arXiv:2602.22348v1 [math.PR] 25 Feb 2026

泊松随机环境中嵌套分形上的从属布朗运动的积分态密度

HUBERT BALSAM、KAMIL KALETA、MARIUSZ OLSZEWSKI、KATARZYNA PIETRUSKA-PAŁUB

摘要。我们证明了随机薛定谔算子的积分态密度（IDS）具有利夫希茨奇异性。

$$H^\omega = \phi(-\mathcal{L}) + V^\omega$$

在具有良好标记性质的平面无界嵌套分形上的随机薛定谔算子的积分态密度（IDS）的利夫希茨奇异性。这里， $\mathcal{L}$ 是分形上的拉普拉斯算子， ϕ 是具有温和正则性的算子单调函数，而 V^ω 是具有足够正则轮廓函数的泊松随机势。本研究的主要新意在于表明，对 V^ω 的研究可以有效地归约为对某种合金型势的分析；其中，作用点不再像经典 $\mathbb{Z}^d$ 情形那样是格点，而是分形复形。这一发现使我们能够在泊松随机场的研究中采用一种新方法，从而处理一大类伯恩斯坦函数 ϕ。特别是，该方法涵盖了情形 $\phi(\lambda) = (\lambda + m^{d_w/\vartheta})^{\vartheta/d_w} - m$, $\vartheta \in (0,\ d_w)$， $m > 0$；这一情形对应于相对论模型，而以往已知方法无法将其应用于分形。

关键词：积分态密度、泊松势、合金型势、从属布朗运动、嵌套分形、良好标记性质、反射过程。

2020数学学科分类主类：82B44，28A80，60K37；次类：47D08，60J45，60J57。

1. 引言

设 $X = (X_t)_{t\geq 0}$ 是取值于满足良好标记性质（GLP）的平面无界简单嵌套分形 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ （USNF）上的从属布朗运动。 X 的无穷小生成元为算子 $-\phi(-\mathcal{L})$，其中 $\mathcal{L}$ 表示 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 上的典范拉普拉斯算子，即该分形空间上的布朗运动 $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ 的生成元；而 ϕ 是满足 $\phi(0+) = 0$ [64] 的完全伯恩斯坦函数。过程 X 由 Z 通过随机时间变换得到。更准确地说， $X_t = Z_{S_t}$, $t \geq 0$，其中 $S = (S_t)_{t\geq 0}$ 是拉普拉斯变换为 $\exp(-t\phi(\lambda))$ 的从属过程， $\lambda > 0$。

我们假设过程 X 在 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 上的随机环境中演化，该环境由一个独立于 X 的泊松点过程生成。这种随机介质的影响由以下形式的势描述：

$$V^\omega(x) := \int_{\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}} W(x,y)\,\mu^\omega(\mathrm{d}y), \tag{1.1}$$

其中， μ^ω 是与 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 上的泊松点过程相关联的计数测度， W是依赖于两个变量的非负势函数轮廓。该泊松点过程的强度测度为 $\nu\,\mathfrak{m}(\mathrm{d}y)$，其中 $\mathfrak{m}$ 表示分形上的归一化豪斯多夫测度， $\nu > 0$ 是一个固定参数。由式（1.1）给出的随机场 V^ω 称为分形泊松型势。

本文的主要目标是研究随机薛定谔算子

$$H^\omega = \phi(-\mathcal{L}) + V^\omega, \quad \text{acting in} \quad L^2(\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}, \mathfrak{m}).$$

特别地，我们研究 H^ω的积分态密度 （积分态密度）在关于 ϕ 以及势函数轮廓 W的温和正则性假设下的渐近行为。此时，积分态密度是支撑在 $[0,\infty$上的非随机测度）。在分形情形中，它被定义为经验测度的模糊极限，这些经验测度计数通过将 H^ω 限制到 L^2（$\mathcal{K}^{\langle M\rangle}, \mathfrak{m}$）而得到的有限体积算子的特征值，并以 $\mathfrak{m}$（$\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$）归一化。这里， $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$ 表示分形复形

[0]本研究获得波兰国家科学中心资助，项目编号：2019/35/B/ST1/02421。1

它们在 $M \to \infty$时逼近 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 。全文中，我们用 Λ表示积分态密度。为简便起见，我们对其分布函数使用同一符号， $\Lambda(\lambda) := \Lambda([0,\lambda])$ ， $\lambda > 0$。

以下定理是本文的主要结果。它表明，在关于 Bernstein函数 ϕ 的假设 **(B)** 以及关于单点位势剖面 W的假设 **(W1)**、**(W2)** 下，薛定谔算子 H^ω 的积分态密度在低能处呈现 Lifshitz型行为。

定理 1.1。 设 $(\mathbf{B})$、$(\mathbf{W1})$ 和$(\mathbf{W2})$成立。则对每个 $\nu_0 > 0$ ，存在常数C_1、 $C_2 > 0$ ，使得对每个 $\nu \geq \nu_0$

$$-C_1\nu \leq \liminf_{\lambda\searrow 0} \lambda^{\frac{d}{\alpha}} \log \Lambda(\lambda) \qquad and \qquad \limsup_{\lambda\searrow 0} \lambda^{\frac{d}{\alpha}} \log \Lambda(\lambda) \leq -C_2\nu.$$

我们想强调的是，在这种非光滑分形情形下，积分态密度的存在本身就是一个非平凡问题。然而，在当前框架中，可以通过一种针对平面谢尔宾斯基垫片发展起来的一般方法来确立其存在性，见 [33] 。该方法要求分形具有足够规则的周期结构，我们将其称为良好标记性质（ GLP） [32]（另见 [55, 57]）。在本文中，我们将积分态密度的存在性作为已知事实。不过，为了方便读者并保证论述完整，我们将其作为定理 2.8 收录，并在第 2.6 节简要讨论证明的主要思路。附录 A 给出了该论证的简要概述以及准确的参考文献。

本文的结果属于分形上的分析与概率这一迅速发展的领域，该领域至今仍是非常活跃的研究方向。例如，我们可以参考Kigami的工作 [35], 、Alonso-Ruiz等人一系列的论文 [2, 3, 4, 5], （这些论文尤其关注分形上的函数空间），以及Baudoin等人关于抛物Anderson模型的研究 [7] 。分形空间和具有分形边界的定义域在建模与应用中也日益发挥重要作用，涉及偏微分方程理论（Chen等人 [12] 以及Dekkers等人 [16]）、信息论（Akkermans等人 [1]）、静磁学问题（Hinz和Teplyaev[29]）、声学理论（Hinz等人 [28]），以及这些集合上的随机游走理论（例如，Kumagai和Nakamura [46]）。另请参阅Kumagai的论文 [43] ，其中概述了无序介质上的扩散过程。

在我们的框架中，从属布朗运动 X 在分形上的泊松随机介质中演化，可视为粒子在含有杂质、缺陷或位错的完全有序材料中运动的模型，即在无序介质中运动的模型。这种完美有序由具有GLP的USNF $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 描述，它具有自相似且定义良好的周期结构，而无序则由泊松随机场 V^ω引入。结构缺陷由泊松点过程生成的随机位点云 $\{y_i(\omega)\}$ 建模，这些位点不规则分布，且独立于 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$的几何结构。单个泊松位点 $y_i(\omega)$对位于 x 处的粒子的影响由单点势$W(x, y_i(\omega))$描述，总势由下式给出

$$V^\omega(x) = \sum_i W(x, y_i(\omega)) = \int_{\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}} W(x,y)\, \mu^\omega(\mathrm{d}y), \tag{1.2}$$

如上所述。薛定谔算子

$$H^\omega = \phi(-\mathcal{L}) + V^\omega$$

表示该系统的哈密顿量。其动能项 $\phi(-\mathcal{L})$ 是过程 X 的生成元的负值，而根据完全伯恩斯坦函数 ϕ的选择，它可以来自范围广泛的算子。假设量子粒子的运动至少在统计意义上遵循过程 X（其生成元为 $-\phi(-\mathcal{L})$）的分布性质，那么我们的框架不仅涵盖非相对论情形下的 $\phi(\lambda) = \lambda$（对应于 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$上的布朗运动）和 $\phi(\lambda) = \lambda^{\alpha/d_w}$， $\alpha \in (0,\ d_w)$（对应于 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$上的稳定过程），还涵盖具有

$$\phi(\lambda) = (\lambda + m^{d_w/\vartheta})^{\vartheta/d_w} - m, \quad \vartheta \in (0, d_w),\ m > 0$$

（对应于 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$上的相对论稳定过程）。这类跳跃过程通过小跳跃的组合，而非经典扩散，能够在很短时间内跨越非常大的距离，因此可以合理地模拟以极高速度运动的粒子。

这种解释，尤其是算子 H^ω 代表系统能量这一事实，表明理解 H^ω的谱性质（包括其积分态密度）至关重要（参见 Carmona 和 Lacroix [10]以及 Stollmann [67]的专著）。特别是，随机薛定谔算子的积分态密度的 Lifschitz 奇异性与谱局域化现象密切相关，参见例如 Bourgain 和 Kenig [9], 、Combes 和 Hislop [15], 、Germinet、Hislop 和 Klein [27], 、Kirsch 和 Veselić [39],、Klopp [40, 41], 及其中所引文献。值得注意的是，针对各种类型的随机势，人们已在欧几里得空间和整数格点空间中广泛研究了 Lifshitz 尾。关于具有拉普拉斯动能项的薛定谔算子的相关结果，请参阅 Benderskii 和 Pastur [8], 、Friedberg 和 Luttinger [19], 、Fukushima [20], 、Fukushima、Nagai 和 Nakao [24], 、Kirsch 和 Martinelli [36, 37], 、Kirsch 和 Simon [38], 、Kirsch 和 Veselić [39],、Luttinger [50], 、Mezincescu [51], 、Nagai [52], 、Nakao [53], 、Pastur [58], 、Romerio 和 Wreszinski [62],以及 Simon [66]。关于非局域动能项，参见 Okura [56], 、Gebert 和 Rojas-Molina [25, 26],以及 Kaleta 和 Pietruska-Pałuba [30, 31]。

在此背景下，我们还提及 Donsker 和 Varadhan [18], 以及 Sznitman[68],关于欧几里得空间中泊松障碍物和泊松势的开创性论文。

对于分形等非规则结构，关于积分态密度的利夫希茨尾的研究结果寥寥无几。Pietruska-Pałuba [59]早期研究了带有泊松杀死障碍物的谢尔宾斯基三角形上的布朗运动；Shima [65] 则将这一研究推广到具有有限程泊松势的一般嵌套分形。随后，Kaleta 和 Pietruska-Pałuba [34] 分析了形如 $\phi(-\mathcal{L})+V^\omega$ 的算子，它们对应于平面谢尔宾斯基垫片上的一类从属布朗运动以及更一般的泊松势。最近，他们针对 USNF 上带有 GLP 的从属布朗运动建立了利夫希茨尾，这与本文所考虑的情形相同；不过，他们研究的是另一类随机场，即分形合金型势[6]。

据我们所知，论文 [34] 是关于分形上的泊松随机介质的最新研究。然而，无论是在从属过程的类别（等价地说，动能项 $\phi(-\mathcal{L})$）方面，还是在底层状态空间方面，其研究范围都相当有限，局限于平面谢尔宾斯基垫片。原因在于其证明方法——Sznitman [68], 提出的粗粒化技术的一种变体——该方法仅适用于经过适当约化后可转化为 α-稳定情形的从属过程。尽管这种方法在技术上较为复杂，却尤其适合具有标度性质的过程。因此，该论文未涉及具有 $\phi(\lambda) \approx \lambda$ 作为 $\lambda \searrow 0$ 的非局部模型；从数学物理的角度来看，这类模型或许最为有趣，例如上文提到的质量为 $m > 0$ 的相对论模型。

这正是本项目的出发点：多年来，我们一直在寻找一种恰当的论证，以便处理这一问题。直到最近才出现的解决方案，基于这样一种思路：将泊松随机势约化为一种结构上接近合金型势的势。换言之，分形上的泊松随机环境可以有效地转化为具有某种合金型结构的随机介质。这或许看起来有些令人意外，因为式 (1.2) 中的泊松随机势 V^ω 在结构上与标准合金型势

$$V^\omega_{\mathrm{alloy}}(x) := \sum_{v \in \mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}} \xi_v(\omega)\, W(x, v),$$

该模型最近在 [6] 中作为 $\mathbb{Z}^d$ 中经典合金型模型的分形类比模型被提出。事实上，对于 V^ω，无序性源于泊松点 $y_i(\omega)$ 的随机位置；而对于 $V^\omega_{\mathrm{alloy}}$，这些点则按照分形的几何结构规则排列，随机性由单点随机变量 $\xi_v(\omega)$ 承载，它们构成一个独立同分布族。

在这种方法中，我们引入势

$$\overline{V}^{\omega}(x) := \sum_{\Delta\in\mathcal{T}_0} \xi_\Delta(\omega)\,\overline{W}(x,\Delta), \tag{1.3}$$

其中，独立同分布的单点随机变量 $\xi_\Delta(\omega)$ 与固定大小的分形复形相关联，而 $W\colon \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}\times\mathcal{T}_0\to[0,\infty)$ 是相应的单点势；进一步讨论见注3.2。在我们当前的设定中，ξ_Δ 的分布由 μ^ω 诱导。

据我们所知，这一概念是全新的。它构成了定理 3.1 证明中的关键一步；该定理证明了积分态密度的拉普拉斯变换上界。这一步的主要优点在于，它使我们能够将近期在 [31] 中提出、并进一步应用于 [6] 的强大方法应用于 V^{ω}。该方法具有泛函分析性质，依赖于 Temple不等式的应用。对于具有标准合金型随机势的薛定谔算子，也就是单点势位于格上的情形，该方法已被证明十分有效；而我们找到了一种方法，将其调整到形式为 (1.3) 的新型合金型势的情形。这一新方法使我们能够将 [34] 的结果推广到一大类从属过程（或动能算子），其 ϕ 满足假设 **(B)**，势剖面 W 具有有界支撑，并且定义在具有 GLP 的无界简单嵌套分形上。我们指出，在合金型势背景下使用 Temple不等式的想法，源自 Simon [66]，以及 Kirsch 和 Simon [38] 的重要研究。

本文的组织结构如下。第 2 节介绍证明主要定理所需的预备知识，包括嵌套分形、良好标记性质、分形集上的随机过程及其半群与生成元，以及随机薛定谔算子。我们指出，本文研究的从属过程类和分形类，与我们近期研究 [6], 分形上的合金型势时所考虑的类别相同。为方便读者，我们在此重述所需的定义和结果，并在必要时引用相关论文，以提供更多技术细节。第 2.5 节介绍一类分形随机泊松势及其周期化，并证明所研究的随机势属于相应过程的 Kato类（命题 2.7）。第 2.6 节进一步讨论积分态密度的存在性。第 3 节证明积分态密度的拉普拉斯变换上界（定理 3.1），这是本文的核心内容。第 4 节给出积分态密度的下界（定理 4.1），并证明 Lifschitz奇异性（定理 1.1）。附录 A 补充介绍积分态密度存在性相关的细节和参考文献。

2. 预备知识

2.1. 无界（平面）简单嵌套分形。 本节回顾若干有关平面嵌套分形的基本概念，这些概念将在全文中使用。为保持一致，我们采用此前工作 [6] 中提出的方法。该框架也与早期关于嵌套分形的研究 [42, 49, 60, 61]相一致。

考虑一族作用于 $\mathbb{R}^2$ 上的相似变换 $\{\Psi_i\}_{i=1}^N$，它们具有相同的缩放因子 $L>1$ 和相同的等距部分 U。因此，每个映射均由 $\Psi_i(x) = (1/L)U(x) + \nu_i$ 给出，其中$\nu_i\in\mathbb{R}^2$，对 $i\in\{1,\dots,N\}$ 成立。不失一般性，我们假设 $\nu_1 = 0$。存在唯一的非空紧集 $\mathcal{K}^{\langle0\rangle}$，称为由该系统生成的分形$(\Psi_i)_{i=1}^N$，满足不变关系

$$\mathcal{K}^{\langle0\rangle} = \bigcup_{i=1}^{N} \Psi_i\big(\mathcal{K}^{\langle0\rangle}\big).$$

