arXiv:2602.22233v1 [math.RA] 18 Feb 2026

联合不变子空间的齐次零点定理

Sizhuo Yan、Jianting Yang 与 Lihong Zhi

2026年2月

摘要

Jurij Volˇciˇc 猜想：一个非交换多项式 g 属于由有限多个非交换多项式生成的含幺 $\mathbb{K}$-代数，当且仅当对任意大小的矩阵，生成元的赋值的每一个联合不变子空间在 g的赋值下也保持不变。本文通过证明当生成元为齐次时该等价关系成立，建立了联合不变子空间的齐次零点定理。与之相对，我们证明该陈述在一般情形下不成立，从而彻底解决了这一猜想。

1 引言

希尔伯特零点定理是交换代数几何中的一项基础性结果，因此自然会让人寻求其在非交换多项式背景下的推广。交换情形与非交换情形的一个关键区别在于，非交换多项式的零点有多种彼此不等价的定义。本文聚焦于 Jurij Volˇciˇc 关于以联合不变子空间表述的非交换多项式零点定理的猜想。

在本文中， $\mathbb{N}$表示自然数集， $\mathbb{K}$ 表示特征为零的代数闭域。我们用 $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_d)$ 表示一个非交换变量元组，其中 d是正整数。设 $\mathbb{K}\langle x\rangle$ 为由 $x_1, \ldots\ldots, x_d$生成的自由 $\mathbb{K}$-代数；等价地，$\mathbb{K}\langle x\rangle$ 是由 $\mathbb{K}$ 上的 d 个变量构成的非交换多项式代数。 $\mathbb{K}\langle x\rangle$中的非交换多项式具有如下形式

$$f = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \omega_i, \text{ where } \omega_i \in \langle \underline{x} \rangle, \ \alpha_i \in \mathbb{K}, \ N \in \mathbb{N}.$$

记号 $\langle x\rangle$ 是由 $x_1, x_2, \ldots, x_d$生成的词集。词 ω 的次数即其长度，记为$\deg(\omega)$。非交换多项式 f 的次数是出现在 f中的词的最大长度，我们

将其记为$\deg(f)$。设 $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d) \in \mathrm{M_n}(\mathbb{K})^d$ 表示一个$n \times n$ 矩阵的 d 元组。非交换多项式 $f \in \mathbb{K}\langle x \rangle$ 在X 处的求值记为 $f(X)$。

当非交换多项式在矩阵处取值时，作者概述了不同类型的零点，即真零点、行列式零点、方向零点、弱零点和三重零点。作者还介绍了对应于以不同方式定义的零点的零点定理 [1, 4, 5, 6, 8, 9, 13]。此外，带 involution 的自由 *-代数及其 *-表示也定义了类似的零点，并满足相应的实零点定理 [2, 4, 10, 12, 14]。值得回顾的是两个与本文结果密切相关的零点定理。

真零点集 非交换多项式 g 的真零点集定义为所有元组 $X = (X_1, \ldots, X_d) \in \mathrm{M_n}(\mathbb{K})^d$ 的集合，其中存在某个 n使得$g(X) = 0$。类似地，非交换多项式 $f_1, \ldots, f_l$ 的公共真零点集由满足以下条件的元组 X组成：对所有 $j = 1, \ldots, l$，均有 $f_j(X) = 0$。形式上，这些集合记为：

$$Z(g) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ X \in \mathrm{M_n}(\mathbb{K})^d \mid g(\underline{X}) = 0 \right\}.$$

$$Z(f_1, \ldots, f_l) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ X \in \mathrm{M_n}(\mathbb{K})^d \mid f_j(\underline{X}) = 0 \text{ for all } j = 1, \ldots, l \right\}.$$

在额外假设 $f_1, \ldots, f_l$ 为齐次的情况下，与真零点相对应的零点定理如下：

定理 1.1 (Salomon-Shalit-Shamovich)。 *[13]*对于 $f_1, \ldots, f_l$，$g \in \mathbb{K}\langle x \rangle$，假设 $f_1, \ldots, f_l$ 为齐次，则以下条件等价：

(i) $Z(f_1, \ldots, f_l) \subseteq Z(g)$;

