arXiv:2602.22636v1 [math.FA] 26 Feb 2026

次正规压缩与解析移位

SNEHA B、NEERU BALA 和 JAYDEB SARKAR

Abstract. 众所周知，亚正规算子是最难分析的算子之一。本文着重研究两类有限型亚正规算子。第一类是解析移位算子，第二类则具有解析模型。亚正规算子的一个基本模型在我们的分析中起着关键作用。

Contents

1. 引言 1
2. 一个基本模型 5
3. 解析移位算子 8
4. 有限等距算子 11
5. n-有限算子 14
6. 示例 21
参考文献 25

1. Introduction

算子的示例和表示是希尔伯特空间上线性算子理论的核心。正规算子的谱定理是这一主题的典型例证。沿着这一思路，亚正规算子是接下来值得关注的对象。尽管亚正规算子的研究不断取得各种进展，但与之相关的若干理论在很大程度上已相当完善（参见 [1, 6, 7]以及出色的综述 [3]）。接下来要分析的是众所周知颇为复杂的亚正规算子。若算子 $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$满足亚正规，则

$$TT^* \leq T^*T.$$

等价地，用自交换子表示，我们有

$$[T^*, T] := T^*T - TT^* \geq 0.$$

在本文中， $\mathcal{H}$ 表示 $\mathbb{C}$上的任意但固定的可分希尔伯特空间，并记 $\mathscr{B}(\mathcal{H})$为 $\mathcal{H}$上所有有界线性算子组成的空间。另两类重要的算子是有限秩算子和再生核希尔伯特空间上的解析移位。在本文中，我们考虑两类有限秩次正规算子：

定义 1.1。设 $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$，且设 $n \in \mathbb{N}$。我们称：

2020年 数学主题分类。 47B20, 30H05, 30H10, 47A55, 47B35, 47B47, 15B05。关键词和短语。次正规算子、自交换子、有限秩算子、移位算子、托普利茨算子。

(1) T 是有限等距算子，如果 T 是次正规压缩算子并且

$$\operatorname{rank}(I - T^*T) < \infty.$$

(2) T 是 n-有限的，如果 T 是亚正规压缩算子且

$$\operatorname{rank}[T^*, T] = n,$$

and

$$\operatorname{ran}[T^*, T] \subseteq \mathcal{D}_{T^*} \ominus \mathcal{D}_T.$$

本文采用标准记号 [9]：给定一个压缩算子 $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$（即对所有 $h \in \mathcal{H}$，都有 $\|Th\| \leq \|h\|$），缺陷算子定义为

$$D_T = (I - T^*T)^{\frac{1}{2}} \text{ and } D_{T^*} = (I - TT^*)^{\frac{1}{2}}.$$

相应的亏损空间定义为

$$\mathcal{D}_T = \overline{\operatorname{span}} D_T \text{ and } \mathcal{D}_{T^*} = \overline{\operatorname{span}} D_{T^*},$$

分别。对于压缩算子，缺陷算子提供了一种判定亚正规性的方法：压缩算子 T 是亚正规的，当且仅当

$$D_T \leq D_{T^*}.$$

特别地，我们有 $\mathcal{D}_T \subseteq \mathcal{D}_{T^*}$。由此还可得（见第5节）

$$\operatorname{ran}[T^*, T] \subseteq \mathcal{D}_{T^*}.$$

此外，在命题 5.1 中，我们证明

$$\dim(\mathcal{D}_{T^*} \ominus \mathcal{D}_T) = n.$$

这些观察为研究 n-有限算子类提供了进一步的动机。

就本文而言，再生核希尔伯特空间是开单位圆盘 $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$上取值于希尔伯特空间 $\mathcal{E}$（其中 $\mathcal{E}$ 为希尔伯特空间）的解析函数所构成的希尔伯特空间 $\mathcal{H}_k$，且对所有 $w \in \mathbb{D}$，求值算子 ev_w：$\mathcal{H}_k \to \mathcal{E}$（定义为对所有 $f \in \mathcal{H}_k$，$ev_w(f) = f(w)$）都是连续的。这一性质可导出核函数k：$\mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathscr{B}(\mathcal{E})$的构造，如下：

$$k(z, w) = ev_z \circ ev_w^*,$$

对所有 z，$w \in \mathbb{D}$。定义作用于 $\mathcal{H}_k$ 上的乘法算子 M_z 为

$$M_z f = zf,$$

对所有 $f \in \mathcal{H}_k$。若 M_z 是压缩算子且左可逆，我们就称其为解析移位。一般而言，若满足以下条件，则称 $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ 是解析的：

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} T^n \mathcal{H} = \{0\}.$$

显然，$\mathcal{H}_k$ 上的 M_z 在此意义下是解析的。

从我们的角度来看，解析移位的概念源于以下众所周知的事实：如果 $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ 是一个左可逆的解析算子，那么 T 与某个 $\mathcal{H}_k$ [10] 上的解析移位 M_z 酉等价。我们将其表示为

$$T \cong M_z. \tag{1.1}$$

本文围绕以下三个问题给出了一些结果：

(1) 有限等距算子的模型。(2) n-有限算子的表示。(3) 解析移位的例子。

如果亚正规算子没有任何正规直和项，就称其为纯算子；也就是说，不存在一个约化子空间，使得该算子在其上的限制是正规算子。在亚正规算子理论中，通常会假设所讨论的算子是纯亚正规算子，我们也将如此处理。

本文的主要结果之一给出了纯有限等距算子的完整刻画（见定理 4.1）：设 $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ 是一个纯有限等距算子。那么，存在某个 $\mathcal{H}_k$ 上的解析移位 M_z，使得

$$T \cong M_z.$$

与本文的许多其他结果一样，这一结果基于一个关于次正规压缩算子的基本而又奇特的模型（见命题 2.1）：设 $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ 是一个纯次正规压缩。那么

$$T \cong \begin{bmatrix} S & A \\ 0 & B \end{bmatrix} \in \mathscr{B}((\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T) \oplus \mathcal{D}_T),$$

其中 $B \in \mathscr{B}(\mathcal{D}_T)$ 是一个压缩算子，$S \in \mathscr{B}(\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T)$ 是一个单边移位，并且 $A \in \mathscr{B}(\mathcal{D}_T, \mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T)$，使得

$$S^*A = 0.$$

回顾一下，单边移位 $S \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ 是一个不含任何酉直和项的等距算子。后一性质等价于 S 为解析的。单边移位算子是解析移位的具体例子。在次正规压缩算子的基本模型这一背景下，定理 3.1 给出了如下解析移位的例子：设 $\mathcal{H}_1$ 与 $\mathcal{H}_2$ 为希尔伯特空间，$T \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$，并设 $S \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1)$ 为单边移位。设

$$T = \begin{bmatrix} S & A \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

假设 $A^*A + B^*B \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_2)$ 可逆，B 为解析的，且 $S^*A = 0$。则

$$T \cong M_z,$$

对某个 $\mathcal{H}_k$ 上的某个解析移位 M_z。

存在大量满足上述条件的 2×2 算子矩阵的自然例子（例如涉及托普利茨算子的那些）。此外，前述结果的证明对于为有限等距算子提供解析移位模型具有重要作用。

最后，我们转向 n-有限算子。设 $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ 是一个 n-有限算子。存在一个标准正交集 $\{e_j\}_{j=1}^n \subseteq \mathcal{D}_{T^*} \ominus \mathcal{D}_T$ 和标量 $\{\alpha_j\}_{j=1}^n \subseteq (0, 1]$，使得（注意，$[T^*, T]$ 是一个自伴算子）

$$[T^*, T] = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \otimes e_j.$$

一般而言，对于每个 u, v 属于 $\mathcal{H}$ 的元素，我们定义秩一算子 $u \otimes v$ 为 $(u \otimes v)h = \langle h, v \rangle u$ 对所有 $h \in \mathcal{H}$ 均成立。

我们采用以下记号约定：给定一个一般的压缩算子 $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$，其自交换子具有上述表示形式，我们将 $m \times m$对角矩阵$D_{\{\alpha_i\}_{i=1}^m} \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^m)$ 定义为

$$D_{\{\alpha_i\}_{i=1}^m} = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\alpha_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\alpha_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{1-\alpha_m} \end{bmatrix}.$$

˜此外，给定一个自然数 $n \geq m$，我们定义 $D_{\{\alpha_i\}_{i=1}^m}$ ： $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ 为

$$\tilde{D}_{\{\alpha_i\}_{i=1}^m} = \begin{bmatrix} D_{\{\alpha_i\}_{i=1}^m} \\ 0_{\mathbb{C}^{n-m}} \end{bmatrix}.$$

在定　理5.2中，我们证明如下：设 $T \in \mathscr{B}$（$\mathcal{H}$）。则 T 是 n-有限的，且

$$[T^*, T] = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \otimes e_j,$$

对某个标准正交集 $\{e_j\}_{j=1}^n \subseteq \mathcal{D}_{T^*} \ominus \mathcal{D}_T$和标量 $\{\alpha_j\}_{j=1}^n \subseteq$ $(0, 1]$, 当且仅当$T \cong X_1$ 或 $T \cong X_2$，其中

$$X_1 = \begin{bmatrix} M_z \otimes I_{\mathbb{C}^m} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \in \mathscr{B}((H^2(\mathbb{D}) \otimes \mathbb{C}^n) \oplus \mathcal{H}_0),$$

and

$$X_2 = \begin{bmatrix} M_z \otimes I_{\mathbb{C}^m} & P_{\mathbb{C}} \otimes \tilde{D}_{\{\alpha_i\}_{i=1}^m} & 0 \\ 0 & M_z^* \otimes D_{\{\alpha_i\}_{i=1}^m} & 0 \\ 0 & 0 & N \end{bmatrix} \in \mathscr{B}((H^2(\mathbb{D}) \otimes \mathbb{C}^n) \oplus (H^2(\mathbb{D}) \otimes \mathbb{C}^m) \oplus \mathcal{H}_0),$$