由于 $L>1$，每个相似变换都有唯一的不动点。因此，变换Ψ_1，……，Ψ_N总共恰好有 N个不动点。我们用 F表示由这些不动点组成的集合。若存在另一点 $y\in F$以及两个不同的相似变换 Ψ_i 和 Ψ_j，使得 $\Psi_i(x)=\Psi_j(y)$，则称点 $x\in F$ 为本质不动点。变换 Ψ_1，……，Ψ_N的所有本质不动点的集合记为 $\mathcal{V}_0^{\langle0\rangle}$。

集合 $\mathcal{K}^{\langle0\rangle}$ 称为（平面）嵌套分形，如果满足以下条件。

a) $k := \#\mathcal{V}_0^{\langle 0\rangle} \geq 2$.b)（开集条件）存在一个开集 $U \subset \mathbb{R}^2$，使得对于 $i \neq j$，有$\Psi_i(U) \cap \Psi_j(U) = \emptyset$且 $\bigcup_{i=1}^N \Psi_i(U) \subseteq U$。c)（嵌套）$\Psi_i\left(\mathcal{K}^{\langle 0\rangle}\right) \cap \Psi_j\left(\mathcal{K}^{\langle 0\rangle}\right) = \Psi_i\left(\mathcal{V}_0^{\langle 0\rangle}\right) \cap \Psi_j\left(\mathcal{V}_0^{\langle 0\rangle}\right)$ 对于 $i \neq j$。d)（对称性）对于 $x, y \in \mathcal{V}_0^{\langle 0\rangle}$，令 $S_{x,\ y}$ 表示关于平分线段 $[x, y]$ 的直线的对称变换。那么

$$\forall i \in \{1, ..., M\}\ \forall x, y \in \mathcal{V}_0^{\langle 0\rangle}\ \exists j \in \{1, ..., M\}\ S_{x,y}\left(\Psi_i\left(\mathcal{V}_0^{\langle 0\rangle}\right)\right) = \Psi_j\left(\mathcal{V}_0^{\langle 0\rangle}\right).$$

e)（连通性）在集合 $\mathcal{V}_{-1}^{\langle 0\rangle} := \bigcup_i \Psi_i\left(\mathcal{V}_0^{\langle 0\rangle}\right)$ 上，我们按如下方式定义图结构 E_{-1}：$(x, y) \in E_{-1}$ 当且仅当 $x, y \in \Psi_i\left(\mathcal{K}^{\langle 0\rangle}\right)$ 对某个 i 成立。然后要求图 $(\mathcal{V}_{-1}^{\langle 0\rangle}, E_{-1})$ 是连通的。

由于当 $k = 2$ 时，集合 $\mathcal{K}^{\langle 0\rangle}$ 退化为连接两个本质不动点的线段，因此我们始终假设 $k \geq 3$。在这种情况下，$\mathcal{V}_0^{\langle 0\rangle}$ 的元素构成正多边形的顶点集合 [32, 命题 2.1]。

接下来定义以下对象。

定义 2.1. 令 $M \in \mathbb{Z}$.

(1)

$$\mathcal{K}^{\langle M\rangle} = L^M \mathcal{K}^{\langle 0\rangle} = \Psi_1^{-M}(\mathcal{K}^{\langle 0\rangle}), \tag{2.1}$$

是大小为 L^M 的分形（附着于 (0，0) 的 M-复形，见下文 (2.3)）。

(2)

$$\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle} = \bigcup_{M=0}^{\infty} \mathcal{K}^{\langle M\rangle}. \tag{2.2}$$

是无界简单嵌套分形（USNF）。

（3）M-复形：每个形如以下形式的集合 $\Delta_M \subset \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$

$$\Delta_M = \mathcal{K}^{\langle M\rangle} + \nu_{\Delta_M}, \tag{2.3}$$

其中 $\nu_{\Delta_M} = \sum_{j=M+1}^{J} L^j \nu_{i_j}$，对某些 $J \geq M + 1$、$\nu_{i_j} \in \{\nu_1, ..., \nu_N\}$ 成立，称为一个 M- 复形。$\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 中所有 M- 复形构成的族记为 $\mathcal{T}_M$。

(4) M-复形 (2.3) 的顶点：集合 $\mathcal{V}(\Delta_M) = L^M \mathcal{V}_0^{\langle 0\rangle} + \nu_{\Delta_M} = L^M \mathcal{V}_0^{\langle 0\rangle} + \sum_{j=M+1}^{J} L^j \nu_{i_j}$。

(5) $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$ 的顶点：

$$\mathcal{V}_M^{\langle M\rangle} = \mathcal{V}\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right) = L^M \mathcal{V}_0^{\langle 0\rangle}.$$

(6) $(M + m)$-复形内所有 M-复形的顶点（对 $m > 0$ 递归定义）：

$$\mathcal{V}_M^{\langle M+m\rangle} = \bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{V}_M^{\langle M+m-1\rangle} + L^{M+m} \nu_i.$$

(7) 无界嵌套分形内所有 0-复形的顶点：

$$\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle} = \bigcup_{M=0}^{\infty} \mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}.$$

(8) 来自无界分形的 M-复形的顶点：

$$\mathcal{V}_M^{\langle\infty\rangle} = L^M \mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}.$$

(9) $\mathcal{C}_M(x)$：所有包含 x 的 $M-$复形的并集：

– 当 $x \notin \mathcal{V}_M^{\langle\infty\rangle}$ 时，唯一的 $M-$复形

– 当 $x \in \mathcal{V}_M^{\langle\infty\rangle}$.时，在 x 处相交的所有 $M-$复形的并集

此类复形的数量记作 $\mathrm{rank}_M(x)$，且可能取决于 M.

(10) $\mathcal{K}^{\langle M+1\rangle}$ 中的 M-复形：

$$\Delta_{M,i} = \mathcal{K}^{\langle M\rangle} + L^M \nu_i, \quad i = 1, ..., N.$$

$\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 的分形（豪斯多夫）维数为 $d = \log N \log L$。支撑于 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 的维数为d 的豪斯多夫测度记作 $\mathfrak{m}$，并将其归一化，使得 $\mathfrak{m}(\mathcal{K}^{\langle 0\rangle}) = 1$。此测度作为 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$上的均匀测度。

定义 2.2。对于 $M \in \mathbb{Z}$ 和 $x,\ y \in \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 令

$$d_M(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{if } x = y; \\ 1, & \text{if there exists } \Delta_M \in \mathcal{T}_M \text{ such that } x, y \in \Delta_M \text{ and } x \neq y; \\ n > 1, & \text{if there does not exist } \Delta_M \in \mathcal{T}_M \text{ such that } x, y \in \Delta_M \text{ and} \\ & n \text{ is the smallest number for which there exists a chain} \\ & \Delta_M^{(1)}, \Delta_M^{(2)}, ..., \Delta_M^{(n)} \in \mathcal{T}_M \text{ such that } x \in \Delta_M^{(1)}, y \in \Delta_M^{(n)} \\ & \text{and } \Delta_M^{(i)} \cap \Delta_M^{(i+1)} \neq \emptyset \text{ for } 1 \leq i \leq n-1. \end{cases} \tag{2.4}$$

上述定义的集合 $\mathcal{C}_M(x)$就是度量 d_M中以 x为中心、半径为 1 的球。令

$$r_0 := \max\{\mathrm{rank}_0(v) : v \in \mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}\}. \tag{2.5}$$

对于 $k \geq 4$ ，我们有 $r_0 = 2$；而对于 $k = 3$ ，则有 $r_0 \in \{2, 3\}$。对于谢尔宾斯基三角形 $r_0 = 2$, 而 [32, 例 3.2] 说明了 $r_0 = 3$的可能性。

我们还需要估计 0–网格中位于 $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$, 内的点的数量，其中 $M \in \mathbb{Z}_+$,，也就是 $\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}$. 的基数。将这个数量记为 $k_0^{\langle M\rangle}$. 。显然，存在常数 $C_0 > 1$ 使得

$$L^{Md} \leq \#\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle} = k_0^{\langle M\rangle} \leq C_0 L^{Md}. \tag{2.6}$$

2.2. **良好标记性质与典范投影**。本节回顾顶点良好标记的概念，该概念在我们先前的工作 [32] 中引入。

设 $\mathcal{A} := \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ 是一个含有 k 个符号的字母表，其中 $k = \#\mathcal{V}_0^{\langle 0\rangle} \geq 3$。 $\mathcal{A}$ 的元素称为标签。阶数为 $M \in \mathbb{Z}$ 的标记函数是任意一个映射

$$l_M : \mathcal{V}_M^{\langle\infty\rangle} \to \mathcal{A}.$$

回顾一下，每个 M-复形 Δ_M 的顶点构成一个具有 k 个顶点的正多边形的顶点。特别地，恰有 k 个绕 $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$ 重心的旋转可将 $\mathcal{V}_M^{\langle M\rangle}$ 映射到其自身。我们将这些旋转记为 $\{R_1, \ldots, R_k\} =: \mathcal{R}_M$，并按如下顺序排列： R_i 旋转角度为 $\frac{2\pi i}{k}$，其中 $i = 1, \ldots, k$。

定义 2.3 (阶数为 M 的良好标记函数)。设 $M \in \mathbb{Z}$。若函数 ℓ_M: $\mathcal{V}_M^{\langle\infty\rangle} \to \mathcal{A}$ 满足以下条件，则称其为阶数为 M 的良好标记函数。

(1) ℓ_M 在 $\mathcal{V}_M^{\langle M\rangle}$ 上的限制是到 $\mathcal{A}$的双射。(2) 对于每

个表示为以下形式的 M-复形 Δ_M

$$\Delta_M = \mathcal{K}^{\langle M\rangle} + \nu_{\Delta_M},$$

其中 $\nu_{\Delta_M} = \sum_{j=M+1}^{J} L^j \nu_{i_j}$, 取某些 $J \geq M+1$和 $\nu_{i_j} \in \{\nu_1, ..., \nu_N\}$（参见定义 2.1），存在一个旋转 $R_{\Delta_M} \in \mathcal{R}_M$ 使得

$$\ell_M(v) = \ell_M\left(R_{\Delta_M}\left(v - \nu_{\Delta_M}\right)\right), \quad v \in \mathcal{V}(\Delta_M). \tag{2.7}$$

若存在一个阶数为 M 的良好标记函数，则称 USNF $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 具有阶数为 M 的良好标记性质。

由于 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$具有自相似结构，对于某个$M \in \mathbb{Z}$ 成立的阶数为 M 的良好标记性质，等价于该性质在任意其他阶数 $M' \in \mathbb{Z}$ 下成立。这启发了下面的一般定义。

定义 2.4 (良好标记性质)。若 USNF $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 具有某个 $M \in \mathbb{Z}$下的 M 阶良好标记性质，则称其具有良好标记性质（简称 *GLP*）。

换言之，分形 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 具有 GLP，当且仅当 $\mathcal{V}_M^{\langle\infty\rangle}$ 中的顶点可以按如下方式标记：每个 M-复形都包含完整的标签集，并且标签的顺序在各复形之间保持一致。

已知当 k 为素数或具有 $k = 2^n$的形式时，该分形具有 GLP。对于 k的其他取值，根据 0-复形在 1-复形中的排列方式，可以构造出具有 GLP 和不具有 GLP 的例子。关于详细分析和例子，请参阅 [32, 55] 。

对于具有 GLP 的无界分形 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$，我们定义一个投影映射 π_M，将 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 投影到主 M-复形 $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$ 上:

$$\pi_M(x) := R_{\Delta_M}\big(x - \nu_{\Delta_M}\big), \quad x \in \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}, \tag{2.8}$$

其中， $\Delta_M = \mathcal{K}^{\langle M\rangle} + \nu_{\Delta_M} = \mathcal{K}^{\langle M\rangle} + \sum_{j=M+1}^{J} L^j \nu_{i_j}$是包含 x的 M-复形，而 $R_{\Delta_M} \in \mathcal{R}_M$ 是由 (2.7) 确定的唯一旋转。更确切地说:

(1) 若 $x \notin \mathcal{V}_M^{\langle\infty\rangle}$，则令 $\Delta_M = \mathcal{C}_M(x)$，即令其为包含 x的唯一 M-复形。(2) 若 $x \in \mathcal{V}_M^{\langle\infty\rangle}$，则可任取一个包含 x 的 M-复形；由于 GLP，投影与这一选择无关。

π_M 在任意 M-复形 Δ_M 上的限制都是一个双射，因此其逆映射

$$\widetilde{\pi}_{\Delta_M} := \big(\pi_M \,|_{\Delta_M}\big)^{-1}$$

定义良好，且由下式给出

$$\widetilde{\pi}_{\Delta_M}(x) = R_{\Delta_M}^{-1}(x) + \nu_{\Delta_M}, \quad x \in \mathcal{K}^{\langle M\rangle}.$$

更一般地，我们可以投影到任意 M-复形 Δ_M，方法是令

$$\pi_{\Delta_M}(x) := \widetilde{\pi}_{\Delta_M}\big(\pi_M(x)\big), \quad x \in \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}. \tag{2.9}$$

显然，对于初级 M-复形，有 $\pi_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} = \pi_M$，因为 $\widetilde{\pi}_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} = \mathrm{Id}$。

2.3. 自由与反射从属布朗运动。

2.3.1. 自由布朗运动。 狄利克雷型理论（见 [21, 42]）为在简单嵌套分形 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ [48, 49] 上定义布朗运动提供了一个方便的框架。由此得到的过程 $(Z_t, \mathbf{P}^x)_{t\ge 0,\, x\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}}$ 是具有连续路径的对称强马尔可夫过程。其转移密度 $g(t,x,y)$（相对于 d 维豪斯多夫测度 $\mathfrak{m}$）满足以下次高斯估计 [42, 定理 5.2、5.5]:

$$\begin{aligned} C_1\, t^{-d_s/2} \exp\left(-C_2 \left(\frac{|x-y|^{d_w}}{t}\right)^{\frac{1}{d_J-1}}\right) &\le g(t,x,y) \\ &\le C_3\, t^{-d_s/2} \exp\left(-C_4 \left(\frac{|x-y|^{d_w}}{t}\right)^{\frac{1}{d_J-1}}\right), \qquad t>0,\ \ x,y\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

这里， d_w 表示 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$的行走维数， $d_s = 2d/d_w$ 表示其谱维数，而 $d_J > 1$表示所谓的化学指数。这些界在温和的结构假设下成立；在我们的情形中，这些假设总是满足的（参见 [32, 引理 A.2]之后的注释）。密度$g(t,\ x,\ y)$联合连续、对称，并满足标度性质

$$g(t,x,y) = L^d\, g(L^{d_w} t, Lx, Ly), \qquad t>0.$$

2.3.2. 上的反射布朗运动 $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$。 该过程已在 [32]中定义。当 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$是具有 GLP 的分形时，对于任意 $M \in \mathbb{Z}$ ，取值于 $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$的反射布朗运动（$Z_t^M$， $\mathbf{P}_M^x$）$_{t\geq 0,\ x\in\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}$可按如下方式典范地定义：

$$Z_t^M = \pi_M(Z_t), \tag{2.11}$$

其中 $\pi_M : \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle} \to \mathcal{K}^{\langle M\rangle}$ 是式（2.8）中的投影。其对称转移概率密度函数 $g_M(t,\ x,\ y) : (0,\ \infty) \times \mathcal{K}^{\langle M\rangle} \times \mathcal{K}^{\langle M\rangle} \to (0,\ \infty)$ 给出如下：

$$g_M(t,x,y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{y'\in\pi_M^{-1}(y)} g(t,x,y') & \text{if } y \in \mathcal{K}^{\langle M\rangle}\backslash\mathcal{V}_M^{\langle M\rangle}, \\ \displaystyle\sum_{y'\in\pi_M^{-1}(y)} g(t,x,y')\cdot \mathrm{rank}_M(y') & \text{if } y \in \mathcal{V}_M^{\langle M\rangle}, \end{cases} \tag{2.12}$$

