arXiv:2602.22665v1 [math.OA] 26 Feb 2026

从逆半群到扭曲群胚C^*-代数的结构手性

Takao Inoué

信息学部，大和大学，大阪，日本*

2026年2月26日

摘要

我们为逆半群建立了一套结构手性理论，并展示了它如何以规范方式传递到 étale 群胚和扭曲群胚 C^*代数。我们从配备容许扭曲信息的逆半群数据出发，构造了 Paterson 意义下的规范扭万有群胚，并引入一种用于编码内在不对称性的镜像对应。我们的主要结果指出，扭曲万有群胚层面存在一种阻碍自反对性（镜像自对偶）的结构性障碍，并表明这一障碍会传递为相关约化扭曲群胚 C^*代数同构于其反代数的障碍。该框架不依赖于表示，同时兼容具体的芽群胚模型，并为非交换算子代数中的部分对称性、群胚结构与解析不变量搭建了一座统一的桥梁。

*电子邮箱：inoue.takao@yamato-u.ac.jp；个人电子邮箱：takaoapple@gmail.com[我更希望使用个人电子邮箱地址进行通信。]

关键词。逆半群、泛群胚、étale 群胚、扭曲群胚 C^*代数、结构手性、自反对性、镜像自对偶
MSC 2020。 主类 20M18；次类 22A22、46L05、46L55

目录

1 引言 3

2 相关工作 4

3 半群预备：装饰半群与同位 6
3.1 装饰半群与合痕映射.6 3.2 镜像半群.7 3.3 镜像拟同构的传递.8 3.4 手性指数.8 3.5 内在对称性与下降.9

4 带表示的逆半群的结构手性 9
4.1 带表示的逆半群.9 4.2 带表示的逆半群的合痕映射 10 4.3 镜像表示.10 4.4 镜像拟同构.10 4.5 镜像拟同构的传递.11 4.6 手性指数.11 4.7 内在对称性与下降.12

5 扭曲 étale 群胚的结构手性及其与 C^*-代数的桥梁 12
5.1 扭曲 étale 群胚.12 5.2 镜像扭曲.13 5.3 镜像同构与传递.13 5.4 手性指数.14 5.5 内在对称性与下降.14 5.6 通往扭曲群胚 C^*-代数的桥梁.15 5.7 从逆半群到 étale 群胚（提纲）. 16

6 Paterson 泛群胚与 C^*-桥接 16

6.1 逆半群的泛群胚.16 6.2 群胚层面上的典范镜像.17 6.3 由逆半群数据诱导的扭曲（公理形式）18 6.4 镜像扭曲与 C^*-桥梁.19

7 主要定理：从逆半群到 C^*-代数的结构手性 19

8 结论与未来方向 21

A 附录 A：来自带表示的逆半群的芽群胚 23

A.1 带表示的逆半群与部分作用 23 A.2 芽群胚.24 A.3 芽层级上的镜像构造.25 A.4 扭曲传输.25 A.5 与泛群胚的相容性.26

1 引言

反转或镜像下的对称性是贯穿代数、几何和算子代数的普遍主题。然而，在许多情形下，这种对称性并非必然存在：代数结构或动力学结构可能无法与其镜像取得规范的对应。这种现象称为结构手性；它是指镜像对称的缺失并非源于偶然的选择或外部约束，而是内在地编码于代数结构本身。理解这种手性何时出现、如何在不同抽象层次间传播，以及如何体现于解析不变量，是本研究的核心动机。

本文旨在建立一个统一的结构手性框架：从逆半群层面出发，经由 étale 群胚以典范方式推进，最终导出扭曲群胚 C^*-代数镜像自对偶性的一个障碍。我们的主要结果表明，适当的逆半群数据会产生一个典范的扭万有群胚，其镜像对称性质完全由底层

半群结构决定。特别是，逆半群层面上的镜像同构存在与否，会以函子性的方式传递到群胚层面，并进一步归结为一个精确判据，用以判断相应的约化扭曲群胚 C^*-代数何时与其反代数同构。这表明结构手性是一种稳健的不变量，不依赖辅助表示，同时又可通过具体的芽群胚模型加以计算。

为什么要使用泛群胚？ 本文在方法论上的一个关键选择，是使用与逆半群相关联的泛群胚，而非源自某个特定表示的芽群胚。芽群胚提供了具体且往往便于计算的模型，但它们本质上依赖于辅助表示数据，因此可能会掩盖表示无关的结构性现象。相比之下，由逆半群的幂等元结构构造出的泛群胚是典范的，并具有函子性，能够捕捉半群本身所编码的内在部分对称性。因此，泛群胚是表述和检测结构性手性的自然场所。具体的芽群胚模型对于显式计算和举例仍然至关重要；因此，附录 A 将单独讨论它们的作用，并说明泛群胚构造与芽构造彼此兼容，且在泛群胚框架中识别出的手性障碍可以在表示层面的模型中计算。

2 相关工作

本文延续了一条研究脉络：将“手性”视为一种结构性现象，由对称性的群胚以及沿等价关系的传递所支配。我们的出发点是 [3],中提出的关于环路手性与消旋的群胚式表述；该表述将镜像跃迁视为指向镜像对象的态射，并在同位类层面研究由此产生的障碍。其基本原则是，镜像现象不应从外部强加，而应由内在对称性函子性地生成并传递。当前工作将这一视角拓展到部分对称性的领域，在此领域中，逆半群和 étale 群胚提供了典范的语言。