且 N 是作用在闭子空间 $\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}$上的正规算子。在上文中， H^2（$\mathbb{D}$）表示Hardy空间（更多细节见下一节）， $P_{\mathbb{C}}$ 表示 H^2（$\mathbb{D}$）到常数函数子空间上的正交投影。

具有有限秩自交换子的次正规算子已得到广泛研究。例如，Xia [12] 证明，若某个亚正规算子的自交换子值域为一维，且在其共轭作用下不变，则该算子是恒等算子与单边移位的线性组合。关于自交换子秩为一或二的亚正规算子的模型，以及自交换子的核的不变性，读者可参阅 Morrel [7] 和 Lee and Lee [5]（另见 [12, 13, 15]）。在 [11], , Das 研究了一类完全非酉压缩算子（特别是次正规压缩算子）的复杂结构，并假设两个亏损空间均为有限维。

除本节外，本文分为四节。第2节介绍次正规压缩算子的基本模型。第3节讨论与上一节所介绍的基本模型相关的解析移位实例。第4节证明有限等距算子与解析移位酉等价。第5节介绍 n-有限算子的解析模型。最后一节即第6节，列举若干实例，并阐释本文提出的理论与概念。

2. A basic model

本节旨在介绍一个表示所有纯次正规压缩的基本模型。我们采用经典的 *Nagy-Foias* 和 *Langer* 压缩算子正交分解 [4, 8]: 给定压缩算子 $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, 定义$\mathcal{H}$ 的闭子空间 $\mathcal{H}_u$ 和 $\mathcal{H}_c$ 如下:

$$\mathcal{H}_u = \{h \in \mathcal{H} : \|T^m h\| = \|T^{*m} h\| = \|h\|, m \in \mathbb{Z}_+\},$$

and

$$\mathcal{H}_c = \mathcal{H}_u^{\perp},$$

分别。于是, $\mathcal{H}_u$ 和 $\mathcal{H}_c$ 都约化 T, 并且

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_u \oplus \mathcal{H}_c.$$

此外, $T|_{\mathcal{H}_u}$是酉算子, 而 $T|_{\mathcal{H}_c}$是完全非酉的（也就是说, $T|_{\mathcal{H}_c}$没有酉直和项）。因此, 我们得到 T 在 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_u \oplus \mathcal{H}_c$ 上的分解:

$$T = \begin{bmatrix} T|_{\mathcal{H}_u} & 0 \\ 0 & T|_{\mathcal{H}_c} \end{bmatrix}.$$

给定一个亚正规压缩算子 $T \in \mathscr{B}$（$\mathcal{H}$）, 根据 $D_T \leq D_{T^*}$, 我们知道$\mathcal{D}_T \subseteq \mathcal{D}_{T^*}$。此外, 在下文中, 我们将使用正交分解

$$\mathcal{H} = (\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T) \oplus \mathcal{D}_T.$$

做好这些准备后, 我们现在转向亚正规压缩算子的模型, 这一模型将在全文中得到广泛应用。

命题 2.1. 设 $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ 是一个纯次正规压缩。 n

$$T \cong \begin{bmatrix} S & A \\ 0 & B \end{bmatrix} \in \mathscr{B}((\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T) \oplus \mathcal{D}_T), \tag{2.1}$$

其中 $B \in \mathscr{B}(\mathcal{D}_T)$ 是一个压缩算子, $S \in \mathscr{B}(\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T)$ 是一个单边移位, 且 $A \in \mathscr{B}(\mathcal{D}_T$, $\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T)$ 满足

$$S^* A = 0.$$

证明。 由于 T 是一个亚正规算子, 我们知道 $\mathcal{D}_T \subseteq \mathcal{D}_{T^*}$。因此

$$\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_{T^*} \subseteq \mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T.$$

关于压缩算子的一个初等事实表明, $T|_{\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T}$: $\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T \to \mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_{T^*}$是一个酉算子, 其逆为 $T^*|_{\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_{T^*}}$: $\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_{T^*} \to \mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T$ [9, 页 8]（在此语境下, 值得注意的是 $T\mathcal{D}_T \subseteq \mathcal{D}_{T^*}$）。鉴于 $\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_{T^*} \subseteq \mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T$, 我们将 $T|_{\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T}$视为作用在 $\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T$上的算子, 即 $T|_{\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T} \in \mathscr{B}(\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T)$。定义 $S \in \mathscr{B}(\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T)$如下:

$$Sx = Tx,$$

对所有 $x \in \mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T$ 均成立。因此,

$$S = T|_{\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T},$$

在 $\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T$ 上定义了一个等距算子。相对于分解 $\mathcal{H} = (\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T) \oplus \mathcal{D}_T$, 我们写作

$$T = \begin{bmatrix} S & A \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

由于 S 在 $\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T$ 上是等距算子, 冯·诺伊曼-沃尔德分解定理[9, 第 3] 页保证存在 $\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T$ 的闭子空间 $\mathcal{W}_u$ 和 $\mathcal{W}_s$, 使得

(1) $\mathcal{W}_u \oplus \mathcal{W}_s = \mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T$。(2) $\mathcal{W}_u$ 和 $\mathcal{W}_s$ 均约化 S。(3) $U := S|_{\mathcal{W}_u}$ 是 $\mathcal{W}_u$上的酉算子。(4) $S_0 := S|_{\mathcal{W}_s}$ 是 $\mathcal{W}_s$上的单边移位。

因此，我们有 T 的如下表示

$$T = \begin{bmatrix} U & 0 & A_1 \\ 0 & S_0 & A_2 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix},$$

在 $\mathcal{H} = \mathcal{W}_u \oplus \mathcal{W}_s \oplus \mathcal{D}_T$ 上。我们声称 $A_1 = 0$（注意：$A_1 : \mathcal{D}_T \to \mathcal{W}_u$）。事实上，对于 $x \in \mathcal{W}_u$，我们有

$$\langle (U^*U - UU^* - A_1A_1^*)x, x\rangle = \langle (T^*T - TT^*)x, x\rangle \geq 0.$$

由于 U 是酉算子，我们有 $U^*U - UU^* = 0$，由此得到

$$-\langle A_1A_1^*x, x\rangle \geq 0,$$

对每个 $x \in W_u$ 都成立。这意味着 $A_1 = 0$，因此

$$T = \begin{bmatrix} U & 0 & 0 \\ 0 & S_0 & A_2 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}.$$

由于 T 是纯亚正规算子，可知 $W_u = \{0\}$（注意，$\mathcal{W}_u$ 约化 T，且 $T|_{\mathcal{W}_u}$ 是酉算子）；因此，$S = S_0$ 是单边移位。由此，我们有

$$T = \begin{bmatrix} S & A_2 \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

这也意味着

$$T^*T - TT^* = \begin{bmatrix} P_{\ker S^*} - A_2A_2^* & * \\ * & * \end{bmatrix}.$$

由于 T 是亚正规算子，因此我们有

$$P_{\ker S^*} - A_2A_2^* \geq 0.$$

根据 Douglas值域包含定理,

$$\mathrm{ran} A_2 \subseteq \ker S^*,$$

这等价于说 $S^*A_2 = 0$。这就完成了该结果的证明。 □

回顾一下，单边移位 S 的重数 是以下数值

$$d = \dim \ker S^* \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

H^2上的*Hardy*空间是由 $\mathbb{D}$ 上的所有解析函数构成的希尔伯特空间，其幂级数系数平方可和。注意，M_z 在 $H^2(\mathbb{D})$上是重数为 1 的单边移位算子（因为 $\dim(\ker M_z^*) = 1$）。重数为 $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 的单边移位算子与作用在取值于 $\mathcal{D}$的 Hardy空间 $H^2_{\mathcal{D}}(\mathbb{D})$上的 M_z 酉等价，其中 $\mathcal{D}$ 是一个希尔伯特空间，并且

$$\dim \mathcal{D} = d.$$

特别地，在前一个结果中， S 在 $\mathcal{H}\ominus\mathcal{D}_T$ 上可以替换为 $M_z\otimes I_{\mathcal{E}}$ 在 $H^2(\mathbb{D})\otimes\mathcal{E}$上，其中 $\mathcal{E}$ 是某个希尔伯特空间，使得

$$\dim\mathcal{E}=\dim(\mathcal{H}\ominus\mathcal{D}_T).$$

下述初等事实与上述命题中所考虑的算子 T 精神一致（此处我们假定 $B=S^*$）。这一点将在后文中再次用到。

命题 2.2. 设 $S\in\mathscr{B}(\mathcal{H})$ 为等距算子，并设 $X\in\mathscr{B}(\mathcal{H})$。定义 $T\in\mathscr{B}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ 为

$$T=\begin{bmatrix}S & X\\ 0 & S^*\end{bmatrix}.$$

则 T 是次正规压缩算子，当且仅当 X 是偏等距算子，且

$$ranX\subseteq ranX^*=\ker S^*.$$

此外，在此情形下， T 是等距算子。

证明。 首先，我们计算

$$T^*T=\begin{bmatrix}I & S^*X\\ X^*S & X^*X+SS^*\end{bmatrix},$$

and

$$TT^*=\begin{bmatrix}SS^*+XX^* & XS\\ S^*X^* & I\end{bmatrix}.$$

假设 T 是亚正规压缩算子。那么 $S^*X=0$ 和 $XS=0$。等价地，$\mathrm{ran}X$，$\mathrm{ran}X^*\subseteq\ker S^*$。此外，我们有

$$I-T^*T=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & P_{\ker S^*}-X^*X\end{bmatrix},I-TT^*=\begin{bmatrix}P_{\ker S^*}-XX^* & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

