arXiv:2602.22191v1 [math.AC] 25 Feb 2026

非分歧混合特征中的局部上同调消失

MANAV BATAVIA

谨以此文献给 *Gennady Lyubeznik*，以感谢他对局部上同调作出的巨大贡献。

摘要。给定正则局部环 I 中的一个理想 A，I 在 A 中的上同调维数，是以 I 为支集的 A 的最高非消失局部上同调的指标。根据谱(A/I) 的拓扑不变量确定上同调维数的有效上界，是交换代数中的一个核心问题。在等特征情形下，Faltings 于1980年证明了一个一般性上界，该上界以理想的大高度表示。本文将 Faltings 的结果推广到非分歧混合特征情形，并证明所得上界是尖锐的。

1. 引言

局部上同调由 Grothendieck 于20世纪60年代初引入，在交换代数和代数几何中发挥着关键作用。局部上同调的消失性质反映了底层概形微妙的几何与拓扑性质，Grothendieck、Hartshorne、Faltings 等人的研究对此进行了广泛探讨。理解局部上同调模何时消失，仍是一个基础而微妙的问题。

A 是 Krull 维数为d 的交换诺特环，I 是A的一个理想。A 中I 的上同调维数为

$$\operatorname{cd}(A,I) := \max\{n \mid H^n_I(A) \neq 0\}.$$

或者，cd(A,I) 是使得对所有 A-模 M 和 $q > n$ [ILL+07，$H^q I(M) = 0$ 的最小整数 n，定理 9.6]。由于对所有 A-模 M 和 $q > d$ [Gro66]，$H^q I(M) = 0$，cd(A,I) 总是存在，且上界为 d。

过去几十年来，人们一直非常关注如何计算上同调维数的更优上界。众所周知，

$$\operatorname{cd}(A,I) \leq \operatorname{ara}(I),$$

其中，$\operatorname{ara}(I)$是I 的算术秩，即生成I 的根理想所需的最少方程数。然而，理想的算术秩很难计算，而且可能与上同调维数相差甚远 [BS90,Bar95,JPSW25,BMSMP25].

一种互补的方法是利用 A/I 的谱的拓扑不变量来界定上同调维数。在这方面最著名的结果是 Hartshorne–Lichtenbaum 消失定理 [Har68]，，该定理指出，对于完备局部整环 (A $\mathfrak{m}$)，当且仅当 I 不是 $\mathfrak{m}$-主理想时，$\operatorname{cd}(A,I) \leq d - 1$。此外，第二消失定理 [Ogu73, PS73, HL90, Zha26] 断言，在等特征或非分歧混合特征的情形下，对于剩余域可分闭的完备正则局部环 (A $\mathfrak{m}$)，当且仅当 $\dim(A/I) \geq 2$且 A/I 的去心谱连通时，$\operatorname{cd}(A,I) \leq d - 2$。Peskine 和 Szpiro [PS73]证明，若 (A $\mathfrak{m}$) 是特征 p 的等特征正则局部环，且 A/I 是 Cohen–Macaulay，则

cd(A,I) = ht(I)。除这里讨论的结果外，在各种情形下还证明了一些其他消失结论 [Var13, DT16, Bur26], ， 不过所需条件越来越难以验证。Ogus [Ogu73], 、Hartshorne 和 Speiser [HS77], 、Lyubeznik[Lyu06], 、Mustat˘a 和 Popa [MP22], ， 以及 Reichelt、Saito 和 Walther [RSW23] ， 根据奇点不变量给出了等特征下上同调维数的具体公式，另见 [BBL+25]。然而，这些方法需要理解德拉姆上同调、霍奇滤过或弗罗贝尼乌斯结构；在实践中，这些对象可能难以计算。

在等特征下，Faltings [Fal80]建立了一个以理想的大高度为依据的上同调维数的一般界。理想的大高度是其所有极小素理想的高度中的最大值。本文将 Faltings 的结果推广到非分歧混合特征情形。

定理 A。（参见定理3.5）设 A 是一个 d 维非分歧混合特征（0，p）正则局部环。设 I 是 A 的非零真理想，且其大高度为 c。那么

$$\mathrm{cd}(A,I) \leq d - \left\lfloor \frac{d-1}{c} \right\rfloor .$$

我们还建立了一个关于局部上同调模消没的归纳准则。更一般的陈述见定理2.9 ，下文给出的陈述是其特例。

定理 B。（参见定理2.9）设（A $\mathfrak{m}$）是一个非分歧混合特征（0，p）正则局部环，I 是 A 的一个大高度为 c 的理想。假设 p 是 A 上的非零因子/I。

设 $n > c$ 为一个整数。假设对所有满足 $1 \leq s \leq c-1$ 的整数 s，以及所有满足 $q \geq n-s$ 的 q，都有 $H^q_{IA_P}(A_P) = 0$，其中 $P \in$ 谱(A) 满足 $I \subseteq P$ 且 维数$(A/P) \geq s+1$.。那么，对所有 $q \geq n$，都有 $H^q_I(A) = 0$。

现在我们概述证明主要结果的策略。

(1) 在等特征情形下，Faltings 证明了一个判据 [Fal80, Satz 1] ，其形式类似于定理 B，并将其用作归纳工具来建立 cd(A,I) 的上界。 在 p 是 A/I 上的非零因子这一假设下，我们将 Faltings 判据推广到非分歧混合特征情形。[1]

在证明中，我们将问题化归为局部上同调模仅支集于极大理想的情形。我们通过在基离散赋值环上引入辅助张量构造，并分析关于对角理想的局部上同调，来处理这一剩余情形。这使我们能够利用精确的维数界和数值不等式，迫使自然的谱序列退化，从而在辅助情形下得到一个消没结论。随后，我们结合 Zhou 关于非分歧混合特征下局部上同调模内射维数的结果 [Zho98，定理 5。1], 以及 [Lyu00, NnB13] 中所确立的此类模 Bass 数有限性。

(2) 我们将定理 A 的证明分为三种情形。若 p 是 A/I 上的非零因子，我们便可使用上述归纳准则，证明局部上同调模 $H^n_I(A)$ 在 n 大于所需界限时消失。若 $p \in I$，我们便将分析归结为A/p，这是一个特征为 p 的等特征正则局部环，然后利用等特征情形中已知的界限。

[1]这一假设还可以进一步放宽：详见定理2.9 。

(3) 若 p 是 I 的零因子，我们将基于前两种情形的分析，再次将问题归结为特征 p 的等特征情形。指导性观察是：$H^n_I(A)$ 在 p-幂挠，对于 n 超过所需界限的情形（引理 3.2）。

在这一阶段，必须进一步完善论证，以控制理想 $I(A/p)$. 的大高度的行为。系统分析表明，除 bight(I) 整除 dim$(A)-1$的情形外，所有情况都可以解决。在这一剩余情形中，一个关键输入是对临界局部上同调模 $H^q{}_J($ $A/p)$[Lyu07，定理 4。1], 的结构描述，它使我们能够归约到先前处理过的情形，即 p是 A/I上的非零因子。

本文组织如下。在第2节中，我们汇总理想大高度的主要性质及若干微妙特征。随后，我们证明非分歧混合特征情形下局部上同调消没的归纳准则（定理 2.9）。在第3节中，我们利用定理 2.9 证明上同调维数的上界（定理 3.5）。我们还讨论该上界的锐性（例 3.7），并说明如何利用此上界计算经过适当选取的理想的准确上同调维数。在第4节中，我们汇总由本文结果引出的自然问题，并评论当前进展及相关研究方向。

2. 归纳定理

本节中，我们证明一个技术性定理（定理 2.9），它将作为关键的归纳工具，用于证明我们关于上同调维数的界。该定理是 [Fal80，Satz 1] 在非分歧混合特征情形下的推广。我们首先介绍理想的大高度。

定义 2.1. 设 A 为一个诺特环。给定 A 的一个理想 I，I 的大高度为

$$\text{bight}(I) := \max\{\text{ht}(P) \mid P \text{ is a minimal prime of } I\}.$$

注释 2.2. 沿用上述记号，

(1) 若 I $=\text{I}_1\cap\text{I}_2,$，则 bight(I) $\leq$max{bight(I_1)，bight(I_2)}。等号不一定成立：例如，若 A $=\mathbb{C}$[x, y, z],I_1 =(x)，且 I_2 =(x, y) $\cap$(z)，则 bight(I_1) $=1$，而 bight(I_2) $=2$。然而，I =(xz) 且 bight(I) $=1$.(2)。(2) 可能出现 I $\subseteq$ J 且 bight(I) $>$ bight(J) 的情况。例如，在 A $=\mathbb{C}$[x, y, z], 中，若 I =(x) $\cap$(y, z)，而 J =(x)，则 bight(I) $=2$ 且 bight(J) $=1$。(3) 若 P 是 A 中包含 I 的素理想，则 bight(IA_P) $\leq$ bight(I)。(4) 注意，cd(A, I) $\geq$ bight(I)。事实上，设 c $=$ bight(I)，且 P 是 I 的一个高度为 c 的极小素理想。则 IA_P 是由 A_P 的极大理想 PA_P 为根的准素理想，并且由 Grothendieck 的一个结果 [Gro66, Proposition 6.4] 可知 $\text{H}^c_{I\text{A}_P}(\text{A}_P)\neq 0$；或者参见 [ILL$^+$07，Theorem 9.3]。因此，$\text{H}^c_I(\text{A})\neq 0$，且 cd(A,I) $\geq$ c。