其中 $\mathrm{rank}_M(y')$ 是在点 $y' \in \mathcal{V}_M^{\langle\infty\rangle}$ 相交的 M-复形的数量。详情请参见 [32]。

2.3.3. 从属过程：布朗运动与反射布朗运动。令 $S = (S_t)_{t\geq 0}$ 为概率空间 $(\Omega_0,\ \mathcal{F},\ \mathcal{P})$ 上的一个从属过程，即取值于 $[0,\infty)$ 的非递减列维过程。 S_t 的分布记为 $\eta_t(\mathrm{d}u) := \mathcal{P}(S_t \in \mathrm{d}u)$， $t \geq 0$，构成 $[0,\infty)$ 上的概率测度卷积半群，并由拉普拉斯变换唯一确定

$$\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-\lambda u}\,\eta_t(\mathrm{d}u) = \mathrm{e}^{-t\phi(\lambda)}, \quad \lambda > 0. \tag{2.13}$$

拉普拉斯 指数 ϕ 是一个Bernstein函数 </style}，满足 $\phi(0+) = 0$ ，其表示形式为

$$\phi(\lambda) = b\lambda + \int_{(0,\infty)} \big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda u}\big)\rho(\mathrm{d}u), \tag{2.14}$$

其中 $b \geq 0$，而 ρ是 $(0,\infty)$ 上满足$\int_{(0,\infty)}(u\wedge 1)\,\rho(\mathrm{d}u) < \infty$ 的非负拉东测度。常数 b 和测度 ρ 分别称为 S 的漂移项 和列维测度 。更多细节请参阅专著 [64]。

在全文中，我们将作如下假设。

(B) (**Bernstein函数**)

a) [Hartman-Wintner 型条件] 有

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\phi(\lambda)}{\log\lambda} = \infty; \tag{2.15}$$

b) 存在 $\alpha \in (0, d_w]$ 以及 $C_1, C_2, \lambda_0 > 0$ ，使得

$$C_1\lambda^{\alpha/d_w} \leq \phi(\lambda) \leq C_2\lambda^{\alpha/d_w}, \quad \lambda \in (0,\lambda_0]. \tag{2.16}$$

该条件的 a) 部分属于技术性条件，而 b) 部分则具有结构性。

由 (2.15) 可得 $\lim_{\lambda\to\infty}\phi(\lambda) = \infty$，因此，要么 $b > 0$，要么 $\int_{(0,\infty)}\rho(\mathrm{d}u) = \infty$。特别地，由 (2.13) 可得，对于每个 $t > 0$，都有 $\eta_t(\{0\}) = 0$。

满足条件的伯恩斯坦函数（及其对应的从属过程）的典型例子 y 假设（B）为：$\phi(\lambda) = b\lambda$， $b > 0$ （纯漂移），$\phi(\lambda) = \lambda^{\alpha/d_w}$， $\alpha \in (0, d_w)$（α/d_w-稳定从属过程），$\phi(\lambda) = (\lambda + m^{d_w/\vartheta})^{\vartheta/d_w} - m$， $\vartheta \in (0, d_w)$， $m > 0$ （相对论性 ϑ/d_w-稳定从属过程），以及$\phi(\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda^{\alpha_i/d_w}$， $\alpha_i \in (0, d_w]$， $n \in \{2,3,\ldots\}$ （稳定子*ordinator*的混合）。更多例子可见例如专著 [64]。

给定一个从属过程 S，其拉普拉斯指数 ϕ 满足（**B**），我们定义从属布朗运动 $X=(X_t)_{t\geq 0}$ 以及从属反射布朗运动 $X^M=(X_t^M)_{t\geq 0}$如下

$$X_t := Z_{S_t}, \qquad t \geq 0,$$

and

$$X_t^M := Z_{S_t}^M, \qquad t \geq 0,$$

分别。为简便起见，我们沿用扩散过程 Z 和 Z^M 中的记号，将这些过程的概率测度记作$\mathbf{P}^x$, $x \in \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$和$\mathbf{P}_M^x$, $x \in \mathcal{K}^{\langle M\rangle}$（这里 x表示起点）。相应的期望分别记作$\mathbf{E}^x$ 和$\mathbf{E}_M^x$。

根据从属理论的一般理论（例如，参见 [64, 第 5 章和 13]），过程 X和 X^M 是具有右连续且有左极限的路径的 Feller 过程。

由于 $\eta_t(\{0\}) = 0$ 对 $t > 0$成立， X 和 X^M 都具有对称的转移概率密度，具体如下:

$$p(t,x,y) = \int_0^\infty g(u,x,y)\,\eta_t(\mathrm{d}u), \qquad t>0,\ \ x,y \in \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle},$$

and

$$p_M(t,x,y) = \int_0^\infty g_M(u,x,y)\,\eta_t(\mathrm{d}u), \qquad t>0,\ \ x,y \in \mathcal{K}^{\langle M\rangle}, \tag{2.17}$$

分别。通过交换积分与求和的顺序，我们进一步得到

$$p_M\,(t,x,y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{y'\in\pi_M^{-1}(y)} p(t,x,y') & \text{if } y \in \mathcal{K}^{\langle M\rangle}\backslash\mathcal{V}_M^{\langle M\rangle}, \\ \displaystyle\sum_{y'\in\pi_M^{-1}(y)} p(t,x,y')\cdot \mathrm{rank}_M(y') & \text{if } y \in \mathcal{V}_M^{\langle M\rangle} \end{cases} \tag{2.18}$$

（回顾一下，$\mathrm{rank}_M(y')$表示在点 $y'\in \mathcal{V}_M^{\langle\infty\rangle}$ 处相交的 M-复形的数量）。对每个固定的 $t>0$, 两个密度 $p(t,x,y)$和 $p_M(t,x,y)$均有界。此外，它们继承了密度 $g(t,x,y)$和 $g_M(t,x,y)$的连续性性质。这些性质在[6,引理 2.1]中得到证明。因此，过程 X 和 X^M 具有强费勒性质。

若于 后续章节中的结果依赖于与 d
.....相关的 从属过程的桥测度。

对于 $t>0$ 和 $x,\ y \in \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$，我们用 $\mathbf{P}_t^{x\,y}$，表示在给定 $X_t = y$ 的条件下，$(X_s)_{0\leq s\leq t}$在 $\mathbf{P}^x$下的一个条件分布版本。这是定义在 $D([0,t],\ \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle})$ 上的一个概率测度，由解体公式刻画

$$p(t,x,y)\mathbf{P}_t^{x,y}(A) = \mathbf{E}^x\left[\mathbf{1}_A\, p(t-s,X_s,y)\right], \tag{2.19}$$

该公式对每个 $0<s<t$ 以及每个 $A\in\sigma(X_u : u\leq s)$ 都成立。

关于一般 Feller 过程的马尔可夫桥的精确定义及其更多性质，请参阅 [11]。

类似地，对于反射过程 X^M，我们考虑桥测度 $\mathbf{P}_{M\,t}^{x\,y}$,，它们定义于$M\in\mathbb{Z}_+$、 $t>0$和 x, $y\in\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$，并作为 $D([0,t],\mathcal{K}^{\langle M\rangle})$ 上的概率测度，满足

$$p_M(t,x,y)\mathbf{P}_{M,t}^{x,y}(A) = \mathbf{E}^x\left[\mathbf{1}_A\, p_M(t-s,X_s^M,y)\right], \tag{2.20}$$

对每个 $0\leq s<t$ 及每个 $A\in\sigma(X_u^M: u\leq s)$ 均成立。

关于测度 $\mathbf{P}_t^{x\,y}$, 和 $\mathbf{P}_{M\ ,t}^{x\,y}$ 的期望分别记为 $\mathbf{E}_t^{x\,y}$, 和 $\mathbf{E}_{M\,t}^{x\,y}$,。

2.4. 自由过程的半群与生成元。 所考虑过程的转移半群构成相应 L^2-空间上的自伴收缩算子强连续半群。现在我们固定这些半群及其（负定）无穷小生成元的记号。

(i) 对于 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$上的布朗运动 Z： $L^2(\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle},\mathfrak{m})$上的半群$(P_t)_{t\geq 0}$，其生成元为$\mathcal{L}$。

(ii) 对于 $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$, $M \in \mathbb{Z}$上的反射布朗运动 Z^M : $L^2(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}, \mathfrak{m})$上的半群$(P_t^M)_{t\geq 0}$ ，其生成元为 $\mathcal{L}^M$。(iii) 对于 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$上的从属布朗运动 X： $L^2(\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}, \mathfrak{m})$上的半群$(T_t)_{t\geq 0}$ ，其生成元为 $-\phi(-\mathcal{L})$。(iv) 对于 $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$上的反射从属布朗运动 X^M : $L^2(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}, \mathfrak{m})$上的半群$(T_t^M)_{t\geq 0}$ ，其生成元为 $-\phi(-\mathcal{L}^M)$。

算子 $\mathcal{L}$ 是与分形$\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$上的布朗运动 Z 相关联的典范拉普拉斯算子，而 $\mathcal{L}^M$ 则是在复形 $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$ 上定义的诺伊曼拉普拉斯算子。(iii) 和 (iv) 中的记号表示，相应从属过程的生成元实际上是正自伴算子 $-\mathcal{L}$ 和 $-\mathcal{L}^M$的（负）算子单调函数；这两个算子通过谱定理定义。

现在我们简要概述 (ii) 和 (iv) 中算子的谱性质。由于半群 $(P_t^M)_{t\geq 0}$和 $(T_t^M)_{t\geq 0}$由希尔伯特–施密特算子组成， $-\mathcal{L}^M$和 $\phi(-\mathcal{L}^M)$的谱都是纯离散的，并且这些算子都存在完备的特征函数系。

$-\mathcal{L}^M$ 的特征值满足

$$0 = \mu_1^M < \mu_2^M \leq \mu_3^M \leq \cdots \to \infty,$$

并且它们服从标度性质

$$\mu_k^M = L^{-Md_w}\,\mu_k^1, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.21}$$

$\phi(-\mathcal{L}^M)$的特征值记为

$$\lambda_1^M < \lambda_2^M \leq \lambda_3^M \leq \cdots \to \infty,$$

并且满足

$$\lambda_1^M = 0, \qquad \lambda_k^M = \phi(\mu_k^M) = \phi(L^{-Md_w}\,\mu_k^1), \quad k = 2, 3, 4, \ldots \tag{2.22}$$

相应的特征函数构成 $L^2(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}, \mathfrak{m})$中的完备正交归一系，记为$(\psi_k^M)_{k\geq 1}$，其中 $\psi_1^M \equiv L^{-\frac{Md}{2}}$。因此，我们有

$$\phi(-\mathcal{L}^M)\psi_k^M = \lambda_k^M \psi_k^M, \qquad \text{and} \qquad T_t^M \psi_k^M = \mathrm{e}^{-t\lambda_k^M}\,\psi_k^M. \tag{2.23}$$

2.5. 随机费曼–卡茨半群及相关薛定谔算子。 在本文中，我们考虑如下一类随机势。

定义 2.5.（分形泊松型势） 设 $W\colon \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle} \times \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle} \to [0, \infty)$ 为博雷尔函数， μ^ω 为对应于定义在 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 上、强度为 $\nu\mathrm{d}\mathfrak{m}$的泊松点过程的随机计数测度，该过程定义在概率空间 $(\Omega\ \mathcal{M}, \mathbb{Q})$ 上，其中 $\nu > 0$ 为给定参数。则随机场

$$V^\omega(x) := \int_{\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}} W(x, y)\mu^\omega(\mathrm{d}y), \tag{2.24}$$

称为泊松型势。二元轮廓函数 W 称为单点势。

我们假设泊松点过程与从属布朗运动相互独立。我们的技术关键依赖于第2.2节所述状态空间的周期结构。特别是，我们的论证涉及下述周期化分形泊松型势，其定义为

$$V_M^\omega(x) := \int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} \sum_{y' \in \pi_M^{-1}(y)} W(x, y')\,\mu^\omega(\mathrm{d}y), \qquad M \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.25}$$

这种周期化可描述如下：我们首先将泊松构型限制在 $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$上，然后将其周期性地延拓至 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$，最后在所有由此得到的点上附加轮廓函数 W 。

为继续讨论，我们需要所考虑的势属于相应过程的 Kato类。

定义2.6。（Kato类和局部Kato类）

(i) 若可测函数 $f:\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}\to\mathbb{R}$ 属于过程X的Kato类，记作 $\mathcal{J}^X$，则

$$\lim_{t\to 0}\sup_{x\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}}\int_0^t T_s|f|(x)\,\mathrm{d}s=0. \tag{2.26}$$

过程 X^M 的 Kato类记作 $\mathcal{J}^{X^M}$，其定义与之类似，只需将 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 替换为 $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$，并将 T_t 替换为 T_t^M。

(ii) 若可测函数 $f:\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}\to\mathbb{R}$ 属于过程 X 的局部Kato类，记作 $\mathcal{J}^X_{\text{局部}}$，则对每个 M-复形 Δ，函数 $f\mathbf{1}_\Delta$ 属于 $\mathcal{J}^X$。

由于 $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$ 是紧的，因此无需引入过程 X^M 的局部Kato类。

现在，我们对单点势 W 施加一般的正则性假设，以确保所考虑的随机势定义良好，且相应的薛定谔算子具有足够的正则性。特别地，假设 **(W1)** 确保在当前设定下积分态密度的存在。

(W1) (**单点势**)

a) $W(\cdot,\ y)\in\mathcal{J}^X$ 对于每个 $y\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$（参见定义2.6），都存在函数$h\in L^1(\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle},\mathfrak{m})$，使得对于任意 $M\in\mathbb{Z}$，若 $x\in\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$ 且 $y\notin\mathcal{K}^{\langle M+1\rangle}$，则$W(x,y)\le h(y)$。b) $\sum_{M=1}^{\infty}\sup_{x\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}}\int_{\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}\setminus\mathcal{C}_{\lfloor M/4\rfloor}(x)}W(x,y)\,\mathfrak{m}(y)<\infty$; c) 对于充分大的 $M\in\mathbb{Z}_+$, $\sum_{x,y\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}}\sum_{y'\in\pi_M^{-1}(\pi_M(y))}\sum_{y'\in\pi_M^{-1}(\pi_M(v))}W\left(\pi_M(x),\ y'\right)\le\sum_{x,y\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}}\sum_{y'\in\pi_{M+1}^{-1}(\pi_{M+1}(x))}W\left(\pi_{M+1}(x),\ y'\right)$, (2.27)

轮廓函数 $W(x,\ y)$ 描述位于 y 的单个泊松点对位于点 x 的粒子所产生影响的强度。条件 **(W1.ab)** 是正则性假设，而条件 **(W1.c)** 则具有结构上的重要性。它指出，对于每个固定的 $x,\ y\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$，位于 $\pi_M^{-1}(\pi_M(y))$ 的点对位于 $\pi_M(x)$ 的粒子所产生的影响 $\in\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$ 平均而言，小于位置 $\pi_{M+1}(x)$ 处受到的影响。

下面的命题表明，在条件 **(W1)** 下，按 (2.24) 和 (2.25) 定义的势 V^ω 和 V_M^ω 几乎对每个 $\omega\in\Omega$ 都有良好定义，且属于局部Kato类。

命题 2.7。设 V^ω 为泊松势 (2.5)，其轮廓函数 W 满足 $(\mathbf{W1})$，并设 V_M^ω 为其周期化 (2.25)，$M\in\mathbb{Z}$. 则几乎必然有：

(a) $V^\omega\in\mathcal{J}_{loc}^X$;

(b) $V_M^\omega\in\mathcal{J}_{loc}^X$;

(c) $V_M^\omega\in\mathcal{J}^{X^M}$.