注意， $I-T^*T\geq 0$ 给出 $X^*X\leq P_{\ker S^*}$。另一方面， $T^*T\geq TT^*$ 意味着 $X^*X+SS^*\geq I$，或者等价地， $X^*X\geq P_{\ker S^*}$。因此，我们得出

$$X^*X=P_{\ker S^*}.$$

利用 $XS=0$，我们得到

$$XX^*X=XP_{\ker S^*}=X(I-P_{\mathrm{ran}S})=X,$$

因此， X 是偏等距算子，且 $\mathrm{ran}X^*=\mathrm{ran}(X^*X)=\ker S^*$。

反过来，假设 X 是偏等距算子，且 $\mathrm{ran}X\subseteq\mathrm{ran}X^*=\ker S^*$。那么 $S^*X=0$、 $XS=0$ 和 $X^*X=P_{\mathrm{ran}X^*}=P_{\ker S^*}$ 因此，我们有

$$T^*T-TT^*=\begin{bmatrix}P_{\ker(S^*)}-XX^* & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

显然， T 是亚正规算子且 $I-T^*T=0$。由此命题得证 . □

如前所述，Das [11]分析了一类亏损空间均为有限维的亚正规压缩算子的结构。[11] 所用的基本工具之一是经典的 Nagy-Foias 和 Langer 压缩算子分解；本节也将用它来构造纯次正规压缩算子的基本模型。

3. Analytic shifts

在上一节中，我们构造了纯次正规算子的模型。本节将以该模型为启发，给出解析移位算子的例子。

以下结果有两个目的：首先，它从更一般的算子理论视角提供了解析移位的例子；其次，它为证明有限等距算子是解析移位奠定基础，这一结果将在下一节探讨。尽管下文对算子施加的可逆性假设看起来或许有些人为，但我们将证明这类算子自然存在。我们回顾一下：若 $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ 左可逆且解析，则存在某个再生核希尔伯特空间 $\mathcal{H}_k$ 上的解析移位M_z，使得（见（1.1））

$$T \cong M_z.$$

定理 3.1. 设 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 为希尔伯特空间，$T \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$，且 $S \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1)$为单边移位。设

$$T = \begin{bmatrix} S & A \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

假设 $A^*A + B^*B \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_2)$ 可逆，B 为解析的，并且

$$S^*A = 0.$$

于是，T 与解析移位算子酉等价。

证明。令 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$。由于 $S^*A = 0$，可得

$$T^*T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A^*A + B^*B \end{bmatrix}.$$

由于 $A^*A + B^*B$ 可逆，因此 T^*T 可逆，从而 T 是左可逆的。我们转而证明证明中非平凡的部分：证明 T 是解析的，即

$$\bigcap_{n\geq 0} T^n\mathcal{H} = \{0\}.$$

反之，假设存在一个非零向量 $\begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} \in \mathcal{H}$，使得

$$\begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} \in \bigcap_{n\geq 0} T^n\mathcal{H}.$$

对于每个 $n \in \mathbb{Z}_+$，存在 $C_n \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ 和 $\begin{bmatrix} h_n \\ g_n \end{bmatrix} \in \mathcal{H}$，使得

$$T^n = \begin{bmatrix} S^n & C_n \\ 0 & B^n \end{bmatrix},$$

and

$$T^n \begin{bmatrix} h_n \\ g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix}.$$

暂且假设对所有 $n \in \mathbb{Z}_+$，$g_n = 0$。那么，一方面，

$$T^n \begin{bmatrix} h_n \\ g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^n h_n \\ 0 \end{bmatrix},$$

另一方面,

$$T^n \begin{bmatrix} h_n \\ g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^n & C_n \\ 0 & B^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix}.$$

比较上述等式可得，对所有 $n \in \mathbb{Z}_+$，都有 $g = 0$ 和 $h = S^n h_n$。由于 S 是解析的，我们得出 $h = 0$，从而得到矛盾:

$$\begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

鉴于上述观察，我们现在假设存在某个 $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ ，使得 $g_{m_0} \neq 0$ ，并且

$$g_m = 0,$$

对所有 $m < m_0$都成立。我们还有

$$\begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & A \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^2 & SA + AB \\ 0 & B^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_2 \\ g_2 \end{bmatrix} = \cdots.$$

比较各分量可得

$$h = Sh_1 + Ag_1 = S^2 h_2 + (SAg_2 + ABg_2) = \cdots, \tag{3.1}$$

and

$$g = B^n g_n, \tag{3.2}$$

对所有 $n \in \mathbb{Z}_+$都成立。我们断言

$$g_m = B^n g_{n+m}, \tag{3.3}$$

对所有 $m, n \geq 1$ 均成立。我们对 $m \in \mathbb{N}$ 作归纳，证明这一断言。由于 $S^*A = 0$，我们有

$$\operatorname{ran} A \perp \operatorname{ran} S.$$

由此可得

$$Ag_1 = ABg_2 = AB^2 g_3 = \cdots.$$

通过考察上文中的 $Ag_1 = ABg_2$ ，我们得到

$$A(g_1 - Bg_2) = 0,$$

另一方面，对于 $n = 1$,2，(3.2) 意味着 $B(g_1 - Bg_2) = 0$。综上，我们有

$$B(g_1 - Bg_2) = A(g_1 - Bg_2) = 0.$$

同理，我们有

$$B(g_1 - B^2 g_3) = A(g_1 - B^2 g_3) = 0,$$

依此类推。换言之，我们有

$$g_1 - B^n g_{n+1} \in \ker B \cap \ker A,$$

对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都成立。然而，由于 $A^*A + B^*B$ 可逆，因此可得

$$\ker B \cap \ker A = \{0\},$$

因此

$$g_1 - B^n g_{n+1} = 0,$$

对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都成立。因此，我们有

$$g_1 = Bg_2 = B^2 g_3 = \cdots,$$

这就证明了 (3.3) 对 $m = 1$ 成立。接下来，我们假设 (3.3) 对 $m - 1$ 成立；也就是说，

$$g_{m-1} = B^n g_{n+m-1},$$

对所有 $n \geq 1$。由 (3.1)，我们有

$$h = S^{m-1}h_{m-1} + S^{m-2}Ag_{m-1} + ABg_{m-1} = S^m h_m + S^{m-1}Ag_m + ABg_m = \cdots .$$

在上述等式两边应用 S^{*m-1} ，并利用 $\mathsf{ran}A \perp \mathsf{ran}S$ 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned} S^{*m-1}h =& h_{m-1} \\ =& Sh_m + Ag_m \\ =& S^2 h_{m+1} + SAg_{m+1} + ABg_{m+1} \\ =& S^3 h_{m+2} + S^2 Ag_{m+2} + SABg_{m+2} + AB^2 g_{m+2} \\ & \vdots \end{aligned}$$

再次利用正交性 $\mathsf{ran}A \perp \mathsf{ran}S$，我们有

$$Ag_m = ABg_{m+1} = AB^2 g_{m+2} = \cdots ,$$

由此可得

$$A(g_m - Bg_{m+1}) = A(g_m - B^2 g_{m+2}) = A(g_m - B^3 g_{m+3}) = \cdots = 0.$$

现在，根据归纳假设，我们知道

$$g_{m-1} = Bg_m = B^2 g_{m+1} = B^3 g_{m+2} = \cdots ,$$

由此可得

$$B(g_m - Bg_{m+1}) = B(g_m - B^2 g_{m+2}) = B(g_m - B^3 g_{m+3}) = \cdots = 0,$$

因此，对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$g_m - B^n g_{m+n} \in \ker B \cap \ker A = \{0\},$$

这意味着 (3.3) 对所有 m 都成立。因此，我们有

$$g_m \in \bigcap_{n\geq 0} B^n \mathcal{H}_2, \tag{3.4}$$

对所有 $m \in \mathbb{N}$ 都成立。特别地， $g_{m_0} \in \bigcap\limits_{n\geq 0} B^n \mathcal{H}_2$，这与以下事实矛盾：

$$\bigcap_{n\geq 0} B^n \mathcal{H}_2 = \{0\}.$$

这证明了 T 是解析的。由于我们已经证明 T 是左可逆的，因此最终可以得出结论： T 与一个解析移位算子酉等价。□

在最后一节中，我们给出满足前述定理条件的例子。

4. Finite-isometries

在本节中，我们对纯有限等距算子进行了完整刻画。证明的部分内容沿用了定理 3.1 中采用的方法。

定理 4.1. 设 $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ 为纯有限等距算子。则 T 酉等价于一个解析移位。