(ii) 多项式 g 属于由多项式$f_1, \ldots, f_l$生成的双边理想。

方向零点集 非交换多项式 g 的方向零点集定义为所有有序对 (X, v) 的集合，其中 $X = (X_1, \ldots, X_d)$ 是由某个 n 上的 d 个 $n \times n$ 矩阵组成的元组，而 $v \in \mathbb{K}^n$ 是满足 $g(X)v = 0$ 的向量。类似地，非交换多项式 $f_1, \ldots, f_l$ 的公共方向零点集由满足条件 $f_j(X)v = 0$ 的有序对 (X, v) 构成，其中该条件对所有 $j = 1, \ldots, l$ 均成立。这些集合记为：

$$Z^{\mathrm{dir}}(g) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ (\underline{X}, v) \in \mathrm{M_n}(\mathbb{K})^d \times \mathbb{K}^n \mid g(\underline{X})\, v = 0 \right\}.$$

$$Z^{\mathrm{dir}}(f_1, \ldots, f_l) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ (\underline{X}, v) \in \mathrm{M_n}(\mathbb{K})^d \times \mathbb{K}^n \mid f_j(\underline{X})\, v = 0 \text{ for all } j = 1, \ldots, l \right\}.$$

与方向零点对应的零点定理如下：

定理 1.2 (伯格曼)。 *[5, 6]* 对于 $f_1, \ldots, f_l, g \in \mathbb{K}\langle x\rangle$，以下条件等价：

(i) $Z^{\mathrm{dir}}(f_1, \ldots, f_l) \subseteq Z^{\mathrm{dir}}(g)$;

(ii) 多项式 g 属于由多项式 $f_1, \ldots, f_l$ 生成的左理想。

在 [18], 中，作者解释说，上述定理中的条件 (i) 可解释为： $f_1, \ldots, f_l$ 的矩阵值的所有联合核空间，都是多项式 g 的矩阵值的核空间；随后，作者将核空间推广为不变空间，并提出了以下猜想。

猜想 1.3。 [18, 猜想 3.2] 对于 $f_1, \ldots, f_l, g \in \mathbb{K}\langle x\rangle$，以下条件等价：

(i) 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})^d$， $f_1(X) \ldots, f_l(X)$ 的联合不变子空间都是 $g(X)$ 的不变子空间；(ii) g 属于由 $f_1, \ldots, f_l$ 生成的含幺 $\mathbb{K}$-代数。

在 [18], 中，该猜想对 $l = 1$ 得到了验证，并可表述为以下命题。

命题 1.4。 *[18, 命题 3.3]* 设 $f, g \in \mathbb{K}\langle x\rangle$。那么 $g \in \mathbb{K}[f]$ 当且仅当对所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $X \in M_n(\mathbb{K})^d$， $f(X)$ 的特征向量都是 $g(X)$ 的特征向量。

尽管该猜想对 $l = 1$ 成立，但对 $l > 1$ 仍未解决，而本文正是针对这一颇具挑战性的情形展开研究。

我们的贡献

受定理 1.1 证明的启发，我们注意到，生成元的齐次性可以通过限制次数来简化代数结构。因此，我们建立了不变子空间包含这一几何条件与 g 属于由齐次 $f_1, \ldots, f_l$ 生成的子代数这一代数条件之间的等价关系；也就是说，在假设 $f_1, \ldots, f_l$ 为齐次的情况下，猜想 1.3 成立。

定理 1.5 （联合不变子空间的齐次零点定理）。设 $f_1, \ldots, f_l, g \in \mathbb{K}\langle x\rangle$，其中 $f_1, \ldots, f_l$ 均为齐次。则以下条件等价：

(i) 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^d$， $f_1(X) \ldots, f_l(X)$ 的每个联合不变子空间都在 $g(X)$ 作用下保持不变；

