\frac{a\,\phi_3(a,b,c)}{\Sigma_{\phi_3}(a,b,c)} = \frac{a\,\phi_{63}(a,b,c)}{\Sigma_{\phi_{63}}(a,b,c)}, \quad \frac{b\,\phi_3(b,c,a)}{\Sigma_{\phi_3}(a,b,c)} = \frac{b\,\phi_{63}(b,c,a)}{\Sigma_{\phi_{63}}(a,b,c)}, \quad \frac{c\,\phi_3(c,a,b)}{\Sigma_{\phi_3}(a,b,c)} = \frac{c\,\phi_{63}(c,a,b)}{\Sigma_{\phi_{63}}(a,b,c)}.$$

[4]由于方程（26）中给出的三角形中心函数是循环的，人们可能会认为它等价于内心的三角形中心函数 $\phi_1(a,b,c) = 1$。然而，因子 $f(a,b,c) = \psi(a,b,c)/\phi_1(a,b,c) = \psi(a,b,c)$ 在等边三角形时为零， $\psi(a,a,a) = 0$，因此 $f \notin \mathrm{Cyc}(\mathcal{T})$，从而 $\psi \ncong \phi_1$。

容易验证，对于 $s>0$，长度三元组

$$(s,s,s),\quad \left(\sqrt{2}s,s,s\right),\quad \left(s,\sqrt{2}s,s\right),\quad and\quad \left(s,s,\sqrt{2}s\right),$$

它们满足这三个约束，并且由于为正且满足三角形不等式，因而对应于三角形的边长。前者对应于等边三角形，其余三个则表示直角三角形中边长的三种可能赋值。在这些情形中，$\mathbf{X}_3$ 与$\mathbf{X}_{63}$ 均与斜边的中点重合。因此，这些三角形中心并非本质上不同。

证明引理 2。 要检验两个可追踪三角形中心是否本质上不同，比较它们的归一化三角形中心函数即可。对于两个三角形中心函数ψ_1 与 ψ_2，我们考虑方程组

$$\frac{\psi_1(a,b,c)}{\Sigma_{\psi_1}(a,b,c)}=\frac{\psi_2(a,b,c)}{\Sigma_{\psi_2}(a,b,c)},\quad \frac{\psi_1(b,c,a)}{\Sigma_{\psi_1}(a,b,c)}=\frac{\psi_2(b,c,a)}{\Sigma_{\psi_2}(a,b,c)},\quad \text{and}\quad \frac{\psi_1(c,a,b)}{\Sigma_{\psi_1}(a,b,c)}=\frac{\psi_2(c,a,b)}{\Sigma_{\psi_2}(a,b,c)}.$$

由于该方程组的秩为二，我们对其两个未知数，即边长 b与 c求解。

所附的$Mathematica$ 笔记本验证了所得到的唯一解要么对应于等边三角形，要么不构成三角形。□

证明引理 3。 我们证明关联中心具有所声称的形式。首先注意到

$$\begin{aligned}\Sigma_{\psi_\omega} &= a\,\psi_\omega(a,b,c)+b\,\psi_\omega(b,c,a)+c\,\psi_\omega(c,a,b)\\ &= a\,\omega_0(a,b,c)\,\psi_0(a,b,c)+b\,\omega_0(b,c,a)\,\psi_0(b,c,a)+c\,\omega_0(c,a,b)\,\psi_0(c,a,b)\\ &\quad +\ a\,\omega_1(a,b,c)\,\psi_0(a,b,c)+b\,\omega_1(b,c,a)\,\psi_0(b,c,a)+c\,\omega_1(c,a,b)\,\psi_0(c,a,b)\\ &= \omega_0\left(a\,\psi_0(a,b,c)+b\,\psi_0(b,c,a)+c\,\psi_0(c,a,b)\right)\\ &\quad +\ \omega_1\left(a\,\psi_0(a,b,c)+b\,\psi_0(b,c,a)+c\,\psi_0(c,a,b)\right)\\ &= \omega_0\Sigma_{\psi_0}+\omega_1\Sigma_{\psi_1}.\end{aligned}$$

若 $\Sigma_{\psi_\omega}\neq 0$，则根据关联三角形中心的定义，类似的计算可得

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{\psi_\omega} &= \frac{1}{\Sigma_{\psi_\omega}}\left(a\,\psi_\omega(a,b,c)\mathbf{A}+b\,\psi_\omega(b,c,a)\mathbf{B}+c\,\psi_\omega(c,a,b)\mathbf{C}\right)\\ &= \frac{1}{\Sigma_{\psi_\omega}}\left(\omega_0\Sigma_{\psi_0}\mathbf{X}_{\psi_0}+\omega_1\Sigma_{\psi_1}\mathbf{X}_{\psi_1}\right).\end{aligned}$$

这验证了方程（5）中给出的恒等式。由于系数之和为 1，共线性得证。

此外， ψ_ω 是 ψ_0 与 ψ_1 的一个循环仿射组合（见方程（4）），这意味着我们可以将 ψ_1 表示为 ψ_0 和 ψ_ω 的形式：

$$\psi_1(a,b,c)=-\frac{\omega_0(a,b,c)}{\omega_1(a,b,c)}\psi_0(a,b,c)+\frac{1}{\omega_1(a,b,c)}\psi_\omega(a,b,c).$$

注意，$\deg(\psi_\omega/\omega_1)$ =$\deg(\omega_0\psi_0/\omega_1)$，且三角形中心函数的系数仍然是循环的，并且处处非零。因此，$\psi_1\in \mathrm{span}_{\mathrm{Cyc}(\mathcal{T})}(\psi_0,\psi_1)$，这就证明了该结论。□

引理的证明 4。 为了证明循环仿射组合的定义与三角形中心函数的选择无关，假设 ψ_ω 是公式（4）~ ~中的三角形中心函数，且 $\psi_1\cong\psi_1$，即， $\psi_1=f\psi_1$ 对于 $f\in\mathrm{Cyc}(\mathcal{T})$ 。那么，

$$\psi_\omega(a,b,c)=\omega_0(a,b,c)\psi_0(a,b,c)+\frac{\omega_1(a,b,c)}{f(a,b,c)}\tilde{\psi}_1(a,b,c),$$

˜满足 $\tilde{\omega}_1 = \omega_1/f \in \mathrm{Cyc}(\mathcal{T})$ 且 $\deg(\omega_0\psi_0) = \deg(\tilde{\omega}_1\psi_1)$，这表明

$$\psi_\omega \in \mathrm{span}_{\mathrm{Cyc}(\mathcal{T})}(\psi_0, \psi_1) \quad \Longleftrightarrow \quad \psi_\omega \in \mathrm{span}_{\mathrm{Cyc}(\mathcal{T})}(\psi_0, \tilde{\psi}_1).$$