证明. 我们首先证明 T 的点谱为空，即 $\sigma_p(T) = \emptyset$。反之，假设 $\lambda \in \sigma_p(T)$。由于 $T - \lambda I$ 是亚正规算子，由此可得

$$\ker(T - \lambda I) \subseteq \ker(T^* - \overline{\lambda} I).$$

显然，$\ker(T - \lambda I)$ 在 T 下不变。我们断言它也约化 T。事实上，设$f \in \ker(T - \lambda I)$。鉴于上述包含关系，由此可得

$$T(T^* f) = \overline{\lambda} T f = |\lambda|^2 f,$$

这就完成了该断言的证明。特别地，我们有

$$T|_{\ker(T-\lambda I)} = \lambda I_{\ker(T-\lambda I)},$$

是一个正规算子。然而，根据假设， T 是一个纯亚正规算子。除非 $\sigma_p(T) = \emptyset$，否则这会导致矛盾。
根据命题 2.1，我们现在写作

$$T = \begin{bmatrix} S & A \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

在 $\mathcal{H} = (\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T) \oplus \mathcal{D}_T$ 上，其中 S是一个单边移位，且 $S^* A = 0$。根据假设，存在一个有限秩算子 $F \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$，使得

$$T^* T = I + F.$$

特别地， T^*T是一个自伴 Fredholm 算子，且 $\ker(T^*T) = \ker T = \{0\}$。由此可得， T^*T 是一个可逆算子。因此， T 是左可逆的。此外，由于

$$T^* T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A^* A + B^* B \end{bmatrix},$$

由此可知， $A^*A + B^*B$ 是可逆的。
接下来，我们注意到， B 的特征向量没有一个属于 A的零空间。事实上，如果存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和非零的 $h \in \mathcal{H}$ ，使得 $(B - \lambda I)h = 0$ 且 $Ah = 0$，那么

$$T \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix},$$

这与 $\sigma_p(T) = \emptyset$ 的事实相矛盾。现在我们可以开始证明 T是一个解析算子。证明的部分步骤沿用了定理 3.1 的证明思路。取一个向量

$$\begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} T^n \mathcal{H}.$$

对于每个 $n \in \mathbb{Z}_+$，都存在 $\begin{bmatrix} h_n \\ g_n \end{bmatrix} \in \mathcal{H} = (\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T) \oplus \mathcal{D}_T$，使得

$$T^n \begin{bmatrix} h_n \\ g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix}.$$

与定理 3.1 的证明中一样（具体参见 (3.1) 和 (3.2)），我们有

$$h = Sh_1 \oplus Ag_1 = (S^2h_2 + SAg_2) \oplus ABg_2 = \cdots, \tag{4.1}$$

and

$$g = Bg_1 = B^2g_2 = \cdots. \tag{4.2}$$

同样，如 (3.4) 所示，我们有

$$g_m \in \bigcap_{n\geq 0} B^n\mathcal{D}_T,$$

对所有 $m \geq 1$。和之前一样，取 $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ 使得

$$g_{m_0} \neq 0,$$

并且对所有 $m < m_0$，都有 $g_m = 0$。对于每个 $m > m_0$，我们有

$$g_{m_0} = B^{m-m_0}g_m.$$

由于 $g_{m_0} \neq 0$，可知 $g_m \neq 0$。此外，鉴于 B 是一个压缩算子，我们有

$$\|g_{m_0}\| = \|B^{m-m_0}g_m\| \leq \|g_m\|.$$

由此可得

$$\sup\left\{\frac{1}{\|g_m\|} : m \geq m_0\right\} \leq \frac{1}{\|g_{m_0}\|} < \infty.$$

我们断言

$$Ag_n \to 0 \text{ as } n \to \infty.$$

我们按如下方式进行：将 $S^*, S^{*2}, \ldots$ 应用于 (4.1)（回想一下， $S^*A = 0$），可得

$$\begin{aligned} h_1 =& Sh_2 \oplus Ag_2 = (S^2h_3 + SAg_3) \oplus ABg_3 = \cdots \\ h_2 =& Sh_3 \oplus Ag_3 = (S^2h_4 + SAg_4) \oplus ABg_4 = \cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

通过反复将关系 $S^*A = 0$ 应用于涉及 h_1的恒等式，我们可得

$$\|h_1\|^2 = \|h_2\|^2 + \|Ag_2\|^2 = \|Sh_3 \oplus Ag_3\|^2 + \|Ag_2\|^2 = \|Sh_3\|^2 + \|Ag_3\|^2 + \|Ag_2\|^2 = \ldots$$

以此类推，可得

$$\|h_1\|^2 = \|h_n\|^2 + \sum_{m=2}^{n} \|Ag_m\|^2 \geq \sum_{m=2}^{n} \|Ag_m\|^2,$$

对所有 $n \geq 2$均成立，这意味着

$$\sum_{m=2}^{\infty} \|Ag_m\|^2 \leq \|h_1\|^2 < \infty.$$

因此， $Ag_n \to 0$，这就证明了该结论。

由于 $\mathcal{D}_T$ 是有限维子空间， B 是有限秩的。因此，序列$\left\{B\left(\frac{g_n}{\|g_n\|}\right)\right\}$有一个收敛子列，记为$\overline{\left\{B\left(\frac{g_{n_k}}{\|g_{n_k}\|}\right)\right\}}$。因此，存在 $g \in \mathcal{D}_T$ ，使得

$$B\Big(\frac{g_{n_k}}{\|g_{n_k}\|}\Big) \to g, \tag{4.3}$$

当 $k \to \infty$ 时。我们断言:

$$g = 0.$$

反设 $g \neq 0$。由 (3.3) 可知，对于所有 m， $n \geq 1$，都有 $g_m = B^n g_{n+m}$ 。特别地，我们有

$$g_{n_k-1} = Bg_{n_k},$$

因此

$$\frac{g_{n_k-1}}{\|g_{n_k}\|} = B\Big(\frac{g_{n_k}}{\|g_{n_k}\|}\Big) \to g.$$

因此,

$$\frac{1}{\|g_{n_k}\|} A\Big(g_{n_k-1}\Big) = A\Big(\frac{g_{n_k-1}}{\|g_{n_k}\|}\Big) \to Ag.$$

另一方面，由于当 $n \to \infty$ 时 $Ag_n \to 0$ ，且 $\sup\left\{\frac{1}{\|g_m\|} : m \geq m_0\right\} < \infty$，我们得出

$$Ag = 0.$$

如前所述，我们有 $g_{n_k-1} \in \bigcap\limits_{n\geq 0} B^n\mathcal{D}_T$。由于 $\bigcap\limits_{n\geq 0} B^n\mathcal{D}_T$ 是闭子空间（回想一下， $\mathcal{D}_T$ 是 $\mathcal{H}$ 的有限维子空间），由 (4.3) 可得

$$B^m g \in \bigcap_{n\geq 0} B^n\mathcal{D}_T,$$

对于 $m \geq 0$。此外，注意到

$$A\Big(\frac{g_{n_k-2}}{\|g_{n_k}\|}\Big) = AB\Big(\frac{g_{n_k-1}}{\|g_{n_k}\|}\Big) \to ABg.$$

由于 $Ag_n \to 0$ 且 $\left\{\frac{1}{\|g_{n_k}\|}\right\}$ 有上界，我们得出

$$ABg = 0.$$

如此继续下去，我们得到

$$AB^m g = 0,$$

对任意 y $m \in \mathbb{Z}_+$。由于 B 是有限秩算子，存在一个多项式 s ay

$$p = \prod_{i=1}^{m}(z - \lambda_i),$$

对于某些标量 $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$，使得

$$p(B) = (B - \lambda_1 I_{\mathcal{D}_T}) \cdots (B - \lambda_m I_{\mathcal{D}_T}) = 0.$$

特别地， $p(B)g = 0$。这给出了以下两种可能之一

$$(B - \lambda_2 I_{\mathcal{D}_T}) \cdots (B - \lambda_m I_{\mathcal{D}_T})g \neq 0,$$

or

$$(B - \lambda_2 I_{\mathcal{D}_T}) \cdots (B - \lambda_m I_{\mathcal{D}_T})g = 0.$$

等价地，$(B-\lambda_2 I_{\mathcal{D}_T})\cdots(B-\lambda_m I_{\mathcal{D}_T})g$要么是 B 的特征向量，要么是零向量。现在，如果 $(B-\lambda_2 I_{\mathcal{D}_T})\cdots(B-\lambda_m I_{\mathcal{D}_T})g=0$，那么 $(B-\lambda_3 I_{\mathcal{D}_T})\cdots(B-\lambda_m I_{\mathcal{D}_T})g$要么是 B 的特征向量，要么是零向量。如此继续下去，我们得出结论：存在一个多项式 q （可能是常数多项式 1），使得 $q(B)g$ 是 B 的特征向量。由于对于所有 $m\in\mathbb{Z}_+$， $AB^m g=0$，我们有

$$Aq(B)g=0,$$

这意味着 $q(B)g$ 是 B 的一个特征向量，且它也属于 A的核。这与 B 在 $\ker A$中没有特征向量这一事实矛盾。因此，我们完成了关于 $g=0$的断言的证明。由此可得

$$(A^*A+B^*B)\Big(\frac{g_{n_k}}{\|g_{n_k}\|}\Big)\to 0.$$

然而， A^*A+B^*B是可逆的，且 $\{\frac{g_{n_k}}{\|g_{n_k}\|}\}$是一个标准正交序列。因此，$(A^*A+B^*B)(\frac{g_{n_k}}{\|g_{n_k}\|})$不可能收敛到零。于是， T是解析的。由 (1.1) 可知， T 酉等价于一个解析移位算子。□