逆半群长期以来一直被视为部分对称的代数编码，而它们与群胚及算子的关系——

代数是非交换拓扑中的核心主题。Lawson 的专著[6]全面阐述了逆半群结构。Paterson 的专著 [7] 系统地构建了逆半群、泛étale群胚及相关算子代数之间的桥梁，并提出了典范群胚构造；我们将其作为本文的基石。从 C^*代数的观点来看，Exel 的综述 [2] 提供了一个统一框架，将逆半群作用、偏交叉积和组合 C^*代数联系起来，并为将逆半群数据视为群胚模型的自然来源提供了动机。

在群胚方面，Renault 的奠基性专著 [8] 引入了研究 C^*-代数的群胚方法，确立了群胚作为卷积构造和表示论组织对象的地位。étale 情形尤其适合结构性研究，因为它允许基于双截面的演算，并且通常支持余循环和扭曲的显式构造；详见 Sims 的讲义 [11] ，其中提供了详细指南。扭曲（或者在许多情况下等价地，取 $\mathbb{T}$ 值的 2-余循环）在编码“定向”数据以及生成附属于固定底层群胚的一族彼此非同构的 C^*-代数方面发挥着特殊作用；镜像自对偶正是在这一自然层面上成为一个非平凡问题的。

逆半群与典范 étale 群胚之间的联系，在 Steinberg 代数及其算子代数对应物的文献中同样十分突出。特别是，Steinberg [12]强调了 Paterson 泛群胚在描述与逆半群相关的卷积代数中的作用，突出了泛群胚作为独立于表示的对象这一点。从另一个角度看，Sieben [10] 发展了通过部分作用和逆半群作用构造 C^*-交叉积的方法，为本文所采用的拓扑群胚构造提供了一个自然的互补性分析框架。

与这些工作相比，我们的贡献并非旨在引入一类新的群胚或 C^*-代数，而是提出一种附加于逆半群数据的结构手性不变，并展示它如何通过泛群胚构造以规范方式传播至相关的扭曲群胚 C^*-代数。其新意在于将镜像对称、对称性的失效以及消旋型两态动力学整合进单一的函子性框架：手性在半群数据层面定义，传递至泛扭曲 étale 群胚，继而在分析层面被识别为自反对性（镜像自对偶）的障碍，这种障碍体现于所得的约化扭曲群胚

C^*-代数中。具体计算和表示层面的直观理解仍然重要；因此，附录 A 记录了附属于某个特定忠实表示的芽群胚模型，并说明了它与泛设置的相容性。

论文结构。 第 2 节回顾相关文献，并将本文置于算子代数的逆半群与群胚研究路径之中。第 3 节从半群层面进行预热，在简化的同位情形下阐述镜像构造与手征不变量。第 4 节引入带表示的逆半群及其镜像表示，确立基本的传递与下降机制。第 5 节发展相应的扭曲 étale 群胚理论，并将镜像对称与反代数现象联系起来。第 6 节采用 Paterson 泛群胚，作为从逆半群数据通向扭曲 étale 群胚的标准桥梁，并阐述普适镜像对应。第 7 节陈述并证明主定理，表明镜像阻碍会以规范方式从逆半群传递到扭曲万有群胚，并下降为相关约化扭曲群胚 C^*-代数自反对性的阻碍。第 8 节总结全文并展望未来研究方向。附录 A 展示与忠实表示相联系的芽群胚模型，并说明它与普适构造的相容性。

3 半群预备：装饰半群与同位

注 3.1. 本节作为预备内容，在转向逆半群和典范泛群胚之前，先在一个简化的半群框架中单独考察镜像与同位机制。

3.1 装饰半群与合痕映射

定义 3.2 （装饰半群）。 一组装饰半群 由一对 $(S,\ \Sigma)$ 构成，其中 S 是一个半群，而 $\Sigma \subseteq S$ 是一个指定的有限生成子集。

这种装饰通过固定一种结构定向，避免了乘法反转下的自动对称性。

定义 3.3 （拟同构）。 设 S 和 T 为半群。从S 到 T 的拟同构 是由双射组成的三元组 (α, β, γ) : $S \to T$ ，满足

$$\alpha(x)\beta(y) = \gamma(xy) \quad \text{for all } x, y \in S.$$

我们将其记为

$$\mathrm{Iso}_{\mathscr{S}}(S, T)$$

S 与 T之间的拟同构集合。

定义 3.4 （拟同构群胚）。 对象为装饰半群。态射为保装饰的拟同构:

$$\alpha(\Sigma) = \beta(\Sigma) = \gamma(\Sigma).$$

—

3.2 镜像半群

定义 3.5 （镜像半群）。 设 (S, Σ) 为装饰半群。其镜像 为

$$(S, \Sigma)^{\#} := (S^{\mathrm{op}}, \Sigma),$$

其中乘法顺序颠倒:

$$x \cdot_{\#} y := yx.$$

定义 3.6 (镜像同位)。

$$\mathrm{Mir}(S, \Sigma) := \mathrm{Iso}_{\mathscr{S}}\big((S, \Sigma), (S, \Sigma)^{\#}\big).$$