(ii) g 属于由 $f_1, \ldots, f_l$ 生成的含幺 $\mathbb{K}$-代数。

接下来，我们不再假设 $f_1, \ldots, f_l$ 具有齐次性，并据此探讨猜想 1.3。特别地，我们证明定理 1.5 不适用于非齐次生成元。

定理 1.6. 存在非齐次多项式 $f_1, \ldots, f_l, g \in \mathbb{K}\langle x\rangle$，满足 $l \geq 2$，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^d$，$f_1(X) \ldots, f_l(X)$ 的每个联合不变子空间都在 $g(X)$ 作用下保持不变，但 g 不属于由 $f_1, \ldots, f_l$ 生成的含幺 $\mathbb{K}$-代数。因此，猜想 *1.3* 并非普遍成立。

我们并未针对猜想 1.3 构造明确的反例，而是从可计算性差距得出结论：一般而言，子代数成员资格问题不可判定（定理 3.1）；而关于不变子空间的条件则可通过实闭域的一阶理论判定（定理 3.2）。

相比之下，当生成元 $f_1, \ldots, f_l$ 为齐次时，相应的子代数成员资格问题已知是可判定的 [11], ，这与本文所确立的联合不变子空间齐次零点定理的有效性相一致。

2 联合不变子空间的齐次零点定理

本节证明，在生成元 $f_1, \ldots, f_l$ 为齐次的假设下，猜想 1.3 成立。我们的证明依赖于截断 Fock 空间中的构造。

设 $x_1, \ldots, x_d$ 为 d 非交换变量。阶数为 m 的非交换截断 Fock 空间是一个有限维 $\mathbb{K}$ 内积空间

$$\mathcal{F}_m := \mathrm{span}\{\omega \mid \omega \in \langle \underline{x}\rangle,\ \deg(\omega) \leq m\},$$

其中 $\{\omega \mid \omega \in \langle x\rangle, \deg(\omega) \leq m\}$ 是 $\mathcal{F}_m$ 的标准正交基。

对于每个变量 x_k，左创造算子 L_{x_k} 在希尔伯特空间 $\mathcal{F}_m$ 上定义为

$$L_{x_k}(\omega) := \begin{cases} x_k\omega, & \text{if } \deg(\omega) < m, \\ 0, & \text{if } \deg(\omega) = m. \end{cases}$$

设 $\mathbb{K}\langle x\rangle$ 为非交换多项式的 $\mathbb{K}$-代数。对于一个固定的正整数 m，设 I_m 为双边理想

$$I_m := \Big\langle \omega \mid \omega \in \langle \underline{x}\rangle,\ \deg(\omega) > m \Big\rangle,$$

那么代数 $\mathbb{K}\langle x\rangle / I_m$ 由具有以下形式的元素构成。

$$\hat{f} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \omega_i + I_m \ , \text{ where } \deg(\omega_i) \leq m.$$

设 V 是域 $\mathbb{K}$ 上的一个向量空间，且 $T = (T_1, \ldots, T_l)$ 是作用于 V 上的一组线性算子。设 $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_l\}$ 是一组非交换

变量，且 $\langle y\rangle$ 是由 y_1，y_2，.....，y_l生成的词集。设 u 是 $\langle y\rangle$中的一个元素。对于固定向量 $\underline{v} \in V$和 $k \geq 0$，令

$$\mathcal{V}_k := \operatorname{span}\big\{u(\underline{T})v \mid u \in \langle \underline{y}\rangle,\ \deg(u) \leq k\big\}.$$

由此可知，存在一个子空间升链

$$\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{V}_k \subseteq \cdots .$$

对于这样的子空间升链，由此可知

引理 2.1. 对于有限维线性空间 V，其并

$$\mathcal{V}_\infty := \bigcup_{k\geq 0} \mathcal{V}_k$$

是在 T 中的算子作用下包含 v 的最小联合不变子空间。此外，存在整数 a，使得

$$\mathcal{V}_a = \mathcal{V}_{a+1} = \mathcal{V}_{a+2} = \cdots = \mathcal{V}_\infty \subseteq V,$$

and

$$a \leq \dim V.$$

证明. 子空间 $\mathcal{V}_\infty$ 是不变子空间，因为

$$T_j\mathcal{V}_\infty = \bigcup_{k\geq 0} T_j\mathcal{V}_k \subseteq \bigcup_{k\geq 1} \mathcal{V}_k \subseteq \mathcal{V}_\infty,\ \text{for all } j = 1 \ldots l.$$