In 例 6.4，我们将用一个具体例子来说明上述结果。

5. n-FINITE OPERATORS

设 $T\in\mathscr{B}(\mathcal{H})$是一个亚正规压缩算子。由于

$$[T^*,T]=D_{T^*}^2-D_T^2\le D_{T^*}^2,$$

由此可得

$$\operatorname{ran}[T^*,T]\subseteq\mathcal{D}_{T^*}.$$

换句话说， T 的自交换子的值域包含于亏损空间 $\mathcal{D}_{T^*}$中。由于我们还知道 $\mathcal{D}_T\subseteq\mathcal{D}_{T^*}$，因此自然要研究这样一类次正规压缩算子$T$：其自交换子为有限秩，且其值域包含于 $\mathcal{D}_{T^*}\ominus\mathcal{D}_T$中。从这一角度来看， n-有限算子的概念自然成为一类值得考虑的重要算子。

我们首先 证明一个具有独立意义的结果：如果 T 是 n-有限的，那么特别地 r

$$\dim(\mathcal{D}_{T^*}\ominus\mathcal{D}_T)=n.$$

命题 5.1。设 $T\in\mathscr{B}(\mathcal{H})$ 是一个次正规压缩算子。将 $[T^*,T]$ 写成

$$[T^*,T]=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j\otimes e_j,$$

其中 $\{e_j\}_{j=1}^n\subseteq\mathcal{D}_{T^*}\ominus\mathcal{D}_T$是标准正交集，$\{\alpha_j\}_{j=1}^n\subseteq(0,1]$是标量。那么 $\{e_j\}_{j=1}^n$是 $\mathcal{D}_{T^*}\ominus\mathcal{D}_T$的标准正交基。

证明。 令 $h\in\mathcal{D}_{T^*}\ominus\mathcal{D}_T$。存在一个序列 $\{g_m\}\subseteq\mathcal{H}$，使得

$$h=\lim_{m\to\infty}D_{T^*}^2 g_m.$$

对每个 $m\ge 1$，定义

$$h_m=D_{T^*}^2 g_m.$$

将 $\mathcal{D}_{T^*}$ 分解为 $\mathcal{D}_{T^*}=\mathcal{D}_T\oplus(\mathcal{D}_{T^*}\ominus\mathcal{D}_T)$。由于 $h_m\in\mathcal{D}_{T^*}$，存在 $u_m\in\mathcal{D}_T$ 和 $v_m\in\mathcal{D}_{T^*}\ominus\mathcal{D}_T$，使得

$$h_m=u_m\oplus v_m.$$

设 $h_m-h=u_m\oplus(v_m-h)$。由于 $h_m\to h$，可得

$$\lim_{m\to\infty}v_m=h,$$

and

$$\lim_{m\to\infty}u_m=0.$$

由于

$$[T^*,T]=D_{T^*}^2-D_T^2,$$

可得

$$D_{T^*}^2-D_T^2=\sum_{i=1}^n\alpha_ie_i\otimes e_i.$$

因此，对于每个 $m\geq 1$，有

$$D_{T^*}^2g_m-D_T^2g_m=\sum_{i=1}^n\alpha_i\langle g_m,e_i\rangle e_i.$$

由于 $D_{T^*}^2g_m=h_m$，有

$$h_m-D_T^2g_m=u_m+v_m-D_T^2g_m=\sum_{i=1}^n\alpha_i\langle g_m,e_i\rangle e_i.$$

由于 $e_i,v_m\in\mathcal{D}_{T^*}\ominus\mathcal{D}_T$对所有 $i=1,\ldots,n$，我们有

$$u_m-D_T^2g_m\in\mathcal{D}_{T^*}\ominus\mathcal{D}_T.$$

在另一 方面，我们知道 $u_m-D_T^2g_m\in\mathcal{D}_T$。因此 $u_m-D_T^2g_m=0$，从而 e

$$v_m=\sum_{i=1}^n\alpha_i\langle g_m,e_i\rangle e_i\in\operatorname{span}\{e_1,\ldots,e_n\}.$$

由于 $h=\lim\limits_{m\to\infty}v_m$，由此可得

$$h\in\operatorname{span}\{e_1,\ldots,e_n\},$$

从而 $\mathcal{D}_{T^*}\ominus\mathcal{D}_T=$张成$\{e_1,\ldots,e_n\}$。至此完成了该结果的证明。 □

特别地，如果 $T\in\mathscr{B}(\mathcal{H})$ 是一个 n-有限算子，那么存在一个 $\{e_j\}_{j=1}^n$的标准正交基 $\mathcal{D}_{T^*}\ominus\mathcal{D}_T$以及标量 $\{\alpha_j\}_{j=1}^n\subseteq(0,1]$使得

$$[T^*,T]=\sum_{j=1}^n\alpha_je_j\otimes e_j.$$

现在我们可以介绍 n-有限算子的模型了。回顾以下记号：对于$\{\alpha_i\}_{i=1}^m\subseteq(0,1],$，用 $D_{\{\alpha_i\}_{i=1}^m}\in\mathscr{B}(\mathbb{C}^m)$ 表示 $m\times m$ 对角矩阵

$$D_{\{\alpha_i\}_{i=1}^m}=\operatorname{diag}\{\sqrt{1-\alpha_1},\ldots,\sqrt{1-\alpha_m}\}.$$

˜此外，给定 $n \geq m$，我们定义 $D_{\{\alpha_i\}_{i=1}^m}$： $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ 如下

$$\tilde{D}_{\{\alpha_i\}_{i=1}^m} = \begin{bmatrix} D_{\{\alpha_i\}_{i=1}^m} \\ 0_{\mathbb{C}^{n-m}} \end{bmatrix}.$$

定理 5.2. 设 $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$。则 T 是 n-有限的，其中

$$[T^*, T] = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \otimes e_j,$$

存在某个标准正交集 $\{e_j\}_{j=1}^n \subseteq \mathcal{D}_{T^*} \ominus \mathcal{D}_T$和标量 $\{\alpha_j\}_{j=1}^n \subseteq (0,1]$, 当且仅当$T \cong X_1$ 或 $T \cong X_2$, 其中

$$X_1 = \begin{bmatrix} M_z \otimes I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \in \mathscr{B}((H^2(\mathbb{D}) \otimes \mathbb{C}^n) \oplus \mathcal{H}_0),$$

and

$$X_2 = \begin{bmatrix} M_z \otimes I & P_{\mathbb{C}} \otimes \tilde{D}_{\{\alpha_i\}_{i=1}^m} & 0 \\ 0 & M_z^* \otimes D_{\{\alpha_i\}_{i=1}^m} & 0 \\ 0 & 0 & N \end{bmatrix} \in \mathscr{B}((H^2(\mathbb{D}) \otimes \mathbb{C}^n) \oplus (H^2(\mathbb{D}) \otimes \mathbb{C}^m) \oplus \mathcal{H}_0),$$

且 N 是作用于闭子空间 $\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}$上的正规算子。

证明.假设 T 是 n-有限的。由命题 5.1，存在 $\mathcal{D}_{T^*} \ominus \mathcal{D}_T$的一组标准正交基$\{e_j\}_{j=1}^n$ 以及标量 $\{\alpha_j\}_{j=1}^n \subseteq (0,1]$，使得

$$[T^*, T] = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \otimes e_j.$$

根据命题 2.1，我们将 T 分解为

$$T = \begin{bmatrix} S & A \\ 0 & B \end{bmatrix}, \tag{5.1}$$

在 $\mathcal{H} = (\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T) \oplus \mathcal{D}_T$ 上，其中 $S \in \mathscr{B}(\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T)$ 是一个等距算子，且 $S^*A = 0$。根据命题 2.1 中 S 的构造，我们知道 $S = T|_{\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T}$ 且 ran $S = \mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_{T^*}$。这意味着

$$\ker S^* = (\text{ran} S)^\perp = (\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T) \ominus (\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_{T^*}) = \mathcal{D}_{T^*} \ominus \mathcal{D}_T.$$

由此可得

$$P_{\ker S^*} = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e_i.$$

此外，我们有

$$[T^*, T] = \begin{bmatrix} P_{\ker S^*} - AA^* & -AB^* \\ -BA^* & A^*A + B^*B - BB^* \end{bmatrix},$$

在 $\mathcal{H} = (\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T) \oplus \mathcal{D}_T$ 上。由于 $\{e_j\}_{j=1}^n \subseteq \mathcal{D}_{T^*} \ominus \mathcal{D}_T$，因此可得

$$[T^*, T]|_{\mathcal{D}_T} = 0.$$

因此，我们有 $AB^* = 0$ 并且

$$A^*A + B^*B - BB^* = 0,$$

and

$$P_{\ker S^*} - AA^* = [T^*, T].$$

最终恒等式意味着

$$AA^* = \sum_{i=1}^{n} (1 - \alpha_i) e_i \otimes e_i.$$

特别地， A： $\mathcal{D}_T \to \mathcal{D}_{T^*} \ominus \mathcal{D}_T$是一个有限秩算子。存在 $\{h_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{D}_T$使得

$$A = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes h_i. \tag{5.2}$$

这意味着

$$AA^* = \sum_{i,j=1}^{n} \langle h_j, h_i \rangle e_i \otimes e_j.$$

比较 AA^*的两个表达式，我们得到

$$\sum_{i=1}^{n} (1 - \alpha_i) e_i \otimes e_i = \sum_{i,j=1}^{n} \langle h_j, h_i \rangle e_i \otimes e_j,$$