Mir(S, Σ) 的元素称为镜像同位。

—

3.3 镜像拟同构的传递

引理 3.7（传递）。设 $h : (S, \Sigma) \to (T, \Lambda)$ 是一个拟同构。那么

$$h \operatorname{Mir}(S, \Sigma)\, h^{-1} = \operatorname{Mir}(T, \Lambda).$$

证明。若 $(\alpha, \beta, \gamma) \in \operatorname{Mir}(S, \Sigma)$，则根据定义

$$\alpha(x)\beta(y) = \gamma(yx).$$

通过 h 进行共轭会保持同位关系，并以相同方式反转乘法，因此其像定义了 (T, Λ) 的镜像拟同构。 □

—

3.4 手性指数

假设 $\operatorname{Mir}(S, \Sigma)$ 是有限的。

定义 3.8（手性指数）。

$$k([S, \Sigma]) = \sum_{g \in \operatorname{Mir}(S, \Sigma)} w(g),$$

其中 $w(g) > 0$ 是固定权重。

T定理 3.9（结构性消失判据）。以下条件等价：

1. $k([S, \Sigma]) = 0$，2. $\operatorname{Mir}(S, \Sigma) = \varnothing$，3. 不存在拟同构 $(S, \Sigma) \to (S, \Sigma)^{\#}$。

证明。由于所有权重都严格为正，加权和为零当且仅当指标集为空。(2) 与 (3) 的等价性可由定义直接得出。

□

—

3.5 内蕴对称与下降

Let

$$\mathrm{Atp}(S,\Sigma)=\mathrm{Iso}_{\mathscr{I}}((S,\Sigma),(S,\Sigma)).$$

我们将允许的镜像跃迁限制为由内在自同位生成的那些跃迁。

定义 3.10（内在镜像动力学）。当且仅当镜像跃迁由 $\mathrm{Atp}(S,\ \Sigma)$ 生成时，该跃迁才是容许的。

定理 3.11（下降到同位类）。在内在镜像动力学下，手性指数 k（$[S,\Sigma]$）仅取决于同位类。

证明。由引理 3.7 可知，镜像拟同构沿拟同构函子性地传递。由于容许转移是在内部生成的，加权计数在同位下是不变量。

□

4 带表示的逆半群的结构手性

4.1 带表示的逆半群

定义 4.1（带表示的逆半群）。带表示的逆半群 是一个二元组 (S,ρ)，其中 S 是一个逆半群，并且

$$\rho : S \to I(X)$$

是到集合 X 上的部分双射所构成的对称逆半群中的忠实表示。

表示 ρ 被视为固定的结构数据。特别地，同伦变形必须保持 ρ。

备注 4.2。根据瓦格纳–普雷斯顿定理，每个逆半群都存在这样的忠实表示。在这里，我们将 ρ 视为结构的一部分，而不是辅助构造。

—

4.2 带表示的逆半群的拟同构

定义 4.3 （拟同构）。 设 (S,ρ) 和 (T,σ) 为带表示的逆半群。从 (S,ρ) 到 (T,σ) 的拟同构 是由三个双射组成的三元组

$$(\alpha,\beta,\gamma) : S \to T$$

使得

$$\alpha(x)\beta(y) = \gamma(xy) \quad \text{for all } x,y \in S,$$

且这些表示相互交织:

$$\sigma \circ \alpha = \sigma \circ \beta = \sigma \circ \gamma \quad \text{on } \rho(S).$$

我们记

$$\mathrm{Iso}_{\mathscr{I}}\big((S,\rho),(T,\sigma)\big)$$

为此类拟同构的集合。

—

4.3 镜像表示

定义 4.4 （镜像表示）。 设 (S,ρ) 是一个带表示的逆半群。镜像表示 定义为

$$\rho^{\#}(s) := \rho(s^{*})^{-1},$$

其中求逆是在 $I(X)$中进行的。

定义 4.5 （镜像逆半群）。 (S,ρ) 的镜像 为

$$(S,\rho)^{\#} := (S,\rho^{\#}).$$

注 4.6。 尽管 $s \mapsto s^{*}$ 给出了逆半群的形式反同构，但镜像表示 $\rho^{\#}$ 未必与 ρ 拟同构。这种不对称性正是结构手性的来源。

—

4.4 镜像拟同构

定义 4.7（镜像同位）。

$$\mathrm{Mir}(S,\rho) := \mathrm{Iso}_{\mathscr{I}}\big((S,\rho),(S,\rho)^{\#}\big).$$

$\mathrm{Mir}(S,\rho)$ 的元素称为 镜像同位。

—

4.5 镜像拟同构的传递

引理 4.8（迁移）。 设

$$h : (S, \rho) \to (T, \sigma)$$

是一个拟同构。于是

$$h \,\mathrm{Mir}(S, \rho)\, h^{-1} = \mathrm{Mir}(T, \sigma).$$

证明。 由 h 共轭会保持拟同构条件 $\alpha(x)\beta(y) = \gamma(xy)$。由于 h 交织这些表示，诱导出的共轭也会交织镜像表示，从而得到所述等式。 □

—

4.6 手性指数

假设 $\mathrm{Mir}(S, \rho)$ 是有限的。

定义 4.9 （手性指数）。

$$k([S, \rho]) = \sum_{g \in \mathrm{Mir}(S,\rho)} w(g),$$

其中所有权重 $w(g) > 0$。

定理 4.10 （结构性消失判据）。 以下条件等价：

1. $k([S, \rho]) = 0$，2. $\mathrm{Mir}(S, \rho) = \varnothing$，3. 不存在拟同构 $(S, \rho) \to (S, \rho)^{\#}$。