引理 2.3. 设 A 是一个诺特环，I 是 A 的一个理想，B 是 A 的一个忠实平坦扩张。则 bight$(I)=$ bight(IB)。

证明。我们断言，IB 的极小素理想集合恰好是当 P 遍历 I 的极小素理想时，PB 的极小素理想集合之并。设 Q 是 IB 的一个极小素理想，且 P $=$Q $\cap$A。若 P 不是 A 的极小素理想，则 P $\supsetneq$P′ $\supseteq$I，其中 P′ $\in$Spec(A)。由下沉定理，存在 Q′ $\in$ Spec(B)，使得 Q $\supsetneq$ Q′ 且 Q′$\cap$A $=$P′。于是 Q $\supsetneq$ Q′ $\supseteq$ IB，矛盾。

现在，设P为I的一个极小素理想。我们注意到，PB的每个极小素理想Q也是IB的极小素理想。事实上，若不然，则$Q \supsetneq Q' \supseteq IB$ 对某个$Q' \in$谱(B). 然而，这

蕴含$P = Q \cap A \supseteq Q' \cap A \supseteq I$。由于$P$是$I$的极小素理想，我们有$Q' \cap A = P$。于是$Q \supsetneq Q' \supseteq PB$，矛盾。

尚需证明：若 Q 是 PB 中关于 $P \in$ 谱(A)的一个极小素理想，则 $\mathrm{ht}(P) =$ht(Q)。由于 B_Q 是忠实平坦的 A_P-代数，根据 [BH93，定理 A。11],

$$\begin{aligned}\dim(B_Q) &= \dim(A_P) + \dim(B_Q/PB_Q)\\ &= \dim(A_P).\end{aligned}$$

因此，$\mathrm{ht}(P) = \mathrm{ht}(Q)$。 □

现在我们证明三个引理，它们将在证明定理 2.9时发挥作用。

引理 2.4。 设 I 是诺特环 A 的一个根理想，且 $x \in A$。设 $P_1,\ldots,P_t$ 是 I 的极小素理想。假设

$$I_1 = \bigcap_{x \in P_i} P_i \ \ and \ \ I_2 = \bigcap_{x \notin P_i} P_i.$$

则 $(I : x) = I_2$ 且 $(I : (I : x)) = I_1$.

证明。 由于$x \in I_1$ 且$I = I_1 \cap I_2$, , 不难看出$I_2 \subseteq (I : x)$。 设$y \in (I : x)$。于是$xy \in I_2$, , 这意味着$y \in I_2$, 因为x 是A/I_2上的非零因子。因此，$(I : x) = I_2$。

还需证明 $(I : I_2) = I_1$。设$z \in (I : I_2)$。 于是$zI_2 \subseteq I_1$, , 这意味着$zI_2 \subseteq P$，其中每个P 都是I_1的极小素理想。然而，根据假设，$I_2 \not\subseteq P$, 因此对于I_1的每个极小素理想P , 都有$z \in P$ 。因此，$z \in I_1$。另一边的包含关系显然成立。 □

引理 2.5。 设 I 和 J 是诺特环 A 中的理想。则

$$\sqrt{(I : (I : J))} \subseteq \sqrt{(\sqrt{I} : (\sqrt{I} : J))}.$$

证明。设 $\mathrm{x} \in \sqrt{(\mathrm{I} : (\mathrm{I} : \mathrm{J}))}$, 且 $\mathrm{y} \in (\sqrt{\mathrm{I}} : \mathrm{J})$。存在 $\mathrm{n},\mathrm{m} \in \mathbb{N}$，使得 $\mathrm{x}^n \in (\mathrm{I} : (\mathrm{I} : \mathrm{J}))$ 且 $(\mathrm{yJ})^m \in \mathrm{I}$。由于 $\mathrm{y}^m\mathrm{J}^{m-1} \subseteq (\mathrm{I} : \mathrm{J})$，故 $\mathrm{x}^n\mathrm{y}^m\mathrm{J}^{m-1} \subseteq \mathrm{I}$。若 $\mathrm{m} > 1$，则可得 $\mathrm{x}^n\mathrm{y}^m\mathrm{J}^{m-2} \subseteq \mathrm{I} : \mathrm{J}$，从而 $\mathrm{x}^{2n}\mathrm{y}^m\mathrm{J}^{m-2} \subseteq \mathrm{I}$。类似地推导可得

$$x^{mn}y^m \in I,$$

这意味着 $x^n y \in \sqrt{I}$。于是 $x^n \in (\sqrt{I} : (\sqrt{I} : J))$. □

注 2.6. 上述包含关系可能是严格的。例如，在 $A = \mathbb{C}[x,y]$, 中，若 $I = (x^2, xy)$ 且 $J = (y)$, , 则 $\sqrt{(I : (I : J))} = \overline{(x, y)}$, 而 $\sqrt{(\sqrt{I} : (\sqrt{I} : J))} = \bar{A}$.

引理 2.7. 设 $(A\ \mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，I 是 A 的一个理想。设 B 是 A 的忠实平坦局部扩张，且其纤维为零维，即 维数$(B/\mathfrak{m}B) = 0$。若对于一个 A-模 M 以及所有满足 维数$(A/P) \geq r$ 的 $P \in$ 谱(A) , $H^i_{IA_P}(M_P) = 0$, 则

$$H^i_{IB_Q}(M \otimes_A B_Q) = 0$$

对于所有满足 维数$(B/Q) \geq r$ 的 $Q \in$ 谱(B) 。

证明。 设Q 是B 中的一个素理想，且 $\dim(B/Q) \geq r$，并令$P = Q \cap A$。由于B/PB 在A/P 上忠实平坦，且$B/\mathfrak{m}B$ 是 0 维的，我们有

$$\dim(A/P) = \dim(B/PB) \geq \dim(B/Q) \geq r.$$

因此 $H^i_{IA_P}(M_P) = 0$，因此

$$H^i_{IB_Q}(M \otimes_A B_Q) = H^i_{IA_P}(M_P) \otimes_{A_P} B_Q = 0.$$

□

定义 2.8。 若混合特征 (0，p) 的正则局部环 (A $\mathfrak{m}$) 满足 $p \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$.，则称其为非分歧的

现在我们可以证明局部上同调消失的归纳准则了。

定理 2.9. 设 $(A\ \mathfrak{m}, k)$ 是混合特征$(0, p)$的非分歧正则局部环，且 I 是 A 的一个理想。假设 $\mathrm{ht}(I) < \mathrm{ht}(I : (I : p))$ （例如，若 p 是 A/I)上的非零因子，则此条件成立）。[2]

令 $c = \mathrm{bight}(I)$。设 $n > c$ 为一个整数。假设对于所有满足 $1 \leq s \leq c-1$ 的整数 s，以及所有满足 $q \geq n-s$ 的 q，都有 $H^q IA_P(A_P) = 0$ 对所有满足 $I \subseteq P$ 且$\dim(A/P) \geq s+1$. 的 $P \in$ 谱(A) 均成立。于是 $H^q I(A) = 0$ 对所有 $q \geq n$ 均成立。

证明。 我们首先注意到

$$\begin{aligned}\mathrm{ht}(\sqrt{I}) = \mathrm{ht}(I) &< \mathrm{ht}(I : (I : p)) \\ &= \mathrm{ht}\left(\sqrt{(I : (I : p))}\right) \\ &\leq \mathrm{ht}\left(\sqrt{(\sqrt{I} : (\sqrt{I} : p))}\right) \\ &= \mathrm{ht}\left(\sqrt{I} : (\sqrt{I} : p)\right)\end{aligned}$$

由引理 2.5。由于理想的局部上同调和大高度仅取决于其根理想，我们可以将问题归约到 I 为根理想的情形。对 n 作下降归纳，我们可以假设对所有 q > n，H^qI (A) = 0。我们需要证明 H^n_I (A) = 0. 。由 Cohen 结构定理、引理 2.3 和引理 2.7，由于完备化是忠实平坦且纤维为零维，我们可以假设 A = V [[X2,. ..,X_e]]，其中 V 是带一致化子 p 的完备离散赋值环。我们对 dim(A/I) 作归纳。如果 dim(A/I) = 0，则 c = dim(A)，且当 n > c 时，H^n_I(A) = 0。