因此，$\mathrm{span}_{\mathrm{Cyc}(\mathcal{T})}(\psi_0, f_1\psi_1) = \mathrm{span}^{cycT}(\psi_0, \psi_1)$。

对于 ψ_0的循环因子，可以作出类似的论证。 □

例 5 （三角形中心的共线性 $\mathbf{X}_3$, $\mathbf{X}_6$, 与 $\mathbf{X}_{15}$）。引理 *4* 使我们能够用代数方法恢复已知的共线性，例如三角形中心 $\mathbf{X}_3$，$\mathbf{X}_6$，与 $\mathbf{X}_{15}$,的共线性，这些中心对应于表*1*中列出的三角形中心函数。

如例 *2*中所讨论的那样，三角形中心函数 ϕ_{15} 在表 *1*中可以仅用该三角形的边长改写，见方程 (24)。应用引理*1*，我们得到三角形中心函数 ϕ_{15} 的等价表示，只需乘以因子 $2abc \in \mathrm{Cyc}(\mathcal{T})$，

$$\phi_{15}(a,b,c) \cong a\left(\sqrt{3}(-a^2+b^2+c^2) + 4\,\mathrm{area}(\Delta)\right). \tag{27}$$

我们观 明这一表达式可以自然地分解为两个分量 s,

$$\phi_{15}(a,b,c) = \omega_0(a,b,c)\,\phi_3(a,b,c) + \omega_1(a,b,c)\,\phi_6(a,b,c),$$

其中 $\omega_0(a,b,c) = \sqrt{3} \in Cyc(\mathcal{T})$，且 $\omega_1(a,b,c) = 4$面积$(\Delta) \in Cyc(\mathcal{T})$，其中 $\deg(\omega_0\phi_3) = \deg(\omega_1\phi_6) = 3$。此外，利用公式（*23*）和公式（*5*）中迹的简化表达式，我们得到

$$\mathbf{X}_{15} = \frac{4\sqrt{3}\,\mathrm{area}(\Delta)}{4\sqrt{3}\,\mathrm{area}(\Delta) + a^2+b^2+c^2}\mathbf{X}_3 + \frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}\,\mathrm{area}(\Delta) + a^2+b^2+c^2}\mathbf{X}_6.$$

请注意，$\mathbf{X}_{15}$ 的系数取决于三角形的形状。

引理的证明 *5*。设 $\mathbf{X}_\psi$ 是一个与 $\mathbf{X}_{\psi_0}$ 和 $\mathbf{X}_{\psi_1}$ 共线且本质上不同于 $\mathbf{X}_{\psi_0}$ 和 $\mathbf{X}_{\psi_1}$的可追踪三角形中心。由此可知，存在一个函数 $f\colon \triangle \to \mathbb{R}$ 使得$f(a, b, c) \neq 0$对所有 $\Delta \in \triangle$均成立，

$$\mathbf{X}_\psi = (1 - f(a,b,c))\,\mathbf{X}_{\psi_0} + f(a,b,c)\mathbf{X}_{\psi_1}.$$

我们首先证明，$\mathbf{X}_\psi$ 是三角形中心，这意味着 $f(a, b, c) \in \mathrm{Cyc}(\mathcal{T})$，即，它是循环的、齐次的（在本例中齐次次数为 0）且双对称的。为此，设 ψ_0, ψ_1 是分别对应于 $\mathbf{X}_{\psi_0}$ 和 $\mathbf{X}_{\psi_1}$ 的三角形中心函数。由此可得

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_\psi &= (1 - f(a,b,c))\,\frac{a\,\psi_0(a,b,c)\mathbf{A} + b\,\psi_0(b,c,a)\mathbf{B} + c\,\psi_0(c,a,b)\mathbf{C}}{\Sigma_{\psi_0}(a,b,c)} \\
&\quad + f(a,b,c)\frac{a\,\psi_1(a,b,c)\mathbf{A} + b\,\psi_1(b,c,a)\mathbf{B} + c\,\psi_1(c,a,b)\mathbf{C}}{\Sigma_{\psi_1}(a,b,c)} \\
&= a\left((1 - f(a,b,c))\,\frac{\psi_0(a,b,c)}{\Sigma_{\psi_0}(a,b,c)} + f(a,b,c)\frac{\psi_1(a,b,c)}{\Sigma_{\psi_1}(a,b,c)}\right)\mathbf{A} \\
&\quad + b\left((1 - f(a,b,c))\,\frac{\psi_0(b,c,a)}{\Sigma_{\psi_0}(a,b,c)} + f(a,b,c)\frac{\psi_1(b,c,a)}{\Sigma_{\psi_1}(a,b,c)}\right)\mathbf{B} \\
&\quad + c\left((1 - f(a,b,c))\,\frac{\psi_0(c,a,b)}{\Sigma_{\psi_0}(a,b,c)} + f(a,b,c)\frac{\psi_1(c,a,b)}{\Sigma_{\psi_1}(a,b,c)}\right)\mathbf{C}.
\end{aligned}$$

由于$\mathbf{X}_\psi$ 是三角形中心，它与三角形中心函数 ψ 的关系如下

$$\mathbf{X}_\psi = \frac{1}{\Sigma_\psi(a,b,c)}\left(a\,\psi(a,b,c)\mathbf{A} + b\,\psi(b,c,a)\mathbf{B} + c\,\psi(c,a,b)\mathbf{C}\right).$$

比较各项系数，可得

$$\begin{aligned}
\frac{\psi(a,b,c)}{\Sigma_\psi(a,b,c)} &= (1-f(a,b,c))\,\frac{\psi_0(a,b,c)}{\Sigma_{\psi_0}(a,b,c)} + f(a,b,c)\frac{\psi_1(a,b,c)}{\Sigma_{\psi_1}(a,b,c)}\\
\frac{\psi(b,c,a)}{\Sigma_\psi(a,b,c)} &= (1-f(a,b,c))\,\frac{\psi_0(b,c,a)}{\Sigma_{\psi_0}(a,b,c)} + f(a,b,c)\frac{\psi_1(b,c,a)}{\Sigma_{\psi_1}(a,b,c)}\\
\frac{\psi(c,a,b)}{\Sigma_\psi(a,b,c)} &= (1-f(a,b,c))\,\frac{\psi_0(c,a,b)}{\Sigma_{\psi_0}(a,b,c)} + f(a,b,c)\frac{\psi_1(c,a,b)}{\Sigma_{\psi_1}(a,b,c)}.
\end{aligned}$$