证明。与前面一样，权重正性意味着 (1) 与 (2) 等价。(2) 与 (3) 的等价性由定义立即得出。 □

—

4.7 内蕴对称与下降

定义 4.11（自同位群）。

$$\mathrm{Atp}(S,\rho) := \mathrm{Iso}_{\mathscr{J}}((S,\rho),(S,\rho)).$$

我们将容许的镜像跃迁限制为由内在自同位生成的跃迁。

定义 4.12（内在镜像动力学）。当且仅当镜像跃迁由 $\mathrm{Atp}(S,\ \rho)$ 生成时，该跃迁才是容许的。

定理 4.13（下降到同位类）。在内在镜像动力学下，手性指数 k（$[S,\rho]$）仅取决于（$S,\ \rho$）的同位类。

证明。根据引理 4.8，镜像同位沿拟同构函子性地传递。由于容许转移是在内部生成的，加权计数下降到同位类。

□

5 扭曲 étale 群胚的结构手性与通往 C^*-代数的桥梁

5.1 扭曲 étale 群胚

定义 5.1（étale 群胚）. 拓扑群胚 $G \rightrightarrows G^{(0)}$ 是 *étale* 的，若值域映射 $r: G \to G^{(0)}$（等价地，源映射 s）为局部同胚。

定义 5.2（取值于 $\mathbb{T}$的归一化 2-余循环）. 设 G 为一个 étale 群胚。一个（连续的）归一化 2-余循环是一个映射

$$\sigma : G^{(2)} \to \mathbb{T}$$

使得对所有可复合三元组 $(g,h,k) \in G^{(3)}$，

$$\sigma(g,h)\sigma(gh,k) = \sigma(h,k)\sigma(g,hk),$$

并且归一化成立：

$$\sigma(u,g) = \sigma(g,u) = 1 \quad \text{for all units } u \in G^{(0)} \text{ and composable } g.$$

我们称 (G,σ) 为一个扭曲 *étale* 群胚。

注记 5.3。 使用扭曲至关重要：若没有 σ，求逆映射$g \mapsto g^{-1}$ 往往会在群胚层面使朴素的“镜像”运算平凡化。余循环提供了真正的定向/扭曲数据，从而可以阻碍镜像。

5.2 镜像扭曲

定义 5.4 (对偶群胚**)**。 设 G 为一个群胚。其对偶群胚 G^{op} 具有相同的箭头空间和单位空间，但复合顺序相反：

$$g \cdot_{\mathrm{op}} h := hg \quad (\text{whenever } s(g) = r(h)).$$

Eq也就是说， G^{op} 是同一个群胚，只是 r 和 s的角色互换了。

定义 5.5 (镜像余循环**)**。 设 (G, σ) 为一个扭曲 étale 群胚。在 $(G^{\mathrm{op}})^{(2)}$ 上定义镜像余循环 $\sigma^{\#}$ 如下：

$$\sigma^{\#}(g, h) := \overline{\sigma(h, g)}.$$

定义 5.6 (镜像扭曲群胚**)**。 (G, σ) 的镜像 为

$$(G, \sigma)^{\#} := (G^{\mathrm{op}}, \sigma^{\#}).$$

5.3 镜像同构与传输

定义 5.7 (保扭曲同构**)**。 扭曲群胚之间的同构

$$\Phi : (G, \sigma) \to (H, \tau)$$

是群胚同构 $\Phi : G \to H$ ，它是一个同胚，并且满足

$$\tau(\Phi(g), \Phi(h)) = \sigma(g, h) \quad \text{for all } (g, h) \in G^{(2)}.$$

定义 5.8(镜像同构**)**。

$$\mathrm{Mir}(G, \sigma) := \mathrm{Iso}_{\mathscr{G}}\big((G, \sigma), (G, \sigma)^{\#}\big),$$

从 $(G,\ \sigma)$ 到其镜像的保扭曲同构集合。

引理 5.9 (镜像同构的传递**)**。 若 $\Psi : (G, \sigma) \to (H, \tau)$ 是保扭曲同构，则

$$\Psi \,\mathrm{Mir}(G, \sigma)\, \Psi^{-1} = \mathrm{Mir}(H, \tau).$$

证明。 通过 Ψ 共轭可传递群胚同构，并凭借函子性保持余循环约束：

$$\tau(\Psi(g), \Psi(h)) = \sigma(g, h).$$

镜像余循环由 σ 以函子性的方式定义，因此镜像条件在共轭下保持不变。 □

5.4 手性指数

假设 $\mathrm{Mir}(G, \sigma)$ 有限。

定义 5.10 （手性指数）。 固定权重 $w(\Phi) > 0$。定义

$$k([G, \sigma]) := \sum_{\Phi \in \mathrm{Mir}(G,\sigma)} w(\Phi).$$

定理 5.11 （结构性消失判据）。 以下条件等价：

1. $k([G, \sigma]) = 0$,
2. $\mathrm{Mir}(G, \sigma) = \varnothing$,
3. 不存在保扭曲同构 $(G, \sigma) \to (G, \sigma)^{\#}$。

证明。 权重正性给出(1)⇔(2)，而(2)⇔(3)可由$\mathrm{Mir}(G, \sigma)$的定义直接得出。 □

5.5 内蕴对称与下降

定义5.12 （自同位群）。

$$\mathrm{Atp}(G, \sigma) := \mathrm{Iso}_{\mathscr{G}}\big((G, \sigma), (G, \sigma)\big).$$