如果存在不变子空间 W，使得

$$v \in W \subsetneq \mathcal{V}_\infty,$$

then

$$u(\underline{T})v \in W,\ \text{for all } u \in \langle \underline{y}\rangle.$$

因此

$$\mathcal{V}_\infty \subseteq W.$$

因此，子空间 $\mathcal{V}_\infty$ 是包含 v 且在 T 中的算子作用下不变的最小联合不变子空间。

对于 $i \in \mathbb{N}$，如果

$$\mathcal{V}_i \subsetneq \mathcal{V}_{i+1},$$

then

$$\dim(\mathcal{V}_i) < \dim(\mathcal{V}_{i+1}).$$

由于空间 V 是有限维线性空间，因此存在一个整数 a，使得

$$\mathcal{V}_a = \mathcal{V}_{a+1} = \mathcal{V}_{a+2} = \cdots = \mathcal{V}_\infty \subseteq V,$$

and

$$a \leq \dim V.$$

□

现在，我们可以给出关于非交换齐次多项式的主要结果。

定理 *1.5* 的证明。

(ii) $\Longrightarrow$ (i) 是显然的。 (i) $\Longrightarrow$ (ii)。令 $\mathcal{F}_m$ 为阶数为 m 、含有 d 个非交换变量 $x_1, \ldots, x_d$的截断 Fock 空间，并令 $L = (L_{x_1}, \ldots, L_{x_d})$ 为相应的左创造算子。

考虑算子元组

$$F(\underline{L}) = (f_1(\underline{L}), \ldots, f_l(\underline{L})).$$

令向量 $v = \mathbf{1} \in \mathcal{F}_m$ （为避免歧义，令 $\mathbf{1}$ 为与常数多项式 $1 \in \mathbb{K}\langle x \rangle$对应的向量）。

由 $v = \mathbf{1}$ 和 $F(L)$ 生成的子空间升链定义如下：

$$\mathcal{V}_0 := \operatorname{span}\{v\},\ k = 0,$$
$$\mathcal{V}_k := \operatorname{span}\{u(F(\underline{L}))v \mid u \in \langle \underline{y} \rangle,\ \deg(u) \leq k\},\ k \geq 1.$$

由于 $\mathcal{F}_m$ 是有限维的，引理 2.1 表明，存在一个正整数 $a \leq \dim \mathcal{F}_m$ ，使得 $\mathcal{V}_a$ 是包含向量 $\mathbf{1}$ 的算子 $f_1(L), \ldots, f_l(L)$ 的最小联合不变子空间。根据左创造算子 L_{x_i} 和空间 $\mathcal{F}_m$的定义，我们有

$$u(F(\underline{L}))\mathbf{1} = 0,\ \text{when } u \in \langle \underline{y} \rangle,\ \deg(u) > m.$$

我们得出结论： $a \leq m$。

若条件 (i) 成立，则 $f_1(L), \ldots, f_l(L)$ 的联合不变空间在 $g(L)$ 下也保持不变。因此，我们有

$$g(L)\mathbf{1} \in \mathcal{V}_m.$$

因此，存在一个次数至多为 m 的非交换多项式 $h_m \in \mathbb{K}\langle y \rangle$ ，使得

$$h_m = \sum_{i=1}^{N_m} \alpha_i u_i \text{ , where } u_i \in \langle \underline{y} \rangle,\ N_m \in \mathbb{N}$$

and

$$g = h_m(f_1, \ldots, f_l) \bmod I_m.$$

由于 $f_1, \ldots, f_l$ 是非交换齐次多项式，非交换多项式 $u_i(f_1, \ldots, f_l)$也是齐次的。对于出现在 h_m中的每一个 u_i，定义

$$\beta_i := \begin{cases} \alpha_i, & \deg(u_i(f_1, \ldots, f_l)) \leq m \\ 0, & \deg(u_i(f_1, \ldots, f_l)) > m, \end{cases}$$

$$h_m^{'} = \sum_{i=1}^{N_m} \beta_i u_i,$$

则$\deg(h_m^{'}) \leq m$。

$$g \equiv h_m^{'}(f_1, \ldots, f_l) \equiv h_m(f_1, \ldots, f_l) \bmod I_m.$$

由于 m 是任意的，令 m 为一个整数，使得 $m \geq \deg(g)$，那么，

$$g = h_m^{'}(f_1, \ldots, f_l).$$

□

3 非齐次情形

本节将证明，关于联合不变子空间的齐次零点定理（定理 1.5）不能推广到非齐次生成元。因此，猜想 1.3 一般而言并不成立。我们的证明基于计算理论中关于不可判定性与可判定性的结果。