因此

$$\langle h_i, h_j \rangle = \delta_{ij}(1 - \alpha_i), \tag{5.3}$$

对所有 i， $j = 1$， ……， n均成立。注意， $\alpha_i \in (0, 1]$对所有 $i = 1$， ……， n均成立。

情形 I：令 $\alpha_i = 1$对所有 $i = 1$， ……， n成立。于是 $A = 0$。根据冯·诺伊曼-沃尔德分解定理，将 $S = U_0 \oplus S_0$在 $\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$上写成，其中 U_0是酉算子， S_0 是移位算子。于是

$$T = \begin{bmatrix} U_0 & 0 & 0 \\ 0 & S_0 & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix},$$

相对于分解 $(\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T) \oplus \mathcal{D}_T = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{D}_T$。由此可得

$$[T^*, T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{\ker S_0^*} & 0 \\ 0 & 0 & B^*B - BB^* \end{bmatrix}.$$

同样，由于

$$[T^*, T]|_{\mathcal{D}_T} = 0,$$

我们有 $[B^*, B] = 0$，也就是说， B是正规算子。令 $\mathcal{H}_0 = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{D}_T$，并定义$U$： $(H^2(\mathbb{D}) \otimes \mathbb{C}^n) \oplus \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H} = \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{H}_0$如下

$$U(z^m f_i + y) = S_0^m e_i + y,$$

对所有 $m \in \mathbb{Z}_+$和 $i = 1$， ……， n成立，其中 $\{f_i : i = 1, \ldots\ldots, n\}$是 $\mathbb{C}^n$的标准正交基。由于 $\{S_0^m e_i : m \in \mathbb{Z}_+, i = 1, \ldots\ldots, n\}$构成 $\mathcal{W}_2$的标准正交基，因此 U 是酉算子，并且

$$U \begin{bmatrix} M_z \otimes I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} = TU,$$

其中 $N = U_0 \oplus B$是 $\mathcal{H}_0$上的正规算子。

情形 II：假设存在 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 使得 $\alpha_i < 1$（回想一下，对于所有$j = 1$，.....， n，$\alpha_j \neq 0$）。不失一般性，假设

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n,$$

并假设

$$m := \max\{j : \alpha_j < 1\}.$$

注意， $1 \leq m \leq n$。由于 (5.3) 意味着对所有 $i, j = 1, \ldots, n$，都有 $\langle h_i, h_j \rangle = \delta_{ij}(1 - \alpha_i)$，因此对所有 $j > m$， $h_j = 0$。于是，(5.2) 中 A 的表示可简化为

$$A = \sum_{i=1}^{m} e_i \otimes h_i.$$

因此，

$$AB^* = \sum_{i=1}^{m} e_i \otimes Bh_i.$$

此时，我们利用 $AB^* = 0$ 和 $A^*A + [B^*, B] = 0$ 这一信息。首先，我们有

$$Bh_j = 0,$$

对所有 $j = 1, \ldots, m$，另一方面，

$$[B, B^*] = A^*A = (\sum_{j=1}^{m} h_j \otimes e_j)(\sum_{j=1}^{m} e_j \otimes h_j) = \sum_{j=1}^{m} h_j \otimes h_j.$$

我们有

$$BB^* - B^*B = \sum_{j=1}^{m} h_j \otimes h_j. \tag{5.4}$$

固定 $i \in \{1, \ldots, m\}$。由于 $\{h_1, \ldots, h_m\} \subseteq \ker B$，可得 $B^*Bh_i = 0$，因此

$$BB^*h_i = (\sum_{j=1}^{m} h_j \otimes h_j)h_i.$$

于是，由 (5.3) 得到

$$BB^*h_i = (1 - \alpha_i)h_i.$$

此外，对于每个 $n \geq 2$，恒等式 (5.4) 蕴含

$$BB^{*n}h_j - B^*BB^{*(n-1)}h_j = \sum_{j=1}^{m} \langle B^{*(n-1)}h_j, h_j \rangle h_j = \sum_{j=1}^{m} \langle h_j, B^{n-1}h_j \rangle h_j = 0,$$

也就是说，

$$BB^{*n}h_i = B^*(BB^{*(n-1)}h_i),$$

对所有 $n \geq 2$ 均成立。特别地，

$$BB^{*2}h_i = B^*(BB^*h_i) = (1 - \alpha_i)B^*h_i,$$

依此继续下去，归纳可得，一般而言，

$$BB^{*n}h_i = (1 - \alpha_i)B^{*n-1}h_i, \tag{5.5}$$

对所有 $n \geq 1$ 均成立。我们断言 $\mathscr{B}_i$ 是一个标准正交集，其中

$$\mathscr{B}_i = \Big\{ \frac{1}{\|h_i\|^{m+1}} B^{*m} h_i : m \in \mathbb{Z}_+ \Big\}.$$

对每个 $p > q \geq 0$，反复应用 (5.5)，可得

$$\begin{aligned} \langle B^{*q} h_i, B^{*p} h_i \rangle &= \langle h_i, B^q B^{*p} h_i \rangle \\ &= \langle h_i, B^{q-1}(1-\alpha_i) B^{*^{p-1}} h_i \rangle \\ &\vdots \\ &= \langle h_i, (1-\alpha_i)^q B^{*^{p-q}} h_i \rangle \\ &= \langle B^{p-q} h_i, (1-\alpha_i)^q h_i \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

另一方面，对每个 $p \geq 1$，有

$$\begin{aligned} \|B^{*p} h_i\|^2 &= \langle B^{*p} h_i, B^{*p} h_i \rangle \\ &= \langle h_i, B^p B^{*p} h_i \rangle \\ &= \langle h_i, (1-\alpha_i)^p h_i \rangle \\ &= (1-\alpha_i)^p \|h_i\|^2 \\ &= (\langle h_i, h_i \rangle)^p \|h_i\|^2 \\ &= \|h_i\|^{2(p+1)}. \end{aligned}$$

在上文中，我们用到了这样一个事实：$\langle h_s,\ h_t \rangle = \delta_{st}(1-\alpha_s)$ 对所有 $s,\ t = 1$、……、n 均成立（见 (5.3)）。这意味着

$$\|B^{*p} h_i\| = \|h_i\|^{p+1},$$

对每个 $p \geq 1$ 均成立，从而完成了该命题的证明。定义

$$\mathcal{M}_i = \overline{\operatorname{span}} \mathscr{B}_i.$$

根据构造（或参见 (5.5)），$\mathcal{M}_i$ 约化 B。此外，对每个 $n \geq 1$，计算得：

$$B|_{\mathcal{M}_i} \Big(\frac{1}{\|h_i\|^{n+1}} B^{*n} h_i \Big) = \frac{(1-\alpha_i)}{\|h_i\|^{n+1}} B^{*(n-1)} h_i = \frac{(1-\alpha_i)}{\|h_i\|} \Big(\frac{1}{\|h_i\|^n} B^{*(n-1)} h_i \Big).$$

由于 $\|h_i\| = \sqrt{1-\alpha_i}$，因此

$$B|_{\mathcal{M}_i} \Big(\frac{1}{\|h_i\|^{n+1}} B^{*n} h_i \Big) = \sqrt{1-\alpha_i} \Big(\frac{1}{\|h_i\|^n} B^{*(n-1)} h_i \Big),$$

因此，$B|_{\mathcal{M}_i}$ 是S_i^*的 $\sqrt{1-\alpha_i}$倍，其中 S_i 是相对于 $1 \leq i \leq m$的标准正交基 $\mathscr{B}_i$ 而言的重数为一的单边移位。换言之，我们有

$$B|_{\mathcal{M}_i} \cong \sqrt{1-\alpha_i} S_i^*.$$

定义

$$\mathcal{M} = \oplus_{i=1}^m \mathcal{M}_i.$$

那么 $\mathcal{M}$ 约化 B 并且

$$B|_{\mathcal{M}} \cong (1-\alpha_1)^{1/2} S_1^* \oplus \cdots \oplus (1-\alpha_m)^{1/2} S_m^*.$$

回忆一下， $A\colon \mathcal{D}_T \to \mathcal{D}_{T^*} \ominus \mathcal{D}_T$ 由 $A = \sum_{i=1}^{m} e_i \otimes h_i$ 给出。由于对于所有$i = 1, \ldots, n$，都有 $h_i \in \mathcal{M}$，因此可得 $A|_{\mathcal{D}_T \ominus \mathcal{M}} = 0.$

此外，回忆一下 $T = \begin{bmatrix} S & A \\ 0 & B \end{bmatrix}$ on $(\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T) \oplus \mathcal{D}_T$。记

$$B = \begin{bmatrix} B|_{\mathcal{M}} & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

on $\mathcal{M} \oplus (\mathcal{D}_T \ominus \mathcal{M})$。由于 $A|_{\mathcal{D}_T \ominus \mathcal{M}} = 0$，可得

$$T = \begin{bmatrix} U_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B|_{\mathcal{M}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{bmatrix},$$