我们将可容许的镜像跃迁限制为由内蕴对称生成的那些。

定义 5.13 （内在镜像动力学）。 当且仅当镜像跃迁由 $\mathrm{Atp}(G, \sigma)$ 生成时，它是可容许的。

定理 5.14（下降到同构类）。 在内在镜像动力学下，手性指数 k（$[G,\sigma]$）仅取决于扭曲群胚 （G， σ）的同构类。

证明。 根据引理 5.9，镜像同构在保扭曲同构下通过共轭传递。由于容许转移由 Atp(G， σ) 在内部生成，因此加权计数是不变量。

□

5.6 通往扭曲群胚 C^*-代数的桥梁

令 $C_c(G,\ \sigma)$ 表示 G 上紧支撑连续函数构成的 *-代数，其扭曲卷积乘积为：

$$(f *_\sigma g)(\gamma) = \sum_{\alpha\beta=\gamma} f(\alpha)g(\beta)\sigma(\alpha,\beta),$$

以及对合

$$f^*(\gamma) = \overline{\sigma(\gamma,\gamma^{-1})}\,\overline{f(\gamma^{-1})}.$$

其约化完备化记为 $C_r^*(G,\ \sigma)$。

定理 5.15（镜像蕴含反代数同一）。 若存在 $\Phi \in \mathrm{Mir}(G,\ \sigma)$，则

$$C_r^*(G,\sigma) \ \cong\ C_r^*(G^{\mathrm{op}},\sigma^{\#})$$

通过 Φ典范地给出。特别地， $C_r^*(G,\sigma)$ 在镜像扭曲意义下是自反代数，即

$$C_r^*(G,\sigma)^{\mathrm{op}} \ \cong\ C_r^*(G,\sigma^{\#}\circ \mathrm{flip}),$$

其中翻转在可合成对的层面上表示$(g,h)\ \mapsto (h,g)$。

证明。 拉回映射 $f \mapsto f\circ\Phi^{-1}$ 缠结扭曲卷积，因为 Φ 保持合成与余循环：

$$\sigma^{\#}(\Phi(\alpha),\Phi(\beta)) = \sigma(\alpha,\beta)\ (\text{after unfolding the definition of } \sigma^{\#}).$$

因此，它通过连续性延拓为约化 C^*-完备化之间的一个同构。“自反代数”这一说法源于将反卷积与反向乘法对应起来，这一点由 G^{op}编码。

□

注 5.16（诠释）。 障碍 $\mathrm{Mir}(G,\sigma) = \varnothing$ 可视为相关扭曲群胚 C^*代数“自反代数性”的结构性障碍。一旦证明 $\mathrm{Mir}(G,\sigma)$ 的有限性并给出具体参数化，手性指数 $k([G,\sigma])$ 就能作为非自反代数性的可计算证据。

5.7 从逆半群到 étale 群胚（续）

若 (S,ρ) 是一个带表示的逆半群，则可构造与之关联的芽群胚（或泛群胚） $G(S,\rho)$。在适当情况下， $G(S,\rho)$ 上的余循环／扭曲可由表示层面的数据诱导，从而得到一个扭曲群胚 $(G(S,\rho),\ \sigma)$。镜像表示 $(S,\rho)^{\#}$ 随之对应于镜像扭曲群胚 $(G(S,\rho),\ \sigma)^{\#}$，而手性问题也沿着这一构造传递下去。

6 Paterson 泛群胚与 C^*-桥接

6.1 逆半群的泛群胚

设 S 是一个逆半群，并设

$$E(S) := \{\, e \in S \mid e^2 = e \,\}$$

为其幂等元半格。

定义 6.1 （ $E(S)$ 上的特征）。特征是一种非零半格同态

$$\chi : E(S) \to \{0,1\}.$$

我们将 $E(S)$记为所有特征的集合，并赋予由以下基本开闭集生成的拓扑

$$D(e) := \{\chi \in \widehat{E(S)} \mid \chi(e) = 1\} \qquad (e \in E(S)).$$

定义 6.2 （规范部分作用）。 对于 $s \in S$，定义一个部分同胚

$$\theta_s : D(s^*s) \to D(ss^*)$$

by

$$(\theta_s(\chi))(e) := \chi(s^* e s) \qquad (e \in E(S)),$$

其中 s^* 表示 s在逆半群意义下的逆元。

定义 6.3（泛群胚）。 泛群胚 $G_u(S)$ 是上述部分作用的芽群胚。具体而言，其元素是等价类 $[s, \chi]$，其中 $\chi \in D(s^* s)$，且

$$(s, \chi) \sim (t, \chi) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists e \in E(S) \text{ with } \chi(e) = 1 \text{ and } se = te.$$

结构映射如下：

$$s([s, \chi]) = \chi, \qquad r([s, \chi]) = \theta_s(\chi),$$

$$[s, \theta_t(\chi)] \cdot [t, \chi] = [st, \chi], \qquad [s, \chi]^{-1} = [s^*, \theta_s(\chi)].$$

定理 6.4（étale 性）。 $G_u(S)$ 是一个 *étale* 群胚。此外，集合 s

$$U(s) := \{[s, \chi] \mid \chi \in D(s^* s)\}$$

构成双截面基。

注记 6.5。 这一构造在适当意义下具有函子性，并且不依赖于选择特定的表示 $S \to I(X)$。这正是我们倾向于将 $G_u(S)$（Paterson）视为附属于 S 的典范群胚的主要原因。