证明。(a) 首先注意到

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\int_{\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}}h(y)\,\mu^\omega(\mathrm{d}y)=\nu\int_{\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}}h(y)\,\mathfrak{m}(\mathrm{d}y)=\nu\|h\|_{L^1}<\infty.$$

因此，存在一个概率为一的集合 $\Omega'\subset\Omega$，使得对每个 $\omega\in\Omega'$，都有$h\in L^1(\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle},\mu^\omega)$。对于 $n\in\mathbb{Z}_+$，定义

$$\Omega_n=\left\{\omega\in\Omega:\text{only finitely many points fall into }\mathcal{K}^{\langle n\rangle}\right\}.$$

那么，对于每个 $n\in\mathbb{Z}_+$，都有 $\mathbb{Q}(\Omega_n)=1$，因此集合

$$\widetilde{\Omega}:=\Omega'\cap\bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+}\Omega_n$$

也有 $\widetilde{\Omega}$ 的满测度。对于 $\omega\in\Omega$，我们将 $\{y_i(\omega)\}$ 记为泊松点云的实现 .

~令 $\omega \in \Omega$。只需证明条件 (2.26) 对 $V^\omega \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{\langle n\rangle}}$成立，对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$.而言。对于 $x \in \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$，我们有

$$V^\omega(x)\mathbf{1}_{\mathcal{K}^{\langle n\rangle}}(x) \le \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{\langle n\rangle}}(x)\left(\sum_{y_i(\omega)\in\mathcal{K}^{\langle n+1\rangle}} W(x,y_i(\omega)) + \int_{(\mathcal{K}^{\langle n+1\rangle})^c} h(y)\mu^\omega(\mathrm{d}y)\right)$$

以及进一步

$$\begin{aligned}\int_0^t T_s(V^\omega \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{\langle n\rangle}})(x)\,\mathrm{d}s &= \int_0^t \mathbf{E}^x\left(V^\omega(X_s)\mathbf{1}_{\mathcal{K}^{\langle n\rangle}}(X_s)\right)\mathrm{d}s\\ &\le \int_0^t \mathbf{E}^x\left(\mathbf{1}_{\mathcal{K}^{\langle n\rangle}}(X_s)\left(\sum_{y_i(\omega)\in\mathcal{K}^{\langle n+1\rangle}} W(X_s,y_i(\omega)) + \int_{(\mathcal{K}^{\langle n+1\rangle})^c} h(y)\mu^\omega(\mathrm{d}y)\right)\right)\\ &= \sum_{y_i(\omega)\in\mathcal{K}^{\langle n+1\rangle}} \int_0^t T_s(W(\cdot,y_i(\omega))\mathbf{1}_{\mathcal{K}^{\langle n\rangle}})(x)\mathrm{d}s + t\int_{(\mathcal{K}^{\langle n+1\rangle})^c} h(y)\mu^\omega(\mathrm{d}y).\end{aligned}$$

由于我们假设 $W(\cdot,y) \in \mathcal{J}^X_{loc}$,第一项求和中的每个积分都趋于零，且对 x. 一致成立，因此整个和也对 x 一致趋于 0。第二项不依赖于 x,，并且可以用 $t\|h\|_{L^1(\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle},\mu^\omega)}$· 估计。结论得证。

(b) 论证基本相同；唯一额外的步骤是分析相对于 π_M 周期化的构型。记

$$\{y_i^M(\omega)\} := \pi_M^{-1}\Big(\{y_i(\omega)\}\cap\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\Big)$$

为周期化云的实现，并令 $\mu^\omega_M := \mu^\omega \circ \pi_M$。于是

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\int_{\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}} h(y)\,\mu^\omega_M(\mathrm{d}y) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}\sum_{y'\in\pi_M^{-1}(y)} h(y')\,\mu^\omega(\mathrm{d}y)\\ &= \nu\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}\sum_{y'\in\pi_M^{-1}(y)} h(y')\,\mathfrak{m}(\mathrm{d}y) = \nu\int_{\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}} h(y)\,\mathfrak{m}(\mathrm{d}y) = \nu\|h\|_{L^1} < \infty.\end{aligned}$$

因此，我们也可以假设对于 $\omega \in \tilde{\Omega}$, $h \in L^1(\mathcal{K}^{\langle M\rangle},\mu^\omega_M)$。

现在令 $\omega \in \tilde{\Omega}$、$n \ge M$ 和 $x \in \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$。则

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{\mathcal{K}^{\langle n\rangle}}(x)V^\omega_M(x) &= \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{\langle n\rangle}}(x)\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}\sum_{y'\in\pi_M^{-1}(y)} W(x,y')\,\mu^\omega(\mathrm{d}y)\\ &= \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{\langle n\rangle}}(x)\int_{\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}} W(x,y)\,\mu^\omega_M(\mathrm{d}y)\\ &\le \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{\langle n\rangle}}(x)\left(\sum_{y_i^M(\omega)\in\mathcal{K}^{\langle n+1\rangle}} W(x,y_i^M(\omega)) + \int_{(\mathcal{K}^{\langle n+1\rangle})^c} h(y)\,\mu^\omega_M(\mathrm{d}y)\right).\end{aligned}$$

结论现在可完全按照 (a) 部分的方法得出。

(c) 根据 [57, 定理 3.1] 和从属公式 (2.17)，存在常数 c_1, $c_2 > 0$ 使得

$$p_M(s,x,y) \le c_1\big(p(c_2 s,x,y) + L^{-Md}\big), \quad x,y \in \mathcal{K}^{\langle M\rangle},\ s>0,\ M\in\mathbb{Z}_+.$$

因此,

$$\int_0^t T_s^M V^\omega_M(x)\mathrm{d}s \le c_1\int_0^t T_s V^\omega_M(x)\mathrm{d}s + c_1 t L^{-Md}\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} V^\omega_M(y)\mathfrak{m}(\mathrm{d}y).$$

右端第一项由于 (b) 在 $x \in \mathcal{K}^{\langle M\rangle}$ 上一致趋于零，而第二项则是因为 $V_M^\omega \in \mathcal{J}_{loc}^X \subset L^1_{loc}(\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}, \mathfrak{m})$, 几乎必然成立。该命题的证明至此完成。

□

给定一个几乎必然属于局部Kato类$\mathcal{J}_{loc}^X$的分形泊松型势 V^ω，我们如下定义从属布朗运动 X 的随机 Feynman–Kac 半群 $\{T_t^{V^\omega}:\ t \geq 0\}$

$$T_t^{V^\omega} f(x) = \mathbf{E}^x \left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V^\omega(X_s)\mathrm{d}s} f(X_t) \right], \quad f \in L^2(\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}, \mathfrak{m}), \ \ t > 0.$$

该半群在 $L^2(\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}, \mathfrak{m})$上强连续，并由自伴算子组成。众所周知，$T_t^{V^\omega} = \mathrm{e}^{-tH^\omega}$，其中

$$H^\omega = \phi(-\mathcal{L}) + V^\omega$$

是与 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$上从属布朗运动 X 的生成元相关联的随机薛定谔算子。这里 ϕ表示从属过程 S的拉普拉斯指数，而 $\mathcal{L}$ 是USNF上自由布朗运动的生成元。关于由Feller 过程生成的薛定谔算子及其Feynman–Kac 半群的标准参考文献是Demuth与van Casteren的专著 [17]（另见 [14, 第 3.2–3.3]章）。

我们还定义随机费曼–卡茨半群 $\{T_t^{D,M,V^\omega}: t \geq 0\}$ 和 $\{T_t^{N,M,V^\omega}:\ t \geq 0\}$，分别对应于离开复形 $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$ 时被杀死的过程 X 以及在 $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$中演化的反射过程 X^M。更确切地说，

$$T_t^{D,M,V^\omega} f(x) = \mathbf{E}^x \left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V^\omega(X_s)\mathrm{d}s} f(X_t); t < \tau_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} \right], \quad f \in L^2(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}, \mathfrak{m}),\ M \in \mathbb{Z}_+,\ t > 0,$$

and

$$T_t^{N,M,V^\omega} f(x) = \mathbf{E}_M^x \left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V^\omega(X_s^M)\mathrm{d}s} f(X_t^M) \right], \quad f \in L^2(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}, \mathfrak{m}),\ M \in \mathbb{Z}_+,\ t > 0.$$

Here $\tau_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} = \inf\{t \geq 0: X_t \notin \mathcal{K}^{\langle M\rangle}\}$ 表示过程离开 $\mathcal{K}^{\langle M}$的首次离开时间 $\rangle$.

将 A^{D,M,V^ω} 和 A^{N,M,V^ω} 分别记为半群 $\{T_t^{D,M,V^\omega}: t \geq 0\}$ 和$\{T_t^{N,M,V^\omega}: t \geq 0\}$的 L^2-生成元。如上所述，杀死过程和反射过程分别对应于在生成元上施加狄利克雷和 诺伊曼边界条件。因此，（正定的）有限体积算子

$$H_M^{D,V^\omega} := -A^{D,M,V^\omega}, \qquad H_M^{N,V^\omega} := -A^{N,M,V^\omega}, \tag{2.28}$$

可视为与初始从属布朗运动 X的生成元的狄利克雷（相应地，诺伊曼）实现相关联的薛定谔算子。特别地，由 [17,定理2.5],

$$H_M^{N,V^\omega} = \phi(-\mathcal{L}^M) + V^\omega.$$

算子 $T^{D,\ M,V^\omega}$,与 $T^{N,\ M,V^\omega}$,，$t > 0$，均为积分算子。对每个 $t > 0$，存在对称的有界核$u^D_{M,\omega}(t, x, y)$与$u^N_{M,\omega}(t, x, y)$，使得

$$T_t^{D,M,V^\omega} f(x) = \int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} u^D_{M,\omega}(t, x, y)\, f(y)\, \mathfrak{m}(\mathrm{d}y), \qquad f \in L^2(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}, \mathfrak{m}),$$

and

$$T_t^{N,M,V^\omega} f(x) = \int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} u^N_{M,\omega}(t, x, y)\, f(y)\, \mathfrak{m}(\mathrm{d}y), \qquad f \in L^2(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}, \mathfrak{m}).$$

这些核具有如下桥表示:

$$u^D_{M,\omega}(t, x, y) = p(t, x, y)\, \mathbf{E}_t^{x,y} \left[\exp\left(-\int_0^t V^\omega(X_s)\, \mathrm{d}s \right); t < \tau_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} \right],$$

and

$$u^N_{M,\omega}(t,x,y) = p_M(t,x,y)\,\mathbf{E}^{x,y}_{M,t}\left[\exp\left(-\int_0^t V^\omega(X^M_s)\,\mathrm{d}s\right)\right].$$

由于对于每个 $t>0$，这些核都是有界的，且 $\mathfrak{m}(\mathcal{K}^{\langle M\rangle})<\infty$，因此算子 T^{D,M,V^ω}_t 和 T^{N,M,V^ω}_t 都是希尔伯特–施密特算子。因此，H^{D,V^ω}_M 和 H^{N,V^ω}_M 的谱由有限重数的孤立特征值组成，满足

$$0 \le \lambda^{D,M,V^\omega}_1 < \lambda^{D,M,V^\omega}_2 \le \lambda^{D,M,V^\omega}_3 \le \ldots \to \infty,$$

and

$$0 \le \lambda^{N,M,V^\omega}_1 < \lambda^{N,M,V^\omega}_2 \le \lambda^{N,M,V^\omega}_3 \le \ldots \to \infty,$$

分别。

2.6. 有限体积谱测度、其拉普拉斯变换及积分态密度的存在性。对于一大类具有良定义周期结构的分形，即满足 GLP 的 USNF，可以证明薛定谔算子H^ω的积分态密度存在。通常，我们考虑定义在 $[0,\infty)$ 上、基于H^{D,V^ω}_M和 H^{N,V^ω}_M的谱构造的随机经验测度，并以 $\mathfrak{m}(\mathcal{K}^{\langle M\rangle})$ 归一化：

$$\Lambda^{D,V^\omega}_M := \frac{1}{\mathfrak{m}\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_{\lambda^{D,M,V^\omega}_n} \tag{2.29}$$

and

$$\Lambda^{N,V^\omega}_M := \frac{1}{\mathfrak{m}\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_{\lambda^{N,M,V^\omega}_n}\ . \tag{2.30}$$

我们证明，这些测度收敛到一个共同极限 Λ，它是定义在$[0,\infty)$ 上的非随机测度。这个极限称为积分态密度 (IDS)。

定理 2.8. 设 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 是满足 *GLP* 的 *USNF*，并且假设$(\mathbf{B})$ 成立。则随机测度 Λ^{D,V^ω}_M 和 Λ^{N,V^ω}_M 关于 $\mathbb{Q}$几乎必然地，当$M\to\infty$ 时弱收敛到定义在 $[0,\infty)$上的共同非随机极限测度 Λ 。 (W1)

定理 2.8 的证明沿用了 [33], 的方法；该文在谢尔宾斯基三角形（最规则的平面简单嵌套分形）上，确立了与从属布朗运动相关的泊松势所对应的随机薛定谔算子的积分态密度的存在性。最近，有人将一种密切相关的方案应用于相同类别的过程和状态空间，但研究的是另一类随机势，即由格点 $\mathcal{V}^{\langle 0\rangle}_0$ [6] 诱导的分形合金型势。为完整起见，附录 A 中简要介绍了相关内容。这里我们只勾勒主要思路；这一思路对于分析利夫希茨奇异性也至关重要，而利夫希茨奇异性正是本文的核心主题。

一般而言，该论证依赖于用定义在 $L^2(\mathcal{K}^{\langle M\rangle},\ \mathfrak{m})$ 上的算子，在 $M\nearrow\infty$ 时逼近作用于 $L^2(\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle},\ \mathfrak{m})$ 中的算子 H^ω。关键在于 $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$、 $M\in\mathbb{Z}$ 上的反射过程序列，以及 π_M 中构造的折叠投影 [32]。得益于假设（**W1.c**），通过对势作适当处理，可以恢复证明所必需的单调性。

测度 Λ^{D,V^ω}_M和 Λ^{N,V^ω}_M的收敛可由其拉普拉斯变换 $\mathbb{L}^{D,V^\omega}_M$， $\mathbb{L}^{N,V^\omega}_M$.的收敛推得。注意，

$$\begin{aligned}\mathbb{L}^{D,V^\omega}_M(t) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\Lambda^{D,V^\omega}_M(\mathrm{d}\lambda)\\ &= \frac{1}{\mathfrak{m}\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda^{D,M,V^\omega}_n t} = \frac{1}{\mathfrak{m}\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)}\mathrm{Tr}T^{D,M,V^\omega}_t\\ &= \frac{1}{\mathfrak{m}\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)}\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} u^D_{M,\omega}(t,x,x)\,\mathfrak{m}(\mathrm{d}x)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\mathfrak{m}\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)} \int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} p(t,x,x)\mathbf{E}_t^{x,x}\left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V^\omega(X_s)\mathrm{d}s}; t<\tau_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}\right]\mathfrak{m}(\mathrm{d}x)$$

and

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_M^{N,V^\omega}(t) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\Lambda_M^{N,V^\omega}(\mathrm{d}\lambda)\\ &= \frac{1}{\mathfrak{m}\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)}\sum_{n=1}^\infty \mathrm{e}^{-\lambda_n^{N,M,V^\omega}t} = \frac{1}{m\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)}\mathrm{Tr}T_t^{N,M,V^\omega}\\ &= \frac{1}{\mathfrak{m}\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)}\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} u_{M,\omega}^N(t,x,x)\,\mathfrak{m}(\mathrm{d}x)\\ &= \frac{1}{\mathfrak{m}\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)}\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} p_M(t,x,x)\mathbf{E}_{M,t}^{x,x}\left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V^\omega(X_s^M)\mathrm{d}s}\right]\mathfrak{m}(\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