- 循环性：我们求出满足关于 f 的第 i 个方程的解 f_i，即

$$\begin{aligned}
f_0(a,b,c) &= \left(\frac{\psi_0(a,b,c)}{\Sigma_{\psi_0}(a,b,c)} - \frac{\psi(a,b,c)}{\Sigma_\psi(a,b,c)}\right)\left(\frac{\psi_0(a,b,c)}{\Sigma_{\psi_0}(a,b,c)} - \frac{\psi_1(a,b,c)}{\Sigma_{\psi_1}(a,b,c)}\right)^{-1}\\
f_1(a,b,c) &= \left(\frac{\psi_0(b,c,a)}{\Sigma_{\psi_0}(a,b,c)} - \frac{\psi(b,c,a)}{\Sigma_\psi(a,b,c)}\right)\left(\frac{\psi_0(a,b,c)}{\Sigma_{\psi_0}(a,b,c)} - \frac{\psi_1(b,c,a)}{\Sigma_{\psi_1}(a,b,c)}\right)^{-1}\\
f_2(a,b,c) &= \left(\frac{\psi_0(c,a,b)}{\Sigma_{\psi_0}(a,b,c)} - \frac{\psi(c,a,b)}{\Sigma_\psi(a,b,c)}\right)\left(\frac{\psi_0(a,b,c)}{\Sigma_{\psi_0}(a,b,c)} - \frac{\psi_1(c,a,b)}{\Sigma_{\psi_1}(a,b,c)}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

  注意 $f_0(c,a,b) = f_1(b,c,a) = f_2(a,b,c)$。因此，唯一解 $f(a,b,c) := f_0(a,b,c)$ 是循环的。

- 齐次性：接下来，利用三角形中心函数 ψ、ψ_0 和 ψ_1 的齐次性，我们证明 $f(ta,tb,tc) = f(a,b,c)$，即

$$\begin{aligned}
f(ta,tb,tc) &= \left(\frac{\psi_0(ta,tb,tc)}{\Sigma_{\psi_0}(ta,tb,tc)} - \frac{\psi(ta,tb,tc)}{\Sigma_\psi(ta,tb,tc)}\right)\left(\frac{\psi_0(ta,tb,tc)}{\Sigma_{\psi_0}(ta,tb,tc)} - \frac{\psi_1(ta,tb,tc)}{\Sigma_{\psi_1}(ta,tb,tc)}\right)^{-1}\\
&= \left(\frac{1}{t}\frac{\psi_0(a,b,c)}{\Sigma_{\psi_0}(a,b,c)} - \frac{1}{t}\frac{\psi(a,b,c)}{\Sigma_\psi(a,b,c)}\right)\left(\frac{1}{t}\frac{\psi_0(a,b,c)}{\Sigma_{\psi_0}(a,b,c)} - \frac{1}{t}\frac{\psi_1(a,b,c)}{\Sigma_{\psi_1}(a,b,c)}\right)^{-1}\\
&= f(a,b,c).
\end{aligned}$$

- 双对称性：基于三角形中心函数 ψ、ψ_0 和 ψ_1 的双对称性，类似的论证表明

$$\begin{aligned}
f(a,c,b) &= \left(\frac{\psi_0(a,c,b)}{\Sigma_{\psi_0}(a,b,c)} - \frac{\psi(a,c,b)}{\Sigma_\psi(a,b,c)}\right)\left(\frac{\psi_0(a,c,b)}{\Sigma_{\psi_0}(a,b,c)} - \frac{\psi_1(a,c,b)}{\Sigma_{\psi_1}(a,b,c)}\right)^{-1}\\
&= \left(\frac{\psi_0(a,b,c)}{\Sigma_{\psi_0}(a,b,c)} - \frac{\psi(a,b,c)}{\Sigma_\psi(a,b,c)}\right)\left(\frac{\psi_0(a,b,c)}{\Sigma_{\psi_0}(a,b,c)} - \frac{\psi_1(a,b,c)}{\Sigma_{\psi_1}(a,b,c)}\right)^{-1}\\
&= f(a,b,c).
\end{aligned}$$

因此，我们得出结论：$\mathbf{X}_\psi$ 的三角形中心函数可表示为

$$\psi(a,b,c) = (1-f(a,b,c))\,\frac{\psi_0(a,b,c)}{\Sigma_{\psi_0}(a,b,c)} + f(a,b,c)\frac{\psi_1(a,b,c)}{\Sigma_{\psi_1}(a,b,c)},$$

其中 $f \in \mathsf{Cyc}(\mathcal{T})$，齐次次数为 0。

最后，我们证明上述表达式等价于由 ψ_0 和ψ_1构成的循环仿射组合，见方程（4）。为此，我们改写

$$\psi_\omega(a,b,c) = (\omega_0\Sigma_{\psi_0} + \omega_1\Sigma_{\psi_1})\left(\left(1 - \frac{\omega_1\Sigma_{\psi_1}}{\omega_0\Sigma_{\psi_0} + \omega_1\Sigma_{\psi_1}}\right)\psi_0 + \frac{\omega_1\Sigma_{\psi_1}}{\omega_0\Sigma_{\psi_0} + \omega_1\Sigma_{\psi_1}}\psi_1\right).$$

定义函数

$$\omega = \omega_0\Sigma_{\psi_0} + \omega_1\Sigma_{\psi_1} \quad \text{and} \quad f = \frac{\omega_1\Sigma_{\psi_1}}{\omega_0\Sigma_{\psi_0} + \omega_1\Sigma_{\psi_1}},$$

我们得到 c　　等价三角形函数表示 $\psi_\omega \cong \omega\,\psi$ 之间的转换，

$$\psi_\omega = \omega\left((1-f)\,\frac{\psi_0}{\Sigma_{\psi_0}} + f\,\frac{\psi_1}{\Sigma_{\psi_1}}\right) \cong (1-f)\frac{\psi_0}{\Sigma_{\psi_0}} + f\,\frac{\psi_1}{\Sigma_{\psi_1}} = \psi,$$

由此得证。 □

引理的证明 *6.* 我们首先证明， ψ_1 与$\psi_{\lambda_0:\lambda_1}$ 本质上不同，这将通过反证法证明。为此，我们假设 ψ_0 与$\psi_{\lambda_0:\lambda_1}$ 本质上并无不同。因此，存在一个非等边三角形（a,b,c），使得

$$\begin{aligned}\frac{\psi_0(a,b,c)}{\Sigma_{\psi_0}(a,b,c)} &= \frac{\psi_{\lambda_0:\lambda_1}(a,b,c)}{\Sigma_{\psi_{\lambda_0:\lambda_1}}(a,b,c)}\\ &= \frac{\lambda_0\,\psi_0(a,b,c)+\lambda_1\,\psi_1(a,b,c)}{\lambda_0\Sigma_{\psi_0}(a,b,c)+\lambda_1\Sigma_{\psi_1}(a,b,c)}.\end{aligned}$$

化简此方程可得

$$\frac{\psi_0(a,b,c)}{\Sigma_{\psi_0}(a,b,c)} = \frac{\psi_1(a,b,c)}{\Sigma_{\psi_1}(a,b,c)},$$