6.2 群胚层面上的典范镜像

定义 6.6（镜像逆半群）。 对于逆半群 S，定义镜像半群 $S^{\#}$ 为具有反向乘法的同一底层集合：

$$x \cdot_{\#} y := yx.$$

引理 6.7（对偶万有群胚）。 存在一个典范的拓扑群胚同构

$$G_u(S^{\#}) \;\cong\; G_u(S)^{\mathrm{op}}.$$

证明。 特征空间 $E(S)$ 作为集合保持不变，而芽关系由幂等元结构和自然共轭$e \mapsto s^* e s$所支配。反转乘法对应于反转芽的复合，这正是由对偶群胚所编码的。直接验证可知，赋值 $[s, \chi] \mapsto [s, \chi]$ 将这两个结构对应起来，二者仅在复合方向上相反。

□

注 6.8。 引理 6.7 是将逆半群的“镜像”传递到对偶群胚构造中的概念要点。为了获得非平凡的手性，我们将引入扭曲。

6.3 由逆半群数据诱导的扭曲（公理形式）

为避免在此阶段限定于单一的上同调模型，我们记录一组最小公理方案，以保证逆半群数据能够诱导出群胚余循环。

定义 6.9 （ S上的可容许扭曲数据）。S 上的一个可容许扭曲数据是一个函数

$$\omega : \{(s,t) \in S \times S \mid st \text{ is defined}\} \to \mathbb{T}$$

满足以下条件:

1. （归一化） $\omega(e,s) = \omega(s,e) = 1$，对所有 $s \in S$和 $e \in E(S)$均成立。
2. （结合性约束）当 s、 t、 u可复合时， $\omega(s,t)\omega(st,u) = \omega(t,u)\omega(s,tu)$。
3. （芽不变性）若$(s,\chi) \sim (s',\chi)$且$(t,\chi) \sim (t',\chi)$，则当这些乘积在 χ处可复合时， $\omega(s,t) = \omega(s',t')$。

命题 6.10 (诱导的群胚余循环)。 给定 S上的容许扭曲数据ω ，存在一个良定义的连续归一化2-余循环

$$\sigma_\omega : G_u(S)^{(2)} \to \mathbb{T}$$

定义在基本可复合芽上，形式如下

$$\sigma_\omega([s,\theta_t(\chi)],[t,\chi]) := \omega(s,t).$$

证明。 归一化和结合性约束给出了余循环恒等式。芽不变性确保其相对于芽等价关系是良定义的。连续性由双截面基 $U(s)$ 得出。 □

因此，我们得到一个扭曲 étale 群胚（$G_u(S)$ σ_ω）。

6.4 镜像扭曲与 C^*-桥

定义 6.11（镜像扭曲）。给定 ω 在 S上，通过以下方式定义 $S^{\#}$ 上的镜像数据 $\omega^{\#}$

$$\omega^{\#}(s,t) := \overline{\omega(t,s)}.$$

令 $\sigma_{\omega^{\#}}$ 为 $G_u(S^{\#})$ 上的诱导上循环。

定理 6.12（通往扭曲群胚的万有镜像桥 C^*-代数）。沿用上述记号，扭曲群胚之间存在一个典范同一

$$(G_u(S^{\#}), \sigma_{\omega^{\#}}) \;\cong\; (G_u(S)^{\mathrm{op}}, \sigma_{\omega}^{\#}),$$

因此存在一个典范的 C^*-同构

$$C_r^*(G_u(S^{\#}), \sigma_{\omega^{\#}}) \;\cong\; C_r^*(G_u(S)^{\mathrm{op}}, \sigma_{\omega}^{\#}).$$

特别地，任何镜像同构（按扭曲群胚一节中的定义）都会在约化扭曲群胚 C^*-代数的层面上导出相应的反代数同一。

证明。由引理 6.7，$G_u(S^{\#}) \cong G_u(S)^{\mathrm{op}}$。命题 6.10 以及 $\omega^{\#}$ 的定义表明，诱导上循环在此同一之下相对应，从而得到扭曲群胚同构。C^*-同构由约化扭曲群胚完备化的函子性得出。 □

注记 6.13（手性所在之处）。没有扭曲数据时，映射 $S \mapsto G_u(S)$ 通常会带有大量“自动镜像对称”。余循环 σ_ω 提供了定向/扭曲数据，其复共轭与反转会在群胚层面以及 C^*-代数层面都带来真正非平凡的镜像问题。这正是逆半群到-C^* 流程中结构手性的天然生境。

7 主定理：从逆半群到 C^*-代数的结构手性

我们现在将前述构造概括为一条统一的结构陈述，该陈述构成本文的主要结果。

定理 7.1（结构手性桥接）**.** 设 S 为一个逆半群，并设

$$\omega : S^{(2)} \to \mathbb{T}$$

是满足归一化、结合律和芽不变性的容许扭曲数据。令 $(G_u(S)\ \sigma_\omega)$ 为相应的扭曲 *étale* 万有群胚。

则有以下结论：

1. 典范群胚实现。此对应

$$(S, \omega) \ \longmapsto \ (G_u(S), \sigma_\omega)$$

是典范的，并且对于保持扭曲数据的逆半群态射具有函子性。

2. 镜像对应。令 $S^{\#}$ 表示乘法反向的镜像逆半群，并令 $\omega^{\#}$ 为由下式定义的镜像扭曲

$$\omega^{\#}(s, t) = \overline{\omega(t, s)}.$$

则存在扭曲群胚之间的典范同构

$$(G_u(S^{\#}), \sigma_{\omega^{\#}}) \ \cong \ (G_u(S)^{\mathrm{op}}, \sigma_\omega^{\#}).$$