事实上，我们并不直接研究 $\mathbb{L}^{D,\ V^\omega}_{M}$ 和 $\mathbb{L}^{N,\ V^\omega}_{M}$ 的收敛。我们的思路如下：给定一个 M，我们首先用势 V_M^ω 替换初始泊松势 V^ω。势 V_M^ω 是通过映射 π_M，由泊松点的周期化构型构造而成，参见（2.25）。然后，我们考虑由以下算子组成的 Feynman–Kac 半群

$$T_t^{N,M,V_M^\omega} f(x) = \mathbf{E}_M^x\left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V_M^\omega(X_s^M)\mathrm{d}s} f(X_t^M)\right], \quad f\in L^2(\mathcal{K}^{\langle M\rangle},\mathfrak{m}),\ M\in\mathbb{Z}_+,\ t>0,$$

以及相应的诺伊曼薛定谔算子

$$H_M^{N,V_M^\omega} = \phi(-\mathcal{L}^M) + V_M^\omega.$$

最后，我们证明拉普拉斯变换 $\mathbb{L}^{N,\ V_M^\omega}_{M}(t)$ 收敛到有限极限 $\mathbb{L}(t)$（该极限可视为积分态密度的拉普拉斯变换）。更具体地，在定理 A.2 中，我们证明对于每个 $t>0$,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\mathbb{L}_M^{N,V_M^\omega}(t) \searrow \mathbb{L}(t) \quad \text{as} \quad M\to\infty. \tag{2.31}$$

此外，由于

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_M^{N,V_M^\omega}(t) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\Lambda_M^{N,V_M^\omega}(\mathrm{d}\lambda) &= \frac{1}{\mathfrak{m}(\mathcal{K}^{\langle M\rangle})}\sum_{n=1}^\infty \mathrm{e}^{-t\lambda_n^{N,M,V_M^\omega}}\\ &\le \frac{1}{\mathfrak{m}(\mathcal{K}^{\langle M\rangle})}\left[\mathrm{e}^{-(t-1)\lambda_1^{N,M,V_M^\omega}}\mathrm{Tr}T_1^{N,M,V_M^\omega}\right]\\ &\le \mathrm{e}^{-(t-1)\lambda_1^{N,M,V_M^\omega}}\frac{1}{\mathfrak{m}(\mathcal{K}^{\langle M\rangle})}\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} p_M(1,x,x)\mathfrak{m}(\mathrm{d}x),\end{aligned}$$

对于 $t>1$，(2.31) 中的单调收敛性以及 [6, 引理2.1(b)] 给出

$$\mathbb{L}(t) \le C\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\mathrm{e}^{-(t-1)\lambda_1^{N,M,V_M^\omega}}, \quad t>1,\ M\in\mathbb{Z}_+, \tag{2.32}$$

其中常数 $C>0$ 为一致常数，不依赖于 M. 。这一估计将作为证明 $\mathbb{L}(t)$ 上界的起点。(2.31) 的另一个重要推论是，我们还有如下收敛（不一定是单调收敛）

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\mathbb{L}_M^{D,V^\omega}(t) \to \mathbb{L}(t) \quad \text{as} \quad M\to\infty, \tag{2.33}$$

参见推论 A.4。这将是证明 $\mathbb{L}$下界的初始步骤(t).

3. Upper bound for the Laplace transform of the IDS

我们的主要定理 1.1 将在以下假设（**W2**）下证明:

(W2) (**具有正则有界支撑的单点势**)

a) 存在 $m_0\in\mathbb{Z}$ 和 $A_0>0$，使得

$$W(x,y)\ge A_0 \quad \text{for all} \quad x,y\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle} \text{ with } d_{m_0}(x,y)\le 1. \tag{3.1}$$

b) 存在 $M_0 \in \mathbb{Z}_+$，使得

$$W(x,y) = 0 \quad \text{for all} \quad x, y \in \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle} \text{ with } d_{M_0}(x,y) > 1;$$

条件（**W2.a**）表示，当 x 和 y 接近时，轮廓函数 $W(x,y)$ 与 0（均匀地）分离；条件（**W2.b**）则表示，当 x 和 y 相距较远时，$W(x,y)$ 消失。

本节中，我们为具有正则支集的单点势 W 的积分态密度的拉普拉斯变换 $\mathbb{L}(t)$ 求得一个一般性上界，也就是说，我们假设条件（**W2.a**）成立。该结果不要求对 W 支集的有界性作任何假设（特别是，此处不需要条件（**W2.b**））。不过，在第 4 节中，我们将为具有有界支撑的单点势 W 的 $\mathbb{L}(t)$补充一个相匹配的下界。

以下定理是本节的主要结果。

定理 3.1. 假设特征指数 ϕ 满足(**B**)，且单点势 W 满足(**W2**.a) 与(**W1**)。则对每一个 $\nu_0 > 0$，存在常数$C = C(\nu_0) > 0$，使得对每一个 $\nu \geq \nu_0$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log \mathbb{L}(t)}{t^{\frac{d}{d+\alpha}}} \leq -C\nu^{\frac{\alpha}{d+\alpha}}. \tag{3.2}$$

鉴于 (2.32)，上述定理的证明可归结为对期望求出一个令人满意的上估计

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \mathrm{e}^{-(t-1)\lambda_1^{N,M,V_M^\omega}},$$

其中 $\lambda_1^{N,M,V_M^\omega}$是随机薛定谔算子 $H^{N,M}_{V_M^\omega}$的基态特征值。我们的推理由三个主要步骤组成。

步骤 1. 归结为以分形复形为指标的合金型势。这一步对整个证明至关重要。关键的观察是，我们可以将势V_M^ω 替换为一个合金型随机势，其中位点由阶为 m_0的分形复形来刻画。形式上，我们考虑假设（**W2.a**）中的 $m_0 \in \mathbb{Z}$，并引入随机变量族 $\{q_\Delta : \Delta \in \mathcal{T}_{m_0}\}$，它们表明集合 $\Delta \setminus \mathcal{V}_{m_0}^{\langle\infty\rangle}$是否接收到任何泊松点，即

$$q_\Delta(\omega) := \mathbf{1}_{\{\Delta\setminus\mathcal{V}_{m_0}^{\langle\infty\rangle} \text{ received any of Poisson points}\}}(\omega), \quad \Delta \in \mathcal{T}_{m_0}$$

（请记住，$\mathcal{T}_{m_0}$ 表示 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$中所有 m_0-复形的族）。根据定义可直接得出，q_Δ 是在 $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{Q})$ 上服从伯努利分布的独立同分布随机变量

$$\mathbb{Q}[q_\Delta = 0] = \mathrm{e}^{-\nu L^{dm_0}} \quad \text{and} \quad \mathbb{Q}[q_\Delta = 1] = 1 - \mathrm{e}^{-\nu L^{dm_0}}.$$

基于此，我们设

$$\begin{aligned} \overline{V}_M^\omega(x) &= A_0 \cdot \sum_{\substack{\Delta\in\mathcal{T}_{m_0} \\ \Delta\subset\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}} q_\Delta(\omega) \cdot \mathbf{1}_{\Delta\setminus\mathcal{V}_{m_0}^{\langle\infty\rangle}}(\pi_M(x)) \\ &= A_0 \cdot q_{\Delta(\pi_M(x))}(\omega) \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}\setminus\mathcal{V}_{m_0}^{\langle\infty\rangle}}(x), \qquad x \in \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle},\ M \in \mathbb{Z}_+,\ M \geq m_0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

其中常数 $A_0 > 0$来自假设（**W2.a**）（若 $x \in \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle} \setminus \mathcal{V}_{m_0}^{\langle\infty\rangle}$，则 $\Delta_{m_0}(x)$表示包含 x的唯一 m_0-复形）。由（**W2.a**）可得，

$$V_M^\omega(x) \geq \overline{V}_M^\omega(x), \quad x \in \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}. \tag{3.4}$$

事实上，由于 $\mu^\omega(B)$ 统计落在 B 上的泊松点，我们得到

$$\begin{aligned} V_M^\omega(x) &= \int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} \sum_{y'\in\pi_M^{-1}(y)} W(x,y')\mu^\omega(\mathrm{d}y) \\ &\geq \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}\setminus\mathcal{V}_{m_0}^{\langle\infty\rangle}}(x) \cdot A_0 \cdot \mu^\omega\big(\Delta_{m_0}(\pi_M(x))\big) \\ &\geq \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}\setminus\mathcal{V}_{m_0}^{\langle\infty\rangle}}(x) \cdot A_0 \cdot q_{\Delta_{m_0}(\pi_M(x))}(\omega) = \overline{V}_M^\omega(x). \end{aligned}$$

注3.2 (以分形复形为索引的一般合金型势). 值得注意的是，上文引入的势 $V_M^{\omega}(x)$ 是一种一般合金型势的特例，其中位点不再由晶格顶点给出，而是可以与分形的复形相对应。更准确地说，对于给定的控制层级 $m_0 \in \mathbb{Z}$，可以考虑一族独立同分布的非负随机变量 $\{\xi_\Delta : \Delta \in \mathcal{T}_{m_0}\}$ 以及单点势 $W : \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle} \times \mathcal{T}_{m_0} \to [0,\infty)$，然后定义

$$\overline{V}^{\omega}(x) := \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_{m_0}} \xi_\Delta(\omega)\overline{W}(x,\Delta), \quad x \in \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}.$$

这类合金型势似乎更适合从“鸟瞰”的角度观察随机势构型：分形上的自然结构由复形而非其顶点标记。还可以考虑这种势的一个版本，它是为位点的 π_M 周期化构型构造的，其中 $M \geq m_0$:

$$\overline{V}_M^{\omega}(x) := \sum_{\substack{\Delta_{m_0} \in \mathcal{T}_{m_0} \\ \Delta_{m_0} \subset \mathcal{K}^{\langle M\rangle}}} \xi_{\Delta_{m_0}}(\omega) \cdot \sum_{\Delta'_{m_0} \in \pi_M^{-1}(\Delta_{m_0})} \overline{W}(x,\Delta'_{m_0}), \qquad x \in \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}.$$

注意，(3.3) 中的势恰好是满足以下条件的势

$$\overline{W}(x,\Delta_{m_0}) := A_0 \cdot \mathbf{1}_{\Delta_{m_0} \setminus \mathcal{V}_{m_0}^{\langle\infty\rangle}}(x)$$

以及由 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 上的泊松点过程诱导的随机变量 $\xi_{\Delta_{m_0}} = q_{\Delta_{m_0}}$。据我们所知，这类随机场尚未在分形上得到研究。

现在可以总结证明的第一步：(2.32) 和 (3.4) 结合可得

$$\mathbb{L}(t) \leq C\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\mathrm{e}^{-(t-1)\lambda_1^{N,M,\overline{V}_M^{\omega}}}, \quad t > 1,\ M \in \mathbb{Z}_+,\ M \geq m_0, \tag{3.5}$$

where $\lambda_1^{N,M,\overline{V}_M^{\omega}}$ 关于 $\lambda^{N,M,V_M^{\omega}}$，是算子 $H^{N,M,V_M^{\omega}} = \phi(-\mathcal{L}^M) + V_M^{\omega}$ 的基态特征值。

证明的其余部分遵循 [31] 中考虑欧几里得空间内整数晶格合金型势时所采用的方案。这些思路可以推广到当前的合金型势情形，其中各位点由分形复形建模。接下来的两个步骤将完成这一工作。

步骤2. 基态特征值的下界估计 $\lambda^{N,M,V_M^{\omega}}$。我们将用到以下经典结果。

命题3.3 (Temple不等式， [63, 定理XIII.5])。设 H 是希尔伯特空间上的自伴算子，其内积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，且满足 $\lambda_1 := \inf \sigma(H)$ 是一个孤立特征值，并令 $\eta \leq \inf(\sigma(H) \setminus \{\lambda_1\})$。那么，对任意满足下述条件的 $\psi \in \mathcal{D}(H)$,

$$\langle\psi, H\psi\rangle < \eta \quad \text{and} \quad \|\psi\| = 1 \tag{3.6}$$

以下界成立：

$$\lambda_1 \geq \langle\psi, H\psi\rangle - \frac{\langle H\psi, H\psi\rangle - \langle\psi, H\psi\rangle^2}{\eta - \langle\psi, H\psi\rangle}. \tag{3.7}$$

设 $\eta = \lambda_2^M$为算子 $\phi(-\mathcal{L}^M)$)的第二特征值。由(2.22)可得

$$\eta = \phi(\mu_2^M) = \phi(L^{-Md_w}\mu_2^1)$$

并利用我们的假设（**B.b**），我们得到存在 $M_1 \geq m_0$，使得对于 $M \in \mathbb{Z}_+$,$M \geq M_1$,

$$\widetilde{C}_1 \frac{1}{L^{M\alpha}} \leq \eta \leq \widetilde{C}_2 \frac{1}{L^{M\alpha}}, \tag{3.8}$$

其中 $\widetilde{C}_1 = C_1(\mu_2^1)^{\alpha/d_w}$ 和 $\widetilde{C}_2 = C_2(\mu_2^1)^{\alpha/d_w}$. 定义如下：

$$D_0 = \frac{\widetilde{C}_1}{4A_0}. \tag{3.9}$$

我们不妨假设 M_1 足够大，使得对于 $M \geq M_1$，有

$$D_0 \leq L^{M\alpha}.$$

对于每个 $\Delta \in \mathcal{T}_{m_0}$ 和 $M \in \mathbb{Z}_+$，我们令 $M \geq M_1$

$$\widetilde{q}_\Delta(\omega) := q_\Delta(\omega) \wedge \frac{D_0}{L^{M\alpha}} = \frac{D_0}{L^{M\alpha}} \cdot q_\Delta(\omega) \tag{3.10}$$

并考虑势

$$\begin{aligned}
\widetilde{V}_M^\omega(x) &= A_0 \cdot \sum_{\substack{\Delta \in \mathcal{T}_{m_0} \\ \Delta \subset \mathcal{K}^{\langle M \rangle}}} \widetilde{q}_\Delta(\omega) \cdot \mathbf{1}_{\Delta \setminus \mathcal{V}_{m_0}^{\langle \infty \rangle}}(\pi_M(x)) \\
&= \frac{A_0 D_0}{L^{M\alpha}} \cdot \sum_{\substack{\Delta \in \mathcal{T}_{m_0} \\ \Delta \subset \mathcal{K}^{\langle M \rangle}}} q_\Delta(\omega) \cdot \mathbf{1}_{\Delta \setminus \mathcal{V}_{m_0}^{\langle \infty \rangle}}(\pi_M(x)) \\
&= \frac{A_0 D_0}{L^{M\alpha}} \cdot q_{\Delta(\pi_M(x))}(\omega) \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{\langle \infty \rangle} \setminus \mathcal{V}_{m_0}^{\langle \infty \rangle}}(x), \qquad x \in \mathcal{K}^{\langle \infty \rangle}.
\end{aligned}$$

显然，$\widetilde{V}_M^\omega(x) \leq V_M^\omega(x)$，因此

$$\lambda_1^{N,M,\widetilde{V}_M^\omega} \leq \lambda_1^{N,M,V_M^\omega}. \tag{3.11}$$

因此，只需从下方估计特征值 $\lambda_1^{N,M,\widetilde{V}_M^\omega}$，而不必估计 $\lambda_1^{N,M,V_M^\omega}$。

我们有如下引理。

引理 3.4. 设假设(**B**) 和(**W1.a**) 成立。那么对任意 $M \in \mathbb{Z}_+$, $M \geq M_1$，有

$$\lambda_1^{N,M,\widetilde{V}_M^\omega} \geq \frac{1}{L^{Md}} \left[\int_{\mathcal{K}^{\langle M \rangle}} \widetilde{V}_M^\omega(x) \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) - \frac{2 \int_{\mathcal{K}^{\langle M \rangle}} (\widetilde{V}_M^\omega(x))^2 \mathrm{d}\mathfrak{m}(x)}{\widetilde{C}_1 L^{-M\alpha}} \right]. \tag{3.12}$$