这就产生了矛盾。因此， ψ_0 与$\psi_{\lambda_0:\lambda_1}$ 本质上不同。当$\psi_{\lambda_0:\lambda_1}$ 与 ψ_1 本质上不同时，论证过程类似。

为了证明 $\psi_{\lambda_0:\lambda_1}$ 和 $\psi_{\lambda_0:\bar{\lambda_1}}$本质不同，我们再次采用反证法。再次假设 $\psi_{\lambda_0:\lambda_1}$ 和 $\psi_{\lambda_0:\lambda_1}$ 并非本质不同。因此，存在一个非等边三角形（a,b,c），使得

$$\frac{\psi_{\lambda_0:\lambda_1}(a,b,c)}{\Sigma_{\psi_{\lambda_0:\lambda_1}}(a,b,c)} = \frac{\psi_{\bar{\lambda}_0:\bar{\lambda}_1}(a,b,c)}{\Sigma_{\psi_{\bar{\lambda}_0:\bar{\lambda}_1}}(a,b,c)}.$$

与之前类似，该方程可化简为

$$0 = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{\bar{\lambda}_0}{\bar{\lambda}_1}\right)\left(\frac{\psi_0(a,b,c)}{\Sigma_{\psi_0}(a,b,c)} - \frac{\psi_1(a,b,c)}{\Sigma_{\psi_1}(a,b,c)}\right).$$

由于第一个因子非零，第二个因子必须为零，这与我们关于 ψ_0 和 ψ_1 本质不同的假设矛盾。因此，$\psi_{\lambda_0:\lambda_1}$ 和 $\psi_{\lambda_0:\lambda_1}$ 本质不同。□

引理 13。 两个本质不同的三角形中心 $\mathbf{X}_{\psi_0}$ 和 $\mathbf{X}_{\psi_1}$，连同第三个三角形中心 $\mathbf{X}_{\psi_\omega} \in \mathrm{span}_{\mathrm{Cyc}(\mathcal{T})}(\mathbf{X}_{\psi_0},\mathbf{X}_{\psi_1})$ 定义了一个常仿射三角形中心族，该族独立于所选的三角形中心函数，并包含 $\mathbf{X}_{\psi_\omega}$。我们将此族称为$\mathrm{span}_{\mathrm{const}}(\mathbf{X}_{\psi_0}, \mathbf{X}_{\psi_1}, \mathbf{X}_{\psi_\omega})$。

尽管根据构造，$\mathbf{X}_{\psi_\omega} \in \mathrm{span}_{\mathrm{const}}(\mathbf{X}_{\psi_0}, \mathbf{X}_{\psi_1}, \mathbf{X}_{\psi_\omega})$，但另外两个点根据定义永远不会包含在该族中，即，$\mathbf{X}_{\psi_0}, \mathbf{X}_{\psi_1} \notin \mathrm{span}_{\mathrm{const}}(\mathbf{X}_{\psi_0}, \mathbf{X}_{\psi_1}, \mathbf{X}_{\psi_\omega})$。然而，

$$\mathbf{X}_{\psi_{\overline{\omega}}} \in \mathrm{span}_{\mathrm{const}}(\mathbf{X}_{\psi_0},\mathbf{X}_{\psi_1},\mathbf{X}_{\psi_\omega}) \quad \textit{implies} \quad \mathbf{X}_{\psi_\omega} \in \mathrm{span}_{\mathrm{const}}(\mathbf{X}_{\psi_0},\mathbf{X}_{\psi_1},\mathbf{X}_{\psi_{\overline{\omega}}}).$$

引理 *13* 的证明。 设 $\mathbf{X}_{\psi_0}$ 和 $\mathbf{X}_{\psi_1}$ 是两个本质不同的三角形中心，且 $\mathbf{X}_{\psi_\omega} \in$张成$_{\mathrm{Cyc}(\mathcal{T})}(\mathbf{X}_{\psi_0},\mathbf{X}_{\psi_1})$。根据循环仿射三角形中心组合的定义可知 ψ_ω 可以按照方程（4）进行分解，其中 $\omega_0,\omega_1 \in \mathrm{Cyc}(\mathcal{T}$。请注意，对于非等边三角形构型，该分解是唯一的，其系数为

$$\begin{aligned}\omega_0(a,b,c) &= \frac{\psi_1(a,b,c)\psi_2(b,c,a) - \psi_1(b,c,a)\psi_2(a,b,c)}{\psi_0(b,c,a)\psi_1(a,b,c) - \psi_0(a,b,c)\psi_1(b,c,a)},\\ \omega_1(a,b,c) &= \frac{\psi_0(a,b,c)\psi_2(b,c,a) - \psi_0(b,c,a)\psi_2(a,b,c)}{\psi_0(b,c,a)\psi_1(a,b,c) - \psi_0(a,b,c)\psi_1(b,c,a)}.\end{aligned}$$

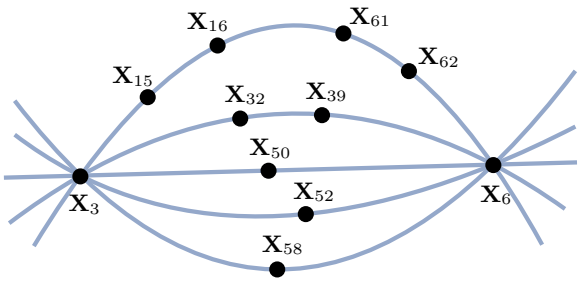


FIGURE 10. 三角形中心$\mathbf{X}_3$ 与$\mathbf{X}_6$ 的常仿射组合之间关系的示意图，展示了所考虑的三角形中心。

这直接源于以下事实：对于 $\triangle \neq (a,a,a)$，矩阵 $\mathbf{M}_\psi$的秩为二（其秩不可能为一，因为三角形中心函数 ψ_0 和 ψ_1 对应于本质不同的三角形中心）。因此，我们得到一组常仿射三角形中心函数

$$\psi_{\gamma_0:\gamma_1}(a,b,c) = \gamma_0\,\omega_0(a,b,c)\,\psi_0(a,b,c) + \gamma_1\,\omega_1(a,b,c)\,\psi_1(a,b,c)$$

其中包含 ψ_ω （对于 $\gamma_0 = \gamma_1 = 1$）。 □

例 6 （布罗卡尔轴与基珀特双曲线上的三角形中心族结构）。回顾一下，由外心$\mathbf{X}_3$ 与类似中线点$\mathbf{X}_6$ 张成的直线称为布罗卡尔轴，而其等角共轭，即基珀特双曲线，是一条外接圆锥曲线，也就是一条经过相应三角形各顶点的圆锥曲线 *[7, 第 235]*页。

在本例中，我们将通过研究布罗卡尔轴上三角形中心集合的结构，说明循环仿射与常仿射三角形中心族的概念。我们的主要结果陈述于定理*1* （关于三角形曲线）中：此处引入的、与布罗卡尔轴相关的两个常仿射族起着关键作用。