其中 $S = \begin{bmatrix} U_0 & 0 \\ 0 & S_0 \end{bmatrix}$ on $\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$ 是冯·诺伊曼-沃尔德分解， $U_0 \in \mathscr{B}(\mathcal{W}_1)$ 是一个酉算子，而 $S_0 \in \mathscr{B}(\mathcal{W}_2)$ 是一个单边移位算子。我们有

$$[T^*, T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{\ker S_0^*} - AA^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C^*C - CC^* \end{bmatrix},$$

on $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{M} \oplus (\mathcal{D}_T \ominus \mathcal{M})$。由于 $[T^*, T]|_{\mathcal{D}_T} = 0$，可知 C是一个正规$_n$算子。我们还知道 $AA^* = \sum(1 - \alpha_i)e_i \otimes e_i$. （参见 (5.2) 前的恒等式）。$_{i=1}$由于 $\alpha_i = 1$ 对 $m + 1 \leq i \leq n$成立，且 $P_{\ker S_0^*} = AA^* + [T^*, T]$，我们有

$$P_{\ker S_0^*} = \sum_{i=1}^{m} (1 - \alpha_i) e_i \otimes e_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \otimes e_i = \sum_{i=1}^{m} e_i \otimes e_i + \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i e_i \otimes e_i,$$

从而

$$P_{\ker S_0^*} = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e_i.$$

设 $\{f_i\colon\ i = 1, \ldots\ldots, n\}$ 和 $\{g_j\colon\ j = 1, \ldots\ldots, m\}$ 分别是 $\mathbb{C}^n$ 和 $\mathbb{C}^m$ 的标准正交归一基。令

$$\mathcal{H}_0 = W_1 \oplus (\mathcal{D}_T \ominus \mathcal{M}),$$

并定义 $U\colon (H^2(\mathbb{D}) \otimes \mathbb{C}^n) \oplus (H^2(\mathbb{D}) \otimes \mathbb{C}^m) \oplus \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}$ 为

$$U(z^s f_i + z^r g_j + y) = S_0^s e_i + \frac{1}{(1 - \alpha_j)^{\frac{r+1}{2}}} B^{*r} h_j + y,$$

对所有 $s,\ r \in \mathbb{Z}_+, i = 1, \ldots\ldots, n$，以及 $j = 1, \ldots\ldots, m$。由于 $\{S_0^s e_i\colon\ s \in \mathbb{Z}_+,\ i = 1, \ldots\ldots, n\}$ 构成 $\mathcal{W}_2$的标准正交基，并且

$$\left\{ \frac{1}{(1 - \alpha_j)^{\frac{r+1}{2}}} B^{*r} h_j : r \in \mathbb{Z}_+, j = 1, \ldots, m \right\},$$

构成 $\mathcal{M}$ 的标准正交基，因此我们得出 U 是酉算子。我们声称

$$U^*TU = \begin{bmatrix} M_z \otimes I & P_{\mathbb{C}} \otimes \tilde{D}_{\{\alpha_i\}_{i=1}^m} & 0 \\ 0 & M_z^* \otimes D_{\{\alpha_i\}_{i=1}^m} & 0 \\ 0 & 0 & N \end{bmatrix},$$

其中 N 是正规算子 $U_0 \oplus C$。为证明我们的论断，首先注意到 $AB^* = 0$。此外，

$$TU(z^s f_i + z^r g_j + y) = \begin{cases} S_0^{s+1} e_i + \frac{\sqrt{1-\alpha_j}}{(1-\alpha_j)^{\frac{r}{2}}} B^{*(r-1)} h_j + Ny & \text{if } r \geq 1 \\ S_0^{s+1} e_i + \sqrt{1-\alpha_j} e_j + Ny & \text{if } r = 0. \end{cases}$$

对于每个 $r \geq 1$，我们计算

$$\begin{aligned} UX_2(z^s f_i + z^r g_j + y) &= U \begin{bmatrix} M_z \otimes I & P_{\mathbb{C}} \otimes \tilde{D}_{\{\alpha_i\}_{i=1}^m} & 0 \\ 0 & M_z^* \otimes D_{\{\alpha_i\}_{i=1}^m} & 0 \\ 0 & 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^s f_i \\ z^r g_j \\ y \end{bmatrix} \\ &= U(z^{s+1} f_i + \sqrt{1-\alpha_j} z^{r-1} g_j + Ny) \\ &= S_0^{s+1} e_i + \frac{\sqrt{1-\alpha_j}}{(1-\alpha_j)^{\frac{r}{2}}} B^{*(r-1)} h_j + Ny. \end{aligned}$$

在 $r = 0$的情形下，我们有

$$\begin{aligned} UX_2(z^s f_i + g_j + y) &= U \begin{bmatrix} M_z \otimes I & P_{\mathbb{C}} \otimes \tilde{D}_{\{\alpha_i\}_{i=1}^m} & 0 \\ 0 & M_z^* \otimes D_{\{\alpha_i\}_{i=1}^m} & 0 \\ 0 & 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^s f_i \\ g_j \\ y \end{bmatrix} \\ &= U(z^{s+1} f_i + \sqrt{1-\alpha_j} f_j + 0 + Ny) \\ &= S_0^{s+1} e_i + \sqrt{1-\alpha_j} e_j + Ny. \end{aligned}$$

因此，我们得出结论： $U^*TU = X_2$。
反过来，假设存在一个酉算子 U 使得

$$U^*TU = \begin{bmatrix} M_z \otimes I & P_{\mathbb{C}} \otimes \tilde{D}_{\{\alpha_i\}_{i=1}^m} & 0 \\ 0 & M_z^* \otimes D_{\{\alpha_i\}_{i=1}^m} & 0 \\ 0 & 0 & N \end{bmatrix}, \text{ or } U^*TU = \begin{bmatrix} M_z \otimes I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$$

$_n$其中 N是一个正规算子。经过常规计算可得 $[T^*, T] = \sum \alpha_i e_i \otimes e_{i,i=1}$其中 $\{e_i : 1 \leq i \leq n\} \subseteq \mathcal{D}_{T^*} \ominus \mathcal{D}_T$是一个标准正交集，且 $\alpha_i \in (0, 1]$。□

6. Examples

本节旨在给出若干示例，以说明本文引入的概念和确立的结果。我们首先举一个满足定理 3.1 条件的算子示例。

例 6.1. 设 $S \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ 是一个无限重数的单边移位 :

$$\dim(\ker S^*) = \infty.$$

固定一个自然数 n。设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个有限维子空间，其标准正交基为 $\{x_1, \ldots, x_n\}$。定义 $S_1 \colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 如下：

$$S_1 x_i = \begin{cases} 0 & \text{if } i = 1 \\ x_{i-1} & \text{if } i = 2, \ldots, n. \end{cases}$$

固定 $\lambda \in \mathbb{D}$。定义 $B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ 如下：

$$B|_{\mathcal{M}} = \lambda S_1,$$

and

$$B|_{\mathcal{H} \ominus \mathcal{M}} = 0.$$

换言之，

$$B = \begin{bmatrix} \lambda S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

在 $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ 上。显然， B 是一个幂零算子，尤其是， B 是解析的。令$A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$为一个偏等距算子，其初始空间为 $(\mathcal{H} \ominus \mathcal{M}) \oplus \operatorname{span}\{x_n\}$ ，终空间包含于 $\ker S^*$。因此，

$$A^* A = P_{(\mathcal{H} \ominus \mathcal{M}) \oplus \operatorname{span}\{x_n\}}.$$

此外，我们有 $\operatorname{ran} A \subseteq \ker S^*$，或者等价地，

$$S^* A = 0.$$

最后，定义 $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ 如下：

$$T = \begin{bmatrix} S & A \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

由此可得

$$TT^* = \begin{bmatrix} P_{\operatorname{ran} S} + P_{\operatorname{ran} A} & 0 \\ 0 & |\lambda|^2 P_{span\{x_2, \ldots, x_n\}} \end{bmatrix},$$

and

$$T^* T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A^* A + B^* B \end{bmatrix}.$$

此外，由于

$$A^* A + B^* B = P_{(\mathcal{H} \ominus \mathcal{M}) \oplus \langle \{x_n\} \rangle} + |\lambda|^2 P_{span\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}},$$

我们得出， $A^* A + B^* B$ 是一个可逆算子。显然， T 是一个亚正规压缩算子。根据定理 3.1，可知 T 与某个移位算子酉等价。

回顾 (1.1)，解析且左可逆的算子恰好是解析移位算子。上文中，我们给出了一些上三角分块算子矩阵的例子，它们与解析移位算子酉等价。然而，左上角为单边移位的上三角分块算子也可以给出一个非解析但左可逆算子的例子：

例 6.2. 我们沿用命题 2.2 的构造。设 $S \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ 是一个有限重数的单边移位算子，且 $X \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$。假设

$$(\ker S^*)^\perp = \ker X.$$

Then

$$T := \begin{bmatrix} S & X \\ 0 & S^* \end{bmatrix},$$

不是解析的，但左可逆。为此，对每个 $n \geq 1$，我们计算

$$T^n = \begin{bmatrix} S^n & S^{n-1}X + XS^{*(n-1)} \\ 0 & S^{*n} \end{bmatrix}.$$