证明。 固定 $M \geq M_1$。我们将Temple不等式应用于 $H = H_M^{N,V_M^\omega} = \phi(-\mathcal{L}^M) + \widetilde{V}_M^\omega$ 和$\eta = \lambda_2^M$（非随机）。该算子的谱是离散的，并且有

$$\eta \leq \lambda_2^{N,M,\widetilde{V}_M^\omega} = \inf \left(\sigma(H_M^{N,\widetilde{V}_M^\omega}) \setminus \left\{ \lambda_1^{N,M,\widetilde{V}_M^\omega} \right\} \right).$$

取 $\psi = \psi_1^M \equiv \frac{1}{L^{Md/2}}$为算子 $\phi(-\mathcal{L}^M)$ 的主归一化特征函数。由（2.22）和（2.23），$\phi(-\mathcal{L}_M)\psi = 0$，并且进一步有

$$\left\langle \psi, H_M^{N,\widetilde{V}_M^\omega} \psi \right\rangle = \left\langle \psi, \phi(-\mathcal{L}_M)\psi \right\rangle + \left\langle \psi, \widetilde{V}_M^\omega \psi \right\rangle = \left\langle \psi, \widetilde{V}_M^\omega \psi \right\rangle = \frac{1}{L^{Md}} \int_{\mathcal{K}^{\langle M \rangle}} \widetilde{V}_M^\omega(x) \mathrm{d}\mathfrak{m}(x).$$

类似地,

$$\left\langle H_M^{N,\widetilde{V}_M^\omega} \psi, H_M^{N,\widetilde{V}_M^\omega} \psi \right\rangle = \frac{1}{L^{Md}} \int_{\mathcal{K}^{\langle M \rangle}} \left(\widetilde{V}_M^\omega(x) \right)^2 \mathrm{d}\mathfrak{m}(x).$$

根据 V_M^ω 的定义，我们得到

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{K}^{\langle M \rangle}} \widetilde{V}_M^\omega(x) \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) &= \frac{A_0 D_0}{L^{M\alpha}} \int_{\mathcal{K}^{\langle M \rangle}} \sum_{\mathcal{T}_{m_0} \ni \Delta \subset \mathcal{K}^{\langle M \rangle}} q_\Delta(\omega) \mathbf{1}_{\Delta \setminus \mathcal{V}_{m_0}^{\langle \infty \rangle}}(x) \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \\
&\leq \frac{A_0 D_0}{L^{M\alpha}} L^{Md},
\end{aligned}$$

因此，由 (3.9) 和 (3.8) 可得,

$$\left\langle \psi, H_M^{N,\widetilde{V}_M^\omega} \psi \right\rangle \leq \frac{A_0 D_0}{L^{M\alpha}} < \frac{\widetilde{C}_1}{L^{M\alpha}} \leq \eta,$$

这意味着条件 (3.6) 得以满足。此外，这还推出

$$\eta - \left\langle \psi, H_M^{N,\widetilde{V}_M^\omega}\psi \right\rangle \geq \frac{\widetilde{C}_1}{L^{M\alpha}} - \frac{A_0 D_0}{L^{M\alpha}} > \frac{\widetilde{C}_1}{2L^{M\alpha}}. \tag{3.13}$$

将 ˛ng (3.13) 代入 Temple不等式 (3.7) 中的公式（其中 $H = H^{N}{}_{,M}{}^{V_M^\omega}$），我们得到代入

$$\begin{aligned}
\lambda_1^{N,M,\widetilde{V}_M^\omega} &\geq \langle\psi, H\psi\rangle - \frac{\langle H\psi, H\psi\rangle}{\eta - \langle\psi, H\psi\rangle} \\
&\geq \frac{1}{L^{Md}}\left[\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} \widetilde{V}_M^\omega(x)\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) - \frac{2\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}(\widetilde{V}_M^\omega(x))^2\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)}{\widetilde{C}_1 L^{-M\alpha}}\right].
\end{aligned}$$

□

引理 3.4 中的估计将用于这样的泊松点云实现：其中至少包含一个泊松点的 $\mathcal{T}_{m_0}$ 个复形的数量足够大。更确切地说，固定 $\delta \in (0,1)$（稍后我们将说明如何选择该值），并定义：

$$\mathcal{A}_{M,\delta} = \left\{\omega : \#\left\{\mathcal{T}_{m_0} \ni \Delta \subset \mathcal{K}^{\langle M\rangle} : q_\Delta(\omega) = 1\right\} \geq \delta \cdot L^{(M-m_0)d}\right\}.$$

这里 $L^{(M-m_0)d}$ 是包含在 $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$ 中的所有 m_0-复形的数量。

现在我们准备证明另一个辅助引理。

引理 3.5. 设假设 (**B**) 和 (**W2**.a) 成立，且 $\delta > 0$ 固定。则对任意 $M \in \mathbb{Z}_+$、$M \geq M_1$ 和 $\omega \in \mathcal{A}_{M,\delta}$，均有

$$\lambda_1^{N,M,\overline{V}_M^\omega} \geq \frac{\widetilde{C}_1\delta}{8L^{M\alpha}}.$$

˜证明。根据 V_M^ω 的定义，我们有

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} \widetilde{V}_M^\omega(x)\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) &= \frac{A_0 D_0}{L^{M\alpha}}\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} \sum_{\mathcal{T}_{m_0}\ni\Delta\subset\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} q_\Delta(\omega)\mathbf{1}_{\Delta\setminus\mathcal{V}_{m_0}^{\langle\infty\rangle}}(x)\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \\
&= \frac{A_0 D_0}{L^{M\alpha}}\cdot L^{m_0 d}\cdot \sum_{\mathcal{T}_{m_0}\ni\Delta\subset\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} q_\Delta(\omega).
\end{aligned}$$

同理,

$$\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} (\widetilde{V}_M^\omega(x))^2\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \left(\frac{A_0 D_0}{L^{M\alpha}}\right)^2\cdot L^{m_0 d}\cdot \sum_{\mathcal{T}_{m_0}\ni\Delta\subset\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} q_\Delta(\omega).$$

因此，利用 (3.11)、引理 3.4 中的估计、$\omega \in \mathcal{A}_{M,\delta}$ 这一假设以及 (3.9)，可得

$$\begin{aligned}
\lambda_1^{N,M,\overline{V}_M^\omega} &\geq \frac{L^{m_0 d}}{L^{Md}}\left[\frac{A_0 D_0}{L^{M\alpha}}\sum_{\mathcal{T}_{m_0}\ni\Delta\subset\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} q_\Delta(\omega) - \frac{2\left(\frac{A_0 D_0}{L^{M\alpha}}\right)^2\sum_{\mathcal{T}_{m_0}\ni\Delta\subset\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} q_\Delta(\omega)}{\widetilde{C}_1 L^{-M\alpha}}\right] \\
&= \frac{1}{L^{(M-m_0)d}}\cdot\frac{1}{L^{M\alpha}}\cdot A_0 D_0\cdot\left(1 - \frac{2A_0 D_0}{\widetilde{C}_1}\right)\cdot\sum_{\mathcal{T}_{m_0}\ni\Delta\subset\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} q_\Delta(\omega) \\
&\geq \frac{\delta A_0 D_0}{2L^{M\alpha}} = \frac{\widetilde{C}_1\delta}{8L^{M\alpha}}.
\end{aligned}$$

证明完毕。 □

在完成定理（3.1）的证明之前，我们先回顾一个经典的 Bernstein型不等式（例如参见 [31, 引理 3.5]）。

命题 3.6. 设 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是给定的概率空间，且 $S_n : \Omega \to \mathbb{R}$ 是一个服从二项分布 $B(n,p)$ $n \geq 1$, $p \in (0,1)$的随机变量。则对于任意满足 $\gamma > p$ 的 $p, \gamma \in (0,1)$，

$$\mathbb{P}\left[S_n \geq \gamma n\right] \leq \left(\left(\frac{1-p}{1-\gamma}\right)^{1-\gamma}\left(\frac{p}{\gamma}\right)^{\gamma}\right)^{n}. \tag{3.14}$$

步骤 3. 最终估计。由 (3.5) 可得:

$$\mathbb{L}(t) \leq C\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-(t-1)\lambda_1^{N,M,\overline{V}^{\omega}_M}}; \mathcal{A}_{M,\delta}\right] + C\mathbb{Q}\left[\mathcal{A}^c_{M,\delta}\right], \qquad t > 1, \qquad M \geq m_0. \tag{3.15}$$

首先注意到，由引理 3.5 可得

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-(t-1)\lambda_1^{N,M,\overline{V}^{\omega}_M}}; \mathcal{A}_{M,\delta}\right] \leq \mathrm{e}^{-\frac{\widetilde{C}_1\delta}{8L^{M\alpha}}(t-1)} \leq c_1\mathrm{e}^{-\frac{c_2\delta}{L^{M\alpha}}t}, \quad t > 1, \qquad M \geq M_1,$$

其中 c_1，$c_2 > 0$ 为绝对常数。

为了估计 (3.15) 中的第二项，注意对于 $M \geq M_1$,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^c_{M,\delta} &= \left\{\omega : \#\left\{\mathcal{T}_{m_0} \ni \Delta \subset \mathcal{K}^{\langle M\rangle} : q_\Delta(\omega) = 1\right\} < \delta \cdot L^{(M-m_0)d}\right\} \\ &= \left\{\omega : \#\left\{\mathcal{T}_{m_0} \ni \Delta \subset \mathcal{K}^{\langle M\rangle} : q_\Delta(\omega) = 0\right\} \geq (1-\delta) \cdot L^{(M-m_0)d}\right\}\end{aligned}$$

（回想一下，$L^{(M-m_0)d}$ 是包含在 $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$ 中的 m_0-复形的数量）。我们设

$$p_\nu := \mathbb{Q}[q_\Delta = 0] = \mathbb{Q}\big[\text{no Poisson points in } \Delta \setminus \mathcal{V}^{\langle\infty\rangle}_{m_0}\big] = \mathrm{e}^{-\nu L^{m_0 d}}.$$

固定 $\nu_0 > 0$. 由于 $\nu \mapsto p_\nu$是一个递减函数，且 $\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{1-\delta}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{1-\delta} = 1$，我们也可以将 $\delta \in (0,\ 1)$ 取得足够小，使得对所有 $\nu \geq \nu_0$

$$\delta < 1 - p_{\nu_0} \leq 1 - p_\nu \qquad \text{and} \qquad \frac{1}{1-\delta}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{\delta}{1-\delta}} \cdot \sqrt{p_\nu} \leq \frac{1}{1-\delta}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{\delta}{1-\delta}} \cdot \sqrt{p_{\nu_0}} < 1.$$

将 $n = L^{(M-m_0)d}$、$p = p_\nu$和 $\gamma = (1-\delta) > p_\nu$代入命题 3.6，便得到

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}\left[\mathcal{A}^c_{M,\delta}\right] &\leq \left[\left(\frac{1-p}{\delta}\right)^{\delta}\left(\frac{p}{1-\delta}\right)^{1-\delta}\right]^{L^{(M-m_0)d}} \\ &\leq \left[\frac{1}{1-\delta}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{\delta}{1-\delta}} \cdot p\right]^{(1-\delta)\cdot L^{(M-m_0)d}} \\ &\leq \mathrm{e}^{\frac{(1-\delta)}{2}L^{(M-m_0)d}\ln p_\nu} \\ &= \mathrm{e}^{-\nu\frac{1-\delta}{2}L^{Md}}.\end{aligned}$$

因此我们得到

$$\mathbb{L}(t) \leq c_3(\mathrm{e}^{-\frac{c_4 t}{L^{M\alpha}}} + \mathrm{e}^{-c_5\nu L^{Md}}), \quad t > 0, \quad M \geq M_1, \quad \nu \geq \nu_0,$$

其中 $c_3 > 0$ 是一个绝对常数，且 $c_4 = c_4(\nu_0) > 0$、$c_5 = c_5(\nu_0) > 0$。

为了使此界在 M，上达到最小，我们取 $M = M(t)$，使这两项大致相等。我们选取满足下式的唯一 $M = M(t)$

$$\frac{c_5}{c_4}L^{M(d+\alpha)} \leq \frac{t}{\nu} < \frac{c_5}{c_4}L^{(M+1)(d+\alpha)}. \tag{3.16}$$

对于这种 M 的选择，我们得到，存在某个 $c_6 > 0$,

$$\frac{c_4 t}{L^{M\alpha}} \geq c_5\nu L^{Md} \geq c_6 t^{\frac{d}{d+\alpha}}\nu^{\frac{\alpha}{d+\alpha}}$$

s因此，最终，对于充分大的 t 以及某些常数 $c_7 = c_7(\nu_0)$ $c_8 = c_8(\nu_0) > 0$

$$\mathbb{L}(t) \le c_7 \mathrm{e}^{-c_8 t^{\frac{d}{d+\alpha}} \nu^{\frac{\alpha}{d+\alpha}}},$$

只要 $\nu \ge \nu_0$。结合 $C = c_8$，即可得到定理 3.1 的结论，并完成证明。

4. 拉普拉斯变换的下界与积分态密度的最终估计

本节将为一类具有有界支撑单点轮廓 W 的泊松势，求出积分态密度的拉普拉斯变换 $\mathbb{L}(t)$ 的下界估计，即假设 **(W2.b)** 成立。随后，我们将通过福岛指数型塔伯定理，把拉普拉斯变换 $\mathbb{L}(t)$ 的上下界转化为积分态密度的渐近行为。

现在我们利用这样一个事实：积分态密度也可以表示为满足狄利克雷条件的算子的有限体积表达式的极限。更确切地说，积分态密度的拉普拉斯变换 $\mathbb{L}(t)$ 由下式给出：

$$\mathbb{L}(t) = \lim_{M\to\infty} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \mathbb{L}_M^{D,V^\omega}(t) \tag{4.1}$$

其中

$$\mathbb{L}_M^{D,V^\omega}(t) = \frac{1}{L^{Md}} \int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} p(t,x,x) \mathbf{E}_{x,x}^t \left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V^\omega(X_s)\mathrm{d}s} \mathbf{1}_{\{\tau_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} > t\}} \right] \mu(\mathrm{d}x)$$

且 τ_A 是该过程离开集合 A，的首次离开时间，即 $\tau_A := \inf\{t > 0 \colon X_t \notin A\}$.