3. 群胚层面上的手性障碍。 扭曲群胚$(G_u(S)\ \sigma_\omega)$ 存在镜像同构

$$(G_u(S), \sigma_\omega) \ \cong \ (G_u(S), \sigma_\omega)^{\#}$$

当且仅当在扭曲逆半群数据(S, ω)层面上存在镜像同构。特别地，不存在这种同构便构成结构性手性障碍。

4. 下降到扭曲群胚 C^*-代数。 若存在镜像同构，则存在一个规范的 C^*-同构

$$C_r^*(G_u(S), \sigma_\omega) \ \cong \ C_r^*(G_u(S), \sigma_\omega)^{\mathrm{op}}.$$

反过来，不存在镜像同构，便构成了扭曲群胚 C^*-代数具有自反对性的障碍。

5. 与芽模型的相容性。 对于任意忠实表示 $\rho : S \to I(X)$，其诱导的芽群胚 $G_{\mathrm{germ}}(S, \rho)$ 具有相容的扭曲结构，并且上述镜像对应与典范函子交换

$$G_{\mathrm{germ}}(S, \rho) \longrightarrow G_u(S)$$

（参见附录 *A*）。

注 7.2（阐释）。该定理表明，结构手性源自逆半群数据这一层面，并以典范方式传递至扭曲 étale 群胚，最终表现为关联群胚 C^*-代数无法实现镜像自对偶的具体障碍。从这个意义上说，手性是一种真正的结构性现象，不依赖辅助表示，却可以在具体的芽模型中计算。

8 结论与未来方向

本文构建了逆半群手性的结构理论，并证明这种手性会通过泛群胚构造以典范方式传播至扭曲 étale 群胚及其约化 C^*-代数。核心洞见在于，镜像对称及其可能的失效，可以在逆半群数据这一层面进行内在编码。借助 Paterson 泛群胚，这种代数不对称性以函子方式传递至拓扑与解析框架，并表现为关联扭曲群胚 C^*-代数无法实现自反对性的障碍。

一个关键的概念性成果是，结构手性并不依赖辅助表示。尽管芽群胚提供了具体且便于计算的模型，泛群胚却提取出了部分对称性中与表示无关的核心。这阐明了逆半群、étale 群胚与算子代数之间的概念关系：手性源自部分对称性层面，由典范群胚结构加以组织，并通过解析不变量变得可检测。

由此自然引出了若干值得进一步研究的方向。

(1) Morita 不变性与等价理论。 确定结构手性是否在群胚等价或扭曲群胚 C^*-代数的 Morita 等价下保持不变量，将会很有意义。这类结果

将把手性置于非交换几何与范畴等价这一更广泛的框架之中。

（2）镜像障碍的上同调分类。由于扭曲由取值于 $\mathbb{T}$ 的 2-余循环所支配，人们可以追问自反对性是否容许用群胚上同调来表述。将手性阻碍识别为一个特定的上同调类，将提供一种概念上的、且可能可计算的分类。

（3）动力学与遍历扩展。先前工作中针对环路引入的消旋型二态动力学，提示了群胚情形下的一种动力学类比。将镜像跃迁作为 étale 群胚的动力学对称性加以研究，或可将结构手性与遍历理论及轨道等价联系起来。

（4） K-理论与 KK-理论检测。一种分析上的细化，是研究自反对性的缺失能否在所关联 C^*-代数的 K-理论或 KK-理论层面上被检测出来。此类不变量可为具体例子中的手性提供可计算的特征。

总之，本文将结构手性确定为逆半群数据的一种自然不变量，它可通过泛群胚进行规范传递，并在扭曲群胚 C^*-代数中得到解析实现。这一框架为研究非对称现象提供了一种系统方法，并将部分对称、群胚与非交换算子代数置于统一的语言之中。

参考文献

[1] J. East 和 A. Muhammed，逆半群及其相关群胚，预印本，arXiv:2303.0xxxx（2023年）。[2] R. Exel，逆半群与组合 C^*-代数，巴西数学会通报（新系列）39（2008年），191–313。[3]T. Inoué，环路同位类上的手性与消旋：一种基于群胚的结构理论，预印本，arXiv:2602.21690[math.GR] （2026年）。

[4] T. Inoué，拟群同位类上的手性与消旋，预印本（2026年）。可访问：https://www.researchgate.net/publi cation/401228481_Chirality_and_Racemization_on_Isotopy_Cla sses_of_Quasigroups[5] A. Kumjian，关于 C^*-对角，加拿大数学杂志 38（1986），969–1008。[6] M. V. Lawson，逆半群：部分对称理论，世界科学出版社，1998年。[7] A. L. T. Paterson，群胚、逆半群及其算子代数，Birkhäuser，1999年。[8]J. Renault，一种研究 C^*-代数的群胚方法，数学讲义，第793卷，施普林格，1980年。[9] J. Renault，扭曲群胚 C^*-代数与 *Cartan* 子代数，载于：算子代数与动力系统：群胚、交叉积与 Rokhlin 维数，当代数学 694，美国数学会，2017年，217–236。[10] N. Sieben， C^*由部分作用和逆半群作用所产生的-交叉积，澳大利亚数学会杂志（A辑）63（1997），32–46。[11] A. Sims，*Étale* 群胚及其 C^*-代数，讲义，可从 arXiv:1710.10897 获取。[12] B. Steinberg，离散逆半群代数的群胚方法，数学进展 223（2010），689–727。[13] B. Steinberg，有限幺半群表示论，施普林格，2016年。