在 *Kimberling* 列出的前一百个三角形中心中 *[6]*, 除了$\mathbf{X}_3$ 和$\mathbf{X}_6$,布罗卡尔轴上的其他点还包括第一等力点$\mathbf{X}_{15}$，第二等力点$\mathbf{X}_{16}$，第三幂点$\mathbf{X}_{32}$，布洛卡中点$\mathbf{X}_{39}$，$\mathbf{X}_{50}$，垂足三角形的垂心$\mathbf{X}_{52}$，$\mathbf{X}_{58}$，$\mathbf{X}_{61}$，以及$\mathbf{X}_{62}$。表*2* 列出了它们的三角形中心函数，以及不含三角函数的等价表达式，供后续计算使用。

$\mathbf{X}_i$	ϕ_i *(ETC)*	ϕ_i *(mod.)*
$\mathbf{X}_3$	$a(-a^2+b^2+c^2)$	$a(-a^2+b^2+c^2)$
$\mathbf{X}_6$	a	a
$\mathbf{X}_{15}$	$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$	$a\left(\sqrt{3}(-a^2+b^2+c^2)+4\,\mathrm{area}(\Delta)\right)$
$\mathbf{X}_{16}$	$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$	$a\left(\sqrt{3}(-a^2+b^2+c^2)-4\,\mathrm{area}(\Delta)\right)$
$\mathbf{X}_{32}$	a^3	$2a^3$
$\mathbf{X}_{39}$	$a(b^2+c^2)$	$2a(b^2+c^2)$
$\mathbf{X}_{50}$	$\sin(3\alpha)$	$2a^3\left(a^4+b^4+c^4-2a^2(b^2+c^2)+b^2c^2\right)$
$\mathbf{X}_{52}$	$\sec\alpha\,(\sec(2\beta)+\sec(2\gamma))$	$2a\left(a^4+b^4+c^4-2a^2(b^2+c^2)\right)\left((b^2-c^2)^2-a^2(b^2+c^2)\right)$
$\mathbf{X}_{58}$	$\frac{a}{b+c}$	$2a(a+b)(a+c)$
$\mathbf{X}_{61}$	$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$	$a\left(-a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}\,\mathrm{area}(\Delta)\right)$
$\mathbf{X}_{62}$	$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$	$a\left(-a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}\,\mathrm{area}(\Delta)\right)$

TABLE 2. 该表列出了前一百个与布罗卡尔轴重合的三角形中心，以及 ETC 中给出的相应三角形中心函数，并展示了利用余弦定理进行的化简。

ϕ_i (模.)	$\omega_{i,3}$	$\omega_{i,6}$
ϕ_{15}	$\sqrt{3}$	4 面积(Δ)
ϕ_{16}	$\sqrt{3}$	-4 面积(Δ)
ϕ_{32}	-1	$a^2+b^2+c^2$
ϕ_{39}	1	$a^2+b^2+c^2$
ϕ_{50}	(4 面积(Δ))^2	$-2a^2b^2c^2$ -$(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)$
ϕ_{52}	$\omega_{50,6}$	(4 面积(Δ))^4
ϕ_{58}	-1	$(a+b+c)^2$
ϕ_{61}	1	$4\sqrt{3}$ 面积(Δ)
ϕ_{62}	1	$-4\sqrt{3}$ 面积(Δ)

TABLE 3. 表格列出了与布罗卡尔轴重合的前一百个三角形中心的循环仿射系数。具体而言，$\phi_i = \omega_{i,\ 3}\phi_3 + \omega_{i,\ 6}\phi_6$，其中$\phi_i$ 是表2第三列中的表达式，该表达式等价于第二列所列 ETC 中给出的表达式。

首先，我们确认所列的所有三角形中心确实都是$\mathbf{X}_3$ 和$\mathbf{X}_6$,的循环仿射组合，即

$$B := \{\mathbf{X}_{15}, \mathbf{X}_{16}, \mathbf{X}_{32}, \mathbf{X}_{39}, \mathbf{X}_{52}, \mathbf{X}_{52}, \mathbf{X}_{58}, \mathbf{X}_{61}, \mathbf{X}_{62}\} \subset \mathrm{span}_{\mathrm{Cyc}(\mathcal{T})}(\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_6),$$

为此，我们求出系数 $\omega_0, \omega_1 \in \mathrm{Cyc}(\mathcal{T})$ 使得

$$\phi_i(a,b,c) = \omega_{i,3}(a,b,c)\,\phi_3(a,b,c) + \omega_{i,6}(a,b,c)\,\phi_6(a,b,c),$$

其中 $\phi_i(a,\ b,\ c)$ 是与 B 中的中心相对应的三角形中心函数。由此得到的系数列于表 3。

B 中的任意一个三角形中心，与$\mathbf{X}_3$ 和 $\mathbf{X}_6$，一起张成一个常数仿射三角形中心族，该族与布罗卡尔轴重合。我们将展示这些族之间的关系，尤其是，我们将确认

$$\begin{aligned}\mathrm{span}_{\mathrm{const}}(\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_6, \mathbf{X}_{15}) &= \mathrm{span}_{\mathrm{const}}(\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_6, \mathbf{X}_{16}) \\ &= \mathrm{span}_{\mathrm{const}}(\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_6, \mathbf{X}_{61}) \\ &= \mathrm{span}_{\mathrm{const}}(\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_6, \mathbf{X}_{62})\end{aligned}$$

and

$$\mathrm{span}_{\mathrm{const}}(\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_6, \mathbf{X}_{32}) = \mathrm{span}_{\mathrm{const}}(\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_6, \mathbf{X}_{39}),$$

如图 10所示。

为了从代数上验证这些结论，对于 B 中的每个三角形中心$\mathbf{X}_i$，我们用两个标量 λ_0、$\lambda_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ 对相应常数仿射三角形中心族中的三角形中心函数进行参数化，得到

$$\psi_{i;\lambda_0:\lambda_1}(a,b,c) = \lambda_0\,\omega_{i,3}(a,b,c)\,\phi_3(a,b,c) + \lambda_1\,\omega_{i,6}(a,b,c)\,\phi_6(a,b,c),$$

其中 $\omega_{i,\ 3}$ 以及 $\omega_{i,\ 6}$ 是表 3中的相应系数，用以确保适当的归一化。注意，对于所有考虑的三角形中心，我们有

$$\phi_i(a,b,c) = \psi_{i,1:1}(a,b,c).$$

如果 B 中的两个三角形中心$\mathbf{X}_i$ 和 $\mathbf{X}j$ 属于同一个常数仿射族，则有

$$\phi_j(a,b,c) \cong \psi_{i;\lambda_0:\lambda_1}(a,b,c), \quad \textit{or equivalently,} \quad \phi_i(a,b,c) \cong \psi_{j;\tilde{\lambda_0}:\tilde{\lambda_1}}(a,b,c),$$