定理 4.1. 在假设 $(\mathbf{B})$、$(\mathbf{W1})$ 和 $(\mathbf{W2}.\mathrm{b})$下，存在常数 $C' > 0$，使得对每个 $\nu > 0$，都有

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\log \mathbb{L}(t)}{t^{\frac{d}{d+\alpha}}} \ge -C' \nu^{\frac{\alpha}{d+\alpha}}.$$

证明。 继续之前，我们先引入一些额外的记号。对于一个单独的复形 Δ （大小不限），我们定义

$$\mathbb{L}_\Delta^{D,V^\omega}(t) = \frac{1}{\mathfrak{m}(\Delta)} \int_\Delta p(t,x,x) \mathbf{E}_{x,x}^t \left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V^\omega(X_s)\mathrm{d}s} \mathbf{1}_{\{\tau_\Delta > t\}} \right] \mathfrak{m}(\mathrm{d}x). \tag{4.2}$$

现在固定 $M \in \mathbb{Z}_+$, $M \ge M_0$，其中 M_0 来自我们的假设（**W2.b**）。由 **(4.1)** 得

$$\mathbb{L}(t) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \mathbb{L}_{M+k}^{D,V^\omega}(t).$$

给定 $k \ge 1$, ，集合 $\mathcal{K}^{\langle M+k\rangle}$ 包含 N^k 个 $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$ 的副本，它们仅通过顶点相交，且每个副本大小为 L^M。将它们记作 $\Delta_1, \dots, \Delta_{N^k}$. 由于 $\Delta_i \subset \mathcal{K}^{\langle M+k\rangle}$，我们得到，因为 $L^d = N$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \mathbb{L}_{M+k}^{D,V^\omega}(t) &= \frac{1}{N^{M+k}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \int_{\mathcal{K}^{\langle M+k\rangle}} p(t,x,x) \mathbf{E}_{x,x}^t \left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V^\omega(X_s)\mathrm{d}s} \mathbf{1}_{\{\tau_{\mathcal{K}^{\langle M+k\rangle}} > t\}} \right] \mathfrak{m}(\mathrm{d}x) \\
&= \frac{1}{N^{M+k}} \sum_{i=1}^{N^k} \int_{\Delta_i} p(t,x,x) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \mathbf{E}_{x,x}^t \left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V^\omega(X_s)\mathrm{d}s} \mathbf{1}_{\{\tau_{\mathcal{K}^{\langle M+k\rangle}} > t\}} \right] \mathfrak{m}(\mathrm{d}x) \\
&\ge \frac{1}{N^{M+k}} \sum_{i=1}^{N^k} \int_{\Delta_i} p(t,x,x) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \mathbf{E}_{x,x}^t \left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V^\omega(X_s)\mathrm{d}s} \mathbf{1}_{\{\tau_{\Delta_i} > t\}} \right] \mathfrak{m}(\mathrm{d}x) \\
&= \frac{1}{N^k} \sum_{i=1}^{N^k} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \mathbb{L}_{\Delta_i}^{D,V^\omega}(t) \\
&\ge \inf_i \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \mathbb{L}_{\Delta_i}^{D,V^\omega}(t).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

我们固定某个 i_0，并令 $\mathcal{M}_{i_0} = \{\omega \colon$ 没有泊松点落入 $\Delta_{i_0}^{M_0}\}$，其中 $\Delta_{i_0}^{M_0}$表示 Δ_{i_0} 在度量 d_{M_0} 下的1−邻域（即复形 Δ_{i_0}，其顶点上附有 $\mathcal{K}^{\langle M_0\rangle}$ 的副本）。特别地,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \mathbb{L}_{\Delta_{i_0}}^{D,V^\omega}(t) \ge \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{L}_{\Delta_{i_0}}^{D,V^\omega}(t) \mathbf{1}_{\mathcal{M}_{i_0}} \right]. \tag{4.4}$$

固定过程的一条轨迹 X_s，该过程从 $x \in \Delta_{i_0}$ 出发，并在时间 t之前始终不离开集合 Δ_{i_0}。对于 $\omega \in \mathcal{M}_{i_0}$，我们有 $V^\omega(X_s) = 0$，$s \le t$（过程一直停留在 Δ_{i_0}，且没有泊松点落入该集合的 M_0-邻域），因此 $\mathrm{e}^{-\int_0^t V^\omega(X_s)\mathrm{d}s} = 1$。所以 $\mathbf{P}^t_{x,\ x}$ ——在集合 $\{\tau_{\Delta_{i_0}} > t\}$上几乎必然，

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V^\omega(X_s)\mathrm{d}s}\mathbf{1}_{\mathcal{M}_{i_0}}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{1}_{\mathcal{M}_{i_0}}\right] = \mathbb{Q}[\mathcal{M}_{i_0}], \tag{4.5}$$

利用 (4.4)，我们得到

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\mathbb{L}^{D,V^\omega}_{\Delta_{i_0}}(t) \ge \frac{1}{\mathfrak{m}(\Delta_{i_0})}\int_{\Delta_{i_0}} p(t,x,x)\mathbf{E}^t_{x,x}\left[\mathbf{1}_{\{\tau_{\Delta_{i_0}}>t\}}\cdot\mathbb{Q}[\mathcal{M}_{i_0}]\right]\mathfrak{m}(\mathrm{d}x). \tag{4.6}$$

As

$$\mathbb{Q}[\mathcal{M}_{i_0}] = \mathbb{Q}[\text{no Poisson points in } \Delta^{M_0}_{i_0}] = \mathrm{e}^{-\nu\mathfrak{m}(\Delta^{M_0}_{i_0})} \ge \mathrm{e}^{-\nu(L^{Md}+c_1L^{M_0d})}$$

（c_1 是仅依赖于分形几何的绝对常数），我们得到

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{L}^{D,\Delta_{i_0}}(t,\omega)] \ge \left[\frac{1}{\mu(\Delta_{i_0})}\int_{\Delta_{i_0}} p(t,x,x)\mathbf{P}^t_{x,x}\left[\tau_{\Delta_{i_0}} > t\right]\mathfrak{m}(\mathrm{d}x)\right]\cdot\mathrm{e}^{-\nu(L^{Md}+c_1L^{M_0d})}. \tag{4.7}$$

表达式 $\left[\mu^{-1}(\Delta_{i_0})\int_{\Delta_{i_0}} p(t,x,x)\mathbf{P}^t_{x,x}\left[\tau_{\Delta_{i_0}} > t\right]\mathfrak{m}(\mathrm{d}x)\right]$ 正是算子 $T^D_{,t}{}^{\Delta_{i_0}}$的平均迹，这意味着它不大于 $\mathrm{e}^{-t\lambda_1(\Delta_{i_0})}$（记号不言自明）。由 [13, 定理 3.4]，我们有 $\lambda_1(\Delta_{i_0}) \le \phi(\lambda_1(\Delta_{i_0}))$，其中 $\lambda_1(U)$ 表示布朗运动在离开 U 时被杀死的主狄利克雷特征值。由于 Δ_{i_0} 与 $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$ 上的布朗运动在各自离开 $\Delta_{i_0}, \mathcal{K}^{\langle M\rangle}$ 的时刻之前不可区分，故有 $\lambda_1(\Delta_{i_0}) = \lambda_1(\mathcal{K}^{\langle M\rangle})$，再由布朗缩放进一步得到 $\lambda_1(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}) = \lambda_1(L^M\mathcal{K}^{\langle 0\rangle}) = L^{-Md_w}\lambda_1(\mathcal{K}^{\langle 0\rangle})$。利用 (4.3)、(4.7) 以及主特征值的缩放，我们得到对任意 k

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{L}^D_{M+k}(t,\omega)] \ge \exp\left\{-t\phi\left(\frac{1}{L^{Md_w}}\lambda_1^{BM}(\mathcal{K}^{\langle 0\rangle})\right) - \nu(L^{Md}+c_1L^{M_0d})\right\}. \tag{4.8}$$

利用我们的假设（**B.b**），当 M足够大时，我们得到

$$\phi\left(\frac{1}{L^{Md_w}}\lambda_1(\mathcal{K}^{\langle 0\rangle})\right) \le C_2\cdot L^{-M\alpha}\left(\lambda_1(\mathcal{K}^{\langle 0\rangle})\right)^{\alpha/d_w} =: c_2L^{-M\alpha}. \tag{4.9}$$

由此可从（4.8）推出

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{L}^D_{M+k}(t,\omega)] \ge \exp\left\{-c_3tL^{-M\alpha} - (1+c_3)\nu L^{Md}\right\}, \tag{4.10}$$

当 M足够大时。该界与 k， 无关，因此令（4.1）中的 k 趋于无穷，我们还得到

$$\mathbb{L}(t) \ge \exp\left\{-c_3tL^{-M\alpha} - c_4\nu L^{Md}\right\}, \tag{4.11}$$

只要 当M 足够大时。总之，对于足够大的 t，取 $M = M(t)$为 b e 唯一的 满足条件的整数

$$L^M \le \left(\frac{t}{\nu}\right)^{\frac{1}{d+\alpha}} < L^{M+1}. \tag{4.12}$$

将 M 的这个值代入 (4.11)，并利用 (4.12) 中的不等式，经过一些初等计算后，我们得到

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{\log\mathbb{L}(t)}{t^{\frac{d}{d+\alpha}}\nu^{\frac{\alpha}{d+\alpha}}} \ge -C',$$

其中 C' 是一个正常数。证明完毕。 □

现在我们可以给出主要结果的论证。

定理 *1.1* 的证明。这可由定理 3.1 和定理 4.1 中的相应估计，借助 Fukushima 的指数型陶伯定理得出 [20,定理 2.1]。□

附录 A. 积分态密度存在性的证明

在本附录中，我们继续讨论第 2.6 节的内容。我们概述导出定理 2.8 证明的论证，并提供准确的参考文献。

回忆一下，对于 $M \in \mathbb{Z}$, V_M^ω 表示在 (2.25) 中引入的周期化随机场。使用 V_M^ω 而非 V^ω，以及使用 X^M 而非 X 的优点在于，在此情形下，拉普拉斯变换的期望值是单调的（引理 A.1），这使它们收敛到有限极限 $\mathbb{L}(t)$ 成为可能（定理 A.2）。

在证明的剩余部分，我们证明 $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\mathbb{L}^{D,\ V^\omega}_{\ M}(t)$、$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\mathbb{L}^{D,\ V_M^\omega}_{\ M}(t)$ 和 $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\mathbb{L}^{N,\ V^\omega}_{\ M}(t)$ 收敛到同一个极限。最后，我们证明 $\mathbb{L}^{D,\ V^\omega}_{\ M}(t)$ 和 $\mathbb{L}^{N,\ V^\omega}_{\ M}(t)$ 几乎处处收敛到非随机极限 $\mathbb{L}(t)$。

我们的第一步是证明：一旦固定初始从属布朗运动X在 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 上的路径以及 $t>0$，那么期望 $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\mathrm{e}^{-\int_0^t V_M^\omega(\pi_M(X_s))\mathrm{d}s} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\mathrm{e}^{-\int_0^t V_M^\omega(X_s^M)\mathrm{d}s}$ 关于 M. 单调

引理 A.1. 对于每个 $t>0$ 和 $M\in\mathbb{Z}_+$，我们都有

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\mathrm{e}^{-\int_0^t V_{M+1}^\omega(\pi_{M+1}(X_s))\mathrm{d}s} \le \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\mathrm{e}^{-\int_0^t V_M^\omega(\pi_M(X_s))\mathrm{d}s}\ . \tag{A.1}$$

证明. 证明过程与定理 3.1] 的证明中不等式 (3.8) 的论证类似。对于 $y\in\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\backslash\mathcal{V}_M^{\langle M\rangle}$，我们有 $\sum_{i=1}^N \pi_{M+1}^{-1}(\pi_{\Delta_{M,i}}(y)) = \pi_M^{-1}(y)$，且该和是不相交的。在上述定理的证明中，我们有 $N=3$。□

下一步是应用上面引理 A.1 中的单调性论证，证明对于每个固定的 $t>0$，期望 $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\mathbb{L}^{N,\ V_M^\omega}_{\ M}(t)$ 收敛到有限极限 $\mathbb{L}(t)$。这里 $\mathbb{L}^{N,\ V_M^\omega}_{\ M}(t,\omega)$ 是测度 $\Lambda^{M,\ V_M^\omega}_{\ N}$, 的拉普拉斯变换，如 (2.30) 中所示。

定理 A.2. 设 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 是一个具有 *GLP* 的 *USNF*，并且假设$(\mathbf{B})$和$(\mathbf{W1})$成立。那么，对于每个 $t>0$,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\mathbb{L}_M^{N,V_M^\omega}(t,\omega) \searrow \mathbb{L}(t) \quad as \quad M\to\infty.$$

证明。 该证明基本遵循 [33, 定理 3.1] 证明的第二部分中的推理，并使用了 [6, 引理 2.2]中的方程。□

接下来，我们证明，当 $M\to\infty$时， $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\mathbb{L}^{D,\ V^\omega}_{\ M}(t)$、$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\mathbb{L}^{D,\ V_M^\omega}_{\ M}(t)$，以及 $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\mathbb{L}^{N,\ V^\omega}_{\ M}(t)$的极限点与 $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\mathbb{L}^{N,\ V_M^\omega}_{\ M}(t)$的极限点重合。最后，我们还将证明关于 $\mathbb{L}^{D,\ V^\omega}_{\ M}(t)$和 $\mathbb{L}^{N,\ V^\omega}_{\ M}(t)$的方差引理，这将使我们能够证明在 (2.29) 和 (2.30) 中定义的经验测度模糊收敛。

下文给出的引理 A.3 和 A.5 的证明非常技术性，其步骤和思路沿袭了 [33, 命题 3.1 和引理 3.1–3.2] 的证明。这里的主要区别在于，状态空间现在是一般的 USNF。这会带来一些额外的几何问题，我们通过使用图距离（注意，测地度量可能根本无法定义）以及 [32, 引理 A.2]中的比较原理来解决这些问题。因此，我们只介绍证明中受这些变化影响的主要步骤，并着重讨论最关键的差异。

引理 A.3. 固定 $t>0$。

(a) 我们有

$$\sum_{M=1}^{\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{L}_M^{D,V^\omega}(t)-\mathbb{L}_M^{N,V^\omega}(t)\right)^2<\infty;$$

特别地,

$$\lim_{M\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{L}_M^{D,V^\omega}(t)-\mathbb{L}_M^{N,V^\omega}(t)\right)^2=0.$$

(b) 我们有

$$\lim_{M\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{L}_M^{D,V_M^\omega}(t)-\mathbb{L}_M^{N,V_M^\omega}(t)\right)=0 \quad and \quad \lim_{M\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{L}_M^{D,V^\omega}(t)-\mathbb{L}_M^{D,V_M^\omega}(t)\right)=0.$$

证明。 证明过程与 [33, 命题 3.1 和引理 3.1] 的证明类似。关键区别在于，我们无法在估计中使用测地度量（参见 [32] 第 4 页第一栏末尾的讨论）。

将 $\mathcal{V}_M^{\langle M\rangle}$ 中的顶点记为 v_i、 $1 \le i \le k$，并令$\Delta_{\lfloor M/2\rfloor, v_i} \subset \mathcal{K}^{\langle M\rangle}$为附着于 v_i的 $\lfloor M/2\rfloor$-复形。

若该过程从 $x \in \mathcal{D}_M := \mathcal{K}^{\langle M\rangle} \setminus \bigcup_{i=1}^k \Delta_{\lfloor M/2\rfloor, v_i}$出发，则利用 [32, 引理 A.2],，我们有

$$\left\{t \ge \tau_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}\right\} \subseteq \left\{\sup_{0<s\le t} d_{\lfloor M/2\rfloor}(x, X_s) > 2\right\} \subseteq \left\{\sup_{0<s\le t} |x - X_s| > c_1 L^{M/2}\right\},$$

其中常数 c_1与 M无关。我们还有

$$\left\{\sup_{0<s\le t} |x - X_s| > c_1 L^{M/2}\right\} \subseteq \left\{\sup_{0<s\le t/2} |x - X_s| > c_1 L^{M/2}\right\} \cup \left\{\sup_{t/2<s\le t} |x - X_s| > c_1 L^{M/2}\right\}.$$

回顾 $\mathfrak{m}\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle} \setminus \mathcal{D}_M\right) = kN^{\lfloor M/2\rfloor}$。用该集合代替测地球$B(0, 2^M - 2^{\langle M/2\rangle})$，我们可以沿用 [33, 命题 3.1与引理 3.1]的证明思路。□

由定理 A.2 和引理 A.3 可直接得到以下推论。

推论 A.4。 对于每个 $t > 0$， $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\mathbb{L}^{D,\,V^\omega}_{\,M}(t)$、 $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\mathbb{L}^{D,\,V^\omega_M}_{\,M}(t)$ 以及 $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\mathbb{L}^{N,\,V^\omega}_{\,M}(t)$，当 $M \to \infty$ 趋于 $\mathbb{L}(t)$ （如定理 *A.2* 中所确定）时，它们也都收敛。

最后一步是证明随机变量 $\mathbb{L}^{D,\,V^\omega}_{\,M}(t)$ 和$\mathbb{L}^{N,\,V^\omega}_{\,M}(t)$ 的方差级数收敛。