现在，假设 $d :=\dim(A/I) > 0$. 我们断言，若$H^n_I(A)$非零，则其支集仅包含在A的极大理想 $\mathfrak{m}$ 处。反设不然；令P 为 Supp$H^n_I(A)$中的极小元。 注意，$I \subseteq P$。我们分两种情况讨论:

(i) p $\notin$P. 在这种情况下，A_P =(V [[X2,. .. ,X_e]])$_P$ 含有一个特征零域。令 C = $\widehat{A_P}$。由注释 2.2 和引理 2.3 可知，c = bight(I) $\geq$ bight(IC)。我们使用 [Fal80, Satz 1] 来证明 H^n_{IC}(C) = 0，这将推出 $H^n_{IA_P}(A_P)$ =(H^n_I(A))$_P$ = 0，与 P 的选取矛盾。

令 s 为一个整数，使得 $1 \leq s \leq \mathrm{bight}(IC) - 1$. 。令 $Q \in$ 为谱(C)中的一个素理想，使得$IC \subseteq Q$ 且 $\dim(C/Q) \geq s+1$. 。令$Q' = Q \cap A$ 为Q 在A中的收缩。我们有

$$\dim(A/Q') > \dim(A_P/Q'A_P) \geq \dim(C/Q) \geq s+1.$$

由于 dim(A/Q′) > s + 1，根据定理的假设，H^qIAQ′(AQ′) = 0，因此，对于所有 q $\geq$n −s，H^qICQ(CQ) = 0，因为 $A_{Q'} \longrightarrow$ CQ是忠实平坦的。根据 [Fal80, Satz1], ，对于所有 q $\geq$ n，H^q IC(C) = 0 。

(ii) $p \in P$.

我们像上面一样定义 C = $\widehat{A_P}$，并再次得出：对于所有满足1 $\leq$ s $\leq$ bight(IC) − 1的整数 s，以及所有满足 q $\geq$ n −s 的 q，都有 H^q ICQ(CQ) = 0；对于所有满足 IC $\subseteq$ Q 且 dim(C/Q) $\geq$ s + 1. 的 Q $\in$Spec(C)，结论均成立。注意，在这种情况下，C 仍是混合特征 (0, p) 的非分歧正则局部环，因为 $P^{(2)} \subseteq \mathfrak{m}$?[DDSG+18, 定理 2.11]。此外，ht(IC) =ht(I)，且 ht(IC : (IC : p)) = ht(I :

[2]我们采用如下约定：$\mathrm{ht}(A) = \infty$.

$(I:p))$，因为C是一个A-代数，且为忠实平坦。由于 $\dim(C/IC) < \dim(A/I)$，由归纳假设可得$H^n_{IC}(C)=0$，这与上面一样构成矛盾。

因此，$\mathrm{Supp}H^n_I(A) \subseteq \{m\}$.

设 $P1,\ldots,P_t$为 I 的极小素理想。假设

$$I_1 = \bigcap_{p\in P_i} P_i \text{ and } I_2 = \bigcap_{p\notin P_i} P_i.$$

由引理 2.4 和我们的假设，$\mathrm{ht}(I) < \mathrm{ht}(I_1)$。

令 D :=A/I $\widehat{\otimes}_V$A $\cong$V [[X2,. . . , X$_e$,Y2,. . . ,Y$_e$]]/I(X2,. . . X$_e$) 和 Δ =(X$_2$ –Y2,. . . , X$_e$ –Y$_e$) $\subseteq$ D。注意到 0 $\longrightarrow$ I $\widehat{\otimes}_V$A $\longrightarrow$ A $\widehat{\otimes}_V$A $\longrightarrow$ 0 是 D 在 A 上的平坦分解。对于导出函子的复合，我们有一个谱序列

$$E_2^{i,j} = h^i(R\Gamma_\Delta(D \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A h^j(R\Gamma_I(A)))).$$

我们有 $E^{d-1}{}_{,2}{}^{n} \Longrightarrow E^{d-1}{}_{,\infty}{}^{n}$，它是某个滤过中的子商，而该滤过为

$$h^{d-1+n}(R\Gamma_\Delta(D \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A R\Gamma_I(A))) = h^{d-1+n}(R\Gamma_{\Delta+ID}(D)).$$

注意到$ID \subseteq \Delta$是$D/\Delta \cong A/I$，而$d-1+n > d-1+c \geq e-1$，它是 Δ的生成元个数。因此，

$$\begin{aligned} h^{d-1+n}(R\Gamma_{\Delta+ID}(D)) &= H^{d-1+n}_{\Delta+ID}(D) \\ &= H^{d-1+n}_{\Delta}(D) \\ &= 0. \end{aligned}$$

因此，$E^{d-1}{}_{,\infty}{}^{n} = 0$. 现在我们证明，指向$E^{d-1}{}_{,n}2$ 的入射微分以及从其出发的出射微分均为 0，从而得出$E^{d-1}{}_{,2}{}^{n} = 0$. 入射微分来自$E_2^{d-1-r\,n+r-1} =, H^{d-1-r}_\Delta(D \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A H^{n+r-1}_I(A))$，其中$r > 1$。由于$n+r-1 > n$，根据归纳假设，$H^{n+r-1}_I(A) = 0$，因此$E_2^{d-1-r\,n+r-1} = 0$, 。

出射微分指向 $\mathrm{E}_2^{d-1+r\,n-r+1}$，其中 r $>$ 1。若 r $>$ c，则 d $-1+$ r $>$ e -1 且 $\mathrm{E}_2^{d-1+r\,n-r+1} =$，$\mathrm{H}^{d-1+r}_\Delta(\mathrm{D} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A \mathrm{H}^{n-r+1}_I(\mathrm{A})) = 0$，这是通过考察计算 D $\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A \mathrm{H}^{n-r+1}_I$(A) 的谱序列，并注意到 Δ 由 e -1 个元素生成而得出的。设 r $\leq$ c。令 s $=$ r -1，且令 L 为 H^{n-r+1}_I(A) 的有限生成子模。注意1 $\leq$ s $\leq$ c -1. 根据定理的假设，dim(L) $\leq$ s。于是，由 [Ska15，引理 2.1(a)],

$$\dim(A/(I_1+I_2)\widehat{\otimes}_V L) \leq \dim(A/I_1\widehat{\otimes}_V L) \leq \dim(A/I_1)+\dim(L) < d+s.$$

这里，我们使用假设 ht(I) <ht(I_1). 另一方面，根据 [Ska15引理 2.1(b)],，A/I_2 是 p-无挠的，

$$\dim(A/I_2\widehat{\otimes}_V L) = \dim(A/I_2)+\dim(L)-1 = d+s-1.$$

考虑正合列

$$\widehat{\mathrm{Tor}}^V_1(A/(I_1+I_2),L) \longrightarrow A/I\widehat{\otimes}_V L \longrightarrow (A/I_1\oplus A/I_2)\widehat{\otimes}_V L \longrightarrow (A/(I_1+I_2)\widehat{\otimes}_V L) \longrightarrow 0.$$

由于 dim($\widehat{\ }\mathrm{Tor}^V_1$(A/(I$_1$ + I$_2$), L)) $\leq$dim(A/(I$_1$ + I$_2$) $\widehat{\otimes}_V$L)，我们有

$$\dim(A/I\widehat{\otimes}_V L) \leq \max\{\dim(A/I_1\widehat{\otimes}_V L), \dim(A/I_2\widehat{\otimes}_V L)\} < d+s.$$

此外，注意到 $\dim(\widehat{\operatorname{Tor}}_1^V(A/I,\ L)) \leq \dim(A/I\ \widehat{\otimes}_V L)\ < d+s$。注意，作为一个复形，$\mathbb{L}D\otimes_A L$ 可表示为

$$0 \longrightarrow I\ \widehat{\otimes}_V L \longrightarrow A\ \widehat{\otimes}_V L \longrightarrow 0,$$

具有上同调$A/I\ \widehat{\otimes}_V L$ 以及 $\widehat{\operatorname{Tor}}_1^V(A/I,L)$。因此，$H_\Delta^{d+s}(D\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A L)\ = 0$。由于张量积和局部上同调与直极限可交换，$E_2^{d-1+r\ n+r-1} = 0$. ,我们由此证明了

$$E_2^{d-1,n} = H_\Delta^{d-1}(D\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A H_I^n(A)) = 0.$$