固定一个非零的 $g \in \mathcal{H}$，并令 $x = Xg$。我们断言

$$\begin{bmatrix} x \\ S^*g \end{bmatrix} \in \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}).$$

固定一个自然数 n。由于 $S^*\mathcal{H} = \mathcal{H}$，存在

$$g_n \in (\ker S^*)^\perp = (\operatorname{ran} X^*)^\perp = \ker X,$$

使得 $g = S^{*(n-1)}g_n$。于是 $Xg_n = 0$，且 $T^n \begin{bmatrix} 0 \\ g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ S^*g \end{bmatrix}$。这证明 T 不是解析的。

我们还有一个与托普利茨算子相关的例子：

例 6.3. 选取内函数 θ，$\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$，并将模型空间 $\mathcal{Q}_\theta$ 定义为

$$\mathcal{Q}_\theta = H^2(\mathbb{D}) \ominus \theta H^2(\mathbb{D}).$$

假设（例如，如果 θ 是一个无限 Blaschke 乘积）

$$\dim \mathcal{Q}_\theta = \infty.$$

在 $H^2(\mathbb{D})$ 上定义 $A = T_{z\theta}$ 和 $B = T_\varphi$。显然，

$$A^*A + B^*B = 2I,$$

是可逆的。注意，$\{\theta z^n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ 是 $\theta H^2(\mathbb{D})$ 的标准正交基。令 t

$$\{e_{i,j} : i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}_+\},$$

令 $\mathcal{Q}_\theta$ 的一个标准正交基为。定义 $S \in \mathscr{B}(H^2(\mathbb{D}))$ 如下：

$$S(\theta z^m) = e_{m+1,0},$$

对所有 $m \in \mathbb{Z}_+$，并且

$$S(e_{n,m}) = e_{n,m+1},$$

对于 $n \geq 1$ 和 $m \in \mathbb{Z}_+$。显然，S 是 $H^2(\mathbb{D})$ 上的单边移位，且

$$\ker S^* = \theta H^2(\mathbb{D}).$$

此外，

$$\operatorname{ran} A = z\theta H^2(\mathbb{D}) \subset \theta H^2(\mathbb{D}) = \ker S^*.$$

由定理 3.1 可知，$T = \begin{bmatrix} S & A \\ 0 & B \end{bmatrix}$ 与一个解析移位酉等价。

我们现在给出一个有限等距算子的例子，该例子也用于说明定理 4.1。

例 6.4. 定义线性算子 $A\colon\ \mathbb{C}^2 \to H^2(\mathbb{D})$ 与 $B\colon\ \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ 如下

$$A(x_1, x_2) = x_1,$$

and

$$B(x_1, x_2) = \left(\frac{x_2}{2}, 0\right),$$

分别对所有 $(x_1,\ x_2) \in \mathbb{C}^2$ 成立。定义 T 在 $H^2(\mathbb{D}) \oplus H^2(\mathbb{D}) \oplus \mathbb{C}^2$ 上为

$$T = \begin{bmatrix} M_z & 0 & 0 \\ 0 & M_z & A \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}.$$

Then

$$T^*T - TT^* = \begin{bmatrix} P_{\mathbb{C}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix},$$

其中 $C \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^2)$ 定义为

$$C(x_1, x_2) = \frac{1}{4}(3x_1, x_2),$$

对所有 $(x_1,\ x_2) \in \mathbb{C}^2$ 成立。容易看出，T 是一个有限等距算子。我们声称 T 是纯的。反设存在一个约化子空间 $\mathcal{M} \subseteq H^2(\mathbb{D}) \oplus H^2(\mathbb{D}) \oplus \mathbb{C}^2$，它是 T 的约化子空间，且 $T|_M$ 是正规算子。那么

$$\mathcal{M} \subseteq \ker(T^*T - TT^*) = zH^2(\mathbb{D}) \oplus H^2(\mathbb{D}) \oplus \{0\}.$$

令 $zf + g + 0 \in \mathcal{M}$ 对于 $f,\ g \in H^2(\mathbb{D})$ 成立。于是

$$T^*(zf + g + 0) \in \mathcal{M}.$$

这意味着

$$f + M_z^* g + A^* g \in zH^2(\mathbb{D}) \oplus H^2(\mathbb{D}) \oplus \{0\}.$$

我们有 $A^*g = 0$，因此

$$\langle g, 1\rangle = \langle g, A(1,0)\rangle = \langle A^*g, (1,0)\rangle = 0.$$

因此，我们得出结论：$f, g \in zH^2(\mathbb{D})$。对 T^{*n} 与 $n > 1$ 重复同样的步骤，我们得到 $\{zf, f, M_z^* f, \ldots\} \subseteq zH^2(\mathbb{D})$ 和 $\{g, M_z^* g, M_z^{*2} g, \ldots\} \subseteq zH^2(\mathbb{D})$。这只有在以下情况下才可能：

$$f = g = 0.$$

因此，$\mathcal{M} = \{0\}$，从而 T 是纯亚正规算子。由定理 **4.1** 可知，T 酉等价于一个解析移位。

我们以一个关于自交换子为正交投影的算子的简单观察来结束本文。设 $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ 为一个压缩算子，使得$[T^*, T]$ 为有限秩正交投影。存在标准正交向量 $\{e_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{H}$ 使得

$$T^*T - TT^* = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e_i.$$

这表明

$$TT^* + \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e_i = T^*T.$$

由于 T 是一个压缩算子，因此可得 $T^*T \leq I$，进而

$$TT^* + \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e_i \leq I.$$

由此可得 $\|T^*e_i\|^2 + 1 \leq 1$，进而对所有 $i = 1, \ldots, n$都有 $T^*e_i = 0$。这意味着 $(I - T^*T)$ $e_i = 0$，并且当 $i = 1, \ldots, n$时有 $D^2_{T^*}e_i = e_i$。我们得出结论：$\{e_i : 1 \leq i \leq n\} \subseteq \mathcal{D}_{T^*} \ominus \mathcal{D}_T$。由定理 5.2 可知，$T$与 $S \oplus A$酉等价，其中 S是一个单边移位算子，而 A 是一个正规算子。

致谢：第一作者的研究由 NBHM（印度国家高等数学委员会）博士研究生奖学金资助，编号为 0203/13(47)/2021- R&D-II/13177。第二作者的研究由 IIT (ISM) Dhanbad 的 FRS 资助（档案编号 FRS(218)/2024-2025/M&C）。第三作者的研究部分由 ANRF、印度政府科学技术部（DST）资助（档案编号：ANRF/ARGM/2025/000130/MTR）。

References

[1] A. Aleman，具有紧自交换子的亚正规算子，《数学手稿》91（1996），353–367。[2] L. G. Brown、R. G. Douglas 和 P. A. Fillmore，模紧算子的酉等价与 C^*代数的扩张，载于《算子理论会议论文集》（加拿大新斯科舍省哈利法克斯，达尔豪斯大学，1973），第58–128页，《数学讲义》第345卷，施普林格，柏林—纽约。[3] R.E. Curto、W.Y. Lee，托普利茨算子的亚正规性与k-次正规性：简要综述及开放问题，《算子理论与巴拿赫代数》，拉巴特，1999；Theta，布加勒斯特，2003，第73–81页。[4] H. Langer，希尔伯特空间中算子的一种分解定理，《匈牙利科学院数学学报》12（1961），441–445。[5] S. H. Lee 和 W. Y. Lee，具有秩二自交换子的亚正规算子，《数学分析及其应用杂志》351（2009），616–626。[6] J. E. McCarthy 和 L. Yang，亚正规算子与求积域，《数学进展》127（1997），52–72。[7] B. B. Morrel，某些算子的分解，《印第安纳大学数学杂志》23（1973/74），497–511。[8] B. Sz.-Nagy 和 C. Foias，关于希尔伯特空间上的压缩算子，IV，《塞格德数学学报》21（1960），251–259。[9] B. Sz.-Nagy 和 C. Foia¸s，希尔伯特空间上算子的调和分析，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1970。[10] S. Shimorin，接近等距算子的沃尔德型分解与游荡子空间，《纯粹与应用数学杂志》531（2001），147–189。[11] S. Das，完全非酉压缩算子与解析性，《算子理论杂志》94（2025），65–91。[12] D. Xia，具有有限秩自交换子和求积域的亚正规算子，《数学分析及其应用杂志》203（1996），540–559。[13] D. Xia，具有秩一自交换子和求积域的亚正规算子，《积分方程与算子理论》48（2004），115–135。[14] D. Xia，亚正规算子的谱理论，《算子理论：进展与应用》第10卷，Birkh¨auser，巴塞尔，1983。

[15] D. Yakubovich，与求积域相关的亚正规算子札记，《算子理论：进展与应用》，第123卷，Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2001，第513–525页。Statistics and Mathematics Unit, Indian Statistical Institute, 8th Mile, Mysore Road,Bangalore, 560059, India电子邮箱: sneharbkrishnan@gmail.com, rs math2105@isibang.ac.inIIT(ISM) Dhanbad, Jharkhand, 826004, India电子邮箱: neerusingh41@gmail.com, neerubala@iitism.ac.in
Statistics and Mathematics Unit, Indian Statistical Institute, 8th Mile, Mysore Road, Bangalore, 560059, India电子邮箱: jay@isibang.ac.in, jaydeb@gmail.com