~ ~对于某些常数 λ_0，λ_1，λ_0，以及 λ_1。*Mathematica* 得出的关系总结于表 4。

$\mathrm{span}_{\mathrm{const}}(\mathbf{X}_3,\mathbf{X}_6,\mathbf{X}_{15})$	$\psi_{15,(-1):1}\cong\phi_{16}$	$\psi_{15,1:3}\cong\phi_{61}$	$\psi_{15,(-1):3}\cong\phi_{62}$
$\mathrm{span}_{\mathrm{const}}(\mathbf{X}_3,\mathbf{X}_6,\mathbf{X}_{16})$	$\psi_{16,(-1):1}\cong\phi_{15}$	$\psi_{16,(-1):3}\cong\phi_{61}$	$\psi_{16,1:3}\cong\phi_{62}$
$\mathrm{span}_{\mathrm{const}}(\mathbf{X}_3,\mathbf{X}_6,\mathbf{X}_{32})$	$\psi_{32,(-1):1}\cong\phi_{39}$		
$\mathrm{span}_{\mathrm{const}}(\mathbf{X}_3,\mathbf{X}_6,\mathbf{X}_{39})$	$\psi_{39,(-1):1}\cong\phi_{32}$		
$\mathrm{span}_{\mathrm{const}}(\mathbf{X}_3,\mathbf{X}_6,\mathbf{X}_{61})$	$\psi_{61,3:1}\cong\phi_{15}$	$\psi_{61,(-1):3}\cong\phi_{16}$	$\psi_{61,(-1):1}\cong\phi_{62}$
$\mathrm{span}_{\mathrm{const}}(\mathbf{X}_3,\mathbf{X}_6,\mathbf{X}_{62})$	$\psi_{62,(-3):1}\cong\phi_{15}$	$\psi_{62,1:3}\cong\phi_{16}$	$\psi_{62,(-1):1}\cong\phi_{61}$

TABLE 4. 通过代数方法发现了联系三角形族$\psi_{i,\ \omega_0:\ \omega_1}$以及布罗卡尔轴上三角形中心的非平凡恒等式。

在本文的主要结果定理*1*中，我们证明$\mathrm{span}_{\mathrm{const}}(\mathbf{X}_3,\mathbf{X}_6,\mathbf{X}_{15})$和$\mathrm{span}_{\mathrm{const}}(\mathbf{X}_3,\mathbf{X}_6,\mathbf{X}_{32})$中的三角形中心是半不变曲线生成中心。

APPENDIX B. TRIANGLE FAMILIES

引理 *7* 的证明。

(i) $\Delta_t^{\mathbf{\Psi}}$的顶点可表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_t^{\mathbf{\Psi}}&=\frac{1}{\Psi_1(t)+\Psi_2(t)+\Psi_3(t)}\left(\Psi_1(t)\mathbf{A}+\Psi_2(t)\mathbf{B}+\Psi_3(t)\mathbf{C}\right),\\ \mathbf{B}_t^{\mathbf{\Psi}}&=\frac{1}{\Psi_1(t)+\Psi_2(t)+\Psi_3(t)}\left(\Psi_3(t)\mathbf{A}+\Psi_1(t)\mathbf{B}+\Psi_2(t)\mathbf{C}\right),\\ \mathbf{C}_t^{\mathbf{\Psi}}&=\frac{1}{\Psi_1(t)+\Psi_2(t)+\Psi_3(t)}\left(\Psi_2(t)\mathbf{A}+\Psi_3(t)\mathbf{B}+\Psi_1(t)\mathbf{C}\right).\end{aligned}\tag{28}$$

直接计算可验证，$\triangle_t^{\mathbf{\Phi}}$和 $\triangle$ 的质心重合

$$\frac{1}{3}\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}\right)=\frac{1}{3}\left(\mathbf{A}_t^{\mathbf{\Psi}}+\mathbf{B}_t^{\mathbf{\Psi}}+\mathbf{C}_t^{\mathbf{\Psi}}\right).$$

(ii) 不失一般性，假设 Δ 的中心位于原点。因此，其顶点满足关系式

$$\mathbf{A}=\mathbf{R}\cdot\mathbf{C},\quad \mathbf{B}=\mathbf{R}\cdot\mathbf{A},\quad \text{and}\quad \mathbf{C}=\mathbf{R}\cdot\mathbf{B},$$

其中 $\mathbf{R}$表示绕 $2\pi/3$旋转对应的矩阵。由方程（28）中的表达式可知

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{A}_t^{\mathbf{\Psi}}=\mathbf{C}_t^{\mathbf{\Psi}},\quad \mathbf{R}\cdot\mathbf{B}_t^{\mathbf{\Psi}}=\mathbf{A}_t^{\mathbf{\Psi}},\quad \text{and}\quad \mathbf{R}\cdot\mathbf{C}_t^{\mathbf{\Psi}}=\mathbf{B}_t^{\mathbf{\Psi}},$$

也就是说，Δ_t 的顶点也通过 $2\pi/3$ 的旋转彼此对应。因此，Δ_t 是一个等边三角形。

□

定义的证明 & 引理 *9*. 连接 $(\mathbf{\Phi}\circ\mathbf{\Psi})(t)$ 由生成函数给出

$$\begin{aligned}(\mathbf{\Psi}\circ\tilde{\mathbf{\Psi}})_1&=\frac{(\Psi_1\tilde{\Psi}_1+\Psi_2\tilde{\Psi}_3+\Psi_3\tilde{\Psi}_2)\mathbf{A}+(\Psi_1\tilde{\Psi}_2+\Psi_2\tilde{\Psi}_1+\Psi_3\tilde{\Psi}_3)\mathbf{B}+(\Psi_1\tilde{\Psi}_3+\Psi_2\tilde{\Psi}_2+\Psi_3\tilde{\Psi}_1)\mathbf{C}}{(\Psi_1+\Psi_2+\Psi_3)(\tilde{\Psi}_1+\tilde{\Psi}_2+\tilde{\Psi}_3)}\\ (\mathbf{\Psi}\circ\tilde{\mathbf{\Psi}})_2&=\frac{(\Psi_1\tilde{\Psi}_3+\Psi_2\tilde{\Psi}_2+\Psi_3\tilde{\Psi}_1)\mathbf{A}+(\Psi_1\tilde{\Psi}_1+\Psi_2\tilde{\Psi}_3+\Psi_3\tilde{\Psi}_2)\mathbf{B}+(\Psi_1\tilde{\Psi}_2+\Psi_2\tilde{\Psi}_1+\Psi_3\tilde{\Psi}_3)\mathbf{C}}{(\Psi_1+\Psi_2+\Psi_3)(\tilde{\Psi}_1+\tilde{\Psi}_2+\tilde{\Psi}_3)}\\ (\mathbf{\Psi}\circ\tilde{\mathbf{\Psi}})_3&=\frac{(\Psi_1\tilde{\Psi}_2+\Psi_2\tilde{\Psi}_1+\Psi_3\tilde{\Psi}_3)\mathbf{A}+(\Psi_1\tilde{\Psi}_3+\Psi_2\tilde{\Psi}_2+\Psi_3\tilde{\Psi}_1)\mathbf{B}+(\Psi_1\tilde{\Psi}_1+\Psi_2\tilde{\Psi}_3+\Psi_3\tilde{\Psi}_2)\mathbf{C}}{(\Psi_1+\Psi_2+\Psi_3)(\tilde{\Psi}_1+\tilde{\Psi}_2+\tilde{\Psi}_3)}.\end{aligned}\tag{29}$$