引理 A.5。 对于每个 $t > 0$，有

$$\sum_{M=1}^{\infty} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{L}_M^{D,V^\omega}(t) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\mathbb{L}_M^{D,V^\omega}(t)\right]^2 < \infty \tag{A.2}$$

and

$$\sum_{M=1}^{\infty} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{L}_M^{N,V^\omega}(t) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\mathbb{L}_M^{N,V^\omega}(t)\right]^2 < \infty. \tag{A.3}$$

证明。 对于 $m \in \mathbb{Z}_+$，令

$$V^{\omega,m}(x) := \int_{\mathcal{C}_m(x)} W(x,y)\mu^\omega(\mathrm{d}y) \tag{A.4}$$

and

$$\widetilde{V}^{\omega,m}(x) := \int_{\mathcal{C}_m(x)^c} W(x,y)\mu^\omega(\mathrm{d}y). \tag{A.5}$$

回顾一下，对于 $x \in \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle} \setminus \mathcal{V}_m^{\langle\infty\rangle}$， $\mathcal{C}_m(x)$ 是包含 x 的唯一 m-复形；对于 $x \in \mathcal{V}_m^{\langle\infty\rangle}$，它是附加到 x 上的 m-复形之和（其中共有 $\mathrm{rank}_m(x)$ 个 $\in \{1,2,3\}$）。

将上述表达式作为 $V^{\omega,m}(x)$ 和 $\widetilde{V}^{\omega,m}(x)$ 的定义后，我们可以像证明 [33, 引理 3.2] 时那样进行论证。□

定理 *2.8* 的证明。 证明了定理 A.2 和引理 A.5 后，我们只需沿用定理 [33, 3.2]的证明思路：由博雷尔-坎特利论证可得， $\mathbb{Q}$–几乎必然地，对所有有理数 t，均有 $\mathbb{L}^{D,\,V^\omega}_{\,M}(t) \to L(t)$。 由连续性可将此结论推广到所有 $t > 0$。特别地，$\mathbb{L}^{D,\,V^\omega}_{\,M}(1) \to \mathbb{L}(1)$， 这表明几乎必然地，测度 $\mathrm{e}^{-\lambda}\Lambda^{D,\,V^\omega}_{\,M}(\mathrm{d}\lambda)$ 是有限的，因而 $\Lambda^{D,\,V^\omega}_{\,M}(\mathrm{d}\lambda)$ 也有限。由于 $\mathbb{R}_+$ 上的每个有限测度序列都模糊相对紧，故几乎必然的模糊收敛 $\Lambda^{D,\,V^\omega}_{\,M}(\mathrm{d}\lambda) \to \Lambda(\mathrm{d}\lambda)$ 成立。对于 $\Lambda^{N,\,V^\omega}_{\,M}(\mathrm{d}\lambda)$，完全可以照样重复这一论证。□

参考文献

[1] E. Akkermans, J. P. Chen, G. Dunne, L. G Rogers, A. Teplyaev：分形交流电路与分形上的传播波。载于《分形分析、概率与数学物理》，557–567，Fractals Dyn. Math. Sci. Arts Theory Appl.，5，World Sci. Publ., Hackensack, NJ， [2020], 2020。[2] P. Alonso-Ruiz, F. Baudoin, L. Chen, L. G. Rogers, N. Shanmugalingam, A. Teplyaev：狄利克雷空间上通过热半群定义的Besov类 I：Sobolev型不等式。《J. Funct. Anal.》278 (2020)，第 11 期，108459，48 页。[3] P. Alonso-Ruiz, F. Baudoin, L. Chen, L. G. Rogers, N. Shanmugalingam, A. Teplyaev：狄利克雷空间上通过热半群定义的Besov类 II：BV函数与高斯热核估计。《Calc. Var. Partial Differential Equations》59 (2020)，第 3 期，论文编号 103，32 页。[4] P. Alonso-Ruiz, F. Baudoin, L. Chen, L. G. Rogers, N. Shanmugalingam, A. Teplyaev：狄利克雷空间上通过热半群定义的Besov类 III：BV函数与次高斯热核估计。《Calc. Var. Partial Differential Equations》60 (2021)，第 5 期，论文编号 170，38 页。[5] P. Alonso-Ruiz, F. Baudoin, L. Chen, L. G. Rogers, N. Shanmugalingam, A. Teplyaev：狄利克雷空间上的BV函数与分数阶拉普拉斯算子，arXiv:1910.13330。[6] H. Balsam, K. Kaleta, M. Olszewski, K. Pietruska-Pałuba：嵌套分形上的Anderson模型的态密度，《Anal. Math. Phys.》14，23（2024）。[7] F. Baudoin, L. Chen, C.-H. Huang, C. Ouyang, S. Tindel, J. Wang：常返度量测度空间有界域中的抛物Anderson模型，《美国数学会汇刊》。379 2026 1799 1851 ( )，– M.

[8] Benderskii, L. Pastur：关于随机势作用下的一维薛定谔方程的谱，《Mat. Sb.》82（1970）245-256。[9] J. Bourgain, C. E. Kenig：高维连续Anderson-Bernoulli模型的局域化，《Invent. Math.》161（2005），389-426。[10] R. Carmona, J. Lacroix：《随机薛定谔算子的谱理论》。Probability and its Applications。Birkhäuser Boston, Inc.，Boston, MA，1990。[11] L. Chaumont, G. Uribe Bravo：马尔可夫桥：弱连续性与路径构造，《Ann. Probab.》39 (2)（2011），609-647。[12] J. P. Chen, M. Hinz, A. Teplyaev：从非对称粒子系统到分形上的非线性偏微分方程。载于《随机偏微分方程及相关领域》，503–513，Springer Proc. Math. Stat.，229，Springer，Cham，[13] 2018 Chen Z.-Q., Song R：定义域中从属过程的双侧特征值估计，《J. Funct. Anal.》226，2005，90–113。[14] K.L. Chung, Z. Zhao：《从布朗运动到薛定谔方程》，Springer, New York，1995。[15] J. M. Combes, P. D. Hislop：d维中某些连续随机哈密顿量的局域化。《J. Funct. Anal.》124，149-180（1994）。[16] A. Dekkers, A. Rozanova-Pierrat, A. Teplyaev：具有分形边界的定义域中线性与非线性波动方程的混合边界值问题。《Calc. Var. Partial Differential Equations》61（2022），第 2 期，论文编号 75，44 页。[17] M. Demuth, J.A. van Casteren：《自伴Feller算子的随机谱理论：泛函分析方法》。Birkhäuser，Basel，2000。[18] M.D. Donsker, S.R.S. Varadhan：维纳香肠的渐近行为，《Commun. Pure Appl. Math.》28 (4)（1975），525–565。[19] R. Friedberg, J. Luttinger：无序系统中的电子能级密度，《物理评论 B》12（1975）4460-4474。[20] M. Fukushima：关于无序系统的谱分布与随机游走的值域，《Osaka J. Math.》11，1974，73-85。[21] M. Fukushima：嵌套分形上的狄利克雷型、扩散过程与谱维数。载于《随机分析、随机性与应用中的思想与方法》，151-161。Cambridge Univ. Press.，Cambridge，1992。[22] P. J. Fitzsimmons, B. M. Hambly, T. Kumagai：仿射嵌套分形上布朗运动的转移密度估计，《Comm. Math. Phys.》165（1994），第 3 期，595–620。[23] M. Fukushima：嵌套分形上的狄利克雷型、扩散过程与谱维数。载于《随机分析、随机性与应用中的思想与方法》，151–161。Cambridge Univ. Press.，Cambridge，1992。[24] M. Fukushima, H. Nagai, and S. Nakao：关于随机差分算子谱的一个渐近性质，《Proc. Japan Acad.》51（1975）100-102。[25] M. Gebert, C. Rojas-Molina：分数阶Anderson模型的利夫希茨尾，《J. Stat. Phys.》179（2020）341-353。[26] M. Gebert, C. Rojas-Molina：Laurent矩阵随机对角扰动的利夫希茨尾。《《亨利·庞加莱年刊》》23（2022），4149–4170。[27] F. Germinet, P. D. Hislop, A. Klein：具有泊松随机势的薛定谔算子的局域化。《J. Eur. Math. Soc. (JEMS)》9（2007），第 3 期，577-607。[28] M. Hinz, A. Rozanova-Pierrat, A. Teplyaev：线性声学中的非Lipschitz一致域形状优化。《SIAM J. Control Optim.》59（2021），第 2 期，1007-1032。

[29] *M. Hinz, A. Teplyaev*：分形上的狄拉克算子与磁薛定谔算子。《*J. Funct. Anal.*》*265 (2013)*，第*11*期，*2830-2854*。[30] *K. Kaleta, K. Pietruska-Pałuba*：由分数阶拉普拉斯算子驱动的合金型模型的利夫希茨尾，《函数分析杂志》*279 (5)*，*2020*，*108575*。[31] *K. Kaleta, K. Pietruska-Pałuba*：由列维算子驱动的连续安德森模型的利夫希茨尾，《当代数学通讯》*23 (6)*，*2021*，*2050065*。[32] *K. Kaleta, M. Olszewski, K. Pietruska-Pałuba*：简单嵌套分形上的反射布朗运动，《分形》 27 6 2019, 1950104 1 29 *( )*，*- K. Kaleta, K. Pietruska-Pałuba*：谢尔宾斯基三角形上从属布朗运动的泊松–薛定谔扰动的积分态密度，《随机过程及其应用》*125 (4)*，*2015*，*1244-1281*。[33] *K. Kaleta, K. Pietruska-Pałuba*：谢尔宾斯基三角形上存在泊松势时从属布朗运动的利夫希茨奇异性，《随机过程及其应用》*128 (11)*，*2018*，*3897-3939*。[34] *J. Kigami*：布朗运动的时间变换：庞加莱不等式、热核估计与准度量。《美国数学会回忆录》*259 (2019)*，第*1250*期，*v*+118 页。[35] *W. Kirsch, F. Martinelli*：关于具有随机势的薛定谔算子的态密度，《物理学杂志 *A*》*15 (1982) 2139-2156*。[36] *W. Kirsch, F. Martinelli*：随机哈密顿量积分态密度的大偏差与利夫希茨奇异性，《数学物理通讯》*89 (1983) 27-40*。[37] *W. Kirsch, B. Simon*：周期加随机势的利夫希茨尾，《*J. Stat. Phys.*》*42:5/6 (1986) 799-808*。[38] *W. Kirsch, I. Veselić*：一类具有随机呼吸型势的薛定谔算子的利夫希茨尾，《数学物理快报》*94 (2010) 27-39*。[39] *F. Klopp*：弱无序局域化与利夫希茨尾，《数学物理通讯》*232 (2002) 125-155*。[40] *F. Klopp*：弱无序局域化与利夫希茨尾：连续哈密顿量，《亨利·庞加莱年刊》*3 (2002) 711-737*。[41] *T. Kumagai*：嵌套分形上布朗运动转移密度的估计，《概率论及相关领域》*96 (1993)*，第*2*期，*205–224*。[42] *T. Kumagai*：反常随机游走与扩散：从分形到随机介质。《国际数学家大会论文集》，首尔，*2014*。第*IV*卷，*75–94*，*Kyung Moon Sa*，首尔，*2014*。[43] *T. Kumagai*：穿越分形的布朗运动——贝索夫空间迹定理的一个应用，《函数分析杂志》*170 (1)*，*69-92*，*2000*。[44] *T. Kumagai, S. Kusuoka*：嵌套分形上的均匀化，《概率论及相关领域》*104*，*375 398*，*1996 -* 。[45] *T. Kumagai,C. Nakamura*：分形上的灯笼人随机游走。《理论概率论杂志》*31 1*，*68 2018 92 ( )*，第 – 期。[46] *T. Kumagai, K.T. Sturm*：在分形、 d集及一般度量测度空间上构造扩散过程，《京都大学数学杂志》*45 (2)*，*307-327*，*2005*。[47] *S. Kusuoka*：分形上的狄利克雷型与随机矩阵乘积。《京都大学数理科学研究所刊物》*25*，*659 680 1989– ( )*。[48] *T. Lindstrom*：嵌套分形上的布朗运动，《美国数学会回忆录》*83 (1990)*，第*420*期，*iv*+128 页。[49] *J.M. Luttinger*：具有无序系统应用的新变分方法，《物理评论快报》*37 (1976) 609-612*。[50] *G. Mezincescu*：无序哈密顿量电子态积分态密度的界，《物理评论 *B*》*32 (1985) 6272-6277*。[51] *H. Nagai*：随机差分算子谱分布函数的指数特征，《*Osaka J. Math.*》*14 (1977) 111-116*。[52] *S. Nakao*：具有随机势的薛定谔算子的谱分布，《日本数学杂志》第*3*卷 *(1977) 111-139*。[53] *V. Nekrashevych* 和 *A. Teplyaev*：分形上的群与分析，《图上的分析及其应用》，《纯数学专题讨论会》论文集，美国数学会，*77 (2008)*，*143-180*。[54] *M. Nieradko, M. Olszewski*：简单嵌套分形的良好标记性质，预印本，《分形几何杂志》*11 (* 2024 1 2, 31 56 *)*，第 / – 期。[55] *H. Okura*：具有随机势的某些积分微分算子的谱分布，《*Osaka J. Math.*》*16 (3) (1979) 633-666*。[56] *M. Olszewski*：简单嵌套分形上反射布朗运动转移密度的估计，《概率与数理统计》*39 (2019)*，第*2*期，*423-440*。[57] *L.A. Pastur*：某些维纳积分在 $t \to \infty$ 时的行为，以及具有随机势的薛定谔方程的态密度，（俄文）《理论与数学物理》*32 (1977) 88-95*。[58] *K. Pietruska-Pałuba*：谢尔宾斯基三角形上态密度的利夫希茨奇异性，《概率论及相关领域》*89 (1991)*，第*1*期，*1-33*。[59] *K. Pietruska-Pałuba*：简单嵌套分形上的维纳香肠渐近性，《随机分析及其应用》*23:1 (2005)*，*111-135*。[60]

[61] K. Pietruska-Pałuba, A. Stos，嵌套分形上的庞加莱不等式与*Hajlasz-Sobolev* 空间，《Studia Math.》218(1) (2013)，1–28。[62] M. Romerio, W. Wreszinski：随机格点系统态密度中的利夫希茨奇异性与尾部行为，《J. Stat. Phys.》21 (1979) 169-179。[63] M. Reed, B. Simon：《现代数理物理方法》第*4*卷：算子分析，学术出版社，1978。[64] R. Schilling, R. Song, Z. Vondraček，伯恩斯坦函数，Walter de Gruyter，2010。[65] T. Shima，嵌套分形上随机薛定谔算子的利夫希茨尾，《Osaka J. Math.》**29** (1992)，749–770。[66] B. Simon：*Anderson*模型的利夫希茨尾，《J. Stat. Phys.》38 (1985) 65-76。[67] P. Stollmann，《被无序俘获：随机介质中的束缚态》，Birkhäuser Boston，2001。[68] A.S. Sznitman：利夫希茨尾与维纳香肠 *I*，《J. Funct. Anal.》94, 223-246，1990。H. Balsam，华沙大学数学、信息学与力学学院，ul. Banacha 2, 02-097 华沙，波兰电子邮箱：hubert.balsam@gmail.com K. Kaleta，弗罗茨瓦夫科技大学纯数学与应用数学学院，Wyb. Wyspiańskiego 27, 50-370 弗罗茨瓦夫，波兰电子邮箱：kamil.kaleta@pwr.edu.pl M. Olszewski，弗罗茨瓦夫科技大学纯数学与应用数学学院，Wyb. Wyspiańskiego 27, 50-370 弗罗茨瓦夫，波兰电子邮箱：mariusz.olszewski@pwr.edu.pl K. Pietruska-Pałuba，华沙大学数学研究所，ul. Banacha 2, 02-097 华沙，波兰电子邮箱：kpp@mimuw.edu.pl