由 [Zho98，定理 5。1] 可知，$H_I^n(A)$ 作为一个 A- 模的内射维数至多为 1；根据 [Lyu00，定理 1]或 [NnB13，定理 5。1], $\mathrm{H}_I^n(A)$的 Bass 数有限。我们注意到

$$\begin{aligned} H_\Delta^{d-1}(D\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A E_A(k)) &\cong H_\Delta^{d-1}(D\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A H_{\mathfrak{m}}^e(A)) \\ &\cong h^{d-1}(R\Gamma_\Delta(D\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A R\Gamma_{\mathfrak{m}}(A)[e])) \\ &\cong h^{d-1}(R\Gamma_\Delta(R\Gamma_{\mathfrak{m}D}(D)[e])) \\ &\cong h^{d-1+e}(R\Gamma_{\Delta+\mathfrak{m}D}(D)) \\ &\cong H_{\Delta+\mathfrak{m}D}^{d+e-1}(D), \end{aligned}$$

它非零，因为 $\Delta\mathrm{D}\ +\mathfrak{m}\mathrm{D}$ 是 D 的极大理想，且 $\dim(\mathrm{D})\ =\dim(\mathrm{A/I})+\dim(\mathrm{A})-1=\mathrm{d}\ +\ \mathrm{e}\ -1$。由于 $\mathrm{Supp}(\mathrm{H}_I^n(\mathrm{A}))\ \subsetneq\{\mathfrak{m}\}$，若 $\mathrm{H}_I^n(\mathrm{A})$ 是内射的，则 $\mathrm{H}_I^n(\mathrm{A})\ \cong\mathrm{E}_A(\mathrm{k})^{\oplus a}$，这与根据上述计算所得的 $\mathrm{H}_\Delta^{d-1}(\mathrm{D}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A\mathrm{H}_I^n(\mathrm{A}))\ =0$ 矛盾。因此，$\mathrm{H}_I^n(\mathrm{A})$ 的内射维数必为 1。

假设

$$0 \longrightarrow H_I^n(A) \longrightarrow E_A(k)^{\oplus a} \longrightarrow E_A(k)^{\oplus b} \longrightarrow 0$$

是 $H_I^n(A)$. 的极小内射分解。应用导出函子 $R\Gamma_\Delta(D\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A)$ 后，我们得到以下长正合列片段:

$$h^{d-1}(R\Gamma_\Delta(D\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A H_I^n(A))) \longrightarrow h^{d-1}(R\Gamma_\Delta(D\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A E_A(k)^{\oplus a})) \longrightarrow h^{d-1}(R\Gamma_\Delta(D\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A E_A(k)^{\oplus b})).$$

Since $H_\Delta^{d-1}(D\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A H_I^n(A)) = 0$ and $H_\Delta^{d-1}(D\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A E_A(k)) \cong H_{\Delta+\mathfrak{m}D}^{d+e-1}(D)$, we obtain an exact sequence

$$0 \longrightarrow H_{\Delta+\mathfrak{m}D}^{e+d-1}(D)^{\oplus a} \longrightarrow H_{\Delta+\mathfrak{m}D}^{e+d-1}(D)^{\oplus b}$$

映射的各项都属于理想 $\mathfrak{m}D$，因为我们从一个极小分解开始。取 Matlis 对偶后，我们得到一个满射

$$\omega_D^{\oplus b} \twoheadrightarrow \omega_D^{\oplus a},$$

其各项都属于理想 $\mathfrak{m}D$，这与中山引理矛盾。 □

3. 上同调维数的界

本节中，我们利用定理2.9, [Lyu07，定理 4。1]以及各种众所周知的上同调工具，证明我们所声称的上同调维数上界。我们首先通过以下几个关键引理，为证明奠定基础。

引理 3.1. 设 I 是诺特环 A 的一个理想。假设 $x\ \in A$ 是 A/I 上的零因子，且 $I\ =I_1\cap I_2$ 使得 $x\ \in I_1$ 且 $x\ \notin I_2$. 那么

(1) $\sqrt{I+(x)}=\sqrt{I_1}\cap\sqrt{I_2+(x)}$。*(2)* 假设 x 是 $A/\sqrt{I_2}$上的非零因子。那么

$$\operatorname{bight}(I+(x))\leq\max\{\operatorname{bight}(I_1),\operatorname{bight}(I_2)+1\}.$$

证明。 我们依次验证各个断言。

(1) 由于 $I+(x)=I_1\cap I_2+(x)\subseteq I_1\cap(I_2+(x))$，因此有 $\sqrt{I+(x)}\subseteq\sqrt{I_1}\cap\sqrt{I_2+(x)}$。另一方面，

$$\begin{aligned}\sqrt{I_1}\cap\sqrt{I_2+(x)}&=\sqrt{(I_1(I_2+(x))}\\&\subseteq\sqrt{I_1I_2+(x)}\\&\subseteq\sqrt{I+(x)}.\end{aligned}$$

(2) 对 I 的任意极小素理想 Q_2,，由于 $x\notin Q$，有 $\operatorname{ht}(Q+(x))=\operatorname{bight}(Q+(x))=\operatorname{ht}(Q)+1$。这意味着 $\operatorname{bight}(I_2+(x))\leq\operatorname{bight}(I_2)+1$。由 (1) 和注释 2.2 可得结论。□

引理 3.2。 设 I、A、x、I_1 和 I_2 如引理 *3.1*中所述，M 是一个 A-模，且 $n>\max(\operatorname{cd}(M,I_1),\operatorname{cd}(M,I_2))$。则 $H^n_I(M)$ 是 x-幂挠的，也就是说，$H^n_I(M)$中的每个元素都被 x 的某个幂所湮灭。

证明。 由局部上同调的 Mayer-Vietoris 列，

$$H^n_{I_1}(M)\oplus H^n_{I_2}(M)\longrightarrow H^n_I(M)\longrightarrow H^{n+1}_{I_1+I_2}(M)\longrightarrow H^{n+1}_{I_1}(M)\oplus H^{n+1}_{I_2}(M)$$

是正合的。由于 $n>\max(\operatorname{cd}(M,I_1),\operatorname{cd}(M,I_2))$，$H^n_I(M)\cong H^{n_1+}{}_{n2I_1+I_2}(M)$。由此完成证明，因为 $x\in I_1+I_2$。□

我们将关键地再使用文献中的两个结果，并为便于查阅而陈述它们。

定理 3.3 ([Ser65，第 V 章，定理 3])。 设 A 为正则环，P 与 Q 为 A 的素理想。则 $\operatorname{ht}(P+Q)\leq\operatorname{ht}(P)+\operatorname{ht}(Q)$。

定理 3.4([Lyu07，定理 4.1])。 设 A 为等特征的 d 维正则局部环，具有可分闭剩余域，I 为 A 的理想，其极小素理想为 $P_1,\ldots,P_t$。假设 $d>1$ 且 $\operatorname{bight}(I)=c>0$。设 $u=\left\lfloor\frac{d-2}{c}\right\rfloor$ 且 $v=d-u$。则 $H^v_I(A)$ 同构于该映射的余核

$$\Phi_I:\bigoplus_{j_0<\cdots<j_{u+1}}H^d_{P_{j_0}+\cdots+P_{j_{u+1}}}(A)\longrightarrow\bigoplus_{j_0<\cdots<j_u}H^d_{P_{j_0}+\cdots+P_{j_u}}(A)$$

将每个 $x\in\bigoplus_{j_0<\cdots<j_{u+1}}H^d_{P_{j_0}+\cdots+P_{j_u}}(A)$ 映射到 $\oplus_{s=0}^{s=u}(-1)^s h_s(x)$，其中

$$h_s:H^d_{P_{j_0}+\cdots+P_{j_{u+1}}}(A)\longrightarrow H^d_{P_{j_0}+\cdots+\widehat{P_{j_s}}+\cdots+P_{j_{u+1}}}(A)$$

$\widehat{\ }$*(P_{j_s} 表示省略了 P_{j_s})* 是由包含关系诱导的自然映射

$$P_{j_0}+\cdots+\widehat{P_{j_s}}+\cdots+P_{j_{u+1}}\subseteq P_{j_0}+\cdots+P_{j_{u+1}}.$$

现在我们已准备好证明主要定理。

定理 3.5。 设 A 是一个混合特征$(0,p)$的 d 维非分歧正则局部环。设 I 是 A 的一个非零真理想，其大高度为 c。那么

$$\operatorname{cd}(A,I)\leq d-\left\lfloor\frac{d-1}{c}\right\rfloor.$$

证明。 由于局部上同调和大高度保持不变，不妨设A 是完备的，且I 是根理想。若$c = 1$，则I 是主理想，且 $\mathrm{cd}(A,I) \leq 1$。因此我们设$c > 1$。我们还设$c < d$，因为当$c = d$时，所述界限显然成立。