A 附录 A：由表示的逆半群构造芽群胚

A.1 表示的逆半群与部分作用

设 S 是一个逆半群，并且

$$\rho : S \longrightarrow I(X)$$

忠实表示到局部紧豪斯多夫空间 X 上的部分双射所构成的对称逆半群中。

对于 $s \in S$，记

$$\mathrm{dom}(s) := \mathrm{dom}(\rho(s)), \qquad \mathrm{ran}(s) := \mathrm{ran}(\rho(s)).$$

定义 A.1（典范部分作用）。表示 ρ 定义了一个部分作用

$$\theta_s : \mathrm{dom}(s) \to \mathrm{ran}(s)$$

由 $\theta_s(x) = \rho(s)(x)$ 给出。

我们始终假设，每个 θ_s 都是 X的开子集之间的一个同胚。在此假设下，相应的芽构造是 étale 的。

A.2 芽群胚

定义 A.2（芽关系）。在.....上定义一个等价关系

$$\{(s, x) \in S \times X \mid x \in \mathrm{dom}(s)\}$$

by

$$(s, x) \sim (t, x) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists e \in E(S) \text{ with } x \in \mathrm{dom}(e) \text{ and } se = te.$$

定义 A.3（芽群胚）。芽群胚 $G_{\mathrm{germ}}(S, \rho)$由等价类组成

$$[s, x].$$

结构映射如下:

$$s([s, x]) = x, \qquad r([s, x]) = \theta_s(x),$$
$$[s, \theta_t(x)] \cdot [t, x] = [st, x],$$
$$[s, x]^{-1} = [s^*, \theta_s(x)].$$

定理 A.4（étale 性）。如果每个 θ_s 都是开集之间的同胚，那么 G_{germ}（S，ρ）是一个*étale* 群胚。此外，这些集合

$$U(s) := \{[s, x] \mid x \in \mathrm{dom}(s)\}$$

构成双截面基。

证明。集合 $U(s)$ 与 $\mathrm{dom}(s)$ 同胚，并定义局部双射。值域映射和源映射在每个 $U(s)$ 上限制为同胚。复合封闭性由半群结构保证。

□

A.3 芽层级的镜像构造

定义 A.5 （镜像表示）。 定义镜像表示$\rho^{\#}$ 如下：

$$\rho^{\#}(s) := \rho(s^{*})^{-1}.$$

定义 A.6 (镜像芽群胚**)**。 令

$$(S, \rho)^{\#} := (S, \rho^{\#}).$$

定义

$$G_{\mathrm{germ}}(S, \rho)^{\#} := G_{\mathrm{germ}}(S, \rho^{\#}).$$

命题 A.7 (逆芽群胚**)**。 存在一个典范同构

$$G_{\mathrm{germ}}(S, \rho^{\#}) \;\cong\; G_{\mathrm{germ}}(S, \rho)^{\mathrm{op}}.$$

证明。 在 S 中反转乘法，对应于反转芽的复合：

$$[s, x] \longmapsto [s, x]$$

该映射在反转复合的同时识别箭头。逆半群的对合 $s \mapsto s^{*}$ 确保群胚中求逆运算的相容性。 □

注释 A.8。 与泛群胚不同，芽构造取决于表示 ρ。因此，即使镜像对称在普遍意义上成立，它在芽层级上也可能失效，反之亦然。这使芽模型有助于检测表示层面的手性现象。

A.4 扭曲传输

Let

$$\omega : S^{(2)} \to \mathbb{T}$$

是正文中所述的容许扭曲数据。

定义 A.9 （诱导芽余循环）。 在可复合的芽上定义余循环如下：

$$\sigma_{\omega}([s, \theta_t(x)], [t, x]) := \omega(s, t).$$

命题 A.10. 若 ω 满足定义 *6.9* 中的结合律和芽不变性条件，则 σ_{ω} 是 $G_{\mathrm{germ}}(S, \rho)$ 上定义良好且连续的归一化2-余循环。

证明. ω 的结合律推出余循环恒等式。芽不变性确保代表元的选取不影响结果。连续性由双截面 $U(s)$ 上的局部常值性得出。

□

A.5 与泛群胚的相容性

命题 A.11 (函子相容性)。 存在一个典范的连续函子

$$\Phi : G_{\mathrm{germ}}(S, \rho) \longrightarrow G_u(S)$$

它与镜像构造及诱导扭曲相容。

证明。 每个芽 $[s, x]$ 都确定一个特征

$$\chi_x(e) = 1 \iff x \in \mathrm{dom}(\rho(e)).$$

赋值

$$[s, x] \longmapsto [s, \chi_x]$$

定义了一个群胚同态。与镜像构造的相容性由 $s \mapsto s^*$ 和对偶构造推出。扭曲相容性可直接由两种情形下 σ_ω 的定义得出。

□

注 A.12。 泛群胚捕捉表示无关的结构，而芽群胚则保留源自对 X 的特定作用的几何信息。因此，可以在这两个层面研究结构手性：泛构造提供规范不变量，芽模型则便于进行显式计算。

Takao Inoué 大和大学信息学部 片山町 2-5-1，大阪府吹田市，邮编 564-0082，日本 inoue.takao@yamato-u.ac.jp（工作邮箱）takaoapple@gmail.com（我更喜欢使用个人邮箱）