此外，请注意

$$(\mathbf{\Psi}\circ\tilde{\mathbf{\Psi}})_1+(\mathbf{\Psi}\circ\tilde{\mathbf{\Psi}})_2+(\mathbf{\Psi}\circ\tilde{\mathbf{\Psi}})_3=(\Psi_1+\Psi_2+\Psi_3)\left(\tilde{\Psi}_1+\tilde{\Psi}_2+\tilde{\Psi}_3\right)\neq 0,$$

and

$$(\mathbf{\Psi}\circ\tilde{\mathbf{\Psi}})_1\equiv(\mathbf{\Psi}\circ\tilde{\mathbf{\Psi}})_2\equiv(\mathbf{\Psi}\circ\tilde{\mathbf{\Psi}})_3$$

蕴含

$$\mathbf{\Psi}_1\equiv\mathbf{\Psi}_2\equiv\mathbf{\Psi}_3\quad\text{and}\quad\tilde{\mathbf{\Psi}}_1\equiv\tilde{\mathbf{\Psi}}_2\equiv\tilde{\mathbf{\Psi}}_3,$$

因此命题得证。 □

引理 *8*的证明。

(i) $\mathbf{\Psi}$ 三角形族的连接具有交换性，这直接由定义和引理9可得。(ii) 为了证明 $\mathbf{\Psi}$-三角形族具有结合性，我们首先计算

$$\tilde{\tilde{\Psi}}\circ(\tilde{\Psi}\circ\Psi)=\begin{pmatrix}\Psi_3\tilde{\tilde{\Psi}}_3+\Psi_2\tilde{\tilde{\Psi}}_1+\Psi_1\tilde{\tilde{\Psi}}_2 & \Psi_1\tilde{\tilde{\Psi}}_1+\Psi_2\tilde{\tilde{\Psi}}_3+\Psi_3\tilde{\tilde{\Psi}}_2 & \Psi_2\tilde{\tilde{\Psi}}_2+\Psi_1\tilde{\tilde{\Psi}}_3+\Psi_3\tilde{\tilde{\Psi}}_1\\ \Psi_2\tilde{\tilde{\Psi}}_2+\Psi_1\tilde{\tilde{\Psi}}_3+\Psi_3\tilde{\tilde{\Psi}}_1 & \Psi_3\tilde{\tilde{\Psi}}_3+\Psi_1\tilde{\tilde{\Psi}}_2+\Psi_2\tilde{\tilde{\Psi}}_1 & \Psi_1\tilde{\tilde{\Psi}}_1+\Psi_2\tilde{\tilde{\Psi}}_3+\Psi_3\tilde{\tilde{\Psi}}_2\\ \Psi_1\tilde{\tilde{\Psi}}_1+\Psi_2\tilde{\tilde{\Psi}}_3+\Psi_3\tilde{\tilde{\Psi}}_2 & \Psi_2\tilde{\tilde{\Psi}}_2+\Psi_1\tilde{\tilde{\Psi}}_3+\Psi_3\tilde{\tilde{\Psi}}_1 & \Psi_3\tilde{\tilde{\Psi}}_3+\Psi_1\tilde{\tilde{\Psi}}_2+\Psi_2\tilde{\tilde{\Psi}}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\Psi}_1\\ \tilde{\Psi}_2\\ \tilde{\Psi}_3\end{pmatrix}$$

由于 $\tilde{\Psi}$ 和 $\tilde{\tilde{\Psi}}$ 的作用可以互换，因此由上式可得

$$\tilde{\tilde{\Psi}}\circ(\tilde{\Psi}\circ\Psi)=\Psi\circ(\tilde{\Psi}\circ\tilde{\tilde{\Psi}})$$

由连接的交换性可得

$$\Psi\circ(\tilde{\Psi}\circ\tilde{\tilde{\Psi}})=\Psi\circ(\tilde{\tilde{\Psi}}\circ\tilde{\Psi})=(\tilde{\tilde{\Psi}}\circ\tilde{\Psi})\circ\Psi,$$

最终我们得出，三角形族的连接是结合的。

(iii) 这可直接由 $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Id}}\circ\mathbf{\Psi}$ 的定义得出。

(iv) 利用方程（29）并重新表述即可轻易得出这一结论

$$\mathbf{A}_t^{\mathbf{\Psi}^{-1}\circ\mathbf{\Psi}}=\mathbf{A},\quad\mathbf{B}_t^{\mathbf{\Psi}^{-1}\circ\mathbf{\Psi}}=\mathbf{B},\quad\text{and}\quad\mathbf{C}_t^{\mathbf{\Psi}^{-1}\circ\mathbf{\Psi}}=\mathbf{C}$$

as

$$\begin{pmatrix}\Psi_1 & \Psi_3 & \Psi_2\\ \Psi_2 & \Psi_1 & \Psi_3\\ \Psi_3 & \Psi_2 & \Psi_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_1^{-1}\\ \Psi_2^{-1}\\ \Psi_3^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

由三角形族的定义可知，该矩阵可逆，因为它的行列式

$$\Psi_1^3+\Psi_2^3+\Psi_3^3-3\Psi_1\Psi_2\Psi_3=\frac{1}{2}(\Psi_1+\Psi_2+\Psi_3)\left((\Psi_1-\Psi_2)^2+(\Psi_2-\Psi_3)^2+(\Psi_3-\Psi_1)^2\right)\neq 0.$$

□

定义与引理 *11*的证明。 回顾第 2.3.1节，三个以重心坐标表示的点 $\mathbf{P}=[P_1:\ P_2:\ P_3]^T$，$\mathbf{Q}=[Q_1:\ Q_2:\ Q_3]^T$，以及 $\mathbf{S}=[S_1:\ S_2:\ S_3]^T$共线，当且仅当

$$0=\det\begin{pmatrix}\mathbf{P} & \mathbf{Q} & \mathbf{S}\end{pmatrix}=(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})\cdot\mathbf{S}.$$