第一个结果表明，自由结合代数的有限生成子代数的成员问题是不可判定的。

定理 3.1. *[17, 推论]*对于任意固定的域，秩至少为 2 的自由结合代数的有限生成子代数的成员问题是不可判定的。

第二个结果涉及实闭域的一阶理论的可判定性（参见 [15] 和 [16, 定理 16]）。一阶理论中的公式由关于实变量的多项式等式与不等式、逻辑联结词（即 $\wedge$、 $\vee$、 $\neg$）以及量词（即 $\exists$、 $\forall$）构成。

定理 3.2 (塔斯基–赛登伯格). 实闭域的一阶理论是可判定的。

现在我们准备讨论定理 1.6 与猜想 1.3。我们的证明采用反证法。假设关于联合不变子空间的齐次零点定理（定理 1.5）可以推广到非齐次生成元的情形，则存在一个算法能在有限时间内解决子代数成员问题，这与定理 3.1 矛盾。我们现在完成定理 1.6 的证明，从而对猜想 1.3 给出否定的回答。

首先，我们给出一个过程：如果 g 属于由 $\{f_1, \ldots, f_l\}$ 生成的子代数，该过程保证会终止。这里使用“过程”而非“算法”一词，因为它对某些输入可能不会终止。

过程 MEMBERSHIP(g, f_1, ..., f_l) 初始化 $n \leftarrow 0$;**重复**$n \leftarrow n+1$;
计算 $\langle y \rangle_n = \{u \in \langle y \rangle \mid \deg(u) \leq n\}$; 检查线性方程
$g = \sum_{u \in \langle y \rangle_n} c_u u(f)$ 是否有解; **如果**线性方程有解**则返回**成员资格
已验证;**直到**满足终止条件;**过程 1：** 成员资格验证

这里，$\langle y \rangle_n$ 是由 $y = (y_1, \ldots, y_l)$生成的、次数至多为 n的所有字的集合；并且对任意词 $u \in \langle y \rangle$， $u(f) = u(f_1, \ldots, f_l)$是通过将 u 中的$y_1, \ldots, y_l$ 替换为 $f_1, \ldots, f_l$而得到的。关于过程 1，我们有如下引理。

引理 3.3. 如果 g属于由 $f_1, \ldots, f_l$生成的含幺 $\mathbb{K}$-代数，则过程 *1* 对于输入$(g, f_1, \ldots, f_l)$会在有限时间内终止。

证明。 显然，如果 g属于由 $f_1, \ldots, f_l$生成的含幺 $\mathbb{K}$-代数，则存在非交换多项式$h \in \mathbb{K}\langle y \rangle$，使得 $g = h(f_1, \ldots, f_l)$。设 h 表示为字的有限线性组合，即，

$$h(\underline{y}) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i u_i(\underline{y}),$$

其中，对所有 $i = 1、2、\ldots、N$，均有 $c_i \in \mathbb{K}$。令 n'为 $\{\deg(u_i): i = 1、2、\ldots、N\}$的最大值，则对于 $i = 1、2、\ldots、N$，有 $u_i \in \langle y \rangle_{n'}$。根据 $g = h(f_1、\ldots、f_l)$，我们有

$$g = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i u_i(f),$$

这意味着在过程 1 的第 n' 次循环中，线性方程 $g = \sum_{u \in \langle y \rangle_{n'}} c_u u(f)$ 有解。

□

上述结论意味着存在一个确定性过程，当 g属于由 $f_1、\ldots、f_l$ 生成的含幺 $\mathbb{K}$-代数时，该过程终止。总之，子代数成员资格问题的实例集合属于复杂度类 RE（递归可枚举）。