情形 1： p是A/I上的非零因子。

我们对 d 进行归纳。当 $\mathrm{d} = 1$时无事可证。假设 $\mathrm{d} > 1$. 我们需要证明，对于所有 $\mathrm{q} \geq \mathrm{d} + 1 - \lfloor (\mathrm{d}-1)/\mathrm{c} \rfloor$，都有 $\mathrm{H}^q\mathrm{I}(\mathrm{A}) = 0$。令 $\mathrm{n} = \mathrm{d} + 1 - \lfloor (\mathrm{d}-1)/\mathrm{c} \rfloor$. 根据定理 2.9，只需证明：对于所有满足 $1 \leq \mathrm{s} \leq \mathrm{c}-1$ 的整数 s，以及所有 $\mathrm{q} \geq \mathrm{n} - \mathrm{s}$，都有 $\mathrm{H}^q\mathrm{IAP}(\mathrm{A}_P) = 0$；其中对所有满足 $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{P}$ 且 $\dim(\mathrm{A}/\mathrm{P}) \geq \mathrm{s} + 1$的 $\mathrm{P} \in \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$，该结论均成立。

取满足上述条件的整数 s 和 q，以及素理想 P。注意，p 同样是A_P/IA_P 上的非零因子，并且 $\dim(A_P) < \dim(A)$。 如果$p \in P$， 那么根据归纳假设，

$$\begin{aligned}\dim(A_P) - \left\lfloor \frac{\dim(A_P)-1}{\mathrm{bight}(IA_P)} \right\rfloor &\leq \dim(A_P) - \left\lfloor \frac{\dim(A_P)-1}{c} \right\rfloor \\ &\leq d - s - 1 - \left\lfloor \frac{d-s-2}{c} \right\rfloor\end{aligned}$$

as $\mathrm{bight}(IA_P) \leq \mathrm{bight}(I)$。 若 $p \notin P$， A_P 含有一个特征为 p 的域，则由 [Fal80，推论 2] 可得相同结论。我们还注意到

$$(n-s) - (d-s-1-\left\lfloor \frac{d-s-2}{c} \right\rfloor) = 2 - \left\lfloor \frac{d-1}{c} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{d-s-2}{c} \right\rfloor > 0,$$

其中，最后一个不等式由 $1 \leq s \leq c-1$. 得出。因此，$H^q{}_{IA_P}(A_P) = 0$如所需。

情形 2： $p \in I$。

由于 A 是非分歧的，$A/(p)$ 是一个等特征 p 的正则局部环。由于 $\dim(A/(p)) = d-1$ 且 $\mathrm{bight}(I/(p)) = c-1$，由 [Fal80，推论 2],

$$\mathrm{cd}(A/(p), I/(p)) \leq d - 1 - \left\lfloor \frac{d-2}{c-1} \right\rfloor \leq d - 1 - \left\lfloor \frac{d-1}{c} \right\rfloor.$$

因此，由局部上同调的长正合列，

$$\ldots \longrightarrow H^i_I(A/(p)) \longrightarrow H^{i+1}_I(A) \xrightarrow{p} H^{i+1}_I(A) \longrightarrow H^{i+1}_I(A/(p)) \longrightarrow \ldots,$$

我们有

$$\mathrm{cd}(A,I) \leq \mathrm{cd}(A/(p), I/(p)) + 1 \leq d - \left\lfloor \frac{d-1}{c} \right\rfloor.$$

情形 3： p 是A/I 上的零因子，且$p \notin I$。

对于这种情形的处理，我们假设A 具有可分闭剩余域。由于完备化和严格亨泽尔化都是忠实平坦的，因此保持上同调维数和大高度不变（引理2.3）。设$P1,\ldots,P_t$是I的极小素理想。假设

$$I_1 = \bigcap_{p \in P_i} P_i \text{ and } I_2 = \bigcap_{p \notin P_i} P_i.$$

那么$I = I_1 \cap I_2, p \in I_1$, 且$p$ 是A/I_2上的非零因子。根据引理3.1，

$$\mathrm{bight}(I + (p)) \leq \max\{\mathrm{bight}(I_1), \mathrm{bight}(I_2) + 1\} \leq c + 1.$$

令 $\mathrm{n} > \mathrm{d} - \lfloor \frac{d-1}{c} \rfloor$。注意，由于 I_1 or I_2的每个极小素理想都是 I 的极小素理想，因此 $\mathrm{bight}(\mathrm{I}_1) \leq \mathrm{c}$ 且 $\mathrm{bight}(\mathrm{I}_2) \leq \mathrm{c}$。由于 $\mathrm{p} \in \mathrm{I}_1$， 且 p 是 A/I_2,上的非零因子，根据情形 2 和情形 1，上同调维数 I_1和 I_2分别不超过 $\mathrm{d} - \lfloor \frac{d-1}{c} \rfloor$。由引理 3.2，我们得出$\mathrm{H}^n_I(\mathrm{A})$ 是 p-幂挠的。

Let

$J = \sqrt{I(A/(p))} = \sqrt{I+(p)}/(p), J_1 = I_1/(p)$ and $J_2 = \sqrt{I_2(A/(p))} = \sqrt{I_2+(p)}/(p)$ 是 $A/(p)$ 中的理想。我们有 bight(J) $=$bight$(I+(p))$ $-1 \le c$。利用 th 的正合性 e 序列

$$H_J^{n-1}(A/(p)) \longrightarrow H_I^n(A) \xrightarrow{p} H_I^n(A),$$

只需证明 $H_J^{n-1}(A/(p)) = 0$. 由于 $A/(p)$ 是维数为 $d-1$且包含一个域的正则局部环，根据 [Fal80，推论 2],

$$\begin{aligned} \operatorname{cd}(A/(p),J) &\le d-1-\left\lfloor \frac{d-2}{\operatorname{bight}(J)} \right\rfloor \\ &\le d-1-\left\lfloor \frac{d-2}{c} \right\rfloor \\ &\le d-\left\lfloor \frac{d-1}{c} \right\rfloor \\ &\le n-1. \end{aligned}$$

如果上述不等式中有任何一个是严格的，结论便成立。例如，若c 不整除$d-1$，则上面的第二个不等式是严格的。在唯一剩下的情形中，

$$n = d-\left\lfloor \frac{d-1}{c} \right\rfloor + 1,\ c|(d-1),\ \operatorname{bight}(J) = c, \text{ and } \operatorname{cd}(A/(p),J) = n-1.$$

我们分析 Faltings 的上同调维数界给出的不等式$d-1-\lfloor \frac{d-2}{c} \rfloor \ge \operatorname{cd}(A/(p),J)$是否严格。

设 $d-1 = Nc$。则 $\lfloor \frac{d-1}{c} \rfloor = N$且 $\lfloor \frac{d-2}{c} \rfloor = N-1$。由定理 3.4，由于 A的剩余域是可分闭的， $H_J^{d-N}(A/(p))$同构于下述映射的余核

$$\Phi_J : \bigoplus_{j_0<\cdots<j_N} H^{d-1}_{P_{j_0}+\cdots+P_{j_N}}(A/(p)) \longrightarrow \bigoplus_{j_0<\cdots<j_{N-1}} H^{d-1}_{P_{j_0}+\cdots+P_{j_{N-1}}}(A/(p))$$

将每个 $x \in \bigoplus_{j_0<\cdots<j_N} H^{d-1}_{P_{j_0}+\cdots+P_{j_N}}(A/(p))$ 映射到 $\oplus_{s=0}^{s=N-1}(-1)^s h_s(x)$，其中

$$h_s : H^{d-1}_{P_{j_0}+\cdots+P_{j_N}}(A/(p)) \longrightarrow H^{d-1}_{P_{j_0}+\cdots+\widehat{P_{j_s}}+\cdots+P_{j_N}}(A/(p))$$

$\widehat{\ }$(P_{j_s} 表示P_{j_s} 已被省略) 是由包含关系诱导的自然映射

$$P_{j_0}+\cdots+\widehat{P_{j_s}}+\cdots+P_{j_N} \subseteq P_{j_0}+\cdots+P_{j_N}.$$

注意，若 bight(J) = c，则由引理 3.1 可得 bight(I) =bight(I_2) =c+1 。因此，bight(J_1) = bight(I_1) $-1 <$ c，且 bight(J_2) $=$bight(I_2 +(p)) $-1 =$ c。注意，若 $P_{j_0},\ldots,P_{j_{N-1}}$ 中任一个是 J_1, 的极小素理想

$$\operatorname{ht}(P_{j_0}+\cdots+P_{j_{N-1}}) \le (c-1)+(N-1)c = d-2$$

由定理3.3可知。因此，$P_{j_0}+\cdots+P_{j_{N-1}}$不能是$A$/的极大理想$p$且

$$H^{d-1}_{P_{j_0}+\cdots+P_{j_{N-1}}}(A/(p)) = 0$$

根据 Hartshorne–Lichtenbaum 消失定理。不失一般性，假设$P1,\ldots,P_s$是J_2的极小素理想。上述计算确定了 Φ_J 的陪域为

$$\bigoplus_{j_0<\cdots<j_{N-1}\le s} H^{d-1}_{P_{j_0}+\cdots+P_{j_{N-1}}}(A/(p)).$$