因此，一条直线可以与向量 $\ell_{\mathbf{PQ}}=\mathbf{P}\times\mathbf{Q}$ 相关联，而第三个点$\mathbf{S}$ 的关联关系可以通过计算相应的点积来检验。类似地，两条直线 ℓ_1 与 ℓ_2 的交点$\mathbf{I}$对应于一个与两者都正交的向量，从而得到 $\mathbf{I}=\ell_1\times\ell_2$。

为了计算 nedian族中所述点$\mathbf{A}_t$、$\mathbf{B}_t$、$\mathbf{C}_t$ 的重心坐标，我们首先确定

$$\ell_{\mathbf{AA}_t'}=\begin{bmatrix}0\\ -1+t\\ 0\end{bmatrix},\quad\ell_{\mathbf{BB}_t'}=\begin{bmatrix}t\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\quad\text{and}\quad\ell_{\mathbf{CC}_t'}=\begin{bmatrix}-t\\ 1-t\\ 0\end{bmatrix}.$$

其中

$$\mathbf{A}'_t = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 1-t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}'_t = \begin{bmatrix} 0 \\ 1-t \\ t \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad \mathbf{C}'_t = \begin{bmatrix} 1-t \\ t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

由此可得，对应直线的交点给出

$$\mathbf{A}_t = \ell_{\mathbf{BB}'_t} \times \ell_{\mathbf{CC}'_t} = \begin{bmatrix} (1-t)t \\ t^2 \\ (1-t)^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_t = \ell_{\mathbf{CC}'_t} \times \ell_{\mathbf{AA}'_t} = \begin{bmatrix} (1-t)^2 \\ (1-t)t \\ t^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_t = \ell_{\mathbf{AA}'_t} \times \ell_{\mathbf{BB}'_t} = \begin{bmatrix} t^2 \\ (1-t)^2 \\ (1-t)t \end{bmatrix}.$$

□

引理的证明 *9.* 这些结论可通过应用引理 8进行直接计算得到 :

- 方程（ $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{S}}$ 中所述的缩放三角形族的逆8）由下式给出

$$\mathbf{\Phi}_{\mathrm{S}}^{-1} : t \mapsto \left(1 + \frac{2}{t}, 1 - \frac{1}{t}, 1 - \frac{1}{t}\right)$$

对于 $t \neq 0$，这个逆是按 $\frac{1}{t}$ 进行缩放，

$$\mathbf{\Phi}_{\mathrm{S}}^{-1}(t) = \mathbf{\Phi}_{\mathrm{S}}\left(\frac{1}{t}\right).$$

- 根据引理 8中的公式，我们有

$$\mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}}^{-1} : t \mapsto \left(\frac{(1-t)t}{1-3t(1-t)}, \frac{t^2}{1-3t(1-t)}, \frac{(1-t)^2}{1-3t(1-t)}\right).$$

为了证明 $\mathbf{\Phi}^{-1}{}_{\mathrm{A}}(t)$ 属于 nedian族，我们的目标是找到一个参数$t_N \in \mathbb{R}$，使其满足 $\mathbf{\Phi}^{-1}{}_{\mathrm{A}}(t) = \mathbf{\Phi}_{\mathrm{N}}(t_N)$。因此，对于 $i \in \{1,2,3\}$，我们考虑

$$\frac{\left(\mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}}^{-1}\right)_i(t)}{\left(\mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}}^{-1}\right)_1(t) + \left(\mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}}^{-1}\right)_2(t) + \left(\mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}}^{-1}\right)_3(t)} = \frac{(\mathbf{\Phi}_{\mathrm{N}})_i(t_N)}{(\mathbf{\Phi}_{\mathrm{N}})_1(t_N) + (\mathbf{\Phi}_{\mathrm{N}})_2(t_N) + (\mathbf{\Phi}_{\mathrm{N}})_3(t_N)}.$$

这三个方程可化简为

$$\begin{aligned} \frac{(1-t)t}{1-3t(1-t)} &= \frac{(1-t_{\mathrm{N}})t_{\mathrm{N}}}{1-(1-t_{\mathrm{N}})t_{\mathrm{N}}}, \\ \frac{t^2}{1-3t(1-t)} &= \frac{t_{\mathrm{N}}^2}{1-(1-t_{\mathrm{N}})t_{\mathrm{N}}}, \\ \frac{(1-t)^2}{1-3t(1-t)} &= \frac{(1-t_{\mathrm{N}})^2}{1-(1-t_{\mathrm{N}})t_{\mathrm{N}}}. \end{aligned}$$

虽然这三个方程关于 t_{N} 都是二次方程，但对于 $t \neq 1/2$，它们有一个共同解，即

$$t_{\mathrm{N}} = -\frac{t}{1-2t}.$$

- 根据引理 8中的公式，有

$$\mathbf{\Phi}_{\mathrm{N}}^{-1} : t \mapsto \left(0, \frac{1-t}{(1-2t)(1-(1-t)t)}, -\frac{t}{(1-2t)(1-(1-t)t}\right).$$

由于 nedian 三角形族仅在 $t = 1/2$ and $(t^2 - t + 1) > 0$ 时退化为一点，根据重心坐标的齐次性，将其除以公因子 $(2t-1)(t^2-t+1) \neq 0$ 后，结论便得证。

与另一种情况类似，为了证明 $\mathbf{\Phi}^{-1}{}_{\mathrm{N}}(t)$ 是等分族的一个成员，我们的目标是找到一个参数 $t_{\mathrm{A}} \in \mathbb{R}$，使其满足 $\mathbf{\Phi}^{-1}{}_{\mathrm{N}}(t) = \mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}}(t_{\mathrm{A}})$。因此，对于$i \in \{1,2,3\}$，我们考虑

$$\frac{\left(\mathbf{\Phi}_{\mathrm{N}}^{-1}\right)_i(t)}{\left(\mathbf{\Phi}_{\mathrm{N}}^{-1}\right)_1(t)+\left(\mathbf{\Phi}_{\mathrm{N}}^{-1}\right)_2(t)+\left(\mathbf{\Phi}_{\mathrm{N}}^{-1}\right)_3(t)} = \frac{(\mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}})_i(t_{\mathrm{A}})}{(\mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}})_1(t_{\mathrm{A}})+(\mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}})_2(t_{\mathrm{A}})+(\mathbf{\Phi}_{\mathrm{A}})_3(t_{\mathrm{A}})}.$$

这三个方程可简化为

$$0=0, \quad \frac{(1-t)}{1-2t} = 1-t_{\mathrm{A}}, \quad -\frac{t}{1-2t} = t_{\mathrm{A}}.$$

对于 $t \neq 1/2$，两个方程的解均为

$$t_{\mathrm{A}} = -\frac{t}{1-2t}.$$

□

EPFL, Station 14, 1015 Lausanne, Vaud, Switzerland
Email address: klara.mundilova@epfl.ch

University of California San Diego, 9500 Gilman Dr, La Jolla, CA 92093, USA
Email address: ogross@ucsd.edu