显然，若存在矩阵 $X \in \mathrm{M_n}(\mathbb{K})^d$ 和一个联合不变子空间 $V \subseteq \mathbb{K}^n$，使得对于 $f_1(X), \ldots, f_l(X)$， V是不变子空间，而对于 $g(X)$， V不是不变子空间，则 g不属于由 $f_1, \ldots, f_l$生成的含幺 $\mathbb{K}$-代数。基于这一观察，给出一种过程，用于验证 $\mathbb{C}$复数域上的子代数的非成员性。

过程 NON-MEMBERSHIP($g, f_1, \ldots, f_l$) 初始化 $n \leftarrow 0$；重复执行 $n \leftarrow n+1$；对于 $r \leftarrow 1$ 到 n，检查是否存在矩阵 $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^d$ 和 $V \in \mathbb{M}_{n\times r}(\mathbb{C})$，满足：1. 秩($V$) $= r$；2. 对所有 $j = 1$、2、...、l， V 的列空间是$f_j(X)$的不变子空间；3. V 的列空间不是 $g(X)$的不变子空间；若存在这样的矩阵，则返回“已验证非成员性”；结束 结束 直至满足终止条件；过程 2：非成员性验证

上述过程会遍历矩阵和子空间的不同维度来搜索反例。具体而言，对于每一对整数 $n \geq 1$ 和 $1 \leq r \leq n$，它会尝试寻找矩阵 $X_1, \ldots, X_d \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 以及子空间 $V \subseteq \mathbb{C}^n$（此处不区分矩阵与其列空间），使得 V是所有 $f_j(X)$的联合不变子空间，但不是 $g(X)$ 的不变子空间。

下面的引理表明，对于固定的 n和 r，判断是否存在满足过程 2 中条件的矩阵 $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^d$ 和 $V \in \mathbb{M}_{n\times r}(\mathbb{C})$ 是可判定的。

引理 3.4。对于任意固定的整数 n 和 r 且满足 $1 \leq r \leq n$，判断是否存在 n维矩阵 $X = (X_1, \ldots, X_d) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 以及 r维子空间 $V \subseteq \mathbb{C}^n$，使得 V 在$f_1(X)$ $\ldots$, $f_l(X)$ 作用下不变，但在 $g(X)$ 作用下不变性不成立，是可判定的。

证明。定义以下公式：

- IsFullRank(V) $:=$ det(V^*V) > 0，其中 V^* 是 V的厄米伴随。此公式用于判定 V是否为满列秩矩阵。

- IsInvSpace(Y， V) $:=$ minor$_{r+1}$($[YV|V]$) $= 0$。通过检查水平拼接矩阵 $[YV|V]$的 $(r+1)$ 阶子式，可以判定 V是否为 Y的不变子空间。

那么，确定是否存在 $X_1, \ldots, X_d$ 和 V，等价于确定

以下带量词公式是否成立。

$$(\exists X_1, X_2, ..., X_d \in \mathrm{M_n}(\mathbb{C}), \exists V \in \mathrm{M_{n\times r}}(\mathbb{C}))\,(\mathrm{IsFullRank}(V) \\ \wedge \bigwedge_{j=1}^{l} \mathrm{IsInvSpace}(f_j(\underline{X}), V) \wedge (\neg\,\mathrm{IsInvSpace}(g(\underline{X}), V))), \tag{1}$$

注意到，由于每个 $f_j(X)$ 都是 X 的多项式，因此 $f_j(X)$ 的每个元素也都是 X 的各个元素的多项式。对于复变量 X_k 和 V，可以引入对应的实变量 W_k 和 Z_k，使得对所有指标 $k = 1, 2, ..., d$，都有 $X_k = W_k + \mathrm{i}Z_k$；并引入 W_V，Z_V，使得 $V = W_V + \mathrm{i}Z_V$。因此，(1) 可以改写为实数域上的一阶逻辑公式。这里，我们用记号 $W + \mathrm{i}Z$ 表示 d 元组 $(W_1 + \mathrm{i}Z_1,\ W_2 + \mathrm{i}Z_2,\ .....,\ W_d + \mathrm{i}Z_d)$。

$$(\exists W_1, \ldots, W_d, Z_1, \ldots, Z_d \in \mathrm{M_n}(\mathbb{R}), \exists W_V, Z_V \in M_{n\times r}(\mathbb{R})) \\ (\mathrm{IsFullRank}(W_V + \mathrm{i}Z_V) \wedge \bigwedge_{j=1}^{l} \mathrm{IsInvSpace}(f_j(\underline{W} + \mathrm{i}\underline{Z}), W_V + \mathrm{i}Z_V) \wedge \\ (\neg\,\mathrm{IsInvSpace}(g(\underline{W} + \mathrm{i}\underline{Z}), W_V + \mathrm{i}Z_V)))\,.$$