由于 bight(J_2) $=c$，定理 3.4 同样适用，且 $H^{d-n}_{J_2}(A/(p))$ 同构于自然映射的余核

$$\Phi_{J_2}:\bigoplus_{j_0<\cdots<j_N\le s} H^{d-1}_{P_{j_0}+\cdots+P_{j_N}}(A/(p))\longrightarrow \bigoplus_{j_0<\cdots<j_{N-1}\le s} H^{d-1}_{P_{j_0}+\cdots+P_{j_{N-1}}}(A/(p)).$$

因此， Φ_J 的陪域等于 Φ_{J_2}的陪域。此外，显然 image$(\Phi_{J_2})\subseteq$ image(Φ_J)。由此可得，自然映射

$$H^{d-N}_{J_2}(A/(p))\longrightarrow H^{d-N}_{J}(A/(p))$$

由包含映射 $J\subseteq J_2$ 诱导，是满射。

考虑交换图

$$\begin{array}{ccccc} H^{d-N}_{I_2}(A) & \xrightarrow{f_1} & H^{d-N}_{J_2}(A/(p)) & \xrightarrow{f_2} & H^{d-N+1}_{I_2}(A) \\ \downarrow\alpha & & \downarrow\beta & & \downarrow \\ H^{d-N}_{I}(A) & \xrightarrow{g_1} & H^{d-N}_{J}(A/(p)) & \xrightarrow{g_2} & H^{d-N+1}_{I}(A) \xrightarrow{p} H^{d-N+1}_{I}(A) \end{array}$$

我们证明了 β 是满射。由于 p 是 A/I_2, 上的非零因子，根据情形 1，我们有 cd(A, I_2) $\le$ d $-$N。因此，$H^{d-N+1}_{I_2}(A)=0$，且 f_1 是满射。于是， $\beta f_1=g_1\alpha$ 是满射，这迫使 g_1 是满射，且 $g_2=0$. 。因此，p 在 $H^{d-N+1}_{I}(A)$ 上的乘法是单射，由此可推得 $H^{d-N+1}_{I}(A)=0$，因为 $H^{d-N+1}_{I}(A)=H^{n}_{I}(A)$ 根据引理 3.2 是 p 的幂次挠元。由此我们证明了

$$\mathrm{cd}(A,I)\le d-N=d-\left\lfloor\frac{d-1}{c}\right\rfloor. \qquad \square$$

注 3.6. 注意，在上述证明中，若 $p\in I$，实际上我们证明了 cd(A,I) 的一个更强上界，即

$$\mathrm{cd}(A,I)\le \mathrm{cd}(A/p,I/p)+1\le d-\left\lfloor\frac{d-2}{c-1}\right\rfloor.$$

这个上界可能不同于定理 3.5的上界：例如，若 $d=5$ 且 $c=3$。这可能会让人质疑定理 3.5中上同调维数上界在一般情况下是否锐利。我们将在下面的例子中讨论其锐利性。

例 3.7。 设非分歧正则局部环 $(A\ \mathfrak{m})$ 的维数为 $d>0$ 且正整数 $c\le d$，则存在一个理想 I属于 A，使得 cd$(A,\ I)=d-\lfloor\frac{d-1}{c}\rfloor$.我们按照以下方式构造该理想 [Lyu85]。

令 N $=\lfloor\frac{d-1}{c}\rfloor$.令 I0,. ..,$I_N$为 A 中纯高度为 c 的理想，使得 $I_0+\cdots+I_N$是$\mathfrak{m}$-初等的，并令 I $=I_0\cap\cdots\cap I_N$。那么 cd(A, I) $=$d $-$N。该结论的证明与 [Lyu85] 中的证明完全相同。

为避免与前面的注释相矛盾，我们说明在此例中，若 $p\in I$，则 $\lfloor\frac{-2}{d-1}\rfloor=\lfloor_{cd-1c}$ $\rfloor$.事实上，若$\overline{p}\in I$，则有 $p\in I_j$对所有 $j\in\{0,\ldots,N\}$并由定理3.3，

$$d=\mathrm{ht}(I_0+\cdots+I_N)\le 1+(N+1)(c-1)=Nc+c-N.$$

设 $d-1=Nc+k$，其中 $0\le k<c$。那么，上述方程给出 $N+k+1\le c$，或$N+k-1\le c-2$。注意到

$$d-2=N(c-1)+N+k-1,$$

因此，$\lfloor\frac{-2}{d-1}\rfloor=cN=\lfloor\frac{d-1}{c}\rfloor$。

注记 3.8. 在 [HNnBPW18], 中，作者将定理 3.5归于 Faltings，并利用它推导其结果的推论。在随后的通信中，作者澄清，这一归属基于对 Faltings 工作的误解，且定理 3.5 的证明似乎并未见于文献。

上述论证重新得到了他们的结果 [HNnBPW18，定理 3。11]事实上，利用 Zhang 在非分歧混合特征情形下的第二消失定理 [Zha26] ，我们在下文得到了一个加强版。

定理 3.9([Zha26，定理 1。4])。设 A 是一个具有可分闭剩余域的非分歧混合特征 d 维正则局部环。那么，对于 A 的每个理想 I，以下条件等价：

(1) 对所有 $j\,(A) = 0$，$H\,j\,I$ 均成立，其中 $j > d - 2$.*(2)* 维数 $(A/I) \geq 2$，且 A/I 的去心谱连通。

推论 3.10 (参见 [Lyu85，引理], [HNnBPW18，引理 3。10])。设 A 是一个等特征或非分歧混合特征的 d 维正则局部环。设 $I_1,\ldots,I_N$ 是 A 的大高度至多为 $c \geq 1$ 的理想。那么

$$\operatorname{cd}(A, I_1 + \cdots + I_N) \leq d - \left\lfloor \frac{d-1}{c} \right\rfloor + N - 1.$$

证明。我们对 N 进行归纳。$\mathrm{N} = 1$ 的情形由等特征下的 [Fal80, Satz 1] 以及非分歧混合特征下的定理 3.5 得出。对于 $\mathrm{N} > 1$，令 $\mathrm{I}' = \mathrm{I}_1 + \cdots + \mathrm{I}_{N-1}$、$\mathrm{I} = \mathrm{I}' + \mathrm{I}_N$ 以及 $\mathrm{J} = \mathrm{I}_1 \cap \mathrm{I}_t + \cdots + \mathrm{I}_{N-1} \cap \mathrm{I}_N$。注意，根据注释 2.2，每个 $\mathrm{I}_j \cap \mathrm{I}_t$的大高度至多为 c。由于 $\sqrt{\mathrm{J}} = \sqrt{\mathrm{I}' \cap \mathrm{I}_N}$，局部上同调的 Mayer-Vietoris 列给出

$$\cdots \longrightarrow H^{i-1}_J(A) \longrightarrow H^i_I(A) \longrightarrow H^i_{I'}(A) \oplus H^i_{I_N}(A) \longrightarrow \cdots$$

对于 $i > d - \left\lfloor \frac{d-1}{c} \right\rfloor + N - 1$，$H^{i-1}_J(A) = H^i_{I'}(A) = H^i_{I_N}(A) = 0$ 由归纳假设得出。因此，对于 $H^i_I(A) = 0$ 以及 $i > d - \left\lfloor \frac{d-1}{c} \right\rfloor + N - 1$，成立。□

定理 3.11 (参见 [HL90，定理 5。2])。 设$(A\ \mathfrak{m})$ 是一个 d 维等特征或非分歧混合特征正则局部环。设 $c < d$ 为正整数，并令 $N = \left\lfloor \frac{d-1}{c} \right\rfloor$。设 $I_1,\ldots,I_N$是 A 的大高度至多为 c 的理想，且谱$(A/(I_1 + \cdots + I_N)) - \{\mathfrak{m}\}$不连通。则$\operatorname{cd}(A, I_1 \cap \cdots \cap I_N) = d - N$。

证明。 若 $(B\ \mathfrak{n})$ 是一个忠实平坦的 A-代数，且纤维为零维，则 $\operatorname{bight}(IB) = \operatorname{bight}(I)$ (引理 2.3) 且谱$(B/(I_1B + \cdots + I_NB) - \{\mathfrak{n}\}$不连通。因此，我们可以假设 A 的剩余域是可分闭的。

令 $\mathfrak{a}_i = (I_1 \cap \cdots \cap I_i) + I_{i+1} + \cdots + I_N$. 根据推论 3.10，

$$\operatorname{cd}(A, \mathfrak{a}_i) \leq d - N + (N - i + 1) - 1 = d - i.$$

我们通过归纳法证明 $\operatorname{cd}(A\ \mathfrak{a}_i) = d - i$。对于 $i = 1$，由于 $A/\mathfrak{a}_1$的去心谱不连通，这可由 [HL90，定理 29] 在等特征的情形下以及定理 3.9 在非分歧混合特征的情形下得到。对于 $i > 1$，令

$$J_1 = I_i + \cdots + I_N \text{ and } J_2 = (I_1 \cap \cdots \cap I_{i-1}) + I_{i+1} + \cdots + I_N.$$

那么 $\sqrt{J_1 + J_2} = \sqrt{\mathfrak{a}_{i-1}}$和 $\sqrt{J_1 \cap J_2} = \sqrt{\mathfrak{a}_i}$. 注意到 $\operatorname{cd}(A, J_s) \leq d - i$对于 $s = 1, 2$，根据引理 3.10。对应的局部上同调 Mayer-Vietoris 列

$$\cdots \longrightarrow H^{d-i}_{\mathfrak{a}_i}(A) \longrightarrow H^{d-i+1}_{\mathfrak{a}_{i-1}}(A) \longrightarrow H^{d-i+1}_{J_1}(A) \oplus H^{d-i+1}_{J_2}(A) \longrightarrow \cdots$$

意味着 $H^{d-i}_{\mathfrak{a}_i}(A) \neq 0$ as $\mathrm{cd}(A\ \mathfrak{a}_{i-1}) = d-i+1$ 由归纳假设可得。因此，$\mathrm{cd}(A\ \mathfrak{a}_i) = d-i$。 </style}结论由 $I_1 \cap \cdots \cap I_N$. □得出

我们详细讨论 Huneke 和 Lyubeznik 的一个例子，以说明定理3.11涉及了例3.7未涵盖的例子。

例 3.12 ([HL90, 例 5.4]). 设 $(A\ \mathfrak{m})$ 是一个 d 维等特征或非分歧混合特征正则局部环。假设 $P1,\ldots,P_5$ 是 A 中高度为 c 的素理想，满足 $\lfloor \frac{d-1}{c} \rfloor = 2$. 此外，假设 $P_i + P_j + P_k$ 是 $\mathfrak{m}$-初等的当且仅当

$$\{i,j,k\} \in \Lambda = \{(1,3,4),(1,3,5),(1,2,5),(2,3,4),(2,4,5)\}.$$

令 $I = P_1 \cap \cdots \cap P_5$. 例如，我们可以考虑 $A = V[[x2,\ldots,x_9]],$，其中 V 是一个离散赋值环，其一致化子为 p，且剩余域可分闭，并且

$$P_1 = (p,x_2,x_3,x_4),\ P_2 = (x_3,x_4,x_5,x_6),\ P_3 = (x_5,x_6,x_7,x_8),$$
$$P_4 = (p,x_2,x_8,x_9) \text{ and } P_5 = (x_6,x_7,x_8,x_9).$$

注意， Λ 具有如下性质：对每个 i， $1 \leq i \leq 5$ 出现至多三次，而每一对 (i, j) 出现至多两次。这意味着我们无法将 $\{1,\ldots,5\}$ 分成三个互不相同的子集 S_0, S_1 和 S_2，使得对所有 $i \in S_0, j \in S_1, k \in S_2$，$P_i + P_j + P_k$ 都是 $\mathfrak{m}$-初等理想。因此，我们无法应用例 3.7 的结论。

然而，我们可以写成 $I = I_1 \cap I_2,$，其中 $I_1 = P_1 \cap P_2 \cap P_3$，且 $I_2 = P_4 \cap P_5$。要应用定理 3.11，我们需要验证 $\mathrm{Spec}(A/(I_1+I_2)) - \mathfrak{m}$ 是不连通的。令 $J = (P_1+P_4) \cap (P_2+P_4) \cap (P_1+P_5)$, ~~$K = (P_3+P_4) \cap (P_2+P_5) \cap (P_3+P_5)$~~。那么 $J+K$ 是$\mathfrak{m}$-初等理想，且 $\sqrt{J \cap K} = \sqrt{I_1+I_2}$。因此，定理 3.11 的假设均已满足，且 $\mathrm{cd}(A,I) = d-2$.

4. Questions and Further Directions

定义4.1。设A 是一个诺特局部环，且$B =$ $((\widehat{A})^{sh})$，即A的完备化的严格亨泽尔化的完备化。若A 的理想I 满足形式几何不可约，则称之为IB 在B中有唯一的极小素理想。

1990年，Huneke和Lyubeznik [HL90] 在等特征情形下改进了Faltings的界，条件是所讨论的理想形式几何不可约。

定理4.2([HL90，定理3。8])。 设A是一个等特征的d维正则局部环，I是A的一个形式几何不可约理想，且其大高度为c。假设 $0 < c < d$。 那么

$$\mathrm{cd}(A,I) \leq d-1-\left\lfloor \frac{d-2}{c} \right\rfloor.$$

Huneke和Lyubeznik通过改进 [Fal80，定理 1]（若I 形式几何不可约）。[3]

定理4.3 ([HL90，引理3.7])。 设 A 是一个等特征正则局部环，I 是 A 的形式几何不可约理想。

设 c = 大高度(I)。令 $n > c$ 为一个整数。假设对于所有整数 s，只要 $1 \leq s \leq c-1$，且对于所有 $q \geq n-s$，$H^q I A_P(A_P) = 0$ 对所有满足 $I \subseteq P$ 且维数$(A/P) \geq s+2$. 的 $P \in$ 谱(A) 成立。那么对于所有 $q \geq n$，$H^q I(A) = 0$。

[3]事实上，Huneke 和 Lyubeznik 在等特征情形下证明了一个更强的归纳准则；参见 [HL90，定理2.5]。

问题 4.4。 设A 是一个d维非分歧混合特征的正则局部环，并且I 是A 的一个大高度为c的形式几何不可约理想。假设$0 < c < d$。是否

$$\mathrm{cd}(A,I) \le d-1-\left\lfloor \frac{d-2}{c} \right\rfloor ?$$

命题4.5。 给定上述的 A、I、d 和 c，若 p 属于 I，或是 A/I 上的零因子，则

$$\mathrm{cd}(A,I) \le d-1-\left\lfloor \frac{d-2}{c} \right\rfloor .$$

证明。 若 $c = 1$，则 I是主理想，且 $\mathrm{cd}(A,I) \le 1 \le d-1-\lfloor \frac{d-2}{c} \rfloor$ 显然成立。假设$c > 1$.

我们不妨假设 A 是完备的，且其剩余域可分闭。于是，由于 I 是形式几何不可约的，它有唯一的极小素理想。我们不妨假设I是根理想，因而是素理想。现在有$p \in I$。

由于 A 是非分歧的，A/(p) 是一个特征 p 的等特征完备正则局部环。注意，$\dim(A/(p)) = d-1$，$\mathrm{bight}(I/(p)) = c-1$，且 I/(p) 在 A/(p) 中有唯一的极小素理想。由定理4.2,

$$\mathrm{cd}(A/(p),I/(p)) \le d-2-\left\lfloor \frac{d-3}{c-1} \right\rfloor .$$

考虑局部上同调模的长正合列

$$\cdots \longrightarrow H^i_I(A/(p)) \longrightarrow H^{i+1}_I(A) \xrightarrow{p} H^{i+1}_I(A) \longrightarrow \cdots .$$

由于 $p \in I$，对所有i而言，$H^i_I(A)$ 都是p幂扭模。因此，

$$\mathrm{cd}(A,I) \le \mathrm{cd}(A/(p),I/(p))+1 \le d-1-\left\lfloor \frac{d-3}{c-1} \right\rfloor \le d-1-\left\lfloor \frac{d-2}{c} \right\rfloor . \qquad \square$$

问题 4.4 在 p 是 A/I上的非零因子时仍未得到解答。最后，我们提出：

问题 4.6。 设A 是一个混合特征 $(0,p)$ 的d维分歧正则局部环。设$I \neq 0$是A的一个大高度为c的理想。是否有 $\mathrm{cd}(A,I) \le d-\lfloor \frac{d-1}{c} \rfloor$?

在下面的备注中，我们讨论问题 4.6的一种可能方法，并尝试利用非分歧混合特征情形下界的尖锐性，以否定的方式回答该问题。

备注 4.7。 给定 A、I、d 和 c 如上，我们在分析问题 4.6时可以假设 A 是完备的。根据科恩结构定理,

$$A = \frac{V[[x_1,\ldots,x_d]]}{(g-p)},$$

其中，V是一个以p为一致化子的离散赋值环，且$g \in (p,x1,\ldots,x_d)^2 \setminus (p)$。令$B = V[[x1,\ldots, x_d]]$，并令$f = g-p \in B$。

令 $J = I+(f)$ 是 B的一个理想。根据引理 3.1，$\mathrm{bight}(J) \le \mathrm{bight}(I)+1 \le c+1$. 根据定理 3.5，我们有

$$\mathrm{cd}(B,J) \le d+1-\left\lfloor \frac{d}{c+1} \right\rfloor .$$

考虑局部上同调模的长正合列

$$H^{n-1}_J(B) \xrightarrow{f} H^{n-1}_J(B) \longrightarrow H^{n-1}_I(A) \longrightarrow H^n_J(B) \xrightarrow{f} H^n_J(B).$$

注意，若 $f \in J$ 且 $H^n_J(B) \neq 0$，则 $H^{n-1}_I(A) \neq 0$。因此，要通过这种方法得到一个满足 $\operatorname{cd}(A,I) > d - \lfloor \frac{d-1}{c} \rfloor$ 的例子，我们需要选择 d 和 c 使得

$$\left(d+1-\left\lfloor \frac{d}{c+1} \right\rfloor\right) - 1 > \left(d - \left\lfloor \frac{d-1}{c} \right\rfloor\right),$$

这归结为

$$\left\lfloor \frac{d-1}{c} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{d}{c+1} \right\rfloor.$$

仍需在 B 中找到一个理想 J，使得 $f \in J$，$\operatorname{height}(J) = c+1$ 且 $\operatorname{cd}(A,J) = d+1-\lfloor \frac{d}{c+1} \rfloor$。事实上，对于这样的 J，$\operatorname{cd}(A, J/(f)) \geq \left(d+1-\lfloor \frac{d}{c+1} \rfloor\right) - 1 > \left(d - \lfloor \frac{d-1}{c} \rfloor\right)$。

令 $N = \lfloor \frac{d-1}{c} \rfloor$ 且 $M = \lfloor \frac{d}{c+1} \rfloor$。我们尝试构造一个如例 3.7 中的 J。我们需要大高度为 $c+1$ 的理想 $I_0, \ldots, I_M \subseteq B$，使得对于所有 j，$f \in I_j$，且 $I_0 + \cdots + I_M$ 是 $(p, x_1, x_2, \ldots, x_d)$-准素的。然而，由定理 3.3 应用于 A 的理想 $(I_0 + \cdots + I_M)/(f)$，

$$\begin{aligned} \operatorname{ht}(I_0 + \cdots + I_M) &\leq 1 + (M+1)c \\ &\leq 1 + Nc \\ &\leq 1 + (d-1) \\ &< d+1. \end{aligned}$$

因此，不存在这样的选择 $I_0, \ldots, I_M$，我们也无法通过这种方法得到反例。

据我们所知，问题 4.6 尚未得到解答。

致谢

我衷心感谢 Linquan Ma 与我进行了许多富有见地的讨论，并提出了有益的建议。感谢 Uli Walther 提出了敏锐的评论和建议，使稿件得以改进。我感谢 Vaibhav Pandey 与我进行了许多启发性的交谈，并始终给予我支持和鼓励。我也感谢 Karl Schwede 和 Bernd Ulrich 就这项工作进行了宝贵的讨论。

本研究的大部分工作是在我访问普林斯顿高等研究院期间完成的。感谢高等研究院的热情接待，也感谢 Linquan Ma 邀请我前往访问。

本研究得到美国国家科学基金会资助项目 DMS-2302430 和 DMS-2100288，以及 Simons Foundation 资助项目 SFI-MPS-TSM-00012928 的支持。

参考文献

[Bar95] Margherita Barile. 与对称矩阵和交错矩阵相关的理想的算术秩。《代数杂志》，176 1 59 82, 1995 1 ( ): – .

[+25] BBL Bhargav Bhatt、Manuel Blickle、Gennady Lyubeznik、Anurag K. Singh 和 Wenliang Zhang. 反常层在交换代数中的应用。《纯粹与应用数学杂志》，825 138，2025 812:–.

[BH93] Winfried Bruns 和 J¨urgen Herzog. *Cohen-Macaulay* 环，第39卷，剑桥高等数学研究丛书。剑桥大学出版社，剑桥，1993 4。

[25] BMSMP Manav Batavia、Kesavan Mohana Sundaram、Taylor Murray 和 Vaibhav Pandey. 完全交理想的剩余交的算术秩。https://arxiv.org/abs/2510.17049 2025 ，。1

[90] BS Winfried Bruns 和 Roland Schw¨anzl. 定义行列式簇的方程数量。《伦敦数学学会通报》，22(5):439–445，1990年。1

[Bur26] Andrew Burke. 局部上同调缺陷与Mustat ˘ https://a–Popa猜想。，。 arxiv.org/abs/2602.05197 2026 2 [+18] ´DDSG Hailong Dao、Alessandro De Stefani、Eloısa Grifo、Craig Huneke 和 Luis N´u˜nez Betancourt. 理想的符号幂。载于《奇点与叶层：几何、拓扑与应用》，Springer数学与统计学论文集第 222 387 432 2018 5卷，页码–。[16] Springer，Cham，。DT Hailong Dao和Shunsuke Takagi. 关于深度与上同调维数之间的关系。Compos. Math., 152 4 876 888, 2016 2 ( ): – . Fal Gerd Faltings. 关于高阶局部上同调群。J. Reine Angew. Math., 313:43–51，1980年。2, 3, 5, 9, 10, 12, 13[Gro66] Alexander Grothendieck. 局部上同调，数学讲义第41卷。Springer，柏林、海德堡、纽约，1966 1, 3 。Har Robin Hartshorne. 代数簇的上同调维数。[68] Ann. of Math. (2), 88:403–450，1968年。1[HL90] Craig Huneke 和 Gennady Lyubeznik. 关于局部上同调模的消失。Invent. Math., 102(1):73–93，1990年。1, 12, 13[HNnBPW18] Daniel J. Hern´andez、Luis N´u˜nez Betancourt、Felipe P´erez 和 Emily E. Witt. 混合特征中的上同调维数、Lyubeznik数与连通性。J. Algebra, 514:442–467，2018年。12[HS77] Robin Hartshorne 和 Robert Speiser. 特征p下的局部上同调维数。Ann. of Math. (2), 105(1):45–79，1977年。2[ILL+07] Srikanth B. Iyengar、Graham J. Leuschke、Anton Leykin、Claudia Miller、Ezra Miller、Anurag K. Singh 和 Uli Walther. 二十四小时局部上同调，数学研究生丛书第87卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2007 1, 3 。JPSW Jack [25] Jeffries、Vaibhav Pandey、Anurag K. Singh 和 Uli Walther. 行列式零锥的算术秩。https://arxiv.org/abs/2509.20470 2025 1 ，。Lyu Gennady [85] Lyubeznik. 射影空间中若干具有高局部上同调维数的代数集。Proc. Amer. Math. Soc., 95 1 9 10, 1985 11, 12 ( ): – . Lyu Gennady Lyubeznik. 混[00] 合特征正则局部环的局部上同调模的有限性性质：非分歧情形。Comm. Algebra, 28(12):5867–5882, 2000年。为纪念Robin Hartshorne的专辑。2, 7[Lyu06] Gennady Lyubeznik. 关于特征p下局部上同调的消失 > 0。Compos. Math., 142(1):207–221，2006年。2[Lyu07] Gennady Lyubeznik. 关于一些局部上同调模。Adv. Math., 213(2):621–643，2007年。3, 7, 8[MP22] Mircea Mustat˘a 和 Mihnea Popa. 局部上同调中的Hodge滤过、Du Bois复形与局部上同调维数。Forum Math. Pi, 10 22, 58, 2022 2 :论文编号e。[13] ´˜ NnB Luis Nunez Betancourt. 小维数环上的多项式环或幂级数环的局部上同调模。Illinois J. Math., 57 1 279 294, 2013 2, 7 ( ): – . Ogu Arthur [73] Ogus. 代数簇的局部上同调维数。Ann. of Math. (2), 98:327–365，1973年。1, 2[PS73] Christian Peskine 和 Lucien Szpiro. 有限射影维数与局部上同调。应用于证明M. Auslander、H. Bass和A. Grothendieck的猜想。Inst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math., 42:47–119，1973年。1[RSW23] Thomas Reichelt、Morihiko Saito 和 Uli Walther. 局部上同调维数的拓扑计算。J. Singul., 26:13–22，2023年。2[Ser65] Jean-Pierre Serre. 局部代数。重数，第11卷，数学讲义。Springer-Verlag，柏林—纽约，1965年。法兰西学院课程，1957–1958年，由Pierre Gabriel整理，第二版，1965年。8[Ska15] Chris Skalit. 非分歧情形下Serre的交叉重数。J. Algebra, 428 121，2015 91 6 : – .[Var13] Matteo Varbaro. 上同调维数与射影维数。Compos. Math., 149 1210，2013 7 1203 2 ( ): – .[Zha26] Wenliang Zhang. 局部上同调模的第二消失定理。Math. Res. Lett., 32(6):2039–2062，2026年。1, 12[Zho98] Caijun Zhou. 高阶导数与局部上同调模。J. Algebra, 201 372，1998 2 363 2, 7 ( ): – .

数学系，普渡大学，北大学街150号，西拉斐特，印第安纳州47907，美国电子邮箱：mbatavia@purdue.edu