将每个多项式的实部和虚部分离后，上述公式便可形式化地编码为实数域的一阶理论。因而，根据定理 3.2，它是可判定的。

□

现在我们可以证明定理 1.6 了。证明依赖于这样一个事实：一个问题可判定，当且仅当它既是递归可枚举的，又是余递归可枚举的（参见例如 [7, 定理 9.4]）。

定理 *1.6* 的证明。首先注意，如果猜想 1.3 中的两个条件等价，那么对于 $f_1, \ldots, f_l, g \in \mathbb{K}\langle x\rangle$，以下两个陈述也等价：

(i) 存在有限数 r 和 n，满足 $1 \le r \le n \in \mathbb{N}$，以及矩阵 $X_1, \ldots, X_d \in \mathrm{M_n}(\mathbb{K})$、$V \in \mathrm{M_{n\times r}}(\mathbb{K})$，使得 V 的列空间是 $f_1(X) \ldots, f_l(X)$ 的联合不变子空间，但不是 $g(X)$ 的不变空间；

(ii) g 不属于由 $f_1, \ldots, f_l$ 生成的含幺 $\mathbb{K}$-代数。

因此，若猜想 1.3 中的条件等价，那么对于任意非交换多项式 f_1、.....、f_l，$g \in \mathbb{C}\langle x\rangle$ 若 g 不属于由 f_1、.....、f_l 生成的含幺 $\mathbb{C}$-代数，则存在有限维矩阵 X_1、.....、X_d 和 V 作为非隶属性证明。这意味着，若输入的 g 不属于由 f_1、.....、f_l 生成的含幺 $\mathbb{C}$-代数，过程 2 将在有限时间内终止，输入为 $(g,\ f_1$、.....、$f_l)$。

结合引理 3.3 可知，对于任意输入 g 和 $f_1, \cdots, f_l$ 在 $\mathbb{C}\langle x\rangle$ 中，过程 1 或过程 2 中必有一个保证终止并给出

正确的成员资格判定。因此，通过并行运行这两个过程，我们得到一个始终终止并能正确判定子代数成员资格问题的算法，这意味着 $\mathbb{C}$ 上自由结合代数的有限生成子代数的成员问题是可判定的，这与定理 3.1 相矛盾。

□

4 进一步讨论

如本文所示，猜想 1.3 在一般情况下（非齐次，$l \geq 2$）对有限维矩阵并不成立。一个自然的推广是研究在无限维算子上计算多项式时，这种等价关系是否仍然成立。因此，我们提出以下猜想。

猜想 4.1. 设 $f_1, \ldots, f_l, g \in \mathbb{C}\langle x \rangle$。以下命题等价：

(i) 对每个复希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 以及每个有界算子元组 $A = (A_1, \ldots, A_d) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^d$，$f_1(A), \ldots, f_l(A)$ 的每个联合不变子空间都在 $g(A)$ 下不变；

(ii) g 属于由 $f_1, \ldots, f_l$ 生成的含幺 $\mathbb{C}$-代数。

我们基于 Fock 空间对这一猜想作初步讨论。考虑全 Fock 空间 $\mathcal{F}$，它定义为以自由幺半群 $\langle x \rangle$（变量 $x_1, \ldots, x_d$ 中所有词组成的集合）为标准正交基的希尔伯特空间，即

$$\mathcal{F} := \overline{\operatorname{span}\{\ \omega \mid \omega \in \langle \underline{x} \rangle\}}.$$

对于每个变量 x_k，左创造算子定义为

$$L_{x_k}(\omega) := x_k \omega.$$

将第2节中的论证应用于一般情形（不假设齐次性），猜想4.1的条件(i)蕴含如下结论：

$$g(\underline{L})\mathbf{1} \in \overline{\operatorname{span}\{\ u(F(\underline{L})\mathbf{1} \mid u \in \langle \underline{y} \rangle\}}.$$

上述结果与猜想4.1中的条件(ii)之间仍存在差距，而该条件等价于如下条件：

$$g(\underline{L})\mathbf{1} \in \operatorname{span}\{u(F(\underline{L}))\mathbf{1} \mid u \in \langle \underline{y} \rangle\}.$$

我们对有限维情形的反证利用了子代数成员问题不可判定与实闭域的一阶理论可判定之间的差异。在猜想 4.1 的无限维框架中，这种差异不复存在。尽管实闭域的一阶理论是可判定的，但这一性质并不适用于算子代数（见 Fritz [3]）。因此，可判定性障碍不复存在，要在这一框架下解决该猜想，需要采用新的方法。

参考文献

[1] SA Amitsur。希尔伯特零点定理的一种推广。美国数学会会刊，8(4):649–656，1957。[2] Jakob Cimpriˇc、J. William Helton、Scott McCullough 和 Christopher Nel- son。非交换实零点定理对应于一个非交换实理想：算法。伦敦数学会会刊 *(3)*，106(5):1060–1086，2013。[3] Tobias Fritz。量子逻辑不可判定。数学逻辑档案，60(3- 4):329–341，2021。[4] J. W. Helton、Igor Klep 和 Jurij Volˇ ciˇc。自由代数中非交换多项式的因式分解与零点定¨理。国际数学研究通报，(1):343–372，2022。[5] J. William Helton、Scott McCullough 和 Mihai Putinar。自由代数中的强主导性。数学杂志，255(3):579–596，2007。[6] J. William Helton 和 Scott A. McCullough。非交换多项式的正定性定理。美国数学会汇刊，356(9):3721–3737，2004。[7] John E. Hopcroft、Rajeev Motwani 和 Jeffrey D. Ullman。自动机理论、语言与计算导论（第*3*版）。Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc.，美国，2006。[8] Igor Klep 和 ˇSpela ˇ Spenko。迹零点定理。伦敦数学会通报，46(5):1091–1098，2014。[9] Igor Klep、Victor Vinnikov 和 Jurij Volˇciˇc。有理可解理想的零点定理与正定性定理。线性代数及其应用，527:260–293，2017。[10] Igor Klep、ˇSpela ˇ Spenko 和 Jurij Volˇciˇc。正迹多项式与普适 Procesi–Schacher 猜想。伦敦数学会会刊，117(6):1101–1134，2018。[11] Patrik Nordbeck。非交换多项式环中的典范子代数基。载于*1998*年国际符号与代数计算研讨会论文集（罗斯托克），第140–146页。美国计算机协会，纽约，1998。[12] Claudio Procesi 和 Murray Schacher。非交换实零点定理与希尔伯特第十七问题。数学年刊 *(2)*，104(3):395–406，1976。

[13] Guy Salomon、Orr Shalit 和 Eli Shamovich。非交换单位球子簇上的有界非交换解析函数代数。美国数学会会刊，370(12):8639– 8690，2018。[14] Konrad Schm¨udgen。非交换实代数几何：一些基本概念与初步思想，第 325–350 页。施普林格纽约，纽约州纽约，2009。[15] A. Seidenberg。初等代数的一种新判定方法。数学年刊 *(2)*，60:365–374，1954。[16] Alfred Tarski。初等代数与几何的一种判定方法。载于量词消去与柱形代数分解（林茨，*1993*），《符号计算专著丛书》，第 24–84 页。施普林格，维也纳，1998。[17] U. U. Umirbaev。关于结合代数的一些算法问题。《代数与逻辑》，32(4):450–470，474，1993。[18] Jurij Volˇciˇc。非交换多项式的无维数限制矩阵 Nullstellensatz。载于 Matej Breˇsar、Alfred Geroldinger、Bruce Olberding 和 Daniel Smertnig 编，《环与因子分解理论近期进展》，第 439–450 页，查姆，2025。施普林格·自然